Topología Algebraica y sus aplicaciones.[1]

Emilio Lluis-Puebla

La Matemática es una Bella Arte,
la más pura de ellas,
que tiene el don de ser
la más precisa
y la precisión de las Ciencias.
E. Lluis-Puebla.

Debido a lo heterogéneo del público lector he tratado de dejarle algo a cada quien, es decir, expondré conceptos de varios niveles. He procurado, salvo en algunos casos específicos, describir con palabras comunes algunos de los temas con el fin de ofrecerles un aspecto panorámico acerca de estos.[2]

Las ideas nuevas que constituyen los pasos para obtener la solución de algún problema constituyen el progreso de la Matemática. Los matemáticos sabemos apreciar las técnicas ingeniosas.

Existe una gran variedad de problemas. Si algunos de ellos se pueden resolver mediante argumentos ingeniosos de una manera parecida, entonces decimos que tenemos un método para resolverlos y si éstos son muchos, entonces decimos que tenemos una “teoría matemática”. Así se evoluciona, de una colección de problemas, a una “teoría”, la cual difiere del concepto que de ella se tiene en otras disciplinas científicas.

La Matemática es una actividad humana y por ende hay que poder transmitirla a las generaciones siguientes, por lo cual se organiza sistemáticamente para que los que la estudien lo hagan de la manera menos dolorosa posible. Ésta es la forma básica de lo que es una Teoría Matemática.

Poincaré decía que una casa está hecha de ladrillos pero que los ladrillos por sí solos están lejos de ser una casa. A diferencia de otras disciplinas científicas, en la Matemática, vuelvo a expresar, la creación de nuevos métodos o técnicas constituye la innovación, la cual es vital para el progreso de la Matemática. También hay innovación interna al tratar de dar cohesión a una teoría matemática, al realizar preguntas adecuadas, las cuales requieren de mucha intuición y compenetración. También la innovación puede venir de problemas de otras disciplinas.

---

[1] Se exponen los conceptos de homología y homotopía entre otros y cómo décadas después fueron utilizados para definir los grupos de K-Teoría Algebraica y su aplicación en la Teoría Matemática de la Música.
[2] El lector podrá seguir las ilustraciones de este texto en el correspondiente Power Point.

Se puede decir que hay progreso matemático cuando existe una aplicación continua de métodos usuales intercalados espectacularmente con nuevos conceptos y problemas.

“Quizás en ninguna otra rama de la Matemática Poincaré dejó tan impresa su huella como en la Topología. A él le debemos el concepto básico de complejo, frontera, invariantes numéricos y el primer teorema de dualidad.” Así comienza el gran matemático Solomon Lefschetz su libro "Topología" [Lef] del año 1930 cuya segunda edición de 1965 de la reimpresión de 1956 poseo un ejemplar. En ella, Lefschetz coloca como su sede de trabajo a la Universidad Nacional Autónoma de México donde por varios años tuvo estancias largas influyendo de manera decisiva el desarrollo de la matemática en México.

Un hecho notable es que los conceptos fundamentales (homología y homotopía) de la Topología Algebraica no solamente encontraron aplicaciones dentro de la propia área sino en otras ramas de la matemática como en la Teoría de Categorías, Álgebra Homológica y K-Teoría Algebraica. Pero aún más, se hacen aplicaciones en otras disciplinas del conocimiento humano, por ejemplo, en la Musicología Matemática, como veremos más adelante.

Jean Dieudonné escribe en su famoso y excelente libro [Dieu] sobre la historia de la Topología Algebraica que algunos conceptos que actualmente consideramos como pertenecientes a la Topología, ya se manejaban en el siglo XIX por algunos matemáticos como Riemann, Klein y Poincaré. Menciona que la Topología Algebraica, como parte de la matemática rigurosa comenzó en 1900. Comenta que al principio pocos matemáticos eran atraídos a esta rama. Poincaré había visualizado el papel fundamental de la Topología en toda la matemática y a partir de 1940 hubo un crecimiento extraordinario en la misma.

Homología

Veamos el primer concepto fundamental de la Topología Algebraica. En el lenguaje sofisticado actual, el concepto central es el de complejo de cadenas y tardó 50 años de maduración matemática para llegar a lo que a continuación mencionaré:

Sea Λ un anillo y $\{M_i\}$ una familia de Λ-módulos. Diremos que una sucesión de Λ-módulos

$$\cdots \to M_{i+1} \to M_i \to M_{i-1} \to \cdots$$

es *semiexacta* en M_i si el núcleo del homomorfismo saliente contiene a la imagen del homomorfismo entrante. Si es semiexacta en cada Λ-módulo M_i, la llamaremos *sucesión semiexacta*. Esto equivale a decir que la composición de dos homomorfismos $f_i \circ f_{i+1}$ donde $f_{i+1}:M_{i+1}\to M_i$ y $f_i:M_i \to M_{i-1}$ es el homomorfismo trivial, denotado por 0, i.e., $f_i \circ f_{i+1} = 0$. También diremos que una sucesión es *exacta* en M_i si es semiexacta y la imagen del homomorfismo entrante está contenido en el núcleo del homomorfismo saliente. Esto es, la sucesión es exacta en M_i si, y sólo si, la imagen del homomorfismo entrante es igual al núcleo del homomorfismo saliente. Si es exacta en cada Λ-módulo M_i, la llamaremos *sucesión exacta*. Toda sucesión exacta es semiexacta, pero no es cierto que toda sucesión semiexacta sea exacta.

Una sucesión exacta de la forma

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

se llama *sucesión exacta corta*. En una sucesión exacta corta, $M' \to M$ es un homomorfismo inyectivo llamado *monomorfismo* y $M \to M''$ es un homomorfismo suprayectivo llamado *epimorfismo*.

Una sucesión exacta corta no es otra cosa que un disfraz de un submódulo y el módulo cociente de un Λ- módulo de la sucesión exacta corta

$$0 \to N \to M \to M/N \to 0.$$

Consideremos un anillo Λ. Sea $\{C_n\}$ $n \in Z$ una familia de Λ-módulos y $\{\partial_n: C_n \to C_{n-1}\}$ una familia de homomorfismos de Λ-módulos tales que $\partial_n \circ \partial_{n+1}=0$. Un *complejo de cadenas* o *cadena* sobre Λ es una pareja $C=\{C_n,\partial_n\}$ y la escribimos como sigue:

$$C: \cdots \to C_{n+1} \to C_n \to C_{n-1} \to \cdots$$

Esto significa que una cadena no es otra cosa que una sucesión semiexacta descendente de Λ-módulos.

Definición. Sean $C = \{C_n, \partial_n\}$ y $D = \{D_n, \partial_n\}$ dos complejos de cadenas. Un *morfismo de cadenas* $\varphi:C \to D$ es una familia de homomorfismos de Λ-módulos $\{\varphi_n: C_n \to D_n\}$ tal que los cuadrados, en el siguiente diagrama, conmutan:

$$\begin{array}{ccccccccc}
C: & \ldots & \to & C_{n+1} & \to & C_n & \to & C_{n-1} & \to & \ldots \\
\downarrow & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
D: & \ldots & \to & D_{n+1} & \to & D_n & \to & D_{n-1} & \to & \ldots
\end{array}$$

La primera vez que aparece el concepto de *complejo de cadena* es en el año de 1900 en los artículos de Poincaré, en los cuales no usaba el lenguaje de módulos y homomorfismos sino uno equivalente de matrices. Poincaré se restringió a los espacios triangulables compactos o complejos celulares finitos y formó un Z-módulo libre C_n compuesto de combinaciones formales de células orientadas de dimensión n con coeficientes enteros mayores o iguales que cero. Definió un operador frontera

$$\partial_n: C_n \to C_{n-1}$$

definiendo la imagen de ∂_n como la suma de las células de dimensión n-1 de la frontera con coeficientes ± 1 escogido de acuerdo a una orientación adecuada, tal que $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$. Como mencioné antes, el concepto de complejo de cadena tardó más de cincuenta años en adquirir su elegante grado de abstracción.

El concepto central es el siguiente: consideremos una cadena

$$C:\ \cdots \to C_{n+1} \to C_n \to C_{n-1} \to \cdots$$

donde $\partial_{n+1}: C_{n+1} \to C_n$ y $\partial_n: C_n \to C_{n-1}$. El *módulo de homología de grado* n de C, denotado con $H_n(C)$ es el cociente $H_n(C)=\ker \partial_n/\mathrm{im}\ \partial_{n+1}$.

Lo que $H_n(C)$ hace es medir la inexactitud de la cadena C, pues, por ejemplo, si C es exacta, entonces $\mathrm{im}\ \partial_{n+1} = \ker \partial_n$ y, por lo tanto, $H_n(C)=0$. Lo que hemos hecho es asociarle a una cadena C un módulo graduado $H_*(C)=\{H_n(C)\}$ que llamaremos *homología de la cadena* C.

Sucede que un morfismo de cadenas $\varphi : C \to D$ induce un morfismo (bien definido, de grado 0) φ_*: $H_*(C)\to H_*(D)$ de módulos graduados. Luego, $H_*(\_)$ es un funtor covariante de la categoría de complejos de cadenas a la categoría de Λ-módulos graduados.

Si consideramos familias semiexactas con índices en orden creciente $\{C^n\}$ $n\in Z$, obtendremos conceptos duales; hablaremos de *cocadenas*, de *cohomología de una cocadena* etc.

Sean C,D,E cadenas en CC. La categoría de complejos de cadenas es abeliana; luego, podemos formar sucesiones exactas cortas de objetos de CC,

$$0 \to C \to D \to E \to 0$$

Si ponemos las cadenas verticales, es fácil imaginarse como se vería la sucesión exacta corta anterior.

El siguiente teorema es básico:

Teorema. Sea $0 \to C \to D \to E \to 0$ una sucesión exacta corta de cadenas. Entonces existe un homomorfismo κ_n:$H_n(E) \to H_{n-1}(C)$ para cada $n\in Z$ tal que la siguiente sucesión es exacta:

$$\cdots \to H_n(C) \to H_n(D) \to H_n(E) \to H_{n-1}(C) \to H_{n-1}(D) \to H_{n-1}(E) \to \cdots .$$

En 1941, Hurewicz, por vez primera combinó homomorfismos conocidos en cohomología en una sucesión de la forma

$$\cdots \to H^{n-1}(X) \to H^{n-1}(Y) \to H^{n-1}(X\text{-}Y) \to H^n(X) \to H^n(Y) \to H^n(X\text{-}Y) \to \cdots$$

donde X es un espacio localmente compacto, Y un subconjunto cerrado de X y los grupos de cohomología son tomados en Z. La observación esencial de Hurewicz fue la de que la imagen de cada homomorfismo es igual al núcleo del siguiente. Al mismo tiempo, independientemente, Eckmann, Ehresmann y Feldbau describieron relaciones entre grupos de homotopía de un espacio fibrado, que más tarde se llamó la *sucesión exacta de* *homotopía* de un espacio fibrado, sin utilizar flechas y sin que nadie se diera cuenta de la relación entre sus resultados y la sucesión de Hurewicz.

Hubo dos apariciones posteriores del concepto de sucesión exacta en 1945, y no fue hasta 1947 que Kelley y Pitcher definieron el término *sucesión exacta* al observar que tenía sentido definirlo para grupos conmutativos arbitrarios y homomorfismos, y que las sucesiones exactas en homología y cohomología son casos especiales de un concepto puramente algebraico aplicado a complejos de cadenas que inducen homomorfismos en homología.

Lo anterior dio lugar a lo que hoy conocemos como el Álgebra Homológica la cual es una de las principales creaciones de la Matemática del siglo XX, utilizada en muchas de sus ramas, así como en otras disciplinas de la ciencia. El Álgebra Homológica, ha invadido la totalidad de la matemática de la misma manera en que la Teoría de Grupos y el Álgebra Lineal lo hicieron a principios del siglo XX. El nombre "Álgebra Homológica" fue acuñado por Cartan y Eilenberg. En su famoso libro del año 1956 hicieron un estudio de sus métodos y resultados.

En 1938 Whitney definió el producto tensorial de grupos conmutativos (un concepto quizás ya implícito en Álgebra Multilineal).

El trabajo que realizaron Eilenberg y Mac Lane sobre el papel que juegan los grupos Ext(G,N) en homología les condujeron casi de inmediato a consideraciones generales sobre diversos aspectos de la teoría de grupos que traerían nuevos puntos de vista y ejercerían una profunda influencia en la matemática. Se dieron cuenta que estaban asignando a ciertos objetos matemáticos, otros objetos, probablemente al estar trabajando con notaciones como Hom(G,N), Ext(G,N) o G $\bigcirc$ N donde $\bigcirc$ era la notación para el producto tensorial actual $\otimes$.

Utilizaron la palabra *funtor* para definir tal asignación. La clave de esto es que un funtor no solamente actúa en grupos sino también en los homomorfismos de grupos. En 1945 introdujeron la palabra *categoría* para designar cierto tipo de objetos matemáticos que poseían una estructura común e introdujeron la palabra *morfismo*.

Los conceptos más destacados fueron los de módulos proyectivos e inyectivos y el de funtores derivados. La idea decisiva del Álgebra Homológica fue la de reconocer que diversos funtores, entre ellos Ext^n_Λ y Tor_n^Λ (M,N) pueden describirse como los n-ésimos funtores derivados de ciertos otros funtores básicos, como Hom y $\otimes$. La definición de ellos se basa en el concepto de resolución libre proyectiva introducida por Hopf en 1945.

En mi libro Álgebra Homológica, Cohomología de Grupos y K-Teoría Algebraica Clásica [Llu1]se estudia el concepto de homología. Puede bajarse libremente en su segunda edición de las Publicaciones Electrónicas de la Sociedad Matemática Mexicana en www.pesmm.org.mx.

Homotopía

Veamos el segundo concepto fundamental de la Topología Algebraica. El problema central de la topología, desde que el concepto de homeomorfismo fue claramente definido, es el de clasificar todos los espacios topológicos salvo homeomorfismo. Si X y Y son espacios topológicos, ¿cómo definimos un homeomorfismo entre ellos? o ¿cómo probamos que no existe un homeomorfismo entre ellos? ¿Cómo podríamos considerarlos en la misma "clase" si es que son homeomorfos? Los matemáticos que se enfrentaron a tan formidable tarea pronto se dieron cuenta de la imposibilidad de lograrla y es de esta imposibilidad que nació la Topología Algebraica.

La idea primaria fue la de asociarle a los espacios topológicos ciertos invariantes que fuesen iguales para espacios homeomorfos. Al principio, estos invariantes fueron números, pero se obtenía mayor información si eran estructuras algebraicas tales como grupos, anillos, espacios vectoriales, etc. Los invariantes algebraicos más exitosos han sido los grupos de homotopía y homología. Los invariantes algebraicos que más penetración han tenido en los espacios topológicos son los grupos de homología y los grupos de homotopía. La Teoría de Homotopía no comenzó propiamente sino hasta los años treinta del siglo pasado.

La Teoría de Homotopía estudia, informalmente hablando, las propiedades de los espacios topológicos que permanecen invariantes bajo deformaciones contínuas.

Denotemos con $I^n=\{(x_1,..., x_n)\in R^n|0\leq x_i\leq 1\}$ el *cubo de dimensión n*.
$\Delta^{n-1}=\{(x_1,...,x_n)\in R^n\ |0\leq x_i \leq 1 \text{ y } \sum x_i=1\}$ el *simplejo de dimensión n*.
$B^n=\{x\in R^n\ |\|x\| \leq 1\}$ la *bola de dimensión n*.

Recuérdese que el *interior de I^n* es int $I^n=\{(x_1,...,x_n\})|0<x_i<1\}$ y que la *frontera de I^n* es $\partial I^n=I^n-$ int I^n. Denotemos con $I^n=\{(x_1,...,x_n)\in R^n|-1\leq x_i\leq 1\}$; $D=B^2$ el *disco en el plano R^2*; $S^{n-1}=\{x\in R^n|\|x\|=1\}$ la *esfera de dimensión n-1*.

El concepto de *homeomorfismo* está relacionado, pero es diferente, al de deformación. Para expresar que podemos deformar un subespacio de un espacio topológico en otro subespacio tomamos la siguiente definición: sean U y V subespacios de un espacio topológico X, decimos que U *se puede deformar* en V si existe una función continua $F:U\times I\to X$ tal que $F(u,0)=u$, $\forall u\in U$, $\forall t\in I$, $u\mapsto F(u,t)$ es un homeomorfismo de U con un subespacio de X y cuando t=1, este subespacio es V. F se llama *isotopía* de U en V. Este concepto es más fuerte que el de homeomorfismo y puede encontrarse sin ninguna definición en trabajos del siglo XIX. El estudio de este concepto es difícil y solamente ha habido pocos resultados importantes.

Quizá, el concepto más importante de la Topología Algebraica es el de homotopía, el cual es una versión débil del de isotopía ya que no le imponemos restricciones a F cuando $t\neq 0,1$.

Sean X,Y espacios topológicos. Una *homotopía* entre X y Y es una función continua $F:X\times I\to Y$. Para cada $t\in I$ se tiene una función F_t: $X\to Y$ dada por $F_t(x)=F(x,t)$ $\forall x\in X$.

El concepto de homotopía nos lleva a una "clasificación" de los espacios topológicos más gruesa que la clasificación mediante homeomorfismos pero que es más "fácil" de manejar. Este concepto se remonta al método de Lagrange en el Cálculo de Variaciones. En 1911 Brouwer define en forma general el concepto de homotopía entre dos funciones continuas. Hasta 1930 se utilizó principalmente como una herramienta en las demostraciones de los teoremas en homología. Diremos que dos funciones continuas $f,g:X\to Y$ son homotópicas si existe una homotopía $F:X\times I\to Y$ tal que $F_0=f$ y $F_1=g$. En otras palabras, f puede deformarse continuamente en g a través de F_t. Si f es homotópica a g escribiremos $f\sim g$ o bien $F:f\sim g$. $\sim$ es una relación de equivalencia.

Definición. Sea $A\subset X$ un subespacio de un espacio topológico X. (X,A) denotará una *pareja de espacios* si $A\subset X$. Una función continua entre parejas $f:(X,A)\to(Y,B)$ es una función continua $f:X\to Y$ tal que $f(A)\subset B$.

Denotaremos con $Top^{(2)}$ la categoría de parejas y funciones continuas de parejas. Si identificamos X con $(X,\emptyset)$ y $f:X\to Y$ con el correspondiente $(X,\emptyset)\to(Y,\emptyset)$ obtenemos un funtor $Top \to Top^{(2)}$. Así, identificaremos a Top con una subcategoría plena de $Top^{(2)}$. Hemos partido el conjunto C(X,Y) de funciones continuas $f:X\to Y$ en clases de equivalencia bajo la relación $\sim$. Llamaremos *clases de homotopía* a dichas clases de equivalencia y el conjunto de clases de homotopía de X en Y lo denotaremos con [X,Y]. El concepto de homotopía nos da lugar a una clasificación de los espacios topológicos más gruesa que la del concepto de homeomorfismo pero que es menos difícil de manejar. También denotaremos con [f] a la clase de homotopía de f y con Top_h la categoría Top con morfismos Mor(X,Y)=[X,Y].

La mayoría de los resultados en la Teoría de Homotopía se refieren a espacios punteados (X,x_0) o $(X,*)$ donde x_0 o $*$ denotan un punto privilegiado de X llamado punto base . Forman una categoría Top^* cuyos objetos son los espacios punteados (X,x_0) y cuyos morfismos son funciones continuas $f:(X,x_0)\to(Y,y_0)$ tales que $f:X\to Y$ es continua y $f(x_0)=y_0$. Una homotopía entre dos de tales morfismos f,g es, por definición, una función continua $F:(X,x_0)\times I\to(Y,y_0)$ tal que $F(x,0)=f(x),F(x,1)=g(x)$ y $F(x_0,t)=y_0$ $\forall t\in I$. F define una relación de equivalencia, [f] denotará la clase de equivalencia de f y $[(X,x_0);(Y,y_0)]$, o simplemente [X;Y] , denotarán el conjunto de clases de equivalencia. Así tenemos una categoría Top_h^* cuyos objetos son los de Top^* y cuyos morfismos son $Mor((X,x_0),(Y,y_0))=[(X,x_0);(Y,y_0)]$.

Denotemos con $\pi_n(X,x_0)$ para $n\geq 0$, el conjunto de clases de homotopía $[(I^n,\partial I^n); (X,x_0)]$ donde para $n=0$, $(I^0,\partial I^0)=(x_0,\emptyset)$. Existe una correspondencia biunívoca entre $\pi_n(X,x_0)$ y $[(S^n,s_0);(X,x_0)]$ donde s_0 denota el polo norte de S^n. Consideremos $\pi_1(X,x_0)=[(S^1,s_0);(X,x_0)]$. Un representante de una clase de este conjunto se llama *lazo* y puede considerarse como una función continua ℓ:[a,b]→X tal que $\ell(a)=\ell(b)=x_0$. Definamos una operación binaria en $\pi_1(X,x_0)$ mediante la yuxtaposición $\ell=\ell_1\circ\ \ell_2$ de dos lazos donde $\ell_1\circ\ell_2(t)=\ell(t)=\ell_1(2t)$si $0\leq t\leq 1/2$ o $\ell_2(2t-1)$si $1/2\leq t\leq 1$. Es fácil ver que $[\ell_1\circ\ell_2]$ depende solamente de las clases $[\ell_1]$ y $[\ell_2]$ y si $[\ell_1\circ\ell_2]=[\ell_1]\circ[\ell_2]$ se tiene definida una estructura de grupo no conmutativo en general. El grupo $(\pi_1(X,x_0),\circ)$ se llama *grupo fundamental* de X en x_0. El concepto de grupo de homotopía apareció en el trabajo de Poincaré de 1895 y lo definió como el conjunto $[(S^1,s_0);(X,x_0)]$ junto con la ley de composición anterior de tal forma que se tiene en general un grupo no conmutativo. La generalización de la ley de composición para $[(S^n,s_0);(X,x_0)]$ fue hecha por Cech en 1932, quien mencionó que Dehn ya había pensado en ella, pero que no la publicó. Cech no continuó el estudio de estos grupos pues en aquel entonces se pensaba que las generalizaciones importantes del grupo fundamental deberían ser no conmutativas en general y como veremos más adelante $\pi_n(X,x_0)$ para $n\geq 2$ es conmutativo. Después la teoría del grupo fundamental se mantuvo aparte, como un refinamiento de la homología de dimensión 1. El trabajo que realizó Hopf entre 1926 y 1935 sobre las funciones continuas en esferas comenzó la Teoría de Homotopía.

Si el espacio X es conexo por trayectorias entonces el grupo $\pi_1(X,x_0)$ es independiente del punto x_0 salvo isomorfismo. Así, escribiremos simplemente $\pi_1(X)$. En general, $\pi_1(X,x_0)$ depende del punto base x_0, así que, dada una función continua $f:(X,x_0)\to(Y,y_0)$ definamos una función $\pi_1(f)=f_*:\pi_1(X,x_0)\to\pi_1(Y,y_0)$ mediante $f_*([\ell])=[f\circ\ell]$. $f\circ\ell$ es un lazo y depende solamente de $[\ell]$ y por lo tanto f_* está bien definido. Es inmediato verificar que f_* es un homomorfismo, que $1_*=1$ y que $(f\circ g)_*=f_*\circ g_*$. Luego π_1 es un funtor covariante π_1:Top^*→Gr.

Teorema. Sea $f:(X,x_0)\to(Y,y_0)$ una equivalencia homotópica entonces $\pi_1(f)=f_*:\pi_1(X,x_0)\to\pi_1(Y,y_0)$ es un isomorfismo.

Un espacio punteado (X,x_0) es *contráctil* si la inclusión $i:(\{x_0\},x_0)\to(X,x_0)$ es una equivalencia homotópica. En otras palabras, un espacio contráctil es el que tiene el mismo tipo de homotopía de un solo punto. Por ejemplo, R^n y un espacio topológico que consista en un solo punto son del mismo tipo de homotopía y por lo tanto R^n es contráctil. Las homotopías en $\pi_1(X,x_0)$ son homotopías de I relativas a 0 y 1. Se define una *homotopía entre dos funciones continuas de parejas* f,g:(X,A)→(Y,B), denotada f∼g si existe una función continua F:(X×I,A×I)→(Y,B) tal que F(x,0)=f(x), F(x,1)=g(x). F define una relación de equivalencia y [(X,A);(Y,B)] denotará el conjunto de clases de homotopía. Así tenemos una categoría Top_h^2 cuyos objetos son los de Top^2 y cuyos morfismos están dados por Mor((X,A),(Y,B))=[(X,A);(Y,B)]. Diremos que las parejas de espacios (X,A) y (Y,B) son del mismo *tipo de homotopía* si existen funciones continuas f:(X,A)→(Y,B) y g:(Y,B)→(X,A) tales que $g\circ f\sim 1_{(X,A)}$ y $f\circ g\sim 1_{(Y,B)}$. En tal caso decimos que f es una equivalencia homotópica y la denotamos con (X,A)∼(Y,B). Casi todos los invariantes de la Topología Algebraica son invariantes del tipo de homotopía y no solamente del concepto de homeomorfismo. Este concepto fue definido por Hurewicz en 1935. El grupo fundamental es un invariante del tipo de homotopía.

Proposición. Si (X,x_0) es contráctil entonces $\pi_1(X,x_0)=0$.

Por ejemplo, la bola (B^n,s) es contráctil $\forall n\geq 0, s\in B^n$ y por lo tanto $\pi_1(B^n,s)=0$. También $\pi_1(R^n,x)=0$ ∀_{n}≥0, $x\in R^n$. Una vez que se tienen grupos asociados a espacios topológicos el siguiente paso es el de establecer sucesiones exactas entre dichos grupos asociados. Sea $A\subset X$ un subespacio, veremos cómo relacionar $\pi_n(A,*)$ con $\pi_n(X,*)$. Esto se hace definiendo nuevos grupos $\pi_n(X,A,*)$ que miden la discrepancia. Se puede probar que existe una sucesión exacta

$$\pi_n(A,*)\to\pi_n(X,*)\to\pi_n(X,A,*)\to\pi_{n-1}(A,*)\to\pi_{n-1}(X,*)\to\pi_{n-1}(X,A,*)\to\ldots\to\pi_0(A,*)\to\pi_0(X,*)$$

llamada *sucesión exacta larga de homotopía*. J.H.C. Whitehead fue el primero en considerar esta sucesión (sin flechas) en 1945 y probó que era exacta.

Recuérdese que la Matemática está creada por humanos. En la foto correspondiente están algunos de los matemáticos mencionados: Hurewicz, Lluis Riera, Lefschetz, Serre, Whitehead, Hironaka durante el Simposium Internacional de Topología Algebraica de 1958 en la UNAM en la Ciudad Universitaria en la Ciudad de México. Mi padre fue uno de los organizadores y es el único que permanece vivo a la fecha de escritura de este artículo. La muerte de Hurewicz ocurrió unos días posteriores a esta foto al caer de la pirámide de Uxmal.

K-Teoría Algebraica

A pesar de que desde principios del siglo XX era bien conocido que un monoide conmutativo (un conjunto provisto de una ley de composición asociativa con elemento neutro) sin divisores de cero podía considerarse dentro del grupo conmutativo que genera, es hasta 1957 (en que Grothendieck pensara en esto) que comienza propiamente la K-Teoría. Es de ésta misma manera que los enteros negativos se definen a partir del monoide aditivo de los naturales y que los números racionales positivos se definen a partir del monoide multiplicativo de los naturales sin el cero.

La idea de Grothendieck fue la de asociarle a un monoide conmutativo M, un grupo conmutativo K(M), único salvo isomorfismo, y un homomorfismo canónico definido de monoides $\varphi:M\to K(M)$ tal que para cualquier grupo conmutativo G, cualquier homomorfismo de monoides $f: M\to G$ se factoriza en forma única como

$$f: M \to K(M) \to G.$$

El grupo de Grothendieck apareció publicado por vez primera en 1958 en un artículo de Borel y Serre. Aparte de su uso en el teorema de Riemann-Roch, una de las aplicaciones más conocidas de la construcción de Grothendieck la realizaron en 1959 Atiyah y Hirzebruch.

Aplicaron la construcción al monoide aditivo de las clases de isomorfismo de haces vectoriales complejos con espacio base un CW-complejo X.

El grupo de Grothendieck lo denotaron $K^0(X)$. Definieron $K^{-n}(X)$ utilizando la suspensión de X para $n \geq 1$. La periodicidad de Bott muestra que $K^n(X) \approx K^{n+2}(X)$ y fue utilizada para definir $K^n(X)$ para $n \in Z$. Dichos funtores constituyen una teoría de cohomología conocida como la K-Teoría Topológica la cual tuvo aplicaciones importantes, entre otras, el Teorema de Atiyah-Singer y la solución del problema de obtener el máximo número de campos vectoriales linealmente independientes sobre una esfera.

Un resultado de Serre generalizado por Swan en 1962 proporcionó una manera de traducir conceptos topológicos en algebraicos.

[En efecto, si X es un espacio Hausdorff compacto y C(X) es el anillo de las funciones complejas en X entonces existe una equivalencia entre la categoría de los haces vectoriales B sobre X y la categoría de los módulos proyectivos finitamente generados sobre C(X) dada por $B \rightarrow \Gamma(B)$ donde $\Gamma(B)$ denota las secciones del haz vistas como módulo sobre C(X).]

En pocas palabras, la categoría de los haces vectoriales sobre X es equivalente a la categoría de los Λ-módulos proyectivos finitamente generados donde $\Lambda = C(X)$. De aquí se tiene una definición de $K(\Lambda)$ ó $K_0(\Lambda)$ que tiene sentido para cualquier anillo Λ, como el grupo de Grothendieck de la categoría de los Λ-módulos proyectivos finitamente generados. Así que $K_0(\Lambda)$ es, entre otras cosas, una herramienta útil para investigar la estructura de los Λ-módulos proyectivos.

Por ejemplo, considere el siguiente problema propuesto por Serre en 195, el cual, reformulado algebraicamente decía: ¿son libres todos los módulos proyectivos finitamente generados sobre $k[t_1,t_2, \cdots t_n]$?

En dicho artículo se introducía la Teoría de Gavillas en la Geometría Algebraica. Existen bellos paisajes matemáticos que llevaron a probar esta conjetura, finalmente, veinte años después independientemente por Quillen y Suslin. Los intentos por resolver la conjetura de Serre en los años sesenta dieron lugar al nacimiento de otra área: la K-Teoría Algebraica. Una de las metas de la K-Teoría Algebraica fue la de proporcionar técnicas e ideas para atacar el problema de Serre. A pesar de que la solución final de la conjetura en forma afirmativa no dependió de la K-Teoría Algebraica, no disminuye para nada la gran influencia que tuvo en el enorme desarrollo que ha alcanzado con mayor relevancia que la esperada.

En 1964, Hymann Bass [(a quien quizás ustedes lo recuerdan como presidente de la American Mathematical Society en 2001-2002 y quien atendió mi invitación a presidir conmigo la inauguración del V Joint Meeting SMM-AMS en el 2001 en Morelia) cuando yo presidía la SMM] definió el funtor K_1 utilizando el diccionario que relaciona conceptos algebraicos con topológicos. Resultó que dichos grupos eran los mismos que los introducidos por Whitehead. Así se tuvo que $K_1(\Lambda) = GL(\Lambda)/[GL(\Lambda),GL(\Lambda)]$ donde $GL(\Lambda)$ denota el grupo lineal infinito. Por resultados de la Homología de Grupos, $K_1(\Lambda)$ es igual a la homología de $GL(\Lambda)$ con coeficientes enteros $H_1(GL(\Lambda),Z)$. En 1950 Whitehead consideró el grupo $K_1(Z[G])$, donde

Z[G] denota el anillo entero de grupos fundamentales G de complejos celulares, el cual poseía aplicaciones topológicas. Un resultado relacionado con esto es el teorema del s-cobordismo.

Hubo varios resultados importantes en los años sesenta teniendo el punto de vista de la K-Teoría Algebraica, entre muchos otros, la generación finita de $K_1(Z[G])$ y los resultados de estabilidad para la solución del problema del subgrupo congruente en 1967 por Bass-Milnor-Serre para $SL_n(\Lambda)$ con Λ el anillo de enteros en un campo numérico. Este último sentó las bases para un tema aritmético en la K-Teoría Algebraica el cual se ha convertido en uno de sus más importantes aspectos.

Durante los últimos años de la década de los sesenta, uno de los problemas más importantes era el de definir funtores $K_n(\Lambda)$ para $n\in Z$. Este problema estuvo sugerido por analogía con la K-Teoría Topológica.

En 1969 Milnor definió $K_2(\Lambda)$: Considérese el grupo elemental infinito $E(\Lambda)$ generado por las matrices elementales e_{ij}^{Λ} entre las cuales valen ciertas relaciones. Milnor define el grupo de Steinberg $St(\Lambda)$ como un grupo con generadores x_{ij}^{Λ} sujetos a esas relaciones, y define $K_2(\Lambda)$ como el núcleo del epimorfismo $St(\Lambda) \to E(\Lambda)$.

Kervaire en 1970 prueba que $St(\Lambda)$ resulta ser la extensión central universal de $E(\Lambda)$, y por lo tanto $K_2(\Lambda)$ puede describirse como el multiplicador de Schur del grupo perfecto $E(\Lambda)$. En otras palabras $K_2(\Lambda)=H_2(E(\Lambda),Z)$. $K_2(\Lambda)$ es sumamente difícil de calcular.

En 1969 Matsumoto calculó K_2 de un campo describiéndolo mediante generadores y relaciones que fueron utilizadas por Bass y Tate para describir K_2 de campos numéricos.

La K-Teoría Algebraica es un fenómeno multidisciplinario dentro de la Matemática [y para definir los grupos de K-teoría superior necesitamos de la siguiente construcción debida a Quillen:

TEOREMA. Sea X un CW complejo conexo con punto base p. Sea N un subgrupo normal perfecto de $\pi_1(X,p)$. Entonces existe un espacio X^+ y una transformación $f: X \to X^+$ tal que

(i) $\pi_1(f)$ induce un isomorfismo $\pi_1(X^+,p) \cong \pi_1(X,p)/N$;

(ii) para cualquier $\pi_1(X^+,p)$-módulo A, f induce un isomorfismo $H_*(X; f^{-1}A) \cong H_*(X^+,A)$;

(iii) (X^+,f) está determinado, excepto por equivalencia homotópica por (i) y (ii).

Este teorema se conoce como construcción + de Quillen, y fue inspirada por la necesidad de encontrar una interpretación topológica del funtor K_2 de Milnor. La idea de la demostración es la de adjuntar 2-células para aniquilar N y 3-células para neutralizar el efecto de las 2-células en homología.

Quillen en los años setenta definió, para $i \geq 1$, el i-ésimo K-grupo algebraico de Λ como $K_i\Lambda = \pi_i(BGL\Lambda^+)$. Como en los casos i=1,2, K_i es un funtor covariante de la categoría de anillos a la categoría de grupos.

Tomemos $X=BGL\Lambda$ (el espacio clasificante de $GL\Lambda$) y $N=E\Lambda$ el grupo generado por las matrices elementales el cual es un subgrupo normal perfecto de $GL\Lambda \cong \pi_1(BGL\Lambda)$. Entonces, por la construcción + de Quillen, existe un espacio $BGL\Lambda^+$ que satisface

$\pi_1(BGL\Lambda^+) \cong \pi_1(BGL\Lambda)/E\Lambda \cong GL\Lambda/E\Lambda$, el cual se definió como $K_1\Lambda$.

También podemos formar $BE\,\Lambda^+$ con respecto a $E\Lambda$. Por el teorema del isomorfismo de Hurewicz, $H_2(BE\,\Lambda^+;Z) \cong \pi_2(BE\Lambda^+)$. Además, puesto que $BE\Lambda^+$ es cubriente universal de $BGL\Lambda^+$ se tiene que $\pi_2(BE\Lambda^+) \cong \pi_2(BGL\Lambda^+)$. Así podemos concluir que $\pi_2(BGL\Lambda^+) \cong \pi_2(BE\Lambda^+) \cong H_2(BE\Lambda^+;Z) \cong H_2(BE\Lambda;Z) \cong H_2(E\Lambda;Z)$, el cual se definió como $K_2\Lambda$.

Si consideramos la sucesión exacta (i.e. la extensión central universal)

$$1 \to K_2\Lambda \to St\Lambda \to E\Lambda \to 1,$$

donde $St\Lambda$ es el grupo de Steinberg, sabemos que $BK_2\Lambda^+ \to BSt\Lambda^+ \to BE\Lambda^+$ es una fibración. Su sucesión larga de homotopía asociada es

$$\ldots \to \pi_4(BK_2\Lambda^+) \to \pi_4(BSt\Lambda^+) \to \pi_4(BE\Lambda^+) \to \ldots$$

$$\ldots \to \pi_1(BK_2\Lambda^+) \to \pi_1(BSt\Lambda^+) \to \pi_1(BE\Lambda^+).$$

Como $BK_2\Lambda^+ \cong BK_2\Lambda$ es un espacio de Eilenberg-Mac Lane $K(K_2\Lambda,1)$, $\pi_i(BK_2\Lambda) = 0$ para $i > 1$. Por lo tanto, $\pi_j(BSt\Lambda^+) \cong \pi_j(BE\Lambda^+)$ para $j \geq 3$, y podemos concluir que $\pi_3(BGL\Lambda^+) \cong \pi_3(BE\Lambda^+) \cong \pi_3(BSt\Lambda^+) \cong H_3(BSt\Lambda^+) \cong H_3(BSt\Lambda) \cong H_3(St\Lambda)$, donde $\pi_3(BSt\Lambda^+) \cong H_3(BSt\Lambda^+)$ es el isomorfismo de Hurewicz y $St\Lambda$ es el grupo de Steinberg de Λ [Lo].

Una de las huellas de avance significativo en la Matemática es el descubrimiento de relaciones inesperadas entre diversas áreas. Quizá uno de los ejemplos más notables de tal avance es el desarrollo de la K-Teoría Algebraica de Quillen en la cual el Álgebra y la Topología se relacionan de una manera nueva y fundamental.

Por un lado, la K-Teoría Algebraica introduce métodos topológicos para definir invariantes algebraicos, tales como los K-grupos de anillos de orden superior. Por otro lado, proporciona una forma de traducir conceptos algebraicos en conceptos topológicos. La K-Teoría Algebraica estudia las propiedades de los grupos $K_i(\Lambda)$, construidos a partir de un anillo Λ.

Uno de los problemas más importantes en la K-Teoría Algebraica es el cálculo de los grupos K_i para diversos anillos Λ, pero, a pesar de los esfuerzos de destacados matemáticos como Bass, Milnor, Karoubi, Quillen, Weibel, Loday, Soulé, Snaith, únicamente se conoce un número muy reducido de ellos.

Veamos algunos:

Bass demostró en 1968 que $K_1Z \cong Z/2$ y que $K_1(Z/p^2)=Z\oplus Z/p\text{-}1$, p primo diferente de 2.

Milnor demostró en 1971 que $K_2Z \cong Z/2$ y que $K_2(Z/p^2)= 0$ para un primo p diferente de 2.

En 1972 Quillen calculó la K-teoría algebraica de un campo finito.

Lee y Sczarba encontraron en 1976 que $K_3Z \cong Z/48$.

Sea R el anillo de enteros de un campo numérico e I un ideal no trivial. El calcular $K_i(R/I)$ para anillos finitos es un problema abierto para $i \geq 3$ [J-S]. Resultados parciales han sido obtenidos (i) por Evens-Friedlander [E-F], y (ii) por Aisbett, Lluis-Puebla, Snaith y Soulé. Es interesante que desde entonces, 1980, prácticamente no ha habido cálculos completos de este problema, constituyéndose en uno interesante como mencioné anteriormente.

En mi Memoria de la American Mathematical Society junto con otros artículos míos aparecen calculados K_3 de los números duales y de los enteros módulo n.

En mi Lecture Notes de Springer Verlag [Llu2] el lector encontrará un panorama de la K-Teoría de orden superior donde se aborda uno de los más importantes problemas abiertos en la K-Teoría Algebraica, a saber, el cálculo de la K-Teoría de los números enteros. Este libro aparece como referencia en la Wikipedia en el artículo sobre K-Teoría.

El cálculo de la K-teoría algebraica aún de anillos bien conocidos es extraordinariamente difícil. El cálculo de K_iZ ha sido todo un reto desde hace más de treinta años. Weibel obtuvo en 1997 la estructura de K_iZ.

En mi libro Álgebra Homológica, Cohomología de Grupos y K-Teoría Algebraica Clásica [Llu1] se estudia la relación entre la K-Teoría y la Cohomología de Grupos y constituye una introducción a estas áreas. Ahora en su segunda edición publicado por la Sociedad Matemática Mexicana.

En mi libro Álgebra Lineal, Álgebra Multilineal y K-Teoría Algebraica Clásica se introducen los conceptos elementales de esta última cuya parte clásica es parte del Álgebra Lineal General. Ahora también en su segunda edición publicado por la Sociedad Matemática Mexicana.

En 1986, se le dio a la K-Teoría Algebraica el número 19 del Índice de Clasificación de la Matemática convirtiéndose en una de las ramas más recientes de la Matemática.

Los resultados más recientes e importantes en esta rama de la Matemática son la demostración de la Conjetura de Milnor por Vladimir Voevodsky la cual establece, para un campo de característica distinta de 2, la existencia de un isomorfismo de la K-teoría de Milnor tensor Z módulo dos con la cohomología de Galois del campo con coeficientes en Z módulo 2.

El caso para p distinto de dos se conoce como la Conjetura de Bloch-Kato y ha sido probada por Voevodsky y Rost.

Un resultado relativamente reciente es la verificación de que para n=2 mod 4 los grupos finitos $K_n(Z)$ son cíclicos para n<20,000.

Es de notarse que los grandes creadores de la K-Teoría Algebraica han sido galardonados con la Medalla Fields, a saber, Serre en 1954, Milnor en 1962, Grothendieck en 1966, Atiyah en 1966, Quillen en 1978, Connes en 1982 y Voevodsky en 2002.

Para quien esté interesado en la K-Teoría Algebraica les comento que para adentrarse en ella además de estudiar el material de mis textos mencionados hay que realizar estudios en Teoría de Homotopía, Topología Algebraica, Teoría de Categorías y Geometría Algebraica entre otros.

Actualmente estoy escribiendo un libro de texto sobre la K-Teoría Algebraica que cubre los siguientes temas: Haces Vectoriales, Haces Vectoriales y Módulos Proyectivos, Álgebra Homológica, K-Teoría Algebraica Clásica, Teoría de Homotopía, K-Teoría Superior, Categorías y K-Teoría y finalmente Aplicaciones de la K-Teoría Algebraica.

La Matemática, hay que insistirlo para no perderlo de vista, es esencialmente una actividad humana y nuestra meta no solamente es inventarla sino trasmitirla. La Matemática es el grado máximo de abstracción el cual tiene aplicación en toda disciplina que se precie de llamar ciencia.

Teoría Matemática de la Música

Musicología es el nombre adoptado del francés "musicologie" para referirse al estudio escolástico de la Música. Del alemán "musikwissenschaft" que significa "ciencia de la Música". Hacer musicología no es fácil. La Musicología carece de un marco conceptual estable. Se dice que es muy difícil comenzar a hacer musicología y navegar sobre un marco conceptual seguro.

En la musicología tradicional existe el problema estándar del encapsulamiento. Se da un postulado encapsulado y se previene de cualquier acceso a la (presunta) complejidad escondida. En la Matemática, el acceso a la complejidad es posible y su realización eventualmente da penetración en el concepto mientras que en el encapsulamiento musicólogico los intentos apuntan al vacío, generalmente mediante el rompimiento del flujo de la información mediante un oscuro camino que pretende ser racional, ornamentado con metáforas, transformando un posible concepto profundo en un concepto misterioso, es decir, transformando ciencia en fábula. En uno de los libros de musicología tradicional más ambiciosos, los discursos de las partes importantes se basan en un listado casi infinito de referencias externas.

Uno de los proyectos más interesantes que actualmente se desarrollan en este campo es la Teoría Matemática de la Música de Guerino Mazzola.

Es bastante desconocida la aplicación de conceptos matemáticos a la Musicología y en particular la Teoría Matemática de la Música.

Comenzó hace más tres décadas. Una de las principales metas de la Teoría Matemática de la Música es la de desarrollar un marco científico para la Musicología. Este marco posee como fundamento a campos científicos establecidos. Incluye un lenguaje formal para los objetos y relaciones musicales y musicológicas.

La Música está enraizada con realidades físicas, psicológicas y semióticas. Pero la descripción formal de las instancias musicales corresponde al formalismo matemático.

Está basada en las Teorías de Módulos y Categorías, en la Topología Algebraica y Combinatoria, en la Geometría Algebraica, Teoría de Representaciones, esto es, en matemática de alto nivel. Su propósito es el de describir las estructuras musicales. La filosofía detrás de ella es la de comprender los aspectos de la Música que están sujetos al raciocinio de la misma manera en que la Física puede hacerlo de los fenómenos propios del trabajo científico. Esta teoría está basada: en un lenguaje adecuado para manejar los conceptos relevantes de las estructuras musicales, en un conjunto de postulados o teoremas con respecto a las estructuras musicales sujetas a las condiciones definidas y, en la funcionalidad para la composición y el análisis con o sin computadora.

Hace quince años, en su artículo "Status Quo 2000", (el cual hemos apreciado mucho que fuese presentado al mundo en México durante una exposición plenaria espléndida en Saltillo dentro del Congreso de la Sociedad Matemática Mexicana), explica por qué el acercamiento mediante su modelo teórico geométrico de ese tiempo evolucionó a un marco que es apropiado para muchos problemas musicales. Este nuevo marco está basado en Matemática más sofisticada como la Teoría de Categorías y de Topos.

Uno de los propósitos de la Teoría Matemática de la Música es la de establecer dicho marco conceptual estable, definiendo los conceptos en una forma precisa.

La palabra *gesto* en español significa movimiento de la mano u otras partes del cuerpo o rostro con que se expresan diversos afectos del ánimo según el diccionario de la RAE.

La ejecución musical puede definirse como una transformación del nivel mental de la partitura en un conjunto de eventos sonoros y/o físicos.

En la figura, la ejecución musical consiste de la partitura, posiblemente su análisis, el descongelamienteo de los símbolos de la partitura a gestos que luego son transformandos en sonidos a través del instrumento.

Este concepto excluye otros tipos de ejecución musical no porque no sean relevantes, sino debido a que el tipo elegido es la perspectiva que ha sido objeto de las más intensas y elaboradas investigaciones científicas.

La descongelación de la partitura a gestos que actúan sobre el instrumento interfaz y así generar sonidos, juega un papel importante, pero esto todavía no es un tema relevante (desafortunadamente) de la teoría de la ejecución. Sólo la transformación P de la partitura a los sonidos lo es.

Observen que también existe el proceso inverso de congelación gestual, que termina con la notación musical abstracta moderna.

La Teoría de Ejecución Musical y la práctica, no se centra en P. El tema central es la investigación y la comprensión de las estructuras que están detrás. En investigación de Teoría de la Ejecución Musical, lo que hay detrás se denomina "*ejecución expresiva*". Este concepto, un tanto ambiguo, se refiere al proceso comunicativo dando lugar a P. Como tal, se inicia desde el lado creativo del compositor e intérprete, y se dirige a la audiencia y al analista. Esto está mediado por la ejecución acústica y gestual de la música.

Hay muchos más temas muy interesantes con respecto a la Ejecución Musical. Invito a ustedes a deleitarse con el libro Musical Performance de Guerino Mazzola, publicado por Springer, de donde he tomado esta exposición.

En el 2007 Guerino Mazzola presenta un nuevo marco categórico orientado programáticamente para la descripción de las relaciones entre las actividades musicales y matemáticas. Esta relación puede ser descrita en términos de funtores adjuntos, los cuales amplían la presentación funtorial descrita en The Topos of Music. Por lo tanto, en un meta-nivel, las relaciones entre las actividades musicales y matemáticas se investigan desde un punto de vista matemático.

Lejos de ser isomorfos, la Música y la Matemática parecen tener algunas estructuras que pueden estar relacionadas mediante uno de los conceptos más poderosos de la Teoría de Categorías: el concepto de funtor adjunto. Esta construcción, propuesta por Daniel Kan en 1958 como un dispositivo técnico para el estudio de las propiedades combinatorias en la Teoría de Homotopía, resulta ser la herramienta más adecuada para enlazar tres categorías principales:

ecuaciones o fórmulas (categoría de espectroides),
esquemas de diagramas (categoría de digráficas) y
gestos (categoría de diagramas de curvas en espacios topológicos).

La categoría de digráficas, que ha sido propuesta recientemente como un concepto fundacional de la Matemática tanto para la Teoría de Conjuntos clásica y categórica, parece proporcionar una estructura musicalmente interesante para mediar entre las otras dos categorías, en el que la Música y la Matemática actúan en posiciones adjuntas.

Por medio de diagramas, la Matemática convierte gestos en fórmulas. De hecho, un diagrama es un sistema de flechas de transformación. En tal sistema uno puede seguir diferentes trayectorias o caminos partiendo y terminando en los mismos dos puntos. Estas trayectorias pueden ser vistas como movimientos gestuales. Si dos tales caminos conmutan, es decir, que producen la misma transformación compuesta, entonces tienen exactamente lo que se llama una fórmula o ecuación: dos expresiones dan el mismo resultado. Muy generalmente hablando, las fórmulas son las relaciones de conmutatividad de trayectorias o caminos gestuales. Inversamente, la actividad musical "descongela" las fórmulas y las convierte en gestos que se pueden describir como el desarrollo de fórmulas en el espacio-tiempo.

Mazzola utiliza la categoría de digráficas de curvas en espacios topológicos como el marco teórico de la Teoría Gestual. Desde un aspecto puramente teórico, "gestos de gestos" (o hipergestos), así como "gestos naturales" son canónicamente definidos, como se vé al ejemplificar el caso del gesto de un dedo de la mano de un pianista y sus generalizaciones hipergestuales. Al igual que en el caso del desarrollo de la Teoría de Categorías y la de Topos, como la realizó Mac Lane, la noción de gesto como se sugiere en el trabajo de Mazzola ofrece un buen ejemplo de la "colisión" entre los métodos algebraicos y topológicos.

El artículo de Mazzola y Andreatta [Mazz-And] del 2007 sugiere que el estructuralismo matemático podría ser tomado como una posición filosófica para la actividad teórico-músical una vez que se acepta que la Teoría Matemática de la Música trata de la Música como un sistema estructurado.

En el artículo mencionado se introduce la categoría matemática de gestos en términos de diagramas de digráficas en espacios topológicos.

Luego se muestra que el espacio de gestos en un espacio topológico dado es un espacio topológico. Por lo tanto, la iteración de las construcciones de gestos es posible y naturalmente conduce a la noción de hipergestos.

Luego se prueba la existencia de un gesto "natural" asociado a un digrafo y luego la adjunción de este funtor con el funtor que proyecta a su digrafo subyacente.

Matemáticamente, se define un gesto como un grafo o gráfica dirigida D, llamado el *esqueleto* del gesto. También se requiere de una transformación g que asocia a cada flecha *a* de D una curva continua $g(a)\colon I \to X$ definida sobre el intervalo unitario $I = [0, 1]$ de los números reales de manera que las flechas que se correspondan vayan a dar a curvas continuas que se correspondan. El sistema de estas curvas continuas se llama *cuerpo del gesto*. Es en esta última parte del gesto que el movimiento de la configuración gestual tiene lugar.

En este ejemplo, X es el espacio de coordenadas utilizados para las posiciones de las puntas de los dedos de la mano de un pianista en una tecla dada (altura), un nivel por encima de la tecla (posición), y el tiempo de este evento.

Una de las expresiones gestuales más evidentes es el movimiento del cuerpo de un ejecutante músico. Por ejemplo, es fácil reconocer el poder gestual de los pianistas. Es lógico que uno debe, por tanto, intentar modelar los gestos de los músicos. En colaboración con su alumno de doctorado Stefan Müller, Mazzola realizó el modelado de la mano del pianista en el 2001-2003 en el nivel de gráficos por computadora. La idea no era sólo modelar los movimientos de la mano, sino también implementar un software que transformara los símbolos abstractos de una partitura en movimientos de la mano que fueran adecuados para la interpretación de la partitura en un teclado de piano.

En la teoría tradicional de la Ejecución Musical nos fijamos en la transformación P (score) de símbolos en la partitura a eventos sonoros. Esto se muestra en la parte inferior del diagrama rectangular. En la extensión gestual de este proceso sin corporización, tenemos que crear el sonido mediante acciones gestuales. Los sonidos son el resultado de las curvas gestuales físicas que interactúan con el teclado; estas curvas se muestran en la parte superior derecha del diagrama.

Con el fin de generar estas curvas físicas, primero se tienen que descongelar los símbolos de las notas y luego transformarlas en símbolos gestuales. Este descongelamiento se muestra en la mitad superior-inferior izquierda del diagrama.

El dispositivo más poderoso en esta Teoría Matemática de Gestos es el concepto de un hipergesto. Renate Wieland mencionó la idea misteriosa de un "gesto dentro de un gesto". Esta construcción es la siguiente: Se puede demostrar que el conjunto de gestos de un esqueleto fijo D a un espacio topológico X es en sí mismo un espacio topológico, denotado con $D\underset{\sim}{@}X$. Por lo tanto, podemos considerar gestos h: $F \to D\underset{\sim}{@}X$. Estos gestos se llaman *hipergestos*: es decir, gestos cuyo cuerpo es un sistema de curvas de gestos. Aunque esto suene complicado, es bastante intuitivo. Por ejemplo, si tenemos un gesto con un lazo como un esqueleto, y luego un hipergesto con otra vez el lazo como esqueleto, entonces el hipergesto es un lazo de lazos, de hecho, un tubo cerrado, como en la figura.

Tales hipergestos son muy útiles en la generación de interpretaciones gestuales de las composiciones de música clásica. Por ejemplo, la modulación tonal que usa Beethoven de si bemol mayor $\to$ sol mayor en el comienzo del Allegro de la Op.106, puede ser descrito por tales hipergestos, véase el artículo de Mazzola del 2009.

Pueden ustedes trabajar los 3 artículos de Mazzola que les he mostrado y de donde he tomado los conceptos que les he expuesto a manera de motivarlos en este apasionante tema. En ellos verán la matemática que se usa.

En su artículo del 2009, Mazzola [Mazz] anuncia su Teorema de Escher. Mi alumna Yemile Chávez proporcionó la demostración completa del mismo en el 2014. Este teorema se requiere para la poder comprender los hipergestos.

En estos artículos fundamentales mencionados junto con [MazzHomol] Mazzola expone entre otros un problema abierto de importancia relevante para la Teoría Matemática de la Música: la *Conjetura del Diamante*, la cual trata con la formulación en términos matemáticos precisos de la dialéctica entre la Matemática y la Música. Los matemáticos toman los movimientos o gestos (intuiciones, movimientos mentales, analogías con la realidad, etc.) para producir fórmulas mientras que los músicos toman las fórmulas (partituras, diagramas, notaciones musicales, etc) para producir movimientos o gestos.

Una primera formulación de la conjetura es la siguiente. La categoría de digráficas es desdoblada en 2 ramas: una es la categoría de gestos y la otra, la categoría de fórmulas. Mazzola construyó la categoría de gestoides como una manera de obtener información algebraica a partir de los gestos (vía Topología Algebraica) y una categoría de formoides para obtener información topológica de las fórmulas (vía Geometría Algebraica). Se conjetura que existe un universo X que armoniza las dos ramas en el sentido de que todas las categorías consideradas están conectadas por parejas de funtores adjuntos como en el diagrama. Esta categoría deberá expresar una comprensión de la Música y clarificará su relación con la Matemática. En su artículo, Mazzola propone a la bicategoría de gestos como un buen candidato para el conjeturado universo X, pero todavía falta mucho por hacer para dar soluciones generales.

También, recientemente apareció el libro "Musical Performance" [MazzPerf] de Guerino Mazzola para quien desee adentrarse en este fascinante campo de donde he tomado algunos pasajes para proporcionarles a ustedes una motivación hacia este tema.

Déjenme decirles que yo me dediqué en los años 70 y hasta la fecha a la Teoría de Homotopía y Cohomología, a la Topología Algebraica, al Álgebra Homológica, etc. Esta matemática era considerada "purísima". Sin embargo, treinta años después, esa matemática es super aplicadísima y fíjense en qué campo, el de también mi otra pasión: ¡la Música! Pero no solamente son aplicaciones, se crea nueva matemática en este campo.

Referencias

[Dieu] Dieudonné, J. A History of Algebraic and Differential Topology 1900-1960. Birkhäuser. 1989.

[Lef] Lefschetz, S. Topology. Second edition 1956. Chelsea. 1965.

[Llu1] Lluis-Puebla, E. Álgebra Homológica, Cohomología de Grupos y K-Teoría Algebraica Clásica. Pub. E. Sociedad Matemática Mexicana. Serie Textos. Vol. 5. 2005.

[Llu2] Lluis-Puebla, E et al. Higher Algebraic K-Theory: an overview. LNM 1491. Springer. 1992.

[Mazz-And] Mazzola,G; Andreatta, M. Diagrams, Gestures, and Formulas in Music. Jour. of Mathematics and Music. Vol. 1. No. 1. 2007.

[Mazz] Mazzola, G. Categorical Gestures, the Diamond Conjecture, Lewin´s Question, and the Hammerklavier Sonata. Jour. of Mathematics and Music. Vol. 3. No. 1. 2009.

[MazzHomol] Mazzola,G. Singular Homology on Hypergestures. Jour. of Mathematics and Music. Vol. 6. No. 1. 2012.

[MazzPerf] Mazzola, G. Musical Performance. Springer. 2011.

Emilio Lluis-Puebla
Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias
Universidad Nacional Autónoma de México
www.EmilioLluis.org