EMILIO LLUIS

MÚSICA,
MATEMÁTICA
Y CONCERTISMO

Música: **la Matemática de lo sensible,**

Matemática: **la Música del entendimiento**

y

Concertismo: **la expresión de ambas.**

Emilio Lluis-Puebla

Universidad Nacional Autónoma de México

Índice General

PREFACIO

Este libro está dedicado a toda persona que desee obtener un concepto más aproximado acerca de la Matemática, la Música, el Concertismo y los practicantes de ellas. También tiene como propósito el de servir como motivación y orientación vocacional a los jóvenes deseosos de dedicarse a una de las aventuras más formidables del Ser Humano, la Matemática, la Música y el Concertismo. Este libro no es ni de Matemática ni de Música, pero es acerca de la Matemática y de la Música y de quienes las practican. Siempre es muy interesante que no solamente practiquemos una actividad sino también que escribamos sobre ella, conozcamos cómo es su desarrollo, su papel en la historia, en la sociedad y desde luego, cómo son quienes la practican.

Muchas personas, colegas músicos y matemáticos, estudiantes y en especial mis propios alumnos, me han solicitado que escriba acerca de la Matemática y los matemáticos, acerca de la Música y los músicos. Correspondo a esta petición esperando que esta información ayude a comprender a la Matemática y la Música y a los matemáticos y músicos.

Algunas de las ideas expresadas en este texto son mías y otras provienen de las fuentes mencionadas en la bibliografía. En particular, he tomado muchas del gran matemático Michael Atiyah. Desde mis años de estudio profesional y de posgrado he leído sus artículos de divulgación, las entrevistas que le han realizado, escuchado sus conferencias, estudiado sus textos y artículos de investigación, en particular los de K-Teoría. Sin duda es, no solamente uno de los más destacados matemáticos de la segunda mitad del siglo XX, sino también uno de los pensadores más acertados acerca de la Matemática misma y por esto deseo transmitirles un poco de su pensamiento y visión de esta disciplina las cuales comparto.

El lector encontrará muchos momentos en que se habla en primera persona y otros en que no. Así lo he querido hacer, pues me parece que de este modo le hablo al lector directamente. De los pensamientos expuestos en el texto, lo que más me interesa es crear un camino de pensamiento que nos ayude a dilucidar diversos asuntos fundamentales del quehacer del concertista y del matemático. Es decir, junto y conecto varios pensamientos que conozco o que he creado para hacer este texto.

En el Capítulo I presentamos lo concerniente al Arte, a las Bellas Artes y a los artistas. Proponemos así distinguir entre lo que es una arte bella y lo que no lo es y por ende quién es un artista y quien no lo es. Esto lo realizamos haciendo comparaciones con otras de las Bellas Artes tratando de que el lector encuentre por sí mismo de manera clara los conceptos expresados.

En el Capítulo II se describe el quehacer de los músicos intérpretes y de los matemáticos: ¿por qué se requieren los intérpretes? ¿cuál es la importancia de un intérprete? ¿cuál es el papel del intérprete en la sociedad? ¿cuál es el papel del intérprete en la actualidad? Este capítulo es un breve panorama sobre el desconocido mundo de la Música y de los músicos, y de ese misterioso y también desconocido mundo del matemático y de la Matemática. ¿Cuáles son las fuentes de creación?, ¿cuánta Matemática hay?, ¿cómo se origina una teoría matemática?, ¿qué significa la palabra “matemática”?, ¿cómo es un matemático?, ¿quienes ingresan a una carrera de matemática y qué los motiva?, ¿qué es la Matemática

Aplicada? ¿cómo ven a la Matemática y a los matemáticos otros profesionistas? Éstas son algunas de las preguntas, entre muchas otras, a las cuales se da respuesta. También se escribe acerca de la Matemática, sus características, la investigación y progreso en ella. Como ejemplo del surgimiento de una teoría matemática se presenta la K-Teoría Algebraica en el Apéndice I quizás para un lector que desea profundizar un poco acerca de esta rama de la Matemática. También, como matemática aplicada se hace lo correspondiente con la Teoría Matemática de la Música. Finalmente, se exponen pensamientos acerca de la Computación y su relación con la Matemática.

En el Capítulo III presentamos la Música y la Matemática en el pasado, se expone el Juego de Dados Musical de Mozart K.294c y se analizan matemáticamente algunas de sus características. También se expone la Teoría de la Estética de George David Birkhoff y su aplicación a la Música en particular. Las sucesiones de Fibonacci, la razón áurea o proporción divina se presentan, así como su aplicación en la música de Bela Bartók. También se hace otra reflexión acerca del momento histórico que nos ha tocado vivir en relación con éstas dos disciplinas y sus practicantes.

En el Capítulo IV se exponen algunos conceptos de la Música y la Matemática en el presente. Actualmente es perceptible que en las últimas dos décadas del siglo pasado (y hasta la fecha) hubo una gran tendencia en la Matemática de realizar no sólo aplicaciones sino hacer Matemática en una gran variedad de campos del conocimiento, y el campo de la Música no ha sido la excepción. Uno de los propósitos de la Teoría Matemática de la Música es la de establecer un marco conceptual estable, definiendo los conceptos en una forma precisa. Se expone el acercamiento de Mazzola para muchos problemas musicales el cual está basado en la Teoría de Topos misma que se esboza en el Apéndice II. Se introduce el concepto de Denotador el cual permite describir los objetos musicales y se mencionan las ideas detrás del mismo. Se concluye que estamos actualmente viviendo un cambio tan radical en la Musicología como el que se experimentó en la Física hace 500 años. También se expone la parte más fascinante de la Teoría Matemática de la Música: la Teoría de Interpretación Musical. Presentamos un muy conciso esbozo de la misma para un dejarle al lector un poco de sabor acerca de la Interpretación.

En el Apéndice III se presenta un artículo de la Dra. Flor de María Aceff (matemática y cellista no profesional) sobre el conjunto de Cantor en la Tercera Suite para cello solo de Bach. Aunque en el siglo XVIII, todavía no existía el conjunto de Cantor ni el concepto de fractal, éstos ya existían en la naturaleza. Como los creadores, en particular los músicos, plasman en su obra tanto la naturaleza que observan, así como su época. Johann Sebastian Bach es tal vez uno de los mejores ejemplos donde podemos observar que en su mente ya existían las estructuras de los conjuntos de Cantor, así como la idea generadora de los fractales y las puso en práctica en varias de sus obras.

Hasta hace algunos años se consideraba que los conjuntos de Cantor eran una creación puramente matemática, que estaban totalmente alejados de la naturaleza y del arte, sin embargo ahora se sabe del comportamiento de algunos fenómenos naturales que presentan una estructura similar y en el caso del arte tenemos este bello ejemplo que nos regaló Johann Sebastian Bach en su Tercera Suite para violoncello solo, la cual fue compuesta en la segunda década del siglo XVIII.

En el Capítulo V presentamos un ensayo sobre el Arte y el negocio del Arte. Aquí establecemos que una cosa es el arte, y otra, muy diferente, es el negocio del arte. Se habla del "éxito", de la comercialización enorme del arte, de las audiciones masivas, del mercado de trabajo del concertista a nivel mundial, del oyente, etc.

También se expone el porqué de un gran artista: Claudio Arrau. El trabajo del concertista en México: la demanda, la oferta, los pianistas. Se analiza lo peor de dos sistemas, se hace un ejercicio de la sala de conciertos. Se habla de las escuelas de música, las academias de música particulares, y del futuro del trabajo del concertista en México y en el mundo. Se comenta acerca de la organización de conciertos, y finalmente se establece la relación más importante entre la Música y la Matemática.

CAPÍTULO I

El Arte Musical y el Arte Matemático

La palabra *arte* significa “el conjunto de reglas o procedimientos para hacer algo”. El aplicar el conjunto de reglas a menudo se llama *técnica*. Así, existe el arte culinario, el arte de la Tauromaquia, el arte decorativo, el arte egipcio, el arte romano, el arte barroco, las artes utilitarias, las artes liberales o bellas artes, el arte poético, el arte musical, el arte matemático, etc.

También, la palabra *arte* designa lo creado por los seres humanos. El sonido emitido por un ave no se considera arte. Existen innumerables teorías del arte.

También, aunque algunos dicen que es incorrecto, la palabra *arte* se ha usado para designar el objeto producido por la técnica, por ejemplo, una sonata, una escultura, una pintura o un poema.

También se usa la palabra *arte* para designar un arte que es creativo o alguna de las Bellas Artes, que son las que tienen por finalidad expresar la belleza. Históricamente las principales *Bellas Artes* son: Arquitectura, Danza, Escultura, Música, Pintura y Poesía (Literatura) según la clasificación usada en la antigua Grecia. *Artista* es el que ejerce una bella arte.

Hay un término que se usa en inglés, "*art music*", para designar el tipo de música que requiere de un esfuerzo por parte del oyente para poder apreciarla. En español no existe de forma usual el término "*música de arte*", ni tampoco, "*música con valor artístico*" o "música erudita", pero sí se usa el término "música clásica" o "música seria". En este tipo de música se entiende que tiene una estructura, una forma, se establece por escrito, se compone sin algún fin utilitario, etc.

Hay varios tipos o clases de música: la música popular o comercial, la música folclórica, la música de jazz, la música de arte, (o música con valor artístico, o música artística, o música seria, o música clásica, o música erudita, etc.). Es decir, hay muchos tipos de música, todos reales, existentes y cumplen una razón de ser en este planeta.

Se puede hacer un símil con la Literatura. Por ejemplo, existe la literatura de arte, la literatura popular o comercial, la literatura que proviene de la tradición oral, la cual a menudo se llega a escribir, etc.

De igual manera se puede hacer un símil con la Pintura. Por ejemplo, existe la pintura de arte, la pintura popular o comercial, la pintura rupestre, etc. El mismo símil se puede hacer con el Cine, el Teatro, etc.

Hay que tener en cuenta que la Música es una actividad exclusivamente humana, terrícola, destinada a escucharse por uno de los sentidos, el auditivo, en una capa de la atmósfera terrestre muy pequeña, la troposfera. Es decir, el sonido es esencialmente vibraciones de una parte de la capa atmosférica.

Es muy pretencioso decir que es un lenguaje del universo, o universal como frecuentemente se dice. Hay música de arte que no está creada para comunicar, puede simplemente estar creada por el placer de escuchar o jugar con los sonidos. Actualmente, la música de arte existe por sí misma. La música utilitaria es parte de alguna actividad, ya sea la danza, la religión, el baile, la relajación, etc.

La música no es la única actividad humana que emplea el sonido, el lenguaje también usa el sonido como medio de transmisión. Sin embargo, el lenguaje trata de transmitir conceptos específicos y la música no necesariamente. La música puede expresar emociones o ideas específicas, pero lo hace mediante asociaciones.

El sonido es el medio de transmisión de la música y consiste en vibraciones del aire. Este último es un gas, cuyas moléculas y átomos no están tan juntos como en un sólido o líquido. Las ondas del sonido se clasifican como longitudinales. Tienen cuatro propiedades: la amplitud o el tamaño de la vibración o lo fuerte que se oye; la nota o altura que podemos de manera provisional considerar como la frecuencia de vibración; el timbre que corresponde a la forma del espectro del sonido y la duración, que es el tiempo que dura un sonido.

La Forma es la disposición, estructura o arreglo de los elementos musicales básicos.

La música de algunas regiones del planeta requiere de entrenamiento especial para entenderla si es que ésta representa lenguajes. Por ejemplo, las tribus brasileñas o africanas.

Recordemos que decimos expresiones como “ya lo veo” o “lo veo claro” para decir que uno entiende algo. Así, desde la antigüedad, la Música era considerada un arte menor comparada con las artes visuales. Se decía que la música solamente existía durante la interpretación en vivo y por lo tanto pasaba a ser un arte teatral o escénico. La música no podía tener valor monetario, a diferencia de una escultura o una pintura. La música se diluía en el aire, era invisible y por tanto, decían que era mística.

Aun cuando en el siglo XI ya se tenía alguna notación musical, no se podía guardar o grabar. Las partituras no se tomaban con el valor que hoy tienen, simplemente eran objetos de uso y se desechaban. Si alguna sobrevivía, era utilizada para adecuarla al momento. En la Música no hubo un Renacimiento como en las otras artes pues no se preservó prácticamente ninguna partitura ni grabación de lo que se hacía en otras épocas. La Música sigue un proceso evolutivo desde el siglo XVI.

La música está relacionada con lo mágico, hablamos de la “magia de la Música”. De hecho, la palabra “canto” aparece en “encantar” y algunos, como no se puede ver, la relacionan con el alma, con la metafísica o con cualquier cosa que no pueda entenderse por el pensamiento racional. Así se le asocia por los filósofos a cuanta idea se les ocurra, el bien, el mal, lo etéreo, lo paradisiaco, lo noble, lo patriótico, lo patético, lo moral, etc.

También, la palabra “Música” viene del griego mousike, el arte de la Musa, donde en un principio, la melodía y la palabra eran inseparables. Un músico era el que tocaba la cítara y al mismo tiempo pronunciaba palabras. Una persona que tocaba el “aulos” o especie de oboe, no lo era. Así, la música instrumental, que no utilizaba palabras, era inútil para Platón pues dentro de la Educación le era “una de las tareas más difíciles el descubrir lo que significa un ritmo y una melodía que no tenía palabras”, es decir, la música era exclusivamente utilitaria para Platón.

Sin embargo, la música sin palabras era dejada para las danzas orgiásticas y los ritos dionisíacos. Esta crítica del “aulos” hace ver con énfasis la importancia que realmente tenía la música en el mundo griego. Era también utilizada para el “placer”.

Sin embargo, el verdadero arte musical nace cuando la música se crea por ella misma, no con una función utilitaria. En la música sin palabras interviene algo importantísimo. La música como actividad que proporciona “placer” y recordemos que el “poder del placer” es el más grande que mueve al ser humano.

En la época medieval, la Música era considerada como la parte audible de la Teoría de los Números. La polifonía es la que distingue a la música occidental de las otras. Exceptuando al canto gregoriano, casi toda la música de arte había sido polifónica. Así, nace uno de los elementos placenteros más poderosos dados por los “intervalos armónicos” en lugar de solamente una línea melódica que sube o baja.

La historia de la música a veces se divide en dos periodos. Uno que va desde el Canto Gregoriano hasta el siglo XVI y el otro, del siglo XVI al XX. El primer periodo se basa principalmente en la voz y el segundo en los instrumentos musicales.

Desde 1450 hasta 1580, la polifonía vocal fue reemplazada por los instrumentos. Las formas musicales “ricercare”, “canzona” y danzas renacentistas, entre otras, dieron lugar a la fuga, la sonata y la sinfonía. En estas últimas había un “cantus firmi”, sobre el cual se acostumbraba crear variaciones o improvisar melodías.

Había cuatro bases usadas comúnmente: el “passamezzo antico”, la “folía”, la “romanesca” y el “passamezzo moderno”. La folía se convirtió en la base de muchas variaciones del siglo XVII y el passamezzo moderno posee bases armónicas iguales a las del “blues”. Este es un ejemplo de cómo la música funcional o utilitaria para la danza se convierte en un medio intelectual donde ya no se crea para bailar, sino que se crea para y por la música misma, siendo ésta capaz de proporcionar placer si el oyente lo desea.

Después, la música polifónica se transformó (debido a varios factores, entre otros la reforma protestante, la contrarreforma católica, la invención de la imprenta, el desarrollo tecnológico, y el surgimiento del mercantilismo musical) en la música monofónica. La revolución de Lutero y Calvino vio a la música como valiosa. Los himnos cantados tenían su bendición. Debían ser simples, melodiosos, fáciles de recordar y cantar.

La música pasó a la armonía dejando atrás la polifonía. Se hizo “popular” en el sentido de que había un mayor número de personas que podían tener tiempo para disfrutarla (como los nobles), dinero para comprarla, leían textos para cantar o componer, además de que se hizo de ella una “gracia social”.

El primer concierto público (una ópera) con boleto tuvo lugar en Venecia en el año 1637. Pero solamente hasta mediados del siglo dieciocho hubo series de conciertos operáticos. La estrella era la cantante virtuosa quien tenía la gloria y la remuneración por el empresario. Este fue el origen del "sistema de estrellas" y de la "diva" y el "divismo" en la Música. Aquí cabe mencionar el origen también de la actividad del concertista la cual ha prevalecido hasta la fecha, una especie de "saltapueblos", es decir, un artista que brinca de pueblo en pueblo y de hotel en hotel como lo hacían las compañías de ópera o los circos. Si uno lo analiza, es una actividad verdaderamente absurda, pero al explotar la curiosidad del asistente, la cual es el gancho, la gente asiste a la función. ¿Porqué iban de pueblo en pueblo? Pues porque se satisfacía la curiosidad del asistente local y se saturaba el mercado. Cuando un porcentaje de los habitantes había asistido a la función y no iba a volver, bajaban las ganancias y por lo tanto era menester mudarse a otro pueblo.

Prevalecieron dos tipos de ópera: la seria y la cómica. Esta última dependía más de tonaditas que de líneas melódicas instrumentales. Se salía con la suya mediante ornamentaciones excesivas y acompañamientos polifónicos. Éstas no eran decisiones estéticas, más bien eran el producto que se obtuvo al simplificar a formas vulgares el teatro musical y que fueron y siguen siendo parte de todo festival y feria.

En el siglo XIX, las aspiraciones de la clase media que carecía de una tradición de gusto pero que deseaba el goce inmediato de la música llevaron a la comercialización y degradación de los estándares musicales. Así comenzó el abismo entre el compositor y la masa del público. Llamados por el rápido éxito financiero, compositores con menos principios, intérpretes y promotores de ópera de concierto e impresores de música cedieron a los "bajos instintos" y deseos de dicha audiencia. El resultado fue la creación de la "música popular" o "comercial", la cual no era folclórica ni formal (o seria, meditada, importante, de "peso" o "de arte") dirigida y vendida a una gran masa. Esencialmente era un producto sintético, desechable, basado fundamentalmente en danzas sociales que combinaban ritmos y melodías simples de la música folclórica con armonías y orquestación bajadas de la música seria.

Hagamos un símil con la Literatura o el Teatro. Podríamos repetir lo que se acaba de escribir como sigue:

En algún momento, no sabemos en qué siglo, las aspiraciones de la clase media que carecía de una tradición de gusto pero que deseaba el goce inmediato de la literatura llevaron a la comercialización y degradación de los estándares literarios. Así comenzó el abismo entre el escritor y la masa de público. Llamados por el rápido éxito financiero, escritores con menos principios, actores, promotores y editores de libros cedieron a los "bajos instintos" y deseos de la masa. El resultado fue la creación de la "literatura popular" o "comercial", la cual no era de tradición oral ni formal (o seria, meditada, importante, de "peso" o "de arte") dirigida y vendida a una gran masa. Esencialmente era un producto sintético, desechable, basado fundamentalmente en temas que combinaban argumentos triviales o simples de la vida mundana con estructuras y formas bajadas de la literatura seria.

Es así que hay literatura de arte, literatura popular o comercial, literatura que proviene de la tradición oral, la cual a menudo se llega a escribir, etc. Pero, es claro que, por ejemplo, la literatura popular o comercial no es considerada dentro de las Bellas Artes. También, como se mencionó anteriormente, "artista" es la persona que se dedica a una de las Bellas Artes. Por ende, un escritor que se dedique a uno de los géneros comerciales no es considerado artista.

Lo mismo sucede en la música. Aunque la gran mayoría de personas no lo sabe, y en muchos lugares, donde no hay ni siquiera un concierto al año ofrecido por un artista, se cree y les hacen creer a las personas que quienes hacen música comercial son artistas.

Recordemos que el “poder del placer” es el más grande que mueve al ser humano. Tan lo mueve, que existe una gran variedad de actividades como la tauromaquia, la lucha libre, el béisbol, el fútbol, el teatro de revista, el “teibol dans”, los antros, la pelea de perros, la pelea de gallos, la ópera, el cine comercial, el cine de arte, la literatura pornográfica, etc. todas ellas proporcionándole placer. Cada quien decide a cual o a cuales actividades acceder para obtener placer dependiendo de sus gustos personales, patología, antecedentes culturales, económicos, etc. Desde luego que la música es una actividad que puede proporcionar “placer”.

Con respecto a la literatura, es claro que quien está acostumbrado a leer a los grandes escritores, difícilmente los escritores de géneros bajos le proporcionarán placer alguno, aunque esto no es una regla. Quizás le proporcionarán un malestar debido a su nula calidad artística. Sin embargo, esos escritores son reales, existen y cumplen una razón de ser en este planeta. Llenan un hueco y satisfacen una demanda de los lectores de ese tipo de literatura. Lo mismo sucede con respecto a la música.

Un hecho obvio, pero que, por lo mismo, pasa sin ser detectado por la mayoría de la gente: la calidad C es inversamente proporcional a la masa M, es decir, si una obra tiene más calidad, habrá menos personas que lo puedan apreciar. Así, quienes buscan un mayor ingreso económico, requerirán de "llegarle a la masa" con temas triviales (sin hacer nada con los temas, es decir, temas que hasta los simios lo comprendan sin el menor esfuerzo).

Esto se puede expresar con la fórmula:

$$C \approx 1/M$$

o también

$$C \approx 1/E$$

donde E representa el ingreso económico.

Los supuestos "artistas" deben ser "famosos", es decir, que el mayor número de personas los reconozcan para poder vender más actuaciones o discos, etc. Los temas de lo que presentan, deben repetirse hasta la saciedad por los distintos medios para que nadie se escape de escucharlos, (en la radio, la televisión, los centros comerciales, etc.). Todo es parte de una gran mercadotecnia para obtener dinero de la gente (a menudo haciéndoles creer que eso es "arte"). Esta es la manera en que los supuestos artistas son hechos millonarios por esa gran masa de consumidores de sus productos comerciales desechables.

Una de las diferencias entre la Matemática y la Música, por ejemplo, es que la Matemática no cuenta con un instrumento donde tocarse.

El piano es un instrumento para la Música y el oyente la escucha por medio del sentido auditivo, el cual es capaz, si lo desea, de disfrutar, apreciar, etc. los sonidos emitidos en una secuencia dada. Por otro lado, el oyente de Matemática, si es lego, no podrá apreciarla ni disfrutarla a pesar de que ésta sea ofrecida en su propio idioma.

Aquí hay una diferencia importante. Mientras el oyente de música puede ser totalmente ignorante de la estructura musical, así como de sus aspectos técnicos, etc., puede sentir a través de sus sentidos alguna emoción o placer estético, mientras que el espectador lego en matemática no experimentará absolutamente ningún placer estético. La Matemática se transmite directamente de cerebro a cerebro o directamente de una "partitura" de matemática al cerebro. Sin embargo, para el oyente preparado en matemática el experimentar placer estético puede darse.

La Matemática existe desde que existe el ser humano. Prácticamente todo ser humano es un matemático en algún sentido. Desde los que utilizan la Matemática hasta los que la crean. También todos son hasta cierto punto filósofos de la Matemática. Efectivamente, todos los que miden, reconocen personas o cosas, cuentan o dicen que "tan claro como que dos y dos son cuatro" son matemáticos o filósofos de la Matemática.

Sin embargo, hay un número muy reducido de personas que se dedican a crear, enseñar, cultivar o divulgar la Matemática. Es muy común la creencia de que un matemático es una persona que se dedica a realizar enormes sumas de números naturales durante todos los días. También la gente supone que un matemático sabe sumar y multiplicar los números naturales muy rápidamente. Si pensamos un poco acerca de este concepto que la mayoría de la gente tiene podríamos concluir que no se requieren matemáticos ya que una calculadora de bolsillo realiza este trabajo. También, cuando uno les pregunta que cuál es la diferencia entre un matemático y un contador, no la saben. Los matemáticos no son los que calculan o hacen cuentas sino los que inventan cómo calcular o hacer cuentas. Hacer Matemática es imaginar, crear, razonar.

A pesar de que la Matemática es la más simple de las disciplinas sistemáticas que el ser humano ha creado, pues se concentra en conceptos abstractos nada comparables a la complejidad de los seres humanos, a muchas personas no les gusta la Matemática. Generalmente dicen que porque no la entienden. En su mayoría se refieren a lo que se enseña en la escuela primaria o secundaria. Una razón de esto es que son personas que nunca estudiaron constantemente y deseaban entender algún concepto sin antes haber entendido los anteriores. También es común entre estas personas el estudiar solamente para pasar algún examen y, de preferencia, solamente la noche anterior al examen. Se jactan de que nunca entendieron nada y de que nunca las han utilizado para nada. Dicen que son horribles y que nunca han podido hacer cuentas. Otra razón muy frecuente es la tradición familiar, en la cual algún papá o mamá comenta a sus hijos que ellos nunca pudieron entender nada, de que son muy difíciles y de que son horribles. Si esto es lo que le parece a papá o mamá ya podemos suponer qué pensarán o sentirán sus hijitos.

Poincaré se preguntaba cómo es posible que haya personas que no entienden matemática si éstas están basadas en leyes de la lógica aceptadas por el común de las personas. Pero el problema no es éste, sino que no se puede entender bien el argumento de una obra si no se ha visto desde el principio.

Las definiciones de la Matemática de los diccionarios, los cuales no son muy consultados por la mayoría de la gente, no ayudan a elucidar qué es la Matemática. Por ejemplo el diccionario de la Real Academia Española dice que la Matemática es la ciencia que trata de la cantidad. Otro dice que es una ciencia que trata de las cantidades, magnitudes, formas y sus relaciones por medio de números y símbolos. En otros diccionarios se describe a la Matemática como la ciencia del espacio y de la cantidad, las cuales en su expresión más simple se llaman Geometría y Aritmética.

Arrigo Coen Anitúa y Emilio Lluis Puebla

Según me comentó mi querido amigo Arrigo Coen, mathema significa erudición, manthánein el infinitivo de aprender, el radical mendh significa en pasivo, ciencia, saber. Luego, es lo relativo al aprendizaje. Así que en sentido implícito, Matemática significa: “lo digno de ser aprendido”.

No existe una definición de lo que es la Matemática. Sin embargo, se dice que es una colección de ideas y técnicas para resolver problemas que provienen de cualquier disciplina incluyendo la Matemática misma.

Se dice ¿Matemática o Matemáticas? Esta última denominación obedece a circunstancias históricas. En la Edad Media la clasificación en ramas estaba dada por la de Aritmética, Música, Geometría y Astronomía, que constituyeron el *Cuadrivium*. A éstas se les agregaron otras más, como el Álgebra y posteriormente la Teoría de Números. Sin embargo, desde la primera mitad del siglo XIX, debido al progreso en diversas ramas se le dio unidad a la Ciencia Matemática y justificaron el nombre en singular.

Trescientos años antes de Cristo, Euclides estableció los fundamentos de la Geometría. Su libro es el segundo más traducido y copiado después de la Biblia y todavía se enseña en nuestras escuelas primarias. Pero la importancia mayor de los Elementos de Euclides radica en que los presentó como un *sistema deductivo*. Presentó unas ideas elementales evidentes, las cuales se pueden combinar a través de manipulaciones lógicas para dar resultados cada vez más complejos. El proceso deductivo se conoce con el nombre de *demostración*. Así que la Geometría Euclidiana es el primer modelo formal de un sistema deductivo, el cual se ha convertido en un modelo a seguir. La Geometría se convirtió y sigue utilizándose como un modelo de entrenamiento para el razonamiento lógico en los niños (desgraciadamente no bien enseñado y mucho menos bien aprendido por parte de los estudiantes).

En cuanto a la Aritmética, el aspecto deductivo de ésta, realmente tuvo impacto en el siglo XIX, cuando se dieron cuenta que lo importante no eran los números de por sí, sino las operaciones binarias definidas en conjuntos, así como sus estructuras.

La Matemática existe en la mente de los seres humanos, después existe en los libros, en videos o en las memorias de las computadoras.

La Matemática posee una enorme aplicabilidad y constituye un lenguaje y marco indispensable para todas las ciencias. Esta es la razón por la cual no solamente unos cuantos individuos dedican su vida a ella sino que es materia de estudio en el sistema educativo y parte de la escena social.

La investigación matemática es la disciplina científica más alejada del hombre de la calle quien no posee absolutamente ninguna idea acerca de ella. Generalmente identifica a la Matemática con las ideas que difícilmente pudo absorber —a menudo sin éxito— en la escuela primaria o secundaria. La Matemática o lo que cree que es, le parece fría y cruda, sin vida (incluso habla de la frialdad de los números). Difícilmente se imagina que la Matemática fue creada en el pasado y sigue creándose en el presente por algunos seres humanos. Le es muy difícil de comprender el hecho de que sea una disciplina intelectual abstracta y de que posea una existencia independiente y floreciente. Una manera de establecer un contacto con ella es a través de libros como este o también a través de conocer y escuchar matemáticos que trabajen en las distintas disciplinas de la Ciencia que utilizan Matemática.

¿Cuál es la naturaleza y propósito de la Matemática y de la Ciencia? La respuesta usual es la de que el ser humano intenta comprender o entender el mundo físico y eventualmente controlarlo. Pero qué significa comprender o entender.

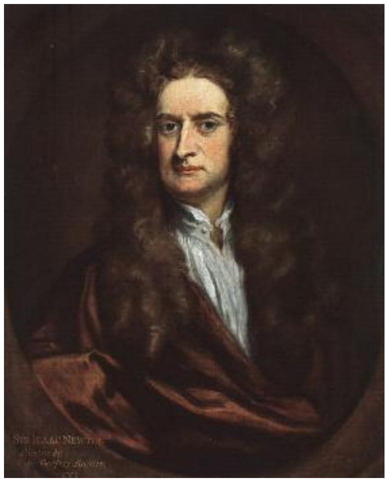
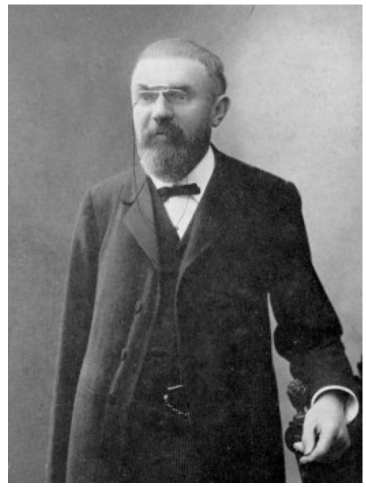
Sir Michael Atiyah

El gran matemático inglés Michael Atiyah duda que entendamos la demostración del teorema de los 4 colores. Las demostraciones por computadora alteran el concepto de demostración publicada. Lo que sucede es que existe una diferencia fundamental entre un experimento diseñado para encontrar hechos acerca del mundo natural y cálculos de computadora que conciernen con un problema puramente matemático propuesto por el hombre. Uno es externo y el otro es interno.

Una de las características más importantes de la Matemática es su arquitectura o diseño global, esto es, la forma elegante y profunda como las ideas abstractas están colocadas. La piedra angular de la buena matemática es la economía y simplicidad del pensamiento. Aunque uno de sus objetivos es el de proporcionar soluciones explícitas, a veces de carácter numérico, los desarrollos teóricos evolucionan esencialmente para evitar largos cálculos. Ese ahorro o flojera conduce a encontrar ideas o métodos alternativos para ese fin. Las computadoras carecen de ellos. Estas ideas o métodos son los necesarios para avanzar un poco.

Dicho de otra manera, dice Atiyah, la Matemática es una (bella, digo yo) arte que evita la fuerza bruta, mediante el desarrollo de conceptos y técnicas que nos permiten ligereza. Se dice que si las computadoras hubieran existido en el siglo XV, la Matemática actual sería una mala imitación de sí misma. El peligro real es el de dejar la Matemática a las computadoras. Las debemos de tener simplemente como auxiliares.

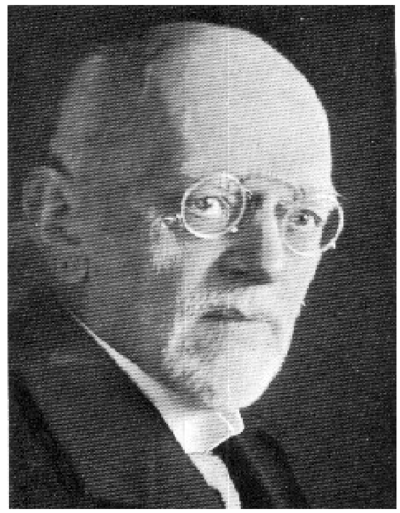
Las industrias tradicionales han declinado y las relacionadas con el cómputo han crecido. Esto hace que los empleos estén ligados a las computadoras. Este tipo de empleos alteran las actitudes y expectativas de las generaciones jóvenes. La Matemática está ligada a esto y a las escuelas, universidades, maestros y alumnos. El peligro para la Matemática está en que los nuevos grandes talentos se encaminen a la computación en lugar de a la Matemática. Pero esto puede que no suceda. Los verdaderos matemáticos están motivados por la belleza y poder de la Matemática y no por el dinero. Para aquellos que creen que la computadora puede realizar todo el trabajo oprimiendo un botón, hay que decirles que tienen todavía que enseñar a los niños a pensar cuál botón oprimir.

Isaac Newton (1643-1727) y Henri Poincaré (1854-1912)

¿Qué ha sucedido en la Matemática en los siglos anteriores? Atiyah menciona que los siglos XVIII y XIX podría llamárseles los de la Matemática Clásica. Al final del siglo XIX Poincaré y Hilbert eran las figuras dominantes, podrían considerarse discípulos de Newton y Leibniz, respectivamente.

Poincaré pensaba más en términos geométricos o topológicos y Hilbert más en el lado del formalismo y axiomatización. Poincaré, quien realizó trabajo pionero en la Topología predijo que ésta sería un ingrediente importante de la Matemática del siglo XX (algunos dicen que si se tuviera que nombrar de alguna manera al siglo XX sería como el siglo de la Topología). Mientras, Hilbert propuso su famosa lista de problemas los cuales no contenían los topológicos y no pudo predecir, según Atiyah, el alcance de la Topología en el siglo XX.

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) y David Hilbert (1862-1943)

La primera mitad del siglo XX la denomina la era de la especialización, donde la formalización tipo Hilbert y Bourbaki tiene lugar. La segunda mitad del siglo XX la denomina la era de la unificación, donde las áreas se traslapan y las técnicas se implementan entre ellas. Para el siglo XXI Atiyah propone llamarlo el siglo de la matemática cuántica o de la dimensión infinita, entendiendo por esto el entender adecuadamente el análisis, la geometría, la topología y el álgebra de varios espacios de funciones no lineales de tal manera que se obtengan demostraciones rigurosas de cosas hermosas que han estado especulando los físicos entre otras importantes (como la Geometría Diferencial No Conmutativa de Alain Connes).

La Matemática posee varias características que la hacen diferir de otras disciplinas.

La primera: es muy difícil describir o definir su materia de estudio. Es claro cuál es la materia de estudio de algunas áreas de la Astronomía o de la Biología pero no de la K-Teoría Algebraica. Esto se debe fundamentalmente a que los objetos de estudio son conceptos definidos de manera abstracta, los cuales a menudo van encadenados a otros conceptos previamente definidos. Su descripción se reduce a definiciones formales que requieren de conexiones neuronales, las cuales requieren de cierto tiempo para realizarse. Esto, aunado a una madurez matemática o entrenamiento matemático le permite al ser humano asimilar una buena cantidad de ideas abstractas. Por ejemplo, trate usted de explicarle a su "sobrinita preguntona" qué es la adición, o de qué se trata la Geometría Analítica, o qué es un anillo. Requerirá, después de muchas explicaciones intuitivas, establecer definiciones formales y tiempo, mucho tiempo.

La segunda característica es que posee una lógica perfecta.

La Matemática de Euclides es tan válida hoy como en la época de Euclides. Esto contrasta con otras teorías, como la de la tierra plana, la del flogisto o la del éter.

La tercera es lo conclusivo de la Matemática, esto es, las diferentes disciplinas toman conclusiones con base en las manipulaciones matemáticas.

La cuarta es su independencia, esto es, no requiere de equipos costosos a diferencia de las ciencias experimentales. Basta a veces lápiz y papel, o ni siquiera esto.

A pesar de los regímenes políticos de toda índole, la Matemática continúa evolucionando. Es interesante observar que sus bibliotecas son menos grandes que las de otras disciplinas.

¿Cuánta Matemática hay? Actualmente la Matemática está clasificada en 63 áreas con alrededor de 5000 subclasificaciones. Es política de los profesionales de la Matemática eludir la mayor o menor importancia de un área o de otra. En la práctica, cada miembro está convencido de la existencia e importancia de su propia área sin importar cuán sospechoso esté de las otras áreas y de sus adeptos. En general adoptan el principio de no agresión o de total indiferencia. Así que todos aceptan o toleran la existencia de las otras áreas, para algunos superfluas, de la Matemática. El dividir la Matemática en ramas con fronteras rígidas es absurdo y va contra el espíritu de la Matemática. La clasificación tradicional de la Matemática en Álgebra, Análisis, Geometría, etc., es ahora totalmente obsoleta.

¿Cómo se origina una teoría matemática? La historia de la Matemática nos muestra que una teoría casi siempre se origina de los intentos para resolver un problema específico.

Jean Dieudonné, un gran matemático francés, establece varias categorías de problemas para la Matemática pura. Puede suceder que los esfuerzos para resolver algún problema no produzcan frutos, teniendo así la categoría I, de problemas muertos al nacer.

Puede ser que el problema sea resuelto pero que los intentos por resolverlo no den lugar a un progreso en cualquier otro problema teniendo así la categoría II, es decir, la establece como la de problemas sin consecuencia, por ejemplo algunos problemas que surgen de la combinatoria.

Otra categoría consiste en examinar las técnicas utilizadas para resolver un problema, las cuales pueden aplicarse para resolver otros problemas similares o más difíciles, sin necesariamente entender el porqué funciona, es decir, la categoría III de problemas que proporcionan un método, como por ejemplo la teoría de grupos finitos o la teoría de números analítica.

La categoría IV es la que consiste de problemas que pertenecen a una teoría general fértil y activa que revelan la existencia de estructuras subyacentes insospechadas que no sólo iluminan la pregunta original sino que proporcionan métodos para dilucidar problemas huéspedes de otras áreas, por ejemplo la Topología Algebraica o la Teoría de grupos de Lie.

La categoría V que consiste de teorías en decadencia, las cuales no han florecido por varias razones, por ejemplo, una vez que han sido resueltos los problemas de mayor importancia así como las conexiones con otras ramas la teoría parecería concentrarse en problemas especiales y aislados, y probablemente muy difíciles. Por ejemplo, la teoría de invariantes.

Finalmente se tiene la categoría VI la cual consiste de teorías en estado de dilución, es decir, si se modifica una colección de axiomas de una teoría exitosa ya sea quitándole o agregándole axiomas sin ninguna razón aparente tratando de lograr el éxito de la teoría original, a menudo resulta en un esfuerzo infructuoso.

Menciona Dieudonné que la mayoría de los temas tratados por el Seminario Bourbaki pertenecen a las categorías IV y con menos extensión a la III. (El grupo Bourbaki ha escrito y continúa escribiendo un compendio de la Matemática comenzando con los conceptos más generales y concluyendo con los más particulares desde 1939).

La Matemática posee fundamentalmente dos fuentes para la creación de nueva Matemática. La Matemática por sí misma es una y la otra es la demanda que producen de ella otras ciencias y la tecnología. Un reto sin par en la Matemática es el de relacionar dos áreas de la Matemática aparentemente desconectadas.

Mucha Matemática se crea por simple curiosidad. Pero esta simple curiosidad sólo la poseen los grandes matemáticos. Uno de los problemas más difíciles para un matemático principiante (o no tan principiante) es el de encontrar un problema. A menudo sucede que casi toda la emoción de la creación y penetración está concentrada en formular la pregunta adecuada. Podría decirse que esto es más de la mitad del trabajo y a menudo la que requiere de inspiración. Esta es una gran diferencia con la investigación en otras áreas del conocimiento y es precisamente por esto el que la investigación matemática es extremadamente difícil. La respuesta puede ser también difícil, puede requerir mucho ingenio, puede utilizar técnicas conocidas y en el mejor de los casos requiere de la invención de nuevas técnicas. El matemático no procede como un detective para encontrar la solución de su problema. No es una computadora de deducciones, sino procede mediante experimentación (que no utiliza tubos de ensayo o equipos costosos), mediante la inducción y, si hay suerte, inspiración.

Poincaré escribe a principios del siglo XX, que una demostración matemática no es una simple yuxtaposición de silogismos, sino silogismos colocados con cierto orden y que el orden en que son colocados es mucho más importante que los silogismos por sí solos. Comenta que no tiene miedo de que alguno de éstos se le olvide pues cada uno de ellos tomará su lugar en el arreglo sin el menor esfuerzo. También describe el proceso de creación: primero se realiza un trabajo consciente acerca del problema, después deja madurar esas ideas en el subconsciente, luego aparece la solución, quizás cuando menos se espera, y finalmente ésta se escribe.

La actividad en la cual la Matemática encuentra aplicaciones fuera de su propio campo se llama Matemática Aplicada. La Matemática Aplicada es automáticamente multidisciplinaria, e ideal y probablemente debería realizarse por alguien cuyo interés primario no es la Matemática. Sin embargo encontramos que es mucho menos difícil que una persona que adquiere una formación matemática se adentre en otras disciplinas. Esta es una gran ventaja para los estudiantes y egresados de una licenciatura de Matemática.

Si la actividad multidisciplinaria es por ejemplo la Física, es difícil saber qué clasificar como Matemática Aplicada y qué como Física Teórica. La aplicación de la Matemática en áreas diferentes de ella misma da lugar a cuestiones de otra índole. Supongamos que tenemos una aplicación de la teoría de ecuaciones diferenciales parciales en la teoría matemática de la elasticidad. Podríamos preguntarnos si la teoría de elasticidad tiene aplicación fuera de sí misma. Supongamos que sí la tiene en ingeniería teórica. Luego nos podríamos preguntar si ésta tiene interés en la ingeniería práctica. Supongamos que sí, y que permite realizar un análisis de puertas automotrices. Luego nos podríamos preguntar cómo afecta esto al hombre común. Supongamos que se cumple un requerimiento de ley al tener puertas adecuadas. Así podríamos rastrear la aplicación de la Matemática hasta el nivel de consumo. Podríamos continuar, ¿es útil un automóvil? ¿es útil consumir? etc.

Llamémosle "utilidad común" a la que llega hasta el hombre de la calle. (Asumimos que sabemos lo que el hombre de la calle desea). No se sugiere que el criterio de la calle sea el único para juzgar la utilidad de la matemática.

Se dice que la finalidad propia de las aplicaciones de la matemática es la de que la Matemática sea automatizada. Por ejemplo, el descenso del hombre en la luna requirió de muchos cálculos pero que estaban automatizados.

Imaginemos un diagrama [D-H] con el MUNDO FÍSICO, luego EL MUNDO MODELADO CON MATEMÁTICA, luego LAS TRANSFORMACIONES Y OPERACIONES MATEMÁTICAS y finalmente LAS APLICACIONES AL MUNDO FÍSICO.

Las dos de en medio se convierten en un proceso automatizado. Mientras más exitosa y completa sea una aplicación, más automática y programada se debe convertir.

Un ejemplo: la Teoría Matemática de la Música.

Comenzó hace más de dos décadas. Una de las principales metas de la Teoría Matemática de la Música es la de desarrollar un marco científico para la Musicología. Este marco posee como fundamento campos científicos establecidos. Incluye un lenguaje formal para los objetos, relaciones musicales y musicológicas.

"The Topos of Music" [ToM] es un libro de Guerino Mazzola del cual tengo el honor de ser uno de los colaboradores. Podemos apreciar que el mismo título de la obra, "The Topos of Music", posee un doble sentido. Por un lado está la palabra griega topos, que significa lugar y que sugiere la ubicación del concepto de la Música como un tópico, en el sentido de Aristóteles y Kant. Por otro lado, se hace referencia a la teoría matemática Topos que sirve para reflejar el sistema de signos musicales, esto es, la Música en su faceta de un sistema abstracto cuya estructura puede permanecer escondida sin un marco adecuado de comprensión. Este doble significado expresa, de hecho, la intención de unificar una profundización filosófica con la precisión de la Matemática, en torno a la Musicología. La Música está enraizada con realidades físicas, psicológicas y semióticas. Pero la descripción formal de las instancias musicales corresponde al formalismo matemático.

La Teoría Matemática de la Música está basada en las Teorías de Módulos y Categorías, en la Topología Algebraica y Combinatoria, en la Geometría Algebraica, Teoría de Representaciones. Su propósito es el de describir las estructuras musicales. La filosofía detrás de ella es la de comprender los aspectos de la Música que están sujetos al raciocinio de la misma manera en que la Física puede hacerlo de los fenómenos propios del trabajo científico.

Esta teoría está basada: en un lenguaje adecuado para manejar los conceptos relevantes de las estructuras musicales, en un conjunto de postulados o teoremas con respecto a las estructuras musicales sujetas a las condiciones definidas y, en la funcionalidad para la composición y el análisis con o sin computadora.

Mazzola, ya en su artículo "Status Quo 2000", [M-N-LL] (el cual hemos apreciado mucho que fuese presentado en México durante una exposición plenaria espléndida en Saltillo), explicó porqué el acercamiento mediante su modelo teórico geométrico de los años ochenta evolucionó a un marco que es apropiado para muchos problemas musicales. Ese nuevo marco está basado en Matemática más sofisticada como la Teoría de Topos (Véase el Apéndice II). Cabe mencionar algo notable: dentro de este tema se realiza matemática de alto nivel, no solamente aplicaciones, es decir, se hace matemática nueva, se prueban resultados matemáticos con los objetos definidos.

La Música es una creación central de la vida y pensamiento del ser humano. Que actúa en otra capa de la realidad que la Física. Creemos que el intento de comprender o de componer una obra de gran envergadura en la Música es tan importante y difícil como el intento de unificar la gravitación, el electromagnetismo, las fuerzas débiles y fuertes. De seguro, las ambiciones son comparables, y por lo tanto, las herramientas deben de ser comparables. La Matemática provee una base científica para comprender la Música y la Musicología y para que esta última pueda considerarse una ciencia, no una rama de la literatura poética común y corriente.

Existen aspectos contrastantes y alternativas dentro de la investigación matemática. A continuación veamos algunos.

Existen diferencias entre lo que realiza un matemático puro y uno aplicado aunque existe también una interrelación entre las dos.

En cuanto a la Matemática Pura, está la alternativa acerca de la teoría matemática y la resolución de problemas. Existe una gran variedad de problemas. Si algunos de ellos se pueden resolver mediante argumentos ingeniosos de una manera parecida, entonces decimos que tenemos un método para resolverlos y si éstos son muchos, entonces decimos que tenemos una “teoría matemática”. Así se evoluciona, de una colección de problemas, a una “teoría”, la cual difiere del concepto que de ella se tiene en otras disciplinas científicas.

La Matemática es una actividad humana y por ende hay que poderla transmitir a las generaciones siguientes, por lo cual se organiza sistemáticamente para que los que la estudien lo hagan de la manera menos dolorosa posible. Ésta es la forma básica de lo que es una Teoría Matemática.

Poincaré decía que una casa está hecha de ladrillos pero que los ladrillos por sí solos están lejos de ser una casa.

¿Cómo se da la innovación en la Matemática? A diferencia de otras disciplinas científicas, en la Matemática, la creación de nuevos métodos o técnicas constituye la innovación, la cual es vital para el progreso de la Matemática.

No se requiere del descubrimiento de antiguos documentos manuscritos, ni del trabajo experimental o de la introducción de nueva tecnología. La innovación se da, entre otras cosas, por la creación de nuevas técnicas.

Por ejemplo, cuando Galois se dio cuenta al trabajar en el problema de la insolubilidad por radicales de la ecuación polinomial general de grado al menos 5 que la clave estaba en las simetrías de las cinco soluciones de la ecuación, proveyó los fundamentos de la teoría general de la simetría, la cual es una de las ramas más profundas y de amplio espectro de toda la Matemática, llamada Teoría de Grupos.

También hay innovación interna al tratar de dar cohesión a una teoría matemática, al realizar preguntas adecuadas, las cuales requieren de mucha intuición y compenetración. También puede venir de problemas de otras disciplinas.

Se puede decir que hay progreso matemático cuando existe una aplicación continua de métodos usuales intercalados espectacularmente con nuevos conceptos y problemas. Un ejemplo sería la K-Teoría Algebraica (véase el Apéndice I).
Hay varias características estéticas de la Matemática. La universalidad, en el sentido de que casi cualquier rama del conocimiento posee aspectos que se pueden analizar matemáticamente. El desarrollo de argumentos simples y concisos es absolutamente indispensable para el progreso de la Matemática. La selección y formulación de problemas son un arte que depende de la intuición del matemático. Aquí, los aspectos estéticos juegan un papel muy importante.

Poincaré concebía la creación de la Matemática como se mencionó anteriormente y se puede hacer un símil con la creación musical. A manera de broma, pareciera que Poincaré creaba Matemática al subirse o bajarse de un tranvía.

Hadamard recomendaba tomarse dos baños de agua caliente para estimular la investigación matemática. Muchos matemáticos beben café, transformándolo en teoremas. También he escuchado que la Matemática se hace caminando, es decir cuando se dejan las ideas en el "inconsciente" y de repente ocurre una "feliz idea", la cual es, quizá, una serie de conexiones neuronales que tienen lugar en el tiempo las cuales se logran mejor cuando no interviene un acto consciente demasiado fuerte que las impida.

Hay una distinción entre formalismo y rigor matemáticos. En la Matemática formal, uno crea matemática sin preguntarse demasiado acerca del significado mientras ésta dé el resultado correcto. Uno sigue adelante sin preocuparse demasiado por el rigor matemático esperando que en el futuro éste sea provisto.

La Matemática, hay que insistirlo para no perderlo de vista, es esencialmente una actividad humana y nuestra meta no solamente es inventarla sino trasmitirla. Así, el rigor matemático debe existir. Si no se tienen bases sólidas, cualquier construcción basada en ellas podría caer.

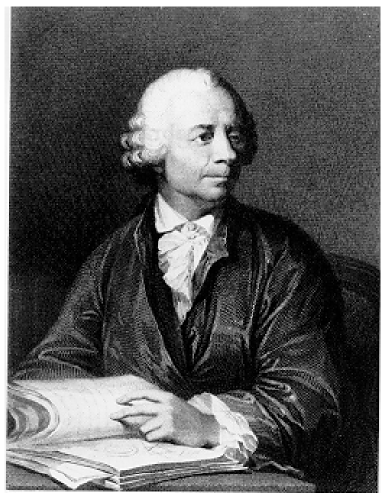
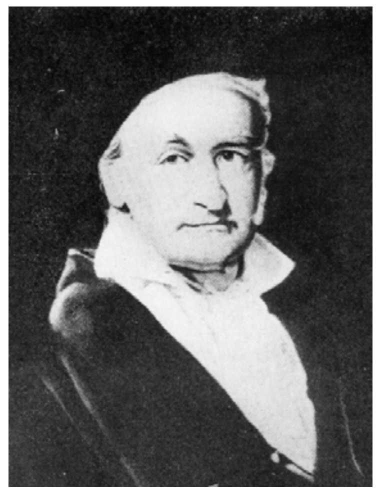
La revolución industrial se medía en siglos, la revolución de la computadora se mide en décadas o lustros y quizás años dentro de poco. En los siglos XVIII y XIX, la mano de obra fue reemplazada por las máquinas y aparentemente el siglo XX se caracterizó por el reemplazo del cerebro por la computadora. En un principio, la ciencia del cómputo creció conjuntamente con la Matemática. Turing y von Neumann son algunos de sus pioneros. Aún ahora, la Matemática es la ciencia más cercana a la del cómputo. La Lógica Matemática proporcionó una base para la computación, refiriéndonos al software. Sin embargo, es el chip de silicón el que permitió la revolución.

Los matemáticos hemos estado interesados siempre en el concepto de "demostración", es decir, en la rigurosa deducción de varias conclusiones a partir de ciertas suposiciones. Hay que dar instrucciones precisas para que funcione un ordenador o computadora y la Lógica Matemática es el marco adecuado para formularlas.

Relacionado con la idea de demostración está la de algoritmo, es decir, la de un método para hacer algo, en particular, para resolver un problema. Éstos son requeridos para que la computadora realice tal o cual cosa. Una rama de la Matemática se dedica al estudio de los algoritmos, en particular los rápidos, a saber, la Teoría de Complejidad. Así que las Teorías de las Demostraciones y Complejidad son dos tipos de matemática creadas por las necesidades del cómputo. Como las computadoras usan el conjunto $\{0,1\}=Z_2$, están relacionadas con la Matemática Discreta ejemplificada por el Álgebra. Atiyah menciona que algunas personas argumentan por esto el que debe de modificarse drásticamente la enseñanza de la Matemática quitando el énfasis en el Cálculo que a menudo se realiza desde hace mucho tiempo.

La computadora proporciona una manera muy rápida de obtener soluciones numéricas a distintos problemas. En la Matemática Aplicada un problema tiene una solución satisfactoria si se puede proporcionar un algoritmo en la computadora de tal manera que se tengan disponibles las soluciones numéricas. Pero no todo son números, por ejemplo, las expresiones de lógica no representan números. Las expresiones simbólicas ya han sido consideradas en la computadora y son manipulables. Como ejemplo de esto está la determinación de todos los grupos finitos simples la cual se llevó al cabo utilizando poderosas computadoras.

En la Matemática, hay varias etapas para generar nuevos resultados. Identificar hechos relevantes, su arreglo en patrones que poseen un significado, la posible extracción de una fórmula, el corroborar la fórmula y hasta el final la demostración. La computadora puede ser útil en las primeras etapas. Es lógico que se trate de probar que ciertas conjeturas son válidas simplemente sustituyendo valores pero cuyos cálculos resultarían demasiado largos y tediosos de realizarlos a mano. Ahora podemos hasta ver los resultados en forma gráfica en algunas ocasiones. Antes se tenían que realizar a mano, tal como los realizaron Euler o Gauss.

Leonhard Euler (1707-1783) y Carl Friedrich Gauss (1777-1855)

Atiyah comenta que sin duda, el problema más importante del siglo XXI, es el de comprender cómo funciona el pensamiento humano. Este proyecto obviamente requerirá de matemáticos, entre otros muchos especialistas de otras disciplinas científicas.

Existe una solución del famoso problema de los cuatro colores, el cual establece que es suficiente el colorear con cuatro colores cualquier mapa del planeta con la condición de que países adyacentes sean coloreados de manera diferente. Este problema data del siglo XIX y en el XX se resolvió utilizando una computadora que comprobó cientos de casos.

Fue un gran triunfo pero a la vez una gran desilusión desde el punto de vista estético, además de que no se crearon nuevas técnicas a partir de la demostración. Se usó la fuerza bruta. ¿Será así en el futuro? pregunta Atiyah.

CAPÍTULO II

Músicos y Matemáticos

En este capítulo describiré el quehacer de los músicos intérpretes y de los matemáticos.

Algunos consideran que la Música es sonido organizado con una finalidad expresiva. Sin embargo, para mí, una de las características más importantes que debe poseer la Música con valor artístico, muy brevemente dicho, es la de que cumpla con "dado un tema, qué hacer con el tema" y realmente hacer algo con él.

La música vive a través de la interpretación. Entre una obra musical y el mundo está el intérprete que da vida a la partitura. Sin embargo la relación entre el artista intérprete y el creativo ha cambiado profundamente en la historia de la música y así continúa haciéndolo.

Las pinturas en las galerías se aprecian directamente por el público, lo mismo ocurre con la escultura y la arquitectura. En la poesía nosotros podemos ser nuestros propios intérpretes, pero en el caso de la música, la partitura sólo tiene sentido para el que sabe leer e imaginar los sonidos de las notas en la partitura. El público depende de los intérpretes para apreciar obras maestras. Así que, el intérprete es de suma importancia para darle vida a esas bolitas negras impresas en el papel.

¿Cuál libertad tiene el intérprete y dónde está su límite? Los compositores viven en una época determinada y reciben una influencia de su entorno social. Para conocer el estilo de un compositor hay que comprender su entorno, su época, la estética en esa época. Sucede que el compositor murió hace muchísimos años y es frecuente que no deje ninguna clave de cómo quería que su música fuese interpretada. Solamente está la partitura. Bach, Beethoven o Rachmaninoff no pueden ser consultados, pero sí podemos saber mucho de su entorno y saber leer sus partituras.

Para comprender cómo es la interpretación de la música hoy es necesario saber cómo era en el pasado. Es muy difícil comprender las obras de hace mucho tiempo solamente teniendo la partitura enfrente. Hay que conocer y aprender a interpretar una partitura. El intérprete debe aplicar los descubrimientos históricos y musicológicos.

El papel de un intérprete en la sociedad actual es el de preservar y el de dar vida a las grandes obras musicales. Por sí misma, la Música es tan solo una serie de notas negras impresas en un papel. ¿Cuál es entonces, el principal problema de la interpretación? Para mí, es el de acercarse lo más posible a las intenciones del compositor y a partir de esa base dar vuelo uno a su imaginación. Por un lado, el intérprete está al servicio de las intenciones del compositor y por el otro, pone su propia personalidad.

El Voyager lleva como carta de presentación de la especie humana un disco grabado con lo más representativo. Entre otras cosas lleva su música y sus lenguajes. Es decir, algo de la creación realizada por el Ser Humano.

A menudo el intérprete cobra un papel muy resaltado que hace pasar al compositor a un segundo plano. Muy frecuentemente los compositores son los peores intérpretes de sus propias obras. Hay que recordar que la enseñanza de un instrumento se realiza uno a uno, es decir, del maestro al alumno individualmente y por tradición oral. No existen textos que enseñen cómo tocar el piano, por ejemplo. Aquí el maestro es fundamental. Esta es la auténtica y única manera de realmente aprender algo. Las demás disciplinas deberían de tomar esto muy en cuenta. No se puede enseñar a tocar un instrumento en clases masivas de cincuenta alumnos simultáneamente. Cada alumno es diferente y tiene su propio ritmo de conexiones neuronales, que es lo que realmente se hace, para aprender una obra musical o cualquier otra actividad.

Debido a lo escrito en el Capítulo I, la actividad del concertista de ir de pueblo en pueblo y explotar la curiosidad de la gente hizo que el artista realizara los actos pirotécnicos más increíbles para satisfacer las "bajas pasiones" de los asistentes. Harold Schoenberg [Sch] lo describe de manera muy ilustrativa: podríamos reírnos ahora pero en aquel entonces había un punto de vista distinto. El ego era lo importante. Yo soy el artista, yo soy el ejecutante, mi mundo interior es el que describiré. Rousseau había expresado: "Soy diferente de otros hombres. Si no soy mejor, al menos soy diferente". La Música era parte del misterio, tenía un significado o significados, una idea o ideas, ligadas a la naturaleza, el alma, la vida, etc. La música expresaba estados de ánimo y debía de tener un programa, explícito o implícito. Difícilmente existía un músico del siglo XIX, incluyendo a Clara y Roberto Schumann, Joachim y Von Bülow que no viera en la música un mensaje más allá de la música impresa. En el contexto del siglo XIX, la personalidad era lo importante y era más importante que la música.

Los cantantes, por ejemplo, siempre habían estado menos interesados en la nota impresa que otros músicos. La primera vez que Adelina Patti cantó para Rossini en su famosa soirée y con él al piano acompañando "Una voce poco fa" del Barbero de Sevilla, al finalizar, Rossini fríamente le preguntó que quién había compuesto el aria que acababa de cantar.

Aún en 1905 Teodoro Leschetitzky hizo un rollo para piano de un nocturno de Chopin. Fue el maestro más distinguido, respetado y popular después de Liszt, y sus alumnos fueron de los más famosos en el siglo XX. Introdujo en esa grabación nuevas armonías, una o dos cadencias, etc. que en el presente sería intolerable. Pero en 1905 nadie se preocupaba por eso. Viejas grabaciones de Planté, Pachmann, Paderewski, Lamond, d'Albert etc. confirman esa tendencia de agregar o quitar partes a la música. Para escuchar a esos pianistas debemos de situarnos en su época y cambiar por entero nuestro concepto de la verdadera naturaleza de la música. Liszt pensaría que el Beethoven y Schubert de Artur Schnabel (1882-1951) era insípido y carente de imaginación así como Schnabel pensaría del de Liszt como excéntrico, salvaje y extravagante. ¿Quién estaría en lo correcto? Ambos lo estaban de acuerdo a los estándares de su época.

Hubo una serie de pianistas en el Romanticismo temprano y murieron para nunca mas regresar. Ahora serían llamados “los pianistas de cocktail”. Se llamaban los "pianistas de salón". Su nombre viene de que no tocaban en las salas de concierto y de que tocaban en salones. Se concentraban en un repertorio muy ligero, cosquilleando a sus oyentes con las más bajas formas de basura musical. Uno de ellos era Dreyschock quien tenía la especialidad de tocar el estudio revolucionario (Op.10, No.12) de Chopin, todo en octavas con la mano izquierda.

Surge la cuestión inevitable sobre si la partitura ha de interpretarse literalmente o si el ejecutante ha de tener carta blanca en la interpretación general. Hemos de considerar que para ello, aparte del manuscrito de la partitura, también debe tenerse en cuenta, de una manera más libre, el medio ambiente que la rodeaba. Si todo esto pudiera solucionarse con una simple fórmula, la continua discusión sobre la interpretación no existiría. Difícilmente veríamos a un solo intérprete elegido como el omnisciente, el único al que los enigmáticos textos le han descubierto sus secretos significados, mientras que los otros intérpretes no han sido escogidos por el destino para convertirse en iniciados en los misterios de la partitura-esfinge. Sería tan sólo una cuestión de lectura y conocimiento de la partitura, que en cada caso hablaría y se explicaría por sí misma.

Sin embargo, este problema de la objetividad o subjetividad en la interpretación musical es de una gran complejidad. Para comenzar, todos los intérpretes son diferentes seres humanos. El impulso natural de cada uno hacia una misma partitura va a diferir necesariamente. Las experiencias humanas y artísticas, el medio ambiente, la educación y la cultura personal de cada uno, son igualmente diferentes.

A pesar de todo esto, sería aún concebible asegurar una autenticidad en la interpretación, es decir, la realización objetiva de los deseos del autor, si es que estos existen, y como si la partitura fuera suficientemente explícita como para proteger las intenciones del compositor frente a cualquier falsa interpretación por parte del ejecutante.

Hasta las partituras modernas, frecuentemente admiradas como uno de los más elevados logros del espíritu humano, están, no obstante, lejos de la perfección. Naturalmente, los grandes compositores han transformado magníficamente sus ideas en partituras, haciendo el mejor uso posible de la notación musical. Pero es esta misma notación la que es imperfecta y así puede permanecer para siempre, a pesar de las excelentes contribuciones que se han hecho en su mejoría. Existen ciertos factores intangibles que no pueden ser expresados con nuestro método de escribir música -elementos musicales vitales, incapaces de ser fijados por los símbolos y signos de la notación-. En consecuencia, las partituras son representantes incompletos de las intenciones de los compositores. Ninguna partitura, tal como aparece en el manuscrito o publicada en imprenta, puede ofrecer una información completa a su intérprete (y qué bueno que así es). Así, encontraremos una enorme y variada gama de interpretaciones de una misma partitura, y todas pueden ser válidas artísticamente.

A medida que retrocedemos a través de los diferentes periodos de la historia, encontramos mayor dificultad para leer y conocer la partitura, para entender sus signos y sus símbolos gráficos, y para completar sus escasas indicaciones, si es que existen -todo lo cual es necesario para la fiel ejecución de la obra-. Instrucciones de un tipo que hoy se consideran indispensables, como el tempo principal de una composición, eran frecuentemente omitidas en partituras antiguas. Esto significa que, desde el mismo comienzo, el intérprete ha de completar el material de la partitura con su propio buen juicio. En consecuencia, hasta el intérprete con el espíritu más objetivo se ve metido ocasionalmente en terrenos subjetivos, independientemente de sus leales inclinaciones.

Nada más difícil que esta tarea de replantearse las obras antiguas, sobre la base de la elástica partitura original, en términos de los grandes maestros que las escribieron. Existen tres caminos para sacar al intérprete de este laberinto. Primero, debe aprender cómo leer el manuscrito y entender su lenguaje. Segundo, su fantasía debe descubrir la esencia musical, el lenguaje interno tras los símbolos escritos. Finalmente, el intérprete debe estar totalmente familiarizado con el entorno y la tradición de una obra: con todas las costumbres que rodean a la obra en el momento de su creación.

Este fin sólo puede ser alcanzado si el intérprete se apoya en el conocimiento acumulado del historiador experto, como verdadero guardián del estilo auténtico. Por supuesto que el estilo no es el único requisito para obtener una fidelidad de interpretación, pero ciertamente es el armazón sobre el cual apoyarse. Si la música vive a través de su interpretación, entonces la auténtica interpretación sólo puede vivir a través del estilo genuino.

Hay un cambio en la estética musical; bien podría ser y probablemente será que dentro de cincuenta años el Beethoven que se escuche sea bastante diferente del actual.

Entonces, ¿cuál es el principal problema de la interpretación? Para mí, vuelvo a decir, es el de acercarse lo más posible a las intenciones del compositor y a partir de esa base, dar vuelo a su imaginación. Por un lado, el intérprete está al servicio de las intenciones del compositor y por el otro pone su propia personalidad. El sentido de la interpretación actual es el de "que tan lejos puede ir la imaginación alrededor del texto original, tal y como fue escrito".

La interpretación musical no solamente es tocar ese conjunto de bolitas negras impresas en el papel que representan sonidos. La música está por arriba, por abajo y entre las notas, así como en los silencios y especialmente en ellos.

Prácticamente toda cultura ha creado Matemática de alguna forma y en la actualidad casi todos los países poseen matemáticos los cuales no están aislados como en la antigüedad, y podría decirse que la Matemática actual está unificada y se transmite libremente y casi totalmente. Se realizan congresos nacionales e internacionales donde se realizan intercambios de ideas libremente entre los participantes y son un medio adecuado para el desarrollo de la Matemática.

La investigación matemática ya no es un pasatiempo de la aristocracia ni es patrocinada por la iglesia o la monarquía. Desde el siglo XIX ésta se desarrolla principalmente patrocinada por las universidades (las cuales reciben un subsidio proveniente de los impuestos o de donativos de corporaciones de diversa índole) permitiéndole o exigiéndoles a sus académicos que realicen investigación. Pero desgraciadamente supervisada por burócratas que desconocen qué es la Matemática. Existe un número pequeño de matemáticos en todo el mundo comparado con la población total. En México (en 1999) se estima que es aproximadamente alrededor de 3000 licenciados en matemática en toda su historia, de los cuales aproximadamente 900 están activos y la Sociedad Matemática Mexicana cuenta con alrededor de 1000 miembros al final de 2001 (no todos al corriente de su membresía). Así que el .001% de la población mexicana es un licenciado en Matemática activo, aproximadamente.

Existen cerca de dos mil revistas en todo el mundo donde se publica Matemática periódicamente.

El matemático requiere para su trabajo de papel y lápiz, gis y pizarrón. Requiere de tiempo adecuado y disponibilidad para pensar, acceso a información en bibliotecas y una situación libre de problemas económicos. El uso de una computadora, contra lo que se cree, es mucho más utilizada por los ingenieros, físicos, astrónomos, químicos, economistas, secretarias, médicos, bibliotecarios o contadores y ha permanecido, salvo en un porcentaje pequeño, como máquinas para escribir o procesadoras de textos para los matemáticos puros. Sin embargo, cada día aumenta el uso de ella para resolver algunos problemas matemáticos. Casi toda la investigación matemática se sigue realizando como si no hubiera computadoras (u ordenadores como algunos prefieren llamarlas).

En general un estudiante de la licenciatura de matemática trabaja durante toda su carrera con alrededor de 20 libros básicos, mas quizás, otros 20 de consulta, a diferencia de otras carreras donde la cantidad de libros puede superar los 500. Esta notable diferencia se debe a que el estudiante de Matemática lee, razona, asimila cada palabra, cada renglón, medita y vuelve a releer, etc. de tal manera que puede pasar días con 1 hoja. Una excelente biblioteca de Matemática posee alrededor de 100,000 volúmenes. Esta cantidad de información está muy por encima del alcance de asimilación del ser humano. Esta biblioteca, comparada con las de otras ramas del conocimiento es de menor tamaño. En el medio matemático es o debe ser bien conocido este hecho. De aquí la modestia, en general, de los matemáticos, pues sabemos de lo mucho que ignoramos. (A diferencia de otros profesionistas donde el egresado no sabe lo que ignora y se cree el dueño del saber).

¿Cómo es un matemático? ¿A qué problemas se enfrenta en la vida real? ¿Cuál es su estereotipo y qué imagen posee de sí mismo? ¿Cuál es la imagen de un matemático para los demás? Cuando a un matemático le preguntan que de qué se trata su área de trabajo, le están preguntando algo que requiere de mucho tiempo para contestarla. En lo personal les contesto con otra pregunta: ¿de cuánto tiempo dispone usted para escuchar la respuesta? Luego, el matemático le trata de explicar que la tal teoría algebraica requiere de dos años de estudio del posgrado para que pueda entender más o menos la definición de los objetos de estudio de la tal teoría. Inmediatamente, la cara sospechosa del interlocutor menciona que ¡si se está seguro de que esa es una teoría válida! Más aún, su desconfianza aumenta cuando se pregunta si algo que no puede explicarse con palabras existe o si el tipo se está haciendo tonto. Sin embargo insiste en que se le dé una idea vaga de lo que se está haciendo o de los problemas más relevantes del área. Así, el matemático le dice que el cálculo del n-ésimo grupo de homotopía de la construcción más de Quillen del espacio clasificante del grupo lineal general del anillo de los números enteros es el problema más importante de su rama, el cual lleva más de dos décadas sin poder resolverse... Luego viene la pregunta de para qué sirve eso, a la cual el matemático solamente puede decir que, efectivamente tiene aplicación en otras ramas de la Matemática y quizás tenga aplicaciones en el futuro a otras disciplinas pero que de momento no las tiene. Después le pregunta que cuál es el resultado más importante en los últimos años en esa rama, a lo que el matemático le contesta que no le puede explicar pues requeriría de mucho tiempo (probablemente años o quizás nunca) para que tuviera algún sentido para quien pregunta. Luego viene la pregunta de qué tan relevante es su trabajo y si las empresas o el gobierno lo utilizarían, cuántas personas lo entenderían y si el señor gobernador lo puede inaugurar. Lo que sucede es que el trabajo de frontera en la Matemática, en una subdivisión de alguna rama, solamente es inteligible para unas cuantas decenas de matemáticos de todo el mundo. Es muy probable que la rama a la cual se dedica un matemático no haya existido en la fecha de su nacimiento. Piensa que su rama es muy importante y que está firmemente establecida en el mundo real. Es decir, no duda de su existencia. Está etiquetado por su campo de trabajo, por cuánto publica, por el de quién es el trabajo que utiliza en su investigación y por la selección de los problemas que escoge. Pasa años contemplando y estudiando, meditando, pensando y su éxito puede llegar si produce un resultado nuevo. A menudo cree haber probado una conjetura importante o producido un teorema nuevo pero también a menudo algún colega le encuentra una pequeña falla en su argumento con lo cual la conjetura sigue abierta. Se siente un poco incomunicado, (ya hay correo electrónico) y solamente en su Universidad existe un colega que puede medio entender lo que a él le apasiona. No se diga que para el resto de los matemáticos su área de trabajo es totalmente desconocida, hasta de nombre, o que sus colegas creen que se trata de tal o cual cosa pero resulta todo lo contrario.

El matemático asiste, cuando por cuestiones financieras se le permite, a congresos nacionales o internacionales. La gran mayoría realiza las actividades de preparación adecuadamente y a la altura de su profesión. Los más, asisten a los congresos de una manera usual sin llamar la atención por sus atavíos y en la mayoría de los casos sí preparan con mucho cuidado y esmero sus ponencias, llegando a ser de los mejores expositores de entre cualquier disciplina científica ya que la claridad adquirida como parte del cotidiano meditar sobre su área les han permitido dicha cualidad. Pero hay otros que no. Estos últimos preparan su uniforme (sobre todo si es de un área creada en la segunda mitad del siglo XX y me refiero a los años setenta u ochenta del siglo pasado nada más, cualquier parecido con la época actual es mera coincidencia): Un pantalón vaquero, de preferencia el menos limpio, roto y viejo. Una camiseta y los tenis más sucios y viejos, de preferencia mordidos por su perro. No llevará jabón ni peine, tampoco cepillo de dientes ni pasta, pues debe de "viajar ligero". Preparará su plática de ser posible unas cuantas horas antes de llegar, en el tren o en el avión (y no olvidará mencionar esto al comenzarla) o bien horas antes en su cuarto de hotel. Tratará de ser lo más desorganizado posible al exponer, olvidando hechos y resultados importantes para su clara comprensión y suponer que todo oyente es una copia de él mismo en cuanto al conocimiento requerido para entenderla. Todo esto es para que no se salga del modelo, del común denominador, no sea que lo vayan a confundir con alguna persona de otra profesión. Esto sucede en otros países y cualquier semejanza con nuestro medio es mera coincidencia. (El músico llegará al teatro vestido de igual manera que un matemático, solamente que se pondrá un disfraz de concertista, es decir, usará frac, smoking, un simple traje o saco y, al igual que un beisbolista al acabar el juego, se quita el uniforme y vuelve a colocarse el (otro uniforme) vestuario con el que llegó).

En otros países, en cuanto a su lugar de trabajo, y para conservar la asimilación a algunos grupos, algunos deben ser muy desordenados. De preferencia tener papeles tirados en el piso de su oficina, o por lo menos largas pilas de papeles inservibles en su escritorio y demás mobiliario. Los libros deben estar apilados unos al derecho y otros al revés, pues si estuvieran ordenados podría pensarse que tiene graves problemas neuróticos. Sin embargo, sienten que a pesar de que no pueden organizar su propio escritorio, ¡pueden organizar muchas cosas bien! Otros conviven de manera solitaria o independiente y no difieren de una conducta promedio de otros ciudadanos. No les gustan las poses ni reflejan alguna imagen en particular, ni las requieren para desarrollar su actividad.

Muchos de los estudiantes ingresan al estudio de la Matemática sin realmente saber de qué se trata esa disciplina. Casi todos eran llamados "los genios del salón" del bachillerato. En un alto porcentaje eran los que tenían una conducta diferente, los que no se dejaban guiar por la masa, los que pensaban acerca de su existencia y papel dentro de la sociedad, otros, los que tenían problemas para relacionarse con sus compañeros, etc.

En cuanto a su relación con otros colegas, algunos deben de comportarse en forma inusual, rara, aparentar ser tímido y distraído, fuera lo más posible de las convenciones sociales de convivencia, pero siempre sabiendo exactamente donde están parados y donde tienen cada pie. A veces hay que saludar a sus colegas, a veces no hay que hacerlo para despistarlo, o aparentar concentración casi oriental en sus actividades. Deben ejercer la imagen comprada de genio distraído y desaliñado y vender esa imagen a las generaciones más jóvenes. Se vende bien. Esto sucede en otros países y cualquier semejanza con nuestro medio también es mera coincidencia.

En cuanto a su motivación o filosofía acerca de su profesión, muchos la ven como un medio para obtener algo. Son altamente competitivos y buscan ser los primeros a toda costa, aún de su propia salud física y mental. Otros ven a su disciplina como un privilegio que la vida les dio para desarrollar y crear sus potencialidades como ser humano, ven a su profesión como un fin en sí mismo y viven para la profesión. Por supuesto, al igual que en el resto de las licenciaturas de una universidad el egresado de una licenciatura generalmente no se dedica al estudio de su profesión, más bien la utiliza o la aplica. Para realmente dedicarse a la Matemática es necesario realizar estudios de posgrado y aún así apenas empezar a vivir el maravilloso mundo de la Matemática. Los egresados de una licenciatura de Matemática pueden y deben encontrar trabajo como cualquier otro egresado de una licenciatura, es cosa de hacerles ver a quienes contratan personal de las enormes ventajas que tendrían al contratar matemáticos, pues sobretodo, una de esas ventajas es de mucho valor para quienes no tienen miedo de contratar a personas que han realizado un entrenamiento en el acto de pensar y que poseen capacidad de aprender. Muchos de los pocos licenciados en Matemática se dedican a la docencia, ojalá hubiera más, hacen mucha falta sobre todo en los niveles básicos de primaria, secundaria o preparatoria. Se requieren con la licenciatura terminada, con una estupenda preparación y que deseen ser docentes por vocación, capaces de motivar e infundir en los jóvenes (quienes constituyen más de la mitad de la población de nuestro país) un verdadero amor al conocimiento científico y artístico.

En cuanto a sus publicaciones, algunos matemáticos, los menos, escriben muy bien y son extraordinarios redactores, sus artículos son verdaderas cátedras de redacción, pero otros no escriben tan bien. Estos últimos deben de escribir sus artículos como si no los hubiera escrito un ser sensible. Entre más formales sean, mejor. No debe quedar rastro de las ideas, motivaciones, experimentos realizados que lo condujeron al teorema. Entonces deberá de escribir varias definiciones, una sucesión de varios lemas y como conclusión casi mecánica, debe de escribir en la demostración del teorema enunciado al final del artículo, que es obvio que ésta se sigue de los lemas anteriores. Luego debe revisar bien su artículo para que quede lo más antipedagógicamente posible, no sea que alguien le encuentre un error o le robe alguna idea por la cual ha pasado tanto tiempo meditando. Finalmente alguno de los 10 colegas de todo el mundo capaz de entender lo que hizo, se da cuenta que todos los lemas menos uno son irrelevantes y pueden detectar lo que el autor realmente está haciendo y porqué. Para el nuevo en esa área, le será materialmente imposible descifrar lo que estuvo detrás de ese resultado.

Pareciera que la edad más productiva de la mayoría de los matemáticos en la investigación es de alrededor de 10 años, entre los 25 y los 35. No es ésta una regla pero solamente existen un pequeño y destacadísimo número de investigadores en el mundo que realizan investigación después de los 40 y menos después de los 60 siendo muchos de éstos los de primera fila o los líderes en las diversas ramas de la Matemática.

Otros matemáticos piensan que en el trabajo de un matemático existe un enorme trabajo implícito de intuición, comparación, esfuerzos de pensar, mucha frustración y desesperación, mover montañas y sacar un pequeño grano valioso, y sobre todo, el no dejarse engañar por ideas fáciles.

No cabe duda de que para el ciudadano común y corriente, la creación matemática y su comunidad son un misterio, y lo seguirán siendo ya que para poder realmente apreciarlas tanto a la Matemática como a su comunidad hay que vivirlas y aceptarlas como un modo de ser y de pensar.

Por otro lado, existen disciplinas que utilizan a la Matemática como una herramienta para interpretar los fenómenos propios de su área. Cualquier disciplina que se haga llamar *ciencia* debe interpretar sus fenómenos matemáticamente. Aún más, las disciplinas no científicas que deseen saber algo sobre sus fenómenos lo hacen mediante la interpretación matemática.

Existen matemáticos que se especializan lo más profundamente posible en un área o campo y otros que adquieren una gran cultura matemática, tan amplia como sea posible. Los dos tipos de matemáticos son necesarios.

Sin embargo, muchos recomendamos a los jóvenes que comiencen por obtener una cultura matemática, lo más amplia posible y luego sumergirse en un tema. Esto es debido a que la esencia de la Matemática es la de juntar campos aparentemente disímiles. Después de todo, la Matemática es el grado máximo de abstracción el cual tiene aplicación en toda disciplina que se precie de llamar ciencia.

El egresado de una licenciatura generalmente no se dedica al estudio de su profesión, más bien la utiliza o la aplica. Para realmente dedicarse a la Matemática es necesario realizar estudios de posgrado y aún así apenas comenzar a vivir el maravilloso mundo de la Matemática.

Existen matemáticos que trabajan individualmente y otros que lo hacen en un pequeño o gran grupo. Es muy difícil el trabajar solo, a menudo uno solo no ve una trivialidad que lo detiene por mucho tiempo y la cual es resuelta inmediatamente por un colega dentro del grupo. Pero a veces, sucede al revés, no siempre tres cabezas piensan más que una. A veces, la interacción con colegas enriquece tanto a la Matemática como a los matemáticos y se encuentran esas interrelaciones de las cuales hablaba anterior-mente entre áreas aparentemente disímiles.

A veces la colaboración entre matemáticos es enriquecedora y hace de la investigación matemática, la cual es muy ardua o difícil, una experiencia más humana y social, aunque a veces esto no se puede, por no haber colegas de la misma especialidad cerca o por características de personalidad de cada matemático. El trabajar en grupo no exime del arduo trabajo individual de meditar o pensar en Matemática.

Coexisten dos tipos de matemáticos, los que utilizan la fuerza bruta y los elegantes. Esto es, quienes utilizan métodos o técnicas aplastantes que los conducen a la resolución del problema y quienes con pocos argumentos colocados adecuadamente lo obtienen sorpresivamente de manera brillante. A veces un mismo matemático puede actuar de las dos formas en distintas ocasiones.

Sin embargo, la transmisión de la Matemática es mucho más apreciada, por la manera que funciona nuestro cerebro, cuando se hace de manera elegante y simple, es decir, de forma artística. Así, la elegancia matemática es muy importante. Ésta se logra, en general, (no en la fuente primaria de la investigación sino) después de haber pasado por muchas mentes matemáticas brillantes.

En cuanto a la transmisión de la matemática de frontera, ésta se realiza después de un tiempo, debido a lo expresado anteriormente, cada vez más a niveles de gente más joven. Matemática muy difícil se ha compactado y presentado elegantemente facilitando su aprendizaje. Ésta es la manera más eficaz de transmitir Matemática.

Así, hay varios tipos de creación matemática y de matemáticos, todos indispensables.

Hay una inmensidad de matemática creada durante unos cuantos siglos. Sin embargo, a principios del siglo XX solamente unos cuantos grandes matemáticos podían decir que abarcaban una buena parte de la totalidad de ella. Hoy en día es casi imposible que un matemático abarque ni siquiera su propia área de estudio. ¿Querrá decir esto que el gran edificio de la Matemática nos aplastará? Sucede que así como la especialización es inevitable, el desarrollo de nuevos conceptos abstractos absorben otros creados en el pasado. Estas nuevas creaciones son tan importantes como las soluciones de los problemas difíciles o desarrollos de nuevas técnicas.

La Matemática es una disciplina muy activa, tanto como la imaginación de sus practicantes. Sin embargo, algunos niños, jóvenes o adultos pueden hablar o saber de la existencia de algunos conceptos recientes de la Física, Química, etc. pero difícilmente sabrán de la matemática actual.

Esto se debe a la forma de ser de la Matemática, es decir, como un lenguaje creado dentro de otro lenguaje. Sin embargo, mucho se puede difundir y divulgar. Requiere de un gran esfuerzo y dedicación de matemáticos que puedan realizar esta actividad. Se requiere de reconocimiento de esta actividad en las instituciones y en los distintos comités evaluadores de la actividad matemática. Este reconocimiento debe ser parte importante de su labor profesional. Muchos matemáticos realizan durante su vida académica distintas actividades. Por ejemplo, puede ser que siendo jóvenes y adultos menores de 35 años dediquen la mayor atención a la investigación. Posteriormente pueden dedicarse con más énfasis a la docencia y cuando son mayores de 45 o 50 años deciden poner más énfasis en la difusión pues se considera que tienen ya mejores cualidades para desarrollarla.

Se requiere también de un mayor número de personas que realicen esta actividad. El año 2000 fue declarado mundialmente el Año Internacional de la Matemática. Se propusieron tres puntos fundamentales acerca de la Matemática: La determinación de los grandes retos matemáticos para el siglo XXI, la promulgación de la Matemática, tanto pura como aplicada, como una de las principales claves del desarrollo y el reconocimiento del papel de la Matemática en la Sociedad.

Hay que comenzar con los propios estudiantes de matemática, jóvenes, niños y adultos para que empiecen a disfrutar de este maravilloso mundo de la Matemática. Así, ellos tendrían la obligación moral de comunicar con verdadera pasión lo que hacen (también con verdadera pasión), al resto de la Sociedad, comenzando por su propia familia.

¿Y acerca del aprendizaje de la Matemática? Desde el mi punto de vista, qué bien que se está preocupado por la actualización de los maestros, por tener mejores programas de estudio, mejores textos y métodos pedagógicos. Pero quiero llamar la atención una vez más, como lo hice en el Foro Permanente en la Reunión de Trabajo sobre Enseñanza de las Ciencias y Difusión y Divulgación de la Ciencia y la Tecnología, en Morelia, Michoacán, el 18 y 19 de enero del

2001. Ahí expuse que se está olvidando el ente más importante de todos, quien es el que va a aprender, el alumno.

Recuerdo a Hymann Bass (presidente de la American Mathematical Society en 2001-2002 y del ICMI, quien atendió mi invitación a presidir conmigo cuando yo era presidente de la Sociedad Matemática Mexicana, la inauguración del V Joint Meeting SMM-AMS en el 2001 en Morelia) con quien pasé largas horas dialogando. Le expuse acerca de la importancia de poner atención a quien está del otro lado del salón, el alumno.

Conversaba con él en ese entonces acerca de que, aún cuando se tuviera como profesor en un aula a un Premio Abel o uno Fields, se tuviera el mejor programa y el mejor texto, si el alumno de primaria, secundaria, preparatoria o licenciatura no desea estudiar o aprender, de nada sirve el profesor, el programa y el libro de texto.

Les cuento que de esta conversación y como vio que en la Sociedad Matemática Mexicana éramos muy buenos para organizar reuniones como el V Joint Meeting, me llegó la propuesta de organizar el ICME en México. Yo turné la propuesta al Comité de Educación de la SMM y ellos estuvieron muy contentos en que se realizara en México, para lo cual se respondió que sí se aceptaba la propuesta. Siete años después, en el 2008, se llevó al cabo el ICME en Monterrey.

Hay varios puntos interesantes a considerar. Les diré algunos:

1.- Es fundamental hacerles ver a los alumnos el porqué asisten a la escuela y porqué estudian Matemática en particular. Explicar esto ayudaría muchísimo a que el alumno tenga interés por lo que esta enseñándose en la escuela. El que no sabe porqué y para qué realiza una actividad nunca tendrá la valoración de lo que hace.

Una orientación vocacional para el nivel medio sería de lo más útil, pues los alumnos llegan a una licenciatura sin saber de qué se trata la disciplina y realmente a qué se dedican en la misma.

En el nivel profesional, un buen expositor debe de explicarles lo mejor posible acerca de la disciplina que se estudia así como de quienes la ejercen, como reafirmación.

Parte de lo que hay que decirles reiteradamente a los alumnos es que van a estudiar lo que la raza humana ha realizado en toda su existencia para así poder convivir lo mejor posible en sociedad. Hay que hacerles ver que desafortunadamente la cultura no viene dada por herencia genética y que si un bebé es dejado en una isla sin aprender lo que han hecho algunos de sus antepasados, regresa automáticamente a la edad de piedra.

2.- Independientemente de las teorías pedagógicas hay que poner un énfasis muy grande en los buenos hábitos de estudio. Hacer comprender a los alumnos cómo funciona nuestro cerebro (de una manera apropiada para cada nivel de estudios) haciendo mucho énfasis en estudiar todos los días un poco (pues las conexiones neuronales se realizan como ya se sabe). Es decir, el que un alumno aprenda no depende exclusivamente de un maestro. Por ejemplo, si los alumnos estudian la noche anterior a un examen de Matemática, quiere decir que no tienen idea de cómo funciona su cerebro. Aquí hace falta la explicación, de entrada, como el instructivo que debería de traer bajo el brazo cada niño explicando adecuadamente, a su nivel, cómo puede aprender. Hemos visto que las conexiones neuronales requieren de cierto tiempo para realizarse. El que desconoce cómo funciona su propio cuerpo está destinado a cometer barbaridades inmensas con él.

3.- En todos los niveles, pero especialmente en el nivel básico los bajísimos salarios de los maestros impiden que estos preparen adecuadamente sus clases. Tienen que buscar otro trabajo para completar su ingreso o dar varios turnos. Si el Estado se ha atribuido la función de impartir Educación, tiene el poder para establecer los salarios. Por lo tanto, lo primero que hay que hacer es reconocer la importancia debida de la enseñanza en general y de la Matemática en particular y pagarles bien a los maestros. Esto permitiría a los maestros de todos los niveles preparar bien sus clases, documentarse y leer aún más para poder tener una superación y transmitir ese gusto y pasión por la Matemática. La mejor inversión que puede realizar un pueblo es en la Educación, la cual crea Capital Humano y éste crea Capital Físico y no al revés.

4.- Aunque no se tenga un maestro adecuadamente preparado, tiene la obligación de seguir un programa con un texto. Más aún si el texto es único y “oficial”. Hay que hacer que los alumnos lean el texto, que lo entiendan y hacerles ver que tienen la responsabilidad de aprender todo el temario correspondiente. Los alumnos tienen derechos y obligaciones, todo mundo reclama los derechos mas no las obligaciones, en particular la obligación de estudiar y aprender. Hay alumnos quienes ven esto como una obligación y otros como la gran oportunidad de disfrutar del conocimiento que ha creado el Ser Humano, becados por el pueblo que paga impuestos y por sus padres que les dan de comer.

5.-Desafortunadamente, alrededor del año 1994, para controlar la inflación en nuestro país, hubo un decreto que controló los salarios profesionales. Hasta la fecha, esa medida ha dado al traste con uno de los preceptos que anteriormente tenía en nuestra sociedad. “Estudia, sé un hombre de provecho” decían las abuelitas, hasta en las películas. Esto se terminó y el estudio dejó de ser un aliciente o la posibilidad de un ascenso en lo económico y social. Hubo colegas matemáticos cuyos hijos le decían que mejor manejara un taxi. Lo mismo sucedió con músicos de las orquestas que dejaron su atril para conducir un taxi o dedicarse a otra actividad ya que a la que le habían invertido más de veinte años no les daba para comer. Cualquier joven ganaba dinero en la economía informal, más de lo que ganaría si estudiaba. Todo esto se presenta de una manera muy cruda en los estudiantes de primaria, secundaria y preparatoria. Para qué estudian, dicen. Para qué les va a servir. Lo que les interesa es ganar dinero y de manera fácil. No todos los estudiantes estudian por el placer de hacerlo, desafortunadamente.

Para un músico intérprete le es claro que preparar un recital lleva muchísimo tiempo de estudio diario, durante meses y años. Para aprender conceptos matemáticos sucede de igual manera. El mal hábito de estudio de leer todo o tratar de preparar todo la noche anterior al examen predomina en los estudiantes (mejor dicho, en los no estudiantes). Nuestro cerebro no funciona así. Las conexiones neuronales, realizadas a través de reacciones químicas y eléctricas, requieren de tiempo para que se den. Nuestro cerebro (todavía) no funciona como un puerto donde le inserta un USB y listo. La Matemática requiere de tiempo y estudio diario para asimilarse, al igual que la Música. Por todo esto, se requiere de un esfuerzo de parte del estudiante para comprender la Matemática y la Música. No se vale que por la flojera del mismo se culpe al profesor o al texto o al programa.

CAPÍTULO III

Música y Matemática en el pasado.

Es común escuchar que “hay Matemática en la Música porque cuando se abre una partitura ésta está llena de numeritos”, es decir, de los números del compás y las digitaciones. Obviamente esta observación es muy simple. Se dice que hay Matemática en la Música, que la Música y la Matemática están muy relacionadas. Pero ¿hay Matemática en la Música? ¿Están relacionadas? ¿Qué relación existe entre la Música y la Matemática? Deseo exponerles algunas reflexiones acerca de esta pregunta e ilustrarlas con algunos ejemplos acerca de lo que algunos artistas o científicos han hecho al respecto durante la historia de la Humanidad.

Leibniz describe a la Música como "un ejercicio inconsciente en la Aritmética". Esta afirmación quizás se podría justificar sobre la base de que el músico intérprete cuenta los tiempos del compás cuando comienza a estudiar una obra pero después de un tiempo de tocarla, ya no está contando conscientemente sino que deja fluir la magia de la Música. Sin embargo casi todos los "elementos externos" de la Música se definen numéricamente: 12 notas por octava; compás de 3/4, 7/8,...; 5 líneas en el pentagrama; n decibeles; semitono de raíz duodécima de dos; altura de 440 hz; lo horizontal y lo vertical en la textura musical; arriba y abajo en la escala; etc.

En la Edad Media la Música estaba agrupada con la Aritmética, la Geometría y la Astronomía en el Cuadrivio. La

Música no se consideraba un arte en el sentido moderno sino una ciencia aliada con la Matemática y la Física (la Acústica). Matemática un poco más elevada se utilizaron en el cálculo de intervalos, el cual requería el uso de logaritmos, y los problemas del temperamento requerían del uso de fracciones continuas.

Es prácticamente desconocida la aplicación de algunos conceptos matemáticos a otros aspectos de la Música como son el análisis, los aspectos estéticos, la composición y la Teoría Matemática de la Música. A continuación veamos cómo algunos matemáticos y músicos han aplicado conceptos matemáticos en la Música.

W. A. Mozart

Mozart, en 1777, a los escasos 21 años de edad, escribió un "Juego de Dados Musical K. 294 (Anh. C) para escribir valses con la ayuda de dos dados sin ser músico ni saber nada de composición". Escribió 176 compases adecuadamente (aquí vemos los primeros cuarenta) y los puso en dos tablas de 88 elementos cada una. El juego comienza lanzando los dos dados, de tal manera que tenemos 11 números posibles (del 2 al 12) y hacemos 8 tiradas obteniendo distintos compases excepto los de la última columna que son iguales (éstos últimos con dos posibilidades: una para la repetición y otra para continuar con la segunda tabla. La segunda tabla es igual a la primera excepto que tiene otros 88 compases con los de la última columna idénticos. Así, mediante un simple cálculo, utilizando conceptos del Álgebra Superior, se tienen 11^{14} valses diferentes, es decir, aproximadamente 3.797498335832 (10^{14}) valses diferentes. Si se toca cada vals, con repetición de la primera parte, en 30 segundos, se requerirían de $30(11^{14})$ segundos, es decir, 131,857,581,105 días aproximadamente, o bien, 361,253,646 años aproximadamente en tocarlos todos uno tras de otro ininterrumpidamente. Es decir, un estreno mundial de una obra de Mozart cada 30 segundos a lo largo de ¡361 millones de años! (Recuérdese que la antigua edad de piedra comenzó hace unos 35,000 años). Mozart era un aficionado a la matemática y su enorme talento se mostró una vez más. Con este jueguito tan sencillo ¡dejó la imposibilidad de que intérprete alguno pudiera tocar su obra completa o de que alguna compañía de discos la grabara!

Aún más, nos muestra qué poca idea tenemos de los números grandes como $30(11^{14})$. Existieron y existen compositores que creen que ya todo está agotado con la armonía tradicional, y que por lo tanto hay que buscar un nuevo estilo de música. (Mozart, para este juego, solamente utilizó 176 compases). Aún en estos días, con computadoras y Combinatoria no se podría manejar una pequeña porción de motives musicales puesto que la cantidad de clases de isomorfismo es exorbitante. Por ejemplo, la formula de Fripertinger da un número de órbitas afines de 72 elementos motívicos en $(Z_{12})^2$, que es del orden de 10^{36}. El número de estrellas en una galaxia está estimado en 10^{11}. Así, el universo musical es un serio competidor contra el universo físico. También, el uso de métodos estadísticos es requerido para atender la enorme variedad de casos. Ni siquiera las computadoras de la próxima generación podrían manejar todos los casos.

George David Birkhoff (1884-1944)

En 1924 George David Birkhoff (quien trabajó brillantemente en el Problema de los tres cuerpos, Ecuaciones Diferenciales, Teoría General de Relatividad entre otras áreas, miembro honorario de la Sociedad Matemática Mexicana y contribuyente al desarrollo cultural de México) retoma unas ideas que había tenido años atrás pero que no desarrolló por dedicarse exclusivamente a estudios puramente matemáticos. Pensó que la melodía dependía del orden de las notas escuchadas por el oído. Le pareció que podrían establecerse unas relaciones de orden, guardadas por las notas, y así poder escoger las mejores melodías. Para él, el *problema fundamental de la Estética* era el de determinar, para una clase de objetos, las características específicas de las cuales depende el valor estético.

Birkhoff considera que hay tres fases consecutivas para la experiencia estética: primero, un esfuerzo preliminar de atención, el cual es necesario para percibir el objeto y que es proporcional a la *complejidad* C del objeto; segundo, una sensación placentera o *medida estética* M la cual recompensa este esfuerzo preliminar; y tercero, una certificación de que el objeto posee una armonía, simetría u *orden* O el cual parece una condición necesaria, si no es que suficiente, para la experiencia estética.

Así, Birkhoff propone la fórmula $M=O/C$ mediante la cual expresa la medida estética como el efecto de la densidad de las relaciones de orden comparadas con la complejidad.

Él mismo inquiere lo atrevido de esta fórmula y proporciona algunas justificaciones históricas. La Estética trata del placer estético y con los objetos que lo producen. Así es que tenemos clases de objetos los cuales pueden ser comparados con respecto a su valor estético (los de clases diferentes no pueden ser comparados). Luego, el problema fundamental de la *Estética Analítica* es el de determinar los factores estéticos y su importancia relativa.

Percibir un objeto estético requiere de ciertos ajustes y la sensación de esfuerzo o tensión que acompaña siempre a la percepción aparece como la suma de las tensiones a los diversos ajustes automáticos. Así, si A, B, C,... representan estos ajustes, cada uno con tensiones a,b,c,... y si éstas se realizan r,s,t,... veces podemos considerar la suma $C=ra+sb+tc+...$ como la complejidad.

Por otro lado, el orden O corresponde a ciertas asociaciones que intervienen en el acto de percepción. Por ejemplo, la simetría sería una asociación. Si L,M,N,... son asociaciones de varios tipos, cada una con índices de sensación l,m,n,... las cuales ocurren u,v,w,... veces, entonces podemos considerar el total de sensaciones (positivo o negativo $O=ul+vm+wn+...$ como el orden del objeto. Así, la estimación intuitiva de la cantidad de orden O inherente al objeto estético, comparado con su complejidad C, nos proporciona su medida estética.

Obviamente esta teoría matemática sólo puede aplicarse a objetos cuyos factores estéticos sean esencialmente matemáticos o formales. Hay otros factores que están más allá de esta teoría, como por ejemplo, las asociaciones acerca del significado de un poema hermoso.

Veamos cómo algunos pensadores han percibido la presencia de elementos matemáticos en el arte. A diferencia de las teorías hedonísticas, místicas o moralistas, la teoría analítica se concentra en proveer una solución cuantitativa al problema fundamental antes formulado. Parecería que la Estética, si ha de considerarse científica debe de abordarse en una forma analítica y restringirse a aspectos formales del arte. Sin embargo, no se pretende negar la importancia trascendente del aspecto connotativo en todo arte creativo.

Pitágoras (550 AC) explicó la Música como una expresión de esa armonía universal la cual también se realiza en la Aritmética y la Astronomía.

Platón reconoce la importancia del elemento matemático. Dice que si a cualquier arte se le quita la aritmética, la medida, y lo pesable, lo que queda no es mucho. También expresa que a través de la medida y la proporción siempre se llega a la belleza y a la excelencia.

Aristóteles expresa que están equivocados aquellos que claman que la Matemática no dice nada acerca de la belleza y la bondad, y que los elementos de la belleza son el orden, la simetría, la limitación definida y que éstas son las propiedades a las cuales la Matemática les pone atención.

El punto de vista de la filosofía griega estaba inclinado a seleccionar la forma y la proporción como los elementos típicos de la belleza.

El matemático Luca Pacioli en su "De Divina Proporcione" de 1509 considera la sección dorada, misma que utilizó su amigo Miguel Ángel y que posteriormente abordaremos.

Durante el siglo XVII y principios del XVIII prevalecieron los conceptos de "ingenio" y "buen gusto". En éste último está implícito un esfuerzo de atención, luego un juicio estético intuitivo dependiendo del buen gusto y finalmente el análisis.

Leibniz pudo admitir las percepciones y juicios estéticos como parte del saber y definió la Música como el contar sin saber que se está contando. Esto último concuerda con el concepto de Birkhoff en el sentido de que la densidad de ciertas relaciones ordenadas entre las notas consideradas intuitivamente, mide el efecto estético. De Crousaz escribe, que el buen gusto nos hace apreciar, al principio, por sensaciones, aquello que la razón hubiera aprobado.

Rameau observó que una nota musical está compuesta por un sonido fundamental y varias parciales, y que las notas que difieren por una octava son similares en cuanto a su efecto estético y pueden considerarse casi idénticas. Estos hechos conducen al entendimiento de la música occidental.

Fue d'Alembert quien dio una clara presentación del trabajo de Rameau (el cual es cualitativo, a diferencia del tratamiento cuantitativo de Birkhoff). Así, el grado de armonía es distinto del agrado o medida estética. Por ejemplo, el unísono y la octava son los más armoniosos de los intervalos pero no los más agradables.

Euler, en 1739, desarrolló una teoría de consonancia basada en la ley pitagórica. Entre más pequeños sean los números que expresan la relación de vibración de dos notas, éstas serán más consonantes. De ésta forma, Euler estableció un criterio de armonía de cualquier intervalo o acorde que concuerda con los hechos observados. Es interesante que Euler formulara una ley cuantitativa para la medida de la armonía. Así, el concepto general de Euler acerca de la naturaleza del goce estético concuerda completamente con el de Birkhoff, que en palabras de Helmholtz años después, establecían que entre más fácilmente percibamos el orden que caracteriza a los objetos contemplados, estos parecerán más simples y perfectos, y más fácil y gozosamente los reconoceremos. Un orden que cuesta trabajo descubrir, aunque ciertamente nos halague, asociará cierto grado de desgaste y tristeza.

Birkhoff aclara que su teoría carece de toda matemática excepto la simple enumeración y que su trabajo es un mero ensayo. En su trabajo desarrolla las bases psicológicas de su fórmula, la aplica a formas poligonales, a ornamentos y a vasos.

Para el caso de la medida estética de formas poligonales, Birkhoff considera la fórmula $M=O/C=(V+E+R+HV-F)/C$ en donde V es la simetría vertical, E es el equilibrio, R es la simetría central, HV es la relación con una red horizontal-vertical, F es la forma no satisfactoria que incluye diversos factores y C es la complejidad. Cada variable asume valores dependiendo de varias condiciones, largas de enumerar en esta ocasión.

También aplica su fórmula a los acordes diatónicos, armonía y melodía así como a la calidad musical en la poesía.

En el caso musical, su teoría está basada en las relaciones de orden entre las notas y puesto que la apreciación de tales relaciones continuamente cambia y se desarrolla, no trata de formar una teoría definitiva de la medida estética que sea válida para el futuro o el pasado. Más bien, considera que el problema principal de la forma musical es el de que dado un conjunto de recursos musicales debemos determinar hasta qué grado las relaciones de orden entre las notas de una composición constituyen una base eficiente de disfrute musical.

Para el caso de acordes diatónicos la complejidad C se deja a un lado, puesto que un simple acorde es un objeto unitario y los únicos ajustes automáticos son ajustes incipientes a un sólo conjunto de notas y así la medida estética de un acorde será igual a su orden. Luego m=Cd+I+D donde m es la medida estética de un sólo acorde tomado en una tonalidad mayor por ejemplo, Cd denota el valor del acorde y se refiere a ciertas características que no cambian cuando sus notas superiores se mueven arriba o abajo por octavas, I es el valor del intervalo y D es el valor de la nota dominante. En cuanto a la sucesión de acordes, Birkhoff propone la fórmula $M=m_1+t+m_2$ donde m_1 y m_2 denotan las medidas estéticas de los acordes y t la de la transición.

También Birkhoff analiza el problema de la melodía y deja abierto el problema del ritmo. Su trabajo puede continuarse aún más y la utilización de la computadora sería de gran ayuda. Su intención fue la de proveer procedimientos sistemáticos de análisis en simples dominios de la Estética. Concluye que hay una enorme diferencia entre el descubrimiento de un diamante y su tasación; aún más, entre la creación de una obra de arte y un análisis de los factores formales que entran en ella.


Leonardo de Pisa (Fibonacci)
(1170-1250)

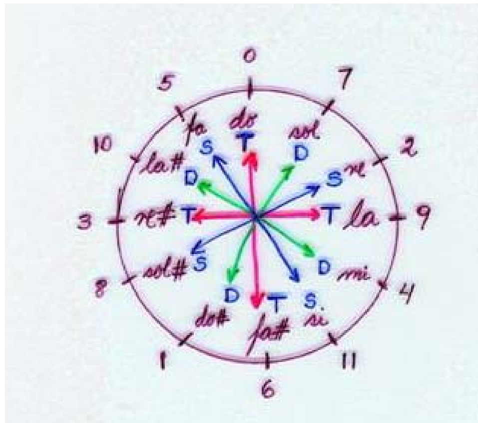
En 1202 Leonardo de Pisa, cuyo sobrenombre era Fibonacci (en abreviación de filius Bonacci) escribió un libro llamado Liber Abacci (o libro sobre el ábaco). Sobrevive la segunda edición del año 1228. Contenía casi todo el conocimiento aritmético y algebraico de esa época y jugó un papel fundamental en el desarrollo de la matemática occidental, pues a través de él, los europeos se familiarizaron con el sistema numérico indo arábigo. Contenía muchísimos ejemplos. Veamos uno de ellos, reformulado de la siguiente manera: suponga que los conejos no se reproducen durante su primer mes de vida, pero que a partir del segundo mes cada pareja de conejos produce un nuevo par. Suponga que ningún conejo muere. Si comenzamos con un par de conejos, ¿cuántas parejas de conejos hay a los doce meses y en general a los n meses? La sucesión de las parejas adultas es de la forma

$$1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233,377,...$$

es decir, la sucesión dada por la fórmula $u_1=u_2=1$ y $u_n=u_{n-1}+u_{n-2}$ para n mayor o igual que 2. Esta sucesión se llama *sucesión de Fibonacci* y sus términos *números de Fibonacci*. Si consideramos $b_n=u_{n+1}/u_n$ como el cociente de crecimiento, obtendremos una sucesión, cuyo límite cuando n tiende a infinito es 1.618034... Este número, juega un papel muy importante en la Geometría y en la Estética. Si dividimos un segmento de recta AB en un punto C tal que AB:AC=AC:CB tal división se llama *sección* o *razón áurea* (Kepler la llamó *proporción divina*). Si AB=1 y AC=x entonces $x^2+x-1=0$. Luego x=.618034.... Así, la parte mayor de cualquier longitud, dividida en razón áurea, es igual a la longitud total multiplicada por .618034....

Béla Bartók (1881-1945)

Bela Bartok, alrededor de 1915 desarrolló un método para integrar todos los elementos de la música (escalas, estructuras de acordes con los motivos melódicos apropiados, proporciones de longitud, tanto de la obra en general como los de la exposición, desarrollo, reexposición, frases de conexión entre movimientos etc.) basado en la razón áurea. Es sorprendente que Bartok nunca escribiera o platicara de esto durante su vida. Ya los caldeos habían propuesto utilizar la razón áurea como principio estético 3000 años A.C., los griegos la utilizaron 2000 años después y fue reutilizada en el renacimiento pero nunca en la Música. Solamente se conoce un movimiento de un cuarteto de Haydn compuesto con longitud acorde a la sección áurea pero ésta es más una composición aislada que un principio o método de composición.



El círculo tonal de Bartok es el siguiente. Considérese el *círculo de tonalidades vecinas* o *círculo de quintas* dado de la siguiente forma: hágase una correspondencia biunívoca entre las notas {*do*, *do*#, *re*, *re*#, *mi*,..., *si* } y los números 0, 1, 2,...,11, en ese orden; luego, considérese el grupo cíclico C_{12} generado por el 7 y ordénese este grupo en una circunferencia. Tomemos el *do* como la tónica T y asígnense las letras D, S y T sucesivamente a cada nota del círculo. D designará a la *dominante* y S a la *subdominante*. Así *la* será tónica con subdominante *re* y dominante *mi*, etc. Si unimos, mediante ejes, los puntos T, D y S, obtendremos los llamados *ejes de las tónicas*, de las *dominantes* y de las *subdominantes*. Deben de considerarse como una relación de tonalidades similar a la forma usual en la música de mayor-menor. En particular, existe una relación más adecuada entre los polos opuestos. Esta relación es el principio fundamental de la música de Bartok. Muchos ejemplos de su música siguen este principio.

En cuanto a la Forma y la Armonía, Bartok utiliza el principio de la razón áurea. Por ejemplo, en el primer movimiento de la Sonata para dos pianos y percusiones, que consta de 443 compases, si se multiplica este número por .618... se obtiene el compás 274, el cual será el centro de gravedad del movimiento. Así la reexposición o recapitulación ocurre en el compás 274. Análogamente sucede con el primer movimiento de Contrastes, el cual consta de 93 compases, número que si se multiplica por .618... da el compás 57 justo donde comienza la reexposición. Hay muchos ejemplos más.

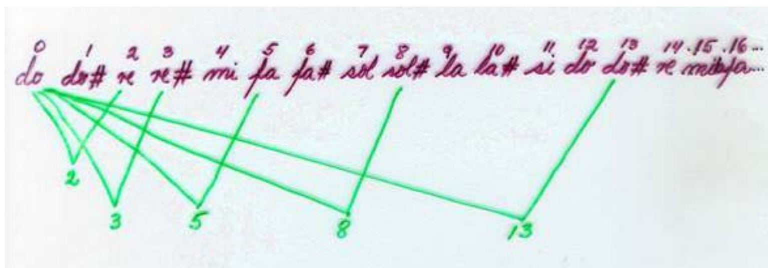
En cuanto al tratamiento armónico, en los compases 2 al 17 de la introducción de la Sonata para dos pianos y percusiones es donde se asientan los gérmenes de la obra. Los compases 2 al 5 de la primera parte están en la tónica *Fa#-Do* con el motivo en posición fundamental, los compases 8-9 de la segunda están en la dominante *Sol-Re bemol* también con el motivo en posición fundamental y la tercera parte, del compás 12 en adelante está en la subdominante *La bemol-Re* con el motivo invertido. Hay 46 unidades de valor 1/8 y si se multiplica 46 por .618... se obtiene la unidad 28 que es en donde comienza el motivo invertido. El análisis puede continuarse, y si se llama positiva a la porción larga y negativa a la porción corta puede decirse que existe una relación de simetría entre las partes positivas y negativas. Este proceso va acompañado con un incremento en la dinámica de pp a f ó ff en la sección positiva y la negativa va acompañada de una disminución de la intensidad sonora. Toda la obra puede dividirse en partes lenta-rápida+lenta-rápida en los movimientos. La sección áurea debe aparecer al comienzo del segundo movimiento lo cual sucede si se considera el total de los 6432 octavos que al multiplicarlos por .618... da el octavo 3975 que es en el cual justamente comienza el segundo movimiento.

Si comparamos la sucesión de Fibonacci con la fuga (primer movimiento) de la Música para Cuerdas, Percusiones y Celesta observamos que los 89 compases del movimiento están divididos en secciones de 55 y 34 compases. Estas secciones se subdividen en secciones de 34 y 21 compases y 13 y 21 compases respectivamente. El clímax en fff ocurre en el compás 55 y en los extremos comienza y finaliza en pp. No es una casualidad que la exposición finaliza en el compás 21 y que los últimos 21 compases están divididos en secciones de 13 + 8 compases.

El Allegro Bárbaro es otra composición para piano solo en la cual Bartok utiliza los números de Fibonacci 2, 3, 5, 8, y 13 en diversas ocasiones, a diferencia de la música tradicional la cual utiliza 8 compases en casi todos los temas y múltiplos de 2 en los motivos y frases. También utiliza su círculo de tonalidades y la duración de la pieza es de 3 minutos.

Bartok escribió que seguía a la naturaleza en la composición y que fue guiado indirectamente por fenómenos naturales para descubrir estas regularidades. Constantemente aumentaba su colección de plantas, insectos y especímenes minerales. El girasol era su planta favorita y se ponía muy feliz cuando encontraba piñas de abeto en su escritorio. Consideraba que la música folclórica también era un fenómeno de la naturaleza y que sus formaciones se desarrollaban tan espontáneamente como otros organismos vivientes: las flores, los animales, etc. Por esto su música le recuerda al oyente de escenas naturales. Por ejemplo, el girasol tiene 34 pétalos y sus espirales tienen los valores 21, 34, 55, 89,144.

Su uso de los acordes también está basado en los números de Fibonacci. Por ejemplo, en semitonos, 2 es una segunda mayor, 3 es una tercera menor, 5 es una cuarta, 8 es una sexta menor y 13 es una octava aumentada, etc. Cuando Bartok utiliza acordes en un movimiento cromático, coloca la tercera menor sobre la cuarta justa de tal forma que el acorde adquiere la forma 8:5:3 y considerando una tercera menor, superponiéndole una cuarta seguida de otra tercera menor se obtiene su acorde característico mayor-menor.

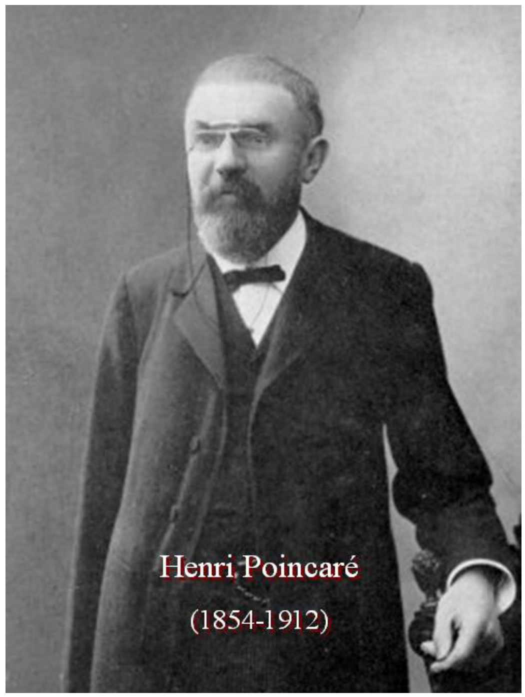


La sección áurea, no es una restricción externa sino una de las leyes más intrínsecas de la música como lo muestra la pentatonía, quizás el más antiguo de los sistemas de sonido del hombre y el cual puede considerarse como una expresión pura del principio de la sección áurea.

Y bien, ¿qué relación existe entre la Música y la Matemática? Es decir, ¿qué conexión o correspondencia existe? Hemos visto cómo se han aplicado conceptos matemáticos (provenientes al fin y al cabo de la naturaleza, del pensamiento abstracto del Hombre, etc.) al entretenimiento con un juego de dados, a la Estética, a la Composición Musical y a la creación de un lenguaje preciso para la Musicología y la Música entre otros. Desde luego que la Acústica, la cual utiliza a la Matemática, es parte de la Física y de la Música.

Algunos piensan que la Matemática es un juego simple que sola y fríamente interesa al intelecto. Esto sería el olvidar, asienta Poincaré, la sensación de la belleza matemática, de la armonía de los números y las formas, así como de la elegancia geométrica. Esta es ciertamente una sensación de placer estético que todo verdadero matemático ha sentido y por supuesto que pertenece al campo de la emoción sensible. La belleza y la elegancia matemática consisten de todos los elementos dispuestos armónicamente tales que nuestra mente pueda abarcarlos totalmente sin esfuerzo y a la vez mantener sus detalles. Esta armonía, continúa Poincaré, es, de inmediato, una satisfacción de nuestras necesidades estéticas y una ayuda para la mente que sostiene y guía. Y al mismo tiempo, al poner bajo nuestra visión un todo bien ordenado, nos hace entrever una ley o verdad matemática. Esta es la sensibilidad estética que juega un papel de filtro delicado, la cual explica suficientemente el porqué el que carece de ella nunca será un verdadero creador, concluye Poincaré.

El genio de Mozart consistió en escoger las mejores o más bellas frases musicales de toda la enorme gama de posibilidades para crear su Música. Poincaré menciona que la creación de nueva Matemática no consiste en hacer combinaciones nuevas de entidades matemáticas ya conocidas, sino solamente en tomar las combinaciones útiles, las cuales son una pequeña proporción. Si solamente fuera la rutina de aplicar reglas, las combinaciones obtenidas serían exageradamente numerosas, inútiles o extrañas. El trabajo del inventor o creador consiste en escoger solamente las combinaciones útiles y las reglas o el procedimiento que conduce a esta elección es extremadamente fino y delicado. Es casi imposible, dice Poincaré, el establecer estas reglas o procedimientos. Es cosa de sentirlas mas bien que el de formularlas. Bajo estas condiciones imagínense a una máquina o aparato de cómputo aplicándolas mecánicamente. Sucedería lo mismo que con el juego de Mozart.



Poincaré escribe a principios del siglo XX, que una demostración matemática no es una simple yuxtaposición de silogismos, sino silogismos colocados con cierto orden y que el orden en que son colocados es mucho más importante que los silogismos por sí solos. Comenta que no tiene miedo de que alguno de éstos se le olvide pues cada uno de ellos tomará su lugar en el arreglo sin el menor esfuerzo. También describe el proceso de creación [M]: primero se realiza un trabajo consciente acerca del problema, después deja madurar esas ideas en el subconsciente, luego aparece la solución, quizás cuando menos se espera, y finalmente ésta se escribe.

Mucha Matemática se crea por simple curiosidad. Pero esta simple curiosidad sólo la poseen los grandes matemáticos. Uno de los problemas más difíciles para un matemático principiante (o no tan principiante) es el de encontrar un problema. A menudo sucede que casi toda la emoción de la creación y penetración está concentrada en formular la pregunta adecuada. Podría decirse que esto es más de la mitad del trabajo y a menudo la que requiere de inspiración. Esta es una gran diferencia con la investigación en otras áreas del conocimiento y es precisamente por esto el que la investigación matemática es extremadamente difícil. La respuesta puede ser también difícil, puede requerir mucho ingenio, puede utilizar técnicas conocidas y en el mejor de los casos requiere de la invención de nuevas técnicas. El matemático no procede como un detective para encontrar la solución de su problema. No es una computadora de deducciones, sino procede mediante experimentación (que no utiliza tubos de ensayo o equipos costosos), mediante la inducción y, si hay suerte, inspiración.

El Arte y la Ciencia son una actividad exclusivamente humana. Mucho más de la mitad del cultivo del conocimiento, es decir, de la cultura, lo constituye el conocimiento científico. Este es un hecho ampliamente ignorado por la mayoría de la gente que piensa que la cultura solamente está constituida por conocimientos literarios o artísticos. Es un gran error ver a la cultura de este modo.

Si en lugar de preguntarnos ¿qué relación existe entre la Música y la Matemática? Nos preguntáramos ¿qué relación existe entre los matemáticos y los músicos? Podríamos decir que algunos matemáticos adoran la Música, muchos con un enfoque similar a la medida estética de Birkhoff. A muchos matemáticos les agrada el orden mental, ven a la Música como si fueran matemáticas pero sin tener que lidiar con una lógica inflexible. Gustan más de Mozart que de Stockhausen, Schoenberg o Bartok. Sin embargo a muchos músicos no les agrada la Matemática, generalmente porque no la conocen. Hay otros músicos a quienes sí les agrada la Matemática (Mozart, Bartok, Ponce, entre otros).

Si nos preguntamos más que cómo se relacionan, en qué se parecen, podría decir que, para los que ven a la Ciencia y al Arte como una actividad olímpica en donde se trata de ser altamente competitivos, productivos y pertenecer a las grandes ligas comerciales, la Matemática y la Música se utilizan como un medio y no como un fin. Así, algunos músicos se empeñan en tocar el mayor número de notas en el menor tiempo posible y ya se imaginarán ustedes el equivalente entre los matemáticos.

CAPÍTULO IV

Música y Matemática en el presente.

Actualmente es perceptible que en las últimas dos décadas del siglo pasado (y hasta la fecha) hubo una gran tendencia en la Matemática de realizar no sólo aplicaciones sino hacer Matemática en una gran variedad de campos del conocimiento, y el campo de la Música no ha sido la excepción, aunque ya se daba esto en la Música desde la época de Pitágoras. Después, en la Edad Media, la Música estaba agrupada con la Aritmética, la Geometría y la Astronomía en el Cuadrivio. La Música no se consideraba un arte en el sentido moderno sino una ciencia aliada con la Matemática y la Física (la Acústica).

Es bastante desconocida la aplicación de conceptos matemáticos a la Musicología y en particular la Teoría Matemática de la Música. A continuación veamos cómo algunos matemáticos y músicos han aplicado conceptos matemáticos en la Música y cómo se hace matemática nueva con estos conceptos.

Veamos un poco acerca de lo que es la Musicología y su estado pasado y presente. Musicología es el nombre adoptado del francés "musicologie" para referirse al estudio escolástico de la Música. Del alemán "musikwissenschaft" que significa "ciencia de la Música". Hacer musicología no es fácil. La Musicología carece de un marco conceptual estable. Se dice que es muy difícil comenzar a hacer musicología y navegar sobre un marco conceptual seguro. En la musicología tradicional existe el problema estándar del encapsulamiento. Se da un postulado encapsulado y se previene de cualquier acceso a la (presunta) complejidad escondida. En la Matemática, el acceso a la complejidad es posible y su realización eventualmente da penetración en el concepto mientras que en el encapsulamiento musicológico los intentos apuntan al vacío, generalmente mediante el rompimiento del flujo de la información mediante un oscuro camino que pretende ser racional, ornamentado con metáforas, transformando un posible concepto profundo en un concepto misterioso, es decir, transformando ciencia en fábula. En uno de los libros de musicología tradicional más ambiciosos, los discursos de las partes importantes se basan en un listado casi infinito de referencias externas.

Afortunadamente, el cubo topográfico ofrece una herramienta compleja que puede proporcionar profundidad del tipo del que se cuenta en la Matemática como veremos adelante. Por lo tanto, la Musicología debe de tener ante todo, libre acceso a la complejidad encapsulada: no es posible cultivar regiones del conocimiento privado e inaccesible.

Uno de los propósitos de la Teoría Matemática de la Música es la de establecer dicho marco conceptual estable, definiendo los conceptos en una forma precisa. Sin embargo, no trataremos con la realidad completa de la Música, tal y como aparece en los contextos psicológicos, fisiológicos, sociales, religiosos o políticos. Veamos a continuación las actividades fundamentales relacionadas con la Música y luego su fundamento en campos científicos de investigación establecidos.

La Música tradicionalmente descansa en una conexión fuerte entre facticidad artística y reflexión intelectual. En muchas ciencias y aún artes, tal entrelazamiento es un aspecto exótico, pero la musicología tiene que tratar con ambas haciéndola un caso muy especial. Las cuatro actividades relacionadas con la Música son: producción, recepción, documentación y comunicación. Las podemos visualizar en una figura de tetraedro y por supuesto, no es la única clasificación posible, pero son suficientemente grandes para mostrar la inmensa variedad de perspectivas cuando tratamos con la Música. Cada actividad tiene una importancia de por sí pero es cuando están juntas que son las necesarias para comprender el fenómeno musical.

Los dominios fundamentales científicos requeridos para relacionar las actividades descritas incluyen la Semiótica, la Física, la Matemática y la Psicología. Definiremos provisionalmente a la Música como un sistema de signos, compuestos de formas complejas, que pueden ser representados por sonidos físicos y que de esta manera median entre contenidos mentales y psíquicos. Así, se recurre a la Semiótica. Para describir estas formas la Matemática es el lenguaje adecuado. Para representar estas formas en el nivel físico, la Física es indispensable y para entender el contenido psíquico, la Psicología es la ciencia requerida. De ninguna forma se pretende crear un esquema reduccionista de la realidad musical, sino que se busca ubicar a la Musicología en el mismo lugar que ocupa cualquier área de investigación, sea de las Ciencias Naturales o de las Humanidades, y acabar con el aura de misticismo y la fuerte recurrencia a la subjetividad que, en lo tocante a nuestro tema, se invocan con frecuencia. Tenemos una representación mediante el tetraedro imaginario anterior para visualizar en forma sinóptica la situación general donde puede contestarse la pregunta: ¿de qué se trata la Música?

Es fundamental enfatizar que, mientras quien emplee métodos matemáticos, lógicos o computacionales en la Música no tiene que ser docto en la Filosofía de la Música, sí es necesario que tenga una orientación dentro de la compleja ontología de este arte. Tanto en la Música como en otras áreas del conocimiento se ha atestiguado cómo la precisión de la Matemática, más un conocimiento deficiente acerca de la ontología del área de aplicación, provoca un dogmatismo; injustamente, se le suele responsabilizar a la Matemática por este problema, y no cuestionar la falta de capacidad de hacer nexos de quien la aplica.

La Teoría Matemática de la Música ofrece un modelo ontológico con un carácter flexible y abierto a modificaciones. Se intenta aportar un "sistema" de coordenadas para localizar problemas dentro del proceso de hacer Musicología. Se propone desde un principio formular un sistema tridimensional que nos permita decir dónde vive el concepto de la Música, y qué se conoce como Topografía de la Música. Las coordenadas son:

1) Realidad;
2) Comunicación;
3) Semiosis.

Veamos estas coordenadas con un poco más de detalle.

1) La realidad de la Música es física, psicológica y mental. En el nivel físico se trata de un fenómeno acústico, en tanto en su nivel mental se trata de la partitura como una abstracción. Como realidad psíquica, la Música expresa los estados emocionales de sus creadores y afecta emocionalmente al escucha.

2) La comunicación de la Música pasa por tres instancias: el nivel del creador, o lo que se conoce como la poiesis, seguido por el nivel neutral que es la obra en sí. El nivel estético del escucha es la instancia que percibe al ser interpretada una obra. Desde el momento en que una obra musical es creada, la existencia del creador es fija; en cambio, el número de escuchas e intérpretes crece constantemente.

3) Como la Música es uno de los sistema no-lingüísticos más desarrollados de signos, la Semiosis juega un papel en la ubicación de su ontología. Se enfatiza que la Música no se interpreta como un tipo de lenguaje; al contrario, se señala que hay diferencias significativas entre un sistema musical y uno lingüístico. Sin embargo, se describe la Semiótica de la Música desde la perspectiva de la Semiólogía Estructuralista de Roland Barthes como una generalización de la teoría lingüística de Ferdinand de Saussure. Para no desviarnos del propósito de este esbozo, no podremos ahondar en este aspecto tan interesante. Sólo mencionaremos que un sistema es semiótico si se articula según una estratificación fundamental de signos en su significante, significación y significado, donde el significante (los morfemas, o sea, la mínima forma significativa) llega a lo profundo del mensaje, el significado, por medio de las relaciones de la significación.

Todo lo anterior señala que una ubicación ontológica de la Música puede interpretarse como un punto en un cubo tridimensional generado por los ejes de realidad, comunicación y semiosis, cada uno, a su vez, articulado en tres valores:

realidad : física, psíquica, mental;
comunicación : creador, obra, escucha;
semiosis : significante, significación, significado

Así es, muy brevemente, como tenemos el cubo topográfico de la ontología musical, que consiste en un conjunto de $3^3=27$ posibles ubicaciones topográficas como puntos. Pero cualquier objeto general puede ubicarse en cualquier subconjunto del cubo, y los 27 puntos son sólo ubicaciones elementales, a partir las cuales se componen ontologías más complejas.

Mazzola resume contundentemente lo expuesto: "Es equivocado creer que la Música es un asunto especial de la ciencia porque se trata de objetos que apuntan a un estrato no mental de la realidad. La Psicología, por ejemplo, estudia emociones, la Física estudia partículas elementales. Todos estos objetos comparten aspectos que trascienden la conceptualización humana. Pero podemos concebirlos en un sistema cognoscitivo y modelar su comportamiento con un éxito impresionante para nuestra capacidad de comprensión. La Música no es ni más ni menos accesible que la Física. Pero tenemos que establecer un sofisticado sistema de signos para poder aprehender su significado; el lenguaje común no es la herramienta para el espacio conceptual de la Música."

A fines del 2002 apareció publicado el más reciente libro de Guerino Mazzola, del cual tengo el honor de ser uno de los colaboradores. Podemos apreciar que el mismo título de la obra, “The Topos of Music”, [ToM] posee un doble sentido. Por un lado está la palabra griega topos, que significa lugar y que sugiere la ubicación del concepto de la Música como un tópico, en el sentido de Aristóteles y Kant. Por otro lado, se hace referencia a la teoría matemática Topos que sirve para reflejar el sistema de signos musicales, esto es, la Música en su faceta de un sistema abstracto cuya estructura puede permanecer escondida sin un marco adecuado de comprensión. Este doble significado expresa, de hecho, la intención de unificar una profundización filosófica con la precisión de la Matemática, en torno a la Musicología. La Música está enraizada con realidades físicas, psicológicas y semióticas. Pero la descripción formal de las instancias musicales corresponde al formalismo matemático.

La Teoría Matemática de la Música está basada en las Teorías de Módulos y Categorías, en la Topología Algebraica y Combinatoria, en la Geometría Algebraica y Teoría de Representaciones, entre otras. Su propósito es el de describir las estructuras musicales. La filosofía detrás de ella es la de comprender los aspectos de la Música que están sujetos al raciocinio de la misma manera en que la Física puede hacerlo de los fenómenos propios del trabajo científico.

Esta teoría está basada: en un lenguaje adecuado para manejar los conceptos relevantes de las estructuras musicales, en un conjunto de postulados o teoremas con respecto a las estructuras musicales sujetas a las condiciones definidas y, en la funcionalidad para la composición y el análisis con o sin computadora.

Mazzola, en un magnífico artículo panorámico, "Towards Big Science" cita los elementos de Pierre Boulez de un programa de los años sesenta que tiene la intención de que las artes y la ciencia se reconcilien. (Yo diría que los artistas y los científicos). Con este postulado, la invocación de Boulez acerca de la "real imaginación" solamente puede ser concebida mediante la realización virtual (esencial) del sistema complejo teórico y práctico de la Música, de sus sonidos y relaciones mediante la tecnología informática de hoy.

La Música es una creación central de la vida y pensamiento del ser humano. Que actúa en otra capa de la realidad que la Física. Creemos que el intento de comprender o de componer una obra de gran envergadura en la Música es tan importante y difícil como el intento de unificar la gravitación, el electromagnetismo, las fuerzas débiles y fuertes. De seguro, las ambiciones son comparables, y por lo tanto, las herramientas deben de ser comparables.

Mazzola concuerda con Boulez acerca de que "la Música no puede degenerar o reducirse a una sección de la Matemática: la Música está fundamentalmente enraizada con las realidades físicas, psicológicas y semióticas. Pero requerimos más métodos sofisticados además de los datos empíricos y estadísticos para describir formalmente las instancias musicales.

En los años ochenta, Mazzola observó que las estructuras musicales son estructuras globales pegadas con datos locales. Mazzola utilizó la selección de una cubierta como atlas, la cual es parte del punto de vista en el sentido de Yoneda y Adorno. Las cartas se llaman composiciones locales y consisten (vagamente) de subconjuntos finitos K de módulos M sobre un anillo R. Estas cartas K se pegan y comparan mediante isomorfismos de los módulos subyacentes. Tales objetos globales, los cuales generan diferentes categorías se llaman composiciones globales. Éstos son los conceptos estudiados en lo que ahora se conoce como la Teoría Matemática Clásica de la Música.

Guerino Mazzola y Emilio Lluis

Mazzola menciona tres paradigmas mayores de la Matemática y Musicología que han ocurrido durante los 150 años que han sido paralelos en la evolución de ambas y la creciente presencia de la Matemática en la Música. Estos son: las estructuras globales, las simetrías y la Filosofía de Yoneda.

La primera quiere decir, en palabras, que las estructuras localmente triviales se pueden juntar en configuraciones estéticas válidas si éstas se pegan de una manera no trivial.

La segunda, las simetrías y (los fractales) son utilizadas en la composición, aparecen también en la Naturaleza y en la Matemática juegan un papel crucial como también en la Física.

En cuanto a la tercera: la Filosofía de Yoneda, en palabras dice que, para comprender un objeto, de vueltas alrededor de él. Esto quiere decir, entendimiento mediante el cambio de perspectivas. En Matemática, este Lema de Yoneda tiene importantes aplicaciones en el Álgebra Homológica, en la Topología Algebraica y en Geometría Algebraica solamente para mencionar algunas. Dice que un objeto matemático puede clasificarse salvo isomorfismo por su funtor. En Música, la partitura es solamente la primera vista y junto con todas sus interpretaciones constituyen su identidad. Quiere tener una buena idea del Popocatépetl, dé vueltas alrededor de él, es decir, contémplelo desde varias perspectivas, desde Cuautla, desde Puebla, desde la Ciudad de México, etc. ¡Qué maravilloso punto de vista para ambos intérprete y audiencia! Deja de lado la estéril competencia fuera del arte y la ciencia, como si éstos fueran juegos olímpicos.

En su artículo "Status Quo 2000", (el cual hemos apreciado mucho que fuese presentado en México durante una exposición plenaria espléndida en Saltillo hace más de diez años), explica porqué el acercamiento mediante su modelo teórico geométrico de ese tiempo evolucionó a un marco que es apropiado para muchos problemas musicales. Este nuevo marco está basado en Matemática más sofisticada como la Teoría de Topos.

Recientemente, Mazzola produjo una clasificación de objetos musicales, esto es, "existe un esquema algebraico cuyos puntos racionales representan ciertas clases de isomorfismo de composiciones globales". "Clasificar quiere decir la tarea de comprender totalmente un objeto. Esto es el Lema de Yoneda en su completa implicación filosófica". El comprender obras de arte quiere decir, sintetizar todas sus perspectivas interpretativas.

Veamos lo que es un Denotador de una manera informal. El material que expongo a continuación es tomado del libro de G. Mazzola [ToM] y de la Tesis de Maestría de mi alumna Mariana Montiel [M] quien desarrolló y creó algunos aspectos de esta teoría en colaboración con G. Mazzola.

Un aspecto de motivación fundamental para el desarrollo del concepto matemático llamado Denotador, es la navegación, el cual esbozo brevemente a continuación.

El conocimiento consiste en dos elementos fundamentales: información y organización mental. La información sola, sin un sistema de "coordenadas" que permita ubicarla y recogerla cuando sea necesario, no es conocimiento. Por este motivo, el paradigma de la información puramente digital, $\mathbf{Z}_2$, ({0,1}, "off" y "on", etc.) nada tiene que ver con el conocimiento. Es así que se precisa de un sistema de conceptos que provea un método completo de "navegación" y que funcione en un espacio de conceptos exhaustivo. El problema estriba en cómo realizar una arquitectura tal de conceptos sin perder rigor y confiabilidad. El Denotador pretende ser la solución a este planteamiento.

El espacio del conocimiento enciclopédico=Encicloespacio se plantea como la actualización del concepto tradicional de enciclopedia (del griego enkyklos paidea=enseñanza en círculo), originalmente desarrollado por Diderot y D'Alembert en el Siglo de las Luces. Con el advenimiento de la computadora personal, esta actualización exige un dinamismo en la estructuración de datos en el espacio-tiempo, en contraposición al contexto estático de antes, así como una relación interactiva con esta estructuración de información. Asimismo, el orden alfabético de la enciclopedia clásica, adecuada para sus volúmenes de textos, se generaliza a la orientación que impone la navegación (de "navigare" y este de "navis"=nave y "agere"=agitar, originalmente una actitud activa y no pasiva). En este sentido, el orden alfabético, adecuado para la enciclopedia de la sala, tiene que ser complementado por órdenes relacionados con presentaciones de datos que no son textos (espacios geométricos, colecciones de conjuntos, etc.).

La navegación tiene dos vertientes: navegación receptiva, más apegada a la enciclopedia clásica, en el que el Encicloespacio no se modifica, y navegación productiva, donde hay interacción con el Encicloespacio y se agrega conocimiento al ya existente.

Hay tres características de la enciclopedia que son, realmente, principios de la tipología de formatos universales de datos: unidad, completez y discursividad. A cada uno de estos principios hay un aspecto que le corresponde al Denotador. La unidad en la creación de conceptos se realiza por medio de construcciones recursivas; la completez se logra por la ramificación extensiva de estas construcciones y la discursividad se tiene por la libre construcción y recombinación de denotadores. En contraposición a los sistemas comunes de bases de datos, en el trabajo con denotadores no hay ningún conjunto fijo de posibles construcciones.

El concepto llamado “Denotador” permite describir los objetos musicales. Los Denotadores están concebidos de acuerdo con los criterios de navegación en el Encicloespacio y por lo tanto se usa la metodología de navegación, incluyendo la navegación matemática. La fundamentación filosófica de este concepto así como su formalización está fuera de los alcances de este artículo invitando al lector a leer el libro de Mazzola [ToM].

Existe la Teoría Enumerativa la cual es un acercamiento cuantitativo a la clasificación de composiciones locales vía acciones de grupos de permutaciones. El trabajo principal en esta área es de Harald Fripertinger. Esta teoría trata de contar las órbitas de acciones de grupos finitos en conjuntos finitos. Estos conjuntos representan objetos particulares especiales, es decir, acordes, particiones de conjuntos de clase de notas o de altura, motivos, sucesiones de 12 notas etc. Los grupos consisten de transformaciones musicales interesantes tales como la transposición y la inversión.

Se tiene un teorema de H. Fripertinger donde muestra en particular las clases de 72-elementos 2 230 741 522 540 743 033 415 296 821 609 381 912 = 2.23….$(10)^{36}$ lo cual indica que todavía hay motivos para ser introducidos en la composición musical.

Teoría de la Interpretación

La parte más fascinante de la Teoría Matemática de la Música la constituye la Teoría de Interpretación Musical. A continuación presentamos un muy conciso esbozo de la misma para un dejarle al lector un poco de sabor acerca de la Interpretación.

Mazzola comenta en sus artículos que “la Música ha sido estudiada desde el punto de vista de la Estética y la Psico-Fisiológica”. Trabajó en desarrollar una Teoría de la Interpretación que describe las estructuras y procesos que definen una interpretación pues “sin las herramientas adecuadas, la Teoría de la Interpretación permanecerá (y me encanta esta frase) como una rama de la Literatura en el espíritu de la Crítica Musical". La posibilidad de exhibir variedades algebraicas gramaticales en la interpretación tiene consecuencias profundas para el problema de la clasificación de interpretaciones. Así, el criticismo comparativo se convierte en un campo preciso de investigación y no más un sector de la literatura.

La interpretación es una transformación no trivial de la realidad mental de una partitura a la realidad física de una realización acústica y, en el límite, una realización gestual. Se crea un modelo de transformación de las estructuras locales y globales y se "modela la realidad mental" en la interpretación.

La Teoría de la Interpretación es un punto de inflexión en toda la Teoría de Topos en la Música. La Interpretación tiene que ver con la transformación de estructuras mentales en estructuras físicas. Esto es lo que tradicionalmente sucede en un concierto en el que los artistas humanos están realizando una interpretación en los instrumentos físicos, incluyendo toda la riqueza de los recursos humanos de expresión a nivel gestual, emocional o nivel estructural de los parámetros fisiológicos, sociales y físicos.

Evidentemente, una Teoría Global del la Interpretación está fuera de nuestro alcance, más aún cuando los componentes principales ni siquiera han sido atacados en un nivel científico. Por ejemplo, no hay un entendimiento de la transformación emocional de la música. Se saben algunos hechos muy elementales, por ejemplo, los relativos al impacto emocional de los intervalos del contrapunto en el cerebro emocional. También en el nivel de los factores clave en la calidad de una interpretación, muy poco se sabe, por ejemplo, sobre el papel de los parámetros instrumentales en la comunicación de contenidos musicales. Peor que eso: no hay ni siquiera una Teoría de la Interpretación comúnmente aceptada, es decir, una teoría que trate de la precisión y una descripción general de lo que es una interpretación en su forma más elemental. Por ejemplo, la discusión del tempo aún no ha sido llevada a un punto de aceptación general de lo que el tempo puede ser, incluyendo un desacuerdo fundamental sobre sus ramificaciones jerárquicas.

Uno de estos debates pudo germinar en torno a la distinción entre el tiempo mental (simbólico, lógico, o como desee llamarse) y el tiempo físico. Ingenuamente, el tiempo mental, tal como se encuentra en la notación de partitura, se ve como algo discreto, que se codifica en los enteros, o en algún submódulo de los números reales, mientras que el tiempo físico se parametriza a través de la línea recta completa de los números reales. El tiempo métrico es en sí mismo infinitamente divisible: no hay un límite inferior para duraciones positivas mentales, nunca se ha previsto, el tiempo métrico es topológicamente denso, no un subconjunto discreto del campo de los números reales.

Otros malentendidos que circulan en ambientes musicológicos mantienen que el tempo es una transformación localmente constante, es decir, una transformación escalón, al igual que las teorías de la Edad Media de la velocidad en el espíritu de Oresme. Él descomponía movimientos acelerados en una sucesión de movimientos uniformes.

Quizá por todo lo anterior es que la Interpretación es uno de los temas más complejos en Musicología. Abarca todo tipo de consideraciones relativas a las tres realidades básicas, la física, la mental y la psicológica. Pero, más allá de esta diversidad ontológica, la Interpretación es de carácter estructural sofisticado, e involucra a la Geometría Diferencial, las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias y Parciales.

Es cierto que la investigación en Interpretación se encuentra en su fase inicial, en particular con respecto al alto nivel de los artistas intérpretes. Pero ello no es una buena razón para abreviar el camino científico con el riesgo de la incomprensión de la belleza y la complejidad de la interpretación y caer en alguna grieta de simplificar demasiado.

Hay una dicotomía de realidades, comunicación y niveles semánticos entre una partitura y sus interpretaciones. Mazzola expone los hechos y sus consecuencias para una teoría de la interpretación en comparación con la teoría de la música mental.

Interpretar es más que simplemente tocar un instrumento "como cae"; al respecto, los músicos siempre se refieren a una partitura interior. El concepto de una partitura se utiliza aquí en su sentido genérico, es decir, una partitura genérica es cualquier material escrito, imaginado o concebido para la ejecución de una composición musical. En la música clásica europea o japonesa, por ejemplo, una partitura se realiza como una estructura de denotador de forma más o menos compleja. El músico de jazz, por ejemplo, sigue las pautas de acción y reacción y normas de acuerdo con esquemas del blues, la improvisación y a diccionarios individuales de elementos motívicos, rítmicos y armónicos. Mazzola propone la siguiente definición informal pero confiable:

La interpretación es la realización física de una concepción mental de una partitura genérica.

Dejamos el significado de "interpretación" abierta en su entendimiento común, pero incluimos, y esto es un tema central del discurso posterior, la interpretación en el sentido técnico de interpretaciones de composiciones locales. También hacemos hincapié en el atributo genérico "física", que incluye la realización acústica, pero no excluye otros parámetros de la interpretación, tales como la dinámica gestual de un artista intérprete. Pero sí, como ya se mencionó, excluimos parámetros psíquicos de la interpretación y por lo tanto significa una interpretación estrictamente física. Observe que esta subsume estratos, medios tecnológicos intermedios como un subsistema especial de realización física.

Existe la necesidad *a priori* de la interpretación infinita. La argumentación se relaciona con el análisis infinito, debido a la Filosofía de Yoneda y de su comunicación sobre el nivel de retórica de una interpretación expresiva. El problema fundamental aquí es muy común: ¿Por qué se necesita de la interpretación infinita? Estamos hablando de interpretaciones o actuaciones reales en los conciertos de verdad. ¿Necesitamos conciertos, recitales y grabaciones, una y otra vez? ¿Por qué? ¿No podría llegar el momento en que se toquen todas las interpretaciones relevantes en un momento dado, y que todas las interpretaciones sucesivas estén condenadas a la existencia como variantes superfluas del arsenal de interpretaciones básicas?

Una composición musical, tal como está delineada en una partitura y en un denotador asociado, es aparentemente un objeto finito. De modo que sería una consecuencia lógica de esta finitud que el infinito no esté inscrito en una composición musical y en su interpretación. Por tanto, tenemos dos preguntas: ¿Hay una infinidad sustancial en la variedad interpretativa de una partitura dada? Y, si este es el caso, ¿hay una infinidad de interpretaciones asociadas, y por qué éstas tienen un sentido para el oyente o para el artista?

La primera pregunta es fácil de contestar: sí, hay una infinidad de interpretaciones de un determinado denotador de partitura finito. Mazzola lo demostró en la discusión de las interpretaciones iteradas. Se trata de una respuesta afirmativa en el nivel mental, y uno puede fácilmente agregar una infinidad de evaluaciones de dicha interpretación finita o infinita, por ejemplo en el nivel de ritmo, análisis motívico y armónico. Uno puede también enriquecer las posibilidades de ver una interpretación dada por la variación del domicilio, una técnica que evoca el lema de Yoneda, por supuesto, pero que también es muy concretamente desarrollada en el contexto de las topologías de armónicos.

El punto es que las categorías de "entendimiento" de una composición musical (finita) son de un carácter infinito en muchos aspectos, y que no hay ninguna razón para clamar comprensión completa de cualquier argumento de tipo finito. Así, la expresión del contenido mental se basa en un arsenal infinito: la interpretación transmite un mensaje infinito.

Pero el infinito en la interpretación también viene de un segundo punto de vista: la interpretación es inevitablemente un experimento en el entendimiento o en el avance de la comprensión. La realización de una pieza de música en los espacios físicos crea un punto de vista, un vuelo a través de un paisaje virtual que puede aportar una nueva comprensión de los actores involucrados, puntos de vista que no se prevé sino que surgen de un ángulo particular visual de un “vuelo de interpretación”. Tal experiencia es un experimento mental, y como tal es una investigación creativa, no sólo una actividad reproductiva en aras de la coherencia social y psico-higiene.

Al igual que con la labor analítica, la tarea de la interpretación también se compone de subtareas locales que constituyen los morfemas de las transformaciones de la interpretación. En una primera aproximación, una interpretación p podría verse como una transformación de conjuntos que asocia a cada elemento X de una composición local (en una partitura o de forma relacionada con una partitura) un evento físico, codificada por un elemento $x = p$ (X) en una segunda composición local cuyos parámetros se refieren a una forma de significación física.

La coherencia de esa transformación de la interpretación es sin embargo muy raramente un problema global. Por ejemplo, el tempo puede cambiar de forma instantánea, por la indicación *istesso tempo*, obligando al artista a reiniciar desde el tempo inicial después de una deformación a través de una secuencia de las indicaciones agógicas. U otra, las manos izquierda y derecha pueden seguir tempos separados, a excepción de algunos puntos de encuentro donde los inicios deben de coincidir (en un rubato de Chopin, por ejemplo). En la música orquestal, la afinación es una transformación del instrumento, a pesar de que toda la obra está consignada en una misma partitura orquestal. O puede ocurrir que la interpretación local de un adorno (un trino complicado, por ejemplo) es una transformación que moldea y que actúa independientemente de las funciones que modelan los acontecimientos vecinos del ornamento. Por lo tanto, observamos una estructura global, un mosaico de funciones de cartas locales, muy parecidos a morfismos en composiciones globales.

Los campos vectoriales de la interpretación son el núcleo de la Teoría de la Interpretación. Lo que representa cada campo vectorial da lugar a una interpretación local determinada. A pesar de que los campos de interpretación no se reconocen como tales en la musicología y en la investigación tradicional de interpretaciones, aparecen de una manera totalmente natural en el contexto tradicional como tempo, entonación y dinámica.

Mazzola da cuenta de este hecho básico. Toma una mirada más cercana a la articulación y otros parámetros de sonido (aparte de su inicio, intensidad y volumen que se utilizan para el tempo, entonación, y la dinámica) revelando que los campos de interpretación deben de verse dentro de un enfoque bastante general.

Se define una configuración formal y a fin de proporcionar una comprensión más profunda del proceso de significación semiótica de campos de interpretación, revisa las filosofías de la interpretación de Theodor W. Adorno, Benjamin, y Diana Raffman.

Los conceptos de tempo, entonación y dinámica son conceptos oscuros en la Musicología tradicional, y lo que se hace es dar la precisión expresiva, a la par con la negación de explicitud formal.

Efectivamente, el tempo es uno de los factores más conocidos de la interpretación. Sin embargo, su conceptualización es oscura y está muy lejos de estandarizarse entre los músicos y científicos de la interpretación. En el libro de Mazzola se analizan las teorías más recientes así como sus deficiencias. Se demuestra que el tiempo es un concepto local cargado de una gran cantidad de semántica, y se procede al filtrado de la semántica de la estructura de datos. Después de eso, se da una definición precisa del tempo como un campo de interpretación de una sola dimensión en el eje del tiempo. Cualquiera que sea la expresión concreta, el tempo se refiere a la transformación de los inicios mentales a inicios físicos.

En tal situación, los morfismos tangentes se extienden a morfismos diferenciables con derivadas continuas positivas en cada punto. Las curvas del tempo asociadas a tales morfismos diferenciables son las funciones continuas positivas cuyos valores son las derivadas inversas en todos los puntos en un intervalo abierto que contiene los puntos.

Se puede proceder de manera completamente análoga para la entonación y la dinámica y representarlos como campos de interpretación unidimensionales con valores en la frecuencia e intensidad de los sonidos físicos. Es curioso notar que es mucho más aceptado por los musicólogos que la dinámica es un fenómeno continuo cuando se compara con el tempo y entonación.

Los campos vectoriales del tempo, entonación y dinámica son casos especiales de una sola dimensión de los campos de interpretación. También se trata el campo de ámbito de interpretación, a priori, de dos dimensiones del tempo y articulación y se establece una definición rigurosa del concepto de campo de interpretación.

Adorno y Benjamin han asociado la adecuación interpretativa con una actividad de "precisión infinitesimal". Se ve que su lenguaje sugiere el lenguaje de campos vectoriales, aunque no aparece de forma explícita en estos autores. Se presenta así la formalización matemática como una herramienta indispensable para acceder a la “inefabilidad” que conlleva la sutileza infinitesimal de las interpretaciones musicales.

Invitamos al lector a adentrarse en las diversas áreas de estudio como la Teoría de la Interpretación Inversa, las Topologías para el Ritmo y Motivos, la Semántica Expresiva, etc. en el libro de Mazzola [ToM].

La música pertenece a los humanos y no aparece ya como una revelación de las divinidades de cualquier sabor. También, esta renovación se debe al inmenso arsenal de información y tecnología comunicativa donde la información se convierte en algo muy accesible y la carencia de precisión es de inmediato señalada. Esta situación da lugar a una nueva y fundamental manera de entender el conocimiento humano.

El conocimiento está actualizándose y extendiéndose constante-mente y en el cual navegamos y experimentamos con un espíritu de espacio-tiempo dinámico. Ahora tenemos nuevos paradigmas en Musicología. Recordemos el experimento de Galileo acerca de la velocidad instantánea. Su acercamiento fue esencialmente bajo observación y medición y no en reflexiones abstractas especulativas. Su punto clave fue el de pasar del encapsulado especulativo de Oresme y los científicos medievales a accesibilidad "haciendo ciencia" con el método operacional: pensar haciendo. Este episodio tiene un análogo musicológico: velocidad en física con tiempo musical solamente que 500 años después.

Esto coloca a la Física y la Musicología en forma paralela donde hoy, músicos activos y matemáticos entre otros, están al borde de lo explícito dejando las especulaciones irrelevantes donde corresponde. Se están dejando atrás las últimas retóricas vacías. La revolución de Galileo fue la respuesta a la supuesta profundidad del discurso retórico.

Si consideramos los universos creados por el hombre tales como la Matemática y la Música podremos ver que el universo interno de ellas no es menos complicado e incontrolable que la naturaleza externa. Una pieza de naturaleza incontrolable, dada su riqueza de creación tal como la increíble complejidad a partir de un germen que implica procesos combinatorios, estrategias de interpretación, estratificación semiótica, etc. como el Arte de la Fuga de Bach, no es fundamentalmente diferente de una supernova en el espacio interestelar. Estamos actualmente viviendo un cambio tan radical en la Musicología como el que se experimentó en la Física hace 500 años. ¡Es un momento maravilloso!

CAPÍTULO V

Arte y negocio del Arte

Por lo expuesto anteriormente, el concertista, una orquesta o un conjunto de cámara siguieron las formas mencionadas. De ellos se espera que viajen de pueblo en pueblo, como las compañías de ópera o los circos.

Se crea un modelo que se instala en la mentalidad de la masa y en el deber hacer de un músico. Por lo tanto, una variable del "éxito" es el que recorra el mayor número de pueblos en el menor tiempo posible. Para ello, tiene que tener cierta demanda o proporcionar cierta curiosidad en el posible público o tener una gran campaña de promoción.

En general, para tener ese "éxito", debe de ofrecer programas "atractivos" consistentes de obras que sean inmediatamente reconocidas por la audiencia. Esto haría que tuviese un mayor número de asistentes y de ganancias. Para tener más público tiene que ofrecer obras más "taquilleras" o conocidas. El diagrama es:

Música trivial→mayor audiencia→mayor ingreso económico o el opuesto

Música sofisticada→menor audiencia→menor ingreso económico.

Esto se expresa en la fórmula expuesta anteriormente:

$$C \approx 1/M$$

o también

$$C \approx 1/E$$

donde E representa el ingreso económico.

El número de ejemplos es enorme. Solamente cito dos: la "manager" de Claudio Arrau le impide tocar un programa con música de César Franck o cuando para no quedar mal con su empresario Hurok, Artur Rubinstein toca un acorde fff que no está en la partitura al

finalizar una obra de Ravel que termina en pp y así llamar la atención de la audiencia y desencadenar un aplauso gigantesco.

El verdadero "éxito" es el personal, el del artista que logra realizar su interpretación de acuerdo a sus conocimientos y sensibilidad como lo expuse anteriormente.

Lo más importante es el disfrute o placer que logra el artista para sí mismo de su trabajo de intérprete. El público puede convivir o compartir con él ese momento y tener placer al escucharlo si lo desea.

Actualmente (y anteriormente también) me parece que estamos viviendo una comercialización enorme del arte. Los escasos promotores y compañías de músicos requieren de llamar la atención del cliente con productos novedosos, lo cual en la Música a veces se traduce en interpretaciones exageradas. Por ejemplo, los tempos lentos deben de ser mucho más lentos y los rápidos mucho más rápidos. Los movimientos del intérprete deben de ser exagerados, hacer gestos o muecas innecesarias (que no están escritas en la partitura), balancearse como trompo al tocar, gemir, cantar, o cualquier otra que dé la impresión de deleite o profundidad al actuar. (Quizás recuerde usted el show de Liberace. Si no, véalo en YouTube. Vea todo lo que hacía. Hasta quitar "las partes aburridas", según decía. Tomaba tempos extremadamente rápidos para satisfacer las "bajas pasiones" de su audiencia, realizaba pirotécnia pianística, aparecía con extravagantes vestimentas. Al final de su vida actuaba principalmente en Las Vegas. Fue el pianista más rico (en dinero) de todos los tiempos.) Las audiciones masivas en estadios u otros sitios arqueológicos fuera de las salas de concierto con sonorización artificial transmitidas por medios electrónicos son más comunes. La publicidad masiva se traduce en ganancias espectaculares, etc. Programas que comiencen con arias de ópera muy conocidas y terminen con música ranchera, música de mariachis o de Cri-Cri.

El pequeño mercado de trabajo del concertista a nivel mundial es manejado por unas agencias o personas con ciertas características. En cuanto al oyente, un poco más conocedor, (hay el que escucha el "gis" en lugar de la música) está acostumbrándose cada vez más a escuchar interpretaciones casi perfectas en cuanto a notas falsas, ruidos, incluso ediciones de pasajes u obras completas fuera de la posibilidad de tocarlas por un ejecutante en vivo con la misma perfección. Incluso, detalles que no se escucharían en vivo, sí se escuchan en una grabación. Así, a veces, el público demanda del intérprete en vivo, más de lo que puede dar. Es como pedirle a un deportista que anote siempre y sin fallar una sola vez. También están los que ven las interpretaciones como si fueran un deporte olímpico. Comparan las distintas versiones y las califican, en lugar de disfrutarlas.

En resumen, una cosa es el arte, y otra, muy diferente, es el negocio del arte. Sin embargo, esto indudablemente influye en la concepción y gusto del intérprete y del oyente.

Claudio Arrau: el porqué de un gran artista.

Deseo contarles algunas de mis experiencias con el arte de Arrau.

Desde niño tuve el privilegio de escucharlo en vivo en muchas ocasiones. Nunca tomé clases con Arrau. Sin embargo, cuando ya mayor comencé a leer los artículos y libros sobre él, sobre su filosofía musical. Encontré una gran coincidencia con mis propios pensamientos y enfoques hacia el Arte y la Música en particular. He aprendido mucho de él.

Al comienzo de mis estudios pianísticos utilizaba las ediciones de Schnabel y Henle de las Sonatas para piano de Beethoven. Sin embargo, durante mi preparación del Ciclo completo de las 32 Sonatas para piano de Beethoven, que presenté durante los años 87-89, utilicé la edición del Maestro Arrau publicada por la casa Peters. Fue una grandísima sorpresa el ir comprobando que, efectivamente, el Maestro tenía razón. Aparentemente sus digitaciones eran extrañas pero bastaba probarlas y preguntarse porqué las utilizaba, para darse uno cuenta de la profundidad musical implícita en ellas. Lo mismo puedo decir del resto de sus indicaciones interpretativas. Creo que este trabajo de toda su vida, el cual concretó en cerca de 10 años, constituye uno de los legados más grandes al mundo que pianista alguno haya realizado.

Comparto la filosofía de Arrau en el sentido de que la interpretación musical consiste en acercarse lo más posible a las intenciones del compositor y de que a partir de esa base uno toma su propio vuelo de imaginación. La interpretación está, por un lado, al servicio de las intenciones del compositor, y, por otro lado, el intérprete pone su propia personalidad. Es objetivamente erróneo el tocar fortissimo en donde Beethoven indicó pianissimo y llamar a eso interpretación.

El maestro estaba de acuerdo con Mahler, en el sentido de que la Música no está en las notas. El explica que la Música está por encima, entre, y por debajo de las notas, en los silencios, y especialmente, en ellos.

Arrau pensaba que lo que más cuenta al tocar son las intenciones del compositor y lo profundo del significado de una obra. Uno siempre debe proyectar en la audiencia, pero nunca tocar para complacer al oyente. Debe ofrecérsele lo que tiene uno que dar, a saber, el mensaje del compositor a través de la propia personalidad. Comenta el Maestro que uno de los problemas con generaciones enteras de pianistas es el de que tratan de complacer al público.

Aquí está la clave de su gran ser como artista. Arrau nunca actuó para provocar la impresión del tipo circense que muchos pianistas utilizan para asombrar, ni tampoco tuvo la actitud olímpica, a saber, el de tocar el mayor número de notas en el menor tiempo posible.
Es así que su carrera como artista de las grandes ligas comerciales del arte fue ganada a pulso y con honestidad. Entre más profundo y exquisito es el pianista en su manera de interpretar y en la selección de su repertorio, menor será el número de público masivo. Esto último se traduce en

menores ganancias de entradas o discos vendidos y, lo que se conoce como "éxito" (yo le llamo "éxito comercial", el cual es muy diferente del "éxito artístico"), no se da y se produce un fracaso, también comercial. Los representantes o promotores están para hacer dinero y exigen al pianista obras que antes del intermedio causen sensación y arranquen la rabia del público al final del programa. El Maestro también fue víctima de esto en las grandes ligas comerciales pero pudo hacer arte, gracias a su filosofía, la cual acabo de exponer. (Por ejemplo, siendo chileno tuvo que hacer recalcar su capacitación en Alemania, con esa idea de mucha gente, decía el Maestro, de que sólo los alemanes podían tocar música alemana y los franceses la francesa, "a mí no me quedaba nada").

Arrau aconsejaba a todos los pianistas, especialmente a los jóvenes y estudiantes, que olvidaran el espíritu competitivo, el cual produce todas las dificultades neuróticas que encontrarán tarde o temprano. Les hacía ver que como individuos e intérpretes son únicos. Que poseen un mensaje pequeño, grande o profundo, el cual es suyo solamente.

Qué gran sabiduría la de Claudio Arrau. Hay quienes ven el arte como una actividad olímpica y para los cuales el ser pianista es un medio para obtener un fin, el cual puede ser la fama o el dinero o cualquier otra cosa.

Claudio Arrau y Emilio Lluis en Canadá en 1980.

Desde muy joven tuve mi propio enfoque personal. Es el siguiente: habemos quienes vemos el arte como un fin en sí mismo y no como un medio para la obtención de algo material, vemos la Música como una actividad maravillosa, que existe para ser disfrutada y en la cual uno tiene el privilegio de dar vida a las obras musicales de los seres humanos más extraordinarios de la raza humana. Considero que durante mi actuación no debo distraer con movimientos o muecas u otras cosas innecesarias al oyente, para que éste se concentre en lo verdaderamente importante, la música a la cual le estoy dando vida, con todos sus detalles finos de fraseo, estilo, etc.

Cito recomendaciones interesantes del Maestro:

Comentaba Arrau que Beethoven consideraba sus sonatas esencialmente como obras dramáticas. Dicen algo en cada compás y por lo tanto deben de interpretarse como si uno mismo viviera el drama.

Arrau comentaba que los fortes, los crescendos, diminuendos, etc. son diferentes para cada compositor. Un crescendo es más violento en Beethoven que en Mozart.

Arrau se conservaba completamente relajado mediante el hundirse, el nadar, el flotar en la Música, mediante el dejarse llevar por la corriente. Dejo que la tensión suceda, dejo que la emoción fluya. Debo convertirme en uno con el instrumento. Por eso debo de tocar con todo el cuerpo, todo el peso del cuerpo debe ir a las teclas. Por orto lado, mientras me mantengo relajado creo tensión interna y sentimiento enormes. El tocar muy bien requiere de una tensión emocional increíble sin estar físicamente tenso. Parece sencillo pero no lo es, concluye el Maestro.

Arrau memorizaba de la siguiente manera: “primero toco la obra sin pensar en memorizarla, hasta que está en los músculos. Tengo cuatro tipos de memoria: la muscular, la fotográfica, la del sonido y la analítica. Utilizo la memoria analítica al final, ya que la obra está dentro de mí”.

Arrau decía que el que poseyera un gran repertorio se debía al hecho de no ser flojo. Siempre quiso aprender obras nuevas, y nunca deseaba tocar demasiado una misma obra y deseó siempre tocar el mayor número posible de recitales diferentes en una misma temporada.

Otro ejemplo a seguir del Maestro es el de adquirir una amplísima cultura en todas las ramas del saber.

"Si se tocan los trinos de la sonata Op. 111 de Beethoven buscando solamente un bello sonido, ¿qué es lo que se tiene? El sonido por sí mismo no es lo que hay que buscar como un fin. Hay sonidos que deben de sonar ásperos o rudos en Beethoven o Brahms. Los trinos de la Op. 111 no deben de ser tocados rápidos. Son de carácter expresivo".

Arrau prefería a los estudiantes que preguntan el porqué de las cosas, que deseaban ser convencidos. Estaba convencido que las sonatas de Beethoven ocupaban el lugar más importante para la enseñanza y el estudio. Pensaba que en ellas Beethoven pide un significado de cada nota, cada frase y ritmo. Joseph Horowitz (quien escribió uno de los mejores libros jamás escritos sobre intérprete alguno) al preguntarle a Arrau, en 1980, si seguía enseñando, le contesta que, muy poco. Que le encanta enseñar pero que ha tenido algunos alumnos que lo decepcionaron mucho. "La manera en que trato de enseñar a tocar tiene que ver con una actitud general hacia la vida y yo creí que había tenido éxito en transmitirla a esos discípulos. Después no los vi ni oí durante varios años y cuando finalmente los volví a ver me di cuenta que ya no quedaba nada de eso. Aún suelo escuchar a los jóvenes que desean tocar para mí... siento que es una obligación, pero tan pronto como noto algo de esa terrible vanidad, pierdo todo el interés".

Para los interesados en la técnica pianística de Arrau, les puedo decir que pueden leer en el libro de J. Horowitz el capítulo sobre técnica, y los 10 mandamientos publicados por la revista Le Monde de la Music hace algunos años, entre otros artículos.

El trabajo del concertista en México

Analicemos brevemente el mercado del concertista.

Demanda:

En el área metropolitana de la Ciudad de México existen menos de 10 orquestas sinfónicas mayores. De un total de más de 24 000 000 de habitantes solamente acuden a un concierto al menos una vez al año, 2000 personas. Si le parecen pocas, multiplíquelas por 2 o por 10. Entonces serían 20 000 personas. Téngase en cuenta que asisten los mismos cada semana y no los va a contar cada semana, sino al año. Los recitales de solistas tienen en promedio 30 asistentes en toda esta área metropolitana. Si hay 10 recitales en un solo día, lo cual es quizás demasiado, habrá 300 personas en promedio. Si le parecen pocas, multiplíquelo por 2 o el número que usted desee.

En resumen, se tiene una demanda de .08% de la población del área metropolitana. Si considera que es poco, ponga usted el doble, es decir, el .16 %. Esto es, aún así, una demanda pequeñísima. Hay que decir que el público llamado melómano generalmente prefiere escuchar a concertistas de otra parte de la galaxia si fuera posible ya que los nacionales no considera que sean buenos. Esos extraterrestres deben tener apellidos terminados en isky u osky de preferencia. Hay que tener muy en cuenta que ha existido un malinchismo en el mexicano (no solamente en cuestiones de música) del cual no se ha podido desprender.

Oferta:

Enumeremos las orquestas grandes: Orquesta Filarmónica de la UNAM, Orquesta Sinfónica Nacional, Filarmónica de la

Ciudad de México, Orquesta Sinfónica del IPN, Orquesta Sinfónica de Coyoacán, Orquesta Sinfónica del Estado de México, Orquesta de la Ópera, … ¿Cuántos músicos que tocan en alguna orquesta hay? Quizás menos de 600 ya que muchos tocan en varias orquestas. Los músicos pueden obtener un lugar de trabajo en alguna orquesta cuando lo hay. Actualmente están completas y muy esporádicamente se abre una plaza. La mayoría de las orquestas paga sueldos muy bajos que hacen que el músico de atril tenga que obtener ingresos de otros trabajos

¿Cuántos pianistas mayores de 30 años hay que toquen al menos 1 recital al año? ¿Parecería que hay menos de 30 en el área metropolitana? Si le parecen pocos, multiplíquelos por 2, es decir 60, para una población de más de 24 000 000. ¿Qué tal si fueran los médicos del área metropolitana? Pues no alcanzarían a cubrir a toda la población. Hacer un músico de orquesta o solista, a diferencia de las demás profesiones requiere como mínimo 16 años para que pueda presentar su primer recital o concierto dignamente. Las demás carreras llevan 5 años de preparación. Actualmente no existe un solo pianista en nuestro país cuyo modus vivendi sea exclusivamente el de dar conciertos. Siempre va acompañado de dar clases u otros trabajos.

Lo peor de dos sistemas:

Por un lado, a principios del siglo XX existían las ideas socialistas de que el Estado se debería de hacer cargo de la cultura y que debería de ser proporcionada gratuitamente al pueblo o público que deseara asistir. La gente se quedó con este pensamiento: “la cultura debe de ser gratis y yo no tengo que pagar un solo peso”.

Por otro lado, el artista debe de ser capaz de vivir independientemente de su arte. Debe de cobrar su trabajo. Es decir, el oyente debe pagar una cantidad por recibir algo a cambio. Si el artista desea hacer esto, le es demasiado difícil lograrlo pues una gran cadena de obstáculos se lo impide. Sindicatos de todos tipos, cuotas, Hacienda (lo cual es justo, debe de pagar sus impuestos por el sueldo ganado),… Además debe saber "vender" su producto o sus "naranjas" como lo vamos a decir para ilustrar lo que sigue. Debe quizás tener buenas relaciones o influencias para que el encargado de tal o cual dependencia le pueda asignar un recital pagado si es que de casualidad, por alguna razón extraña tiene presupuesto para pagar a los artistas, pero solamente uno. Quizás le alcance para pagar el desayuno o comida de ese día. Ya no volverá a tocar en ese lugar por lo menos en un año. Tendrá esperar ese tiempo y buscar otro lugar. Todo el trabajo de años y meses de preparar un recital, para tocarlo solamente una vez. Esto sucede sobre todo si tiene la suerte o la influencia o la relación con el director de una orquesta. Éstos prefieren contratar a solistas extranjeros que les puedan ofrecer un intercambio (los nacionales raramente tienen algo que ofrecerle a cambio). Tú me invitas a dirigir y yo te invito a dirigir o ser solista. Esto sin contar que los encargados de la programación también tienen ese malinchismo, al igual que el público, de creer que lo extranjero es mejor que lo nacional. Lo mismo sucede cuando se organizan recitales en salas grandes, se contrata a extranjeros sobre los nacionales.

El artista va una sala o auditorio a vender sus naranjas. Llega y le dice al burócrata que se encuentra ahí que tiene unas naranjas buenísimas, deliciosas que le ha costado muchísimos años de esfuerzo cultivarlas. Que no tiene un estanquillo donde venderlas y que si las puede vender en esa sala. Le contestan de inmediato que no tienen dinero para comprarle sus naranjas, y que en el mejor de los casos que todas las naranjas que se ofrecen en esa sala "me las manda Bellas Artes", es decir, se "regalan" a los asistentes a través de "Bellas Artes". Este artista se siente frustrado. No se resigna a tocar con su instrumento en la calle, puede dañarse a la intemperie o puede ser demasiado pesado o no ser de pilas, requiere de corriente eléctrica la cual se tendría que robar con un diablito de la vía pública como lo hacen los puestos de comida. Considera que tiene dignidad y que no se va a rebajar. Donde a veces le dan trabajo es divirtiendo borrachos en un bar, pero su actividad como concertista no es adecuada para ese fin. Tiene que cambiar de repertorio y en lugar de Mozart o Ponce hay que tocar cualquier basura comercial.

Al cerrar la edición de este libro me fue proporcionada esta foto tomada en julio del 2011 donde ya se ve que se ha llegado a lo descrito anteriormente en Alemania. Puede usted observar las monedas que le han dado a este artista y la mesita donde vende sus discos. Obviamente tuvo el atrevimiento de sacar su piano o el de una tienda a la calle contando con ayuda de varias personas.

La otra “alternativa” es conseguir una plaza de concertista en Bellas Artes o en Xalapa, no sé de otro lugar de la República Mexicana que contrate concertistas. Pero esos lugares ya están llenos de artistas y el gobierno no tiene porqué “cargar” con todos los demás artistas. Los hay que se consideran “independientes”. Pero el mercado está “muerto”. Al regalar las naranjas Bellas Artes u otras dependencias que proclaman que las naranjas deben ser gratuitas, ¿quién quiere pagar aunque sea un peso por ellas?

Ejercicio de la sala de conciertos.

Se le ocurre que cuando sea grande tendrá dinero para montar una sala de conciertos para 100 personas y entonces sí podría tener ganancias de su arte. Al hacer cuentas, piensa que requiere alrededor de 20 millones de pesos. Se dará cuenta de que es insuficiente. Su proyecto se ve anulado al enterarse que requiere de cobrar una entrada de muchísimos pesos.

Si usted no hace nada y mete los 20 millones en cetes o en la bolsa, etc. Tendrá un interés anual de, digamos 10% (antes de la crisis mundial), es decir, unos 2 millones de interés al año, sin hacer nada, solamente depositarlos en la institución que corresponda. Entonces, si va a invertir los 20 millones en una sala de conciertos debe de tener una ganancia mayor a 2 millones al año, si no, no le conviene trabajar tanto para perder dinero. Si queda “tablas”, ni gana más ni menos que los intereses, regalará todo su trabajo. Entonces tiene que ganar 2 millones al año, es decir, 166 666 pesos al mes. Si ofrece un concierto a la semana tendría que cobrar la entrada a esas 100 personas a 416 pesos por persona sin contar el costo de la publicidad, mantenimiento, personal, afinaciones, etc. etc. Tendría que tener lleno absoluto, si no, tendría pérdida. Recuérdese que esto es para ni ganar ni perder. ¡Esto es más que imposible cuando el promedio de asistencia a un recital gratuito es de 30 personas!

Todo esto es sin contar que le “caerá” todo el peso de la ley. Deberá tener suficiente lugar de estacionamiento, seguridad, sanidad,…sindicatos, etc. etc.

La cámara de diputados: Todo hecho para que no funcione.

Efectivamente, las leyes y sobretodo la aplicación o no aplicación de las mismas están hechas para que nada funcione. Trate usted de convencer a un diputado, quien tiene “importantísimos y prioritarios” temas que atender en su agotada agenda, que usted no es un creador de basura comercial, que su arte tiene una escasísima demanda, que entre más calidad tenga su arte menor será el número de asistentes. Que se requiere de una legislación que promueva el arte, no que lo elimine. Que usted no debe ser tasado como roquero o pantera del norte. Son actividades diferentes. Pero le van a decir que la ley es la ley, y debe ser pareja.

Si el artista dice que hará un concierto para que obtenga ganancias producto de su trabajo y se le ocurre hacerlo en el Estadio Azteca, llevando su piano, con un programa con música de Bach y Mozart, lo seguro es que reciba unas 30 personas en todo el estadio. Bueno, 100 para no ser tan pesimista. Tendrá que pagar el alquiler del estadio, a todos los de la tramoya, a los vendedores de cerveza, a los policías, a los respectivos sindicatos,…. ¡Solamente le quedaría por hacer, endosar su acta de nacimiento!

Las escuelas de música.

Tantas escuelas de música, tratando de formar músicos o gente que aprecie el arte musical, Escasos artistas graduados con una licenciatura o maestría o doctorado en interpretación musical,… ¿Qué demonios les decimos o les dice su legislación, gobierno o país a quienes desean estudiar una carrera de músico? Si usted ya tiene los méritos y desea ingresar a una escuela oficial de música para dar clases, hay unos 10 solicitantes para una sola plaza de 4 horas.

Las academias de música particulares.

Han cumplido un papel muy importante en la formación de artistas. Sin embargo, cuando yo tenía 15 años, las palabras de un pianista mayor que yo fueron "yo doy clases de piano a piedras, y después de ello preparo mis recitales". Esto decidió mi futuro, ya que yo decidí dedicar esas 40 horas a otra actividad que me apasiona: la Ciencia. No me equivoqué. Mi vida es fascinante en cuanto a las actividades que desarrollo. No dependo de los escasísimos ingresos que pudiera tener por dar conciertos ni tener que darle clase a piedras, las cuales en estos años son ya muy escasas.

El futuro del trabajo del concertista en México y en el mundo.

Esto no solamente sucede en la Ciudad de México. Sucede en todo el mundo. Al ver este panorama desde hace décadas, también observé que hay maneras de hacer conciertos sin necesariamente estar en las grandes ligas comerciales de la música, las cuales ya mencioné que tienen ciertas características no aptas para mencionar en este libro.

Los concertistas de las grandes ligas comerciales son pocos comparados con el gran número de músicos que no pertenecen a ellas. No necesariamente están en una agencia sino que tienen promotores, o ellos mismos se arreglan giras por varios países. Muchos sufren de ser viajeros que viven de hotel en hotel, una vida muy solitaria y difícil de llevar emocionalmente. Algunos lo hacen durante unos años, no así desde el principio y tampoco al final de su carrera. Las clases son parte muy importante de sus ingresos. En general, los ingresos por los conciertos son complementarios a sus ingresos por la docencia.

Sin embargo hay otra manera de vivir más agradable, al menos para quien escribe. Observé en los años setenta del siglo pasado, cuando yo era estudiante, que amigos profesores mayores que yo, tenían su cátedra de tiempo completo (o repleto) en alguna universidad canadiense y que parte de su actividad era la de ofrecer conciertos. Daban 12 horas de clase a la semana y el resto lo dedicaban a preparar sus conciertos. Esta es una alternativa. Yo mismo la practico, pero me cuesta demasiado trabajo. Además de cumplir todas mis actividades como profesor de tiempo completo, una vez realizado esto, en vez de ver futbol o cualquier otra cosa que otros hagan, yo lo dedico a ofrecer conciertos con todo el trabajo que ello implica. Es difícil, requiere de mucho orden y mucho, mucho trabajo. Requiere pasión, sobre todo. Me considero un ser privilegiado al haber elegido dedicar mi vida a convivir con la obra de la gente más destacada de la raza humana en la ciencia y en el arte, en la Matemática y en la Música, desde un Gausss, Galois, Mazzola, etc. hasta Bach, Beethoven o Rachmaninoff.

Organización de conciertos:

En 1997, uno abría el periódico y no encontraba un solo recital de música en muchos días. Era increíble que en una de las ciudades más grandes del mundo no hubiera ni siquiera un recital al día durante varios días. Es así que uní esfuerzos con el Maestro Edwin Lugo quien toda su vida ha realizado la organización de actos culturales de diversa índole. Así unimos la Asociación Musical Kálmán Imre de la cual él es presidente y la nueva Academia de Música de la Sociedad Mexicana de Geografía y Estadística de la cual yo había sido nombrado presidente. Al pasar los años vemos que hemos organizado miles de conciertos brindándoles a los artistas un foro, el cual cuesta mucho trabajo conseguir como una colaboración de nuestras asociaciones con las diversas instituciones. Básicamente nosotros ponemos los artistas, con todo lo que ello implica y ellos ponen la sala, piano y difusión del concierto. Si nosotros no lo hacemos, nadie lo hará. Hemos sido miembros de la resistencia, la resistencia a que se muera el arte musical en nuestro país. Es increíble, pero existen ciudades con más de un millón de habitantes que no tienen un solo concierto de música de arte al año.

Durante todo el año 1998 organizamos cada semana un concierto en nuestra sede donde tenemos a nuestra disposición una sala con capacidad de 200 personas con un piano Bechstein de media cola del año 1887. Tuvimos que dejar de hacerlos en nuestra sede debido a que la inseguridad, el ruido excesivo, la falta de higiene de las calles y la falta de estacionamientos hacían que el público que iba una vez no pudiera regresar por esos factores a pesar de que les había encantado el lugar, la sala, la programación, la acústica, etc. Ese trabajo enorme de hacer público, es decir, de hacer que la gente regrese no se pudo llevar al cabo. Después decidimos realizar colaboraciones con distintas casas de cultura o instituciones donde nosotros poníamos a los artistas con programación, etc. y ellos el lugar y la difusión. Hasta la fecha, así hemos seguido. Es de notar que en esas instituciones no se permite cobrar una entrada, aunque sea módica. Tienen la creencia (quienes tienen a su mando las decisiones políticas) de que la cultura debe de ser gratuita (hasta lo anuncian en grandes espectaculares haciendo creer a la gente que la cultura musical es la de las panteras norteñas a las cuales sí les pagan una millonada pues concentran grandes masas). Si tan sólo se permitiera cobrar, con recibo oficial y pago de impuestos por parte de los artistas, podría haber una pequeñísima fuente de ingreso para el músico y no dar lugar a que el propio artista esté subsidiando la verdadera cultura. Esto, sin tener una competencia desleal de quienes regalan las naranjas.

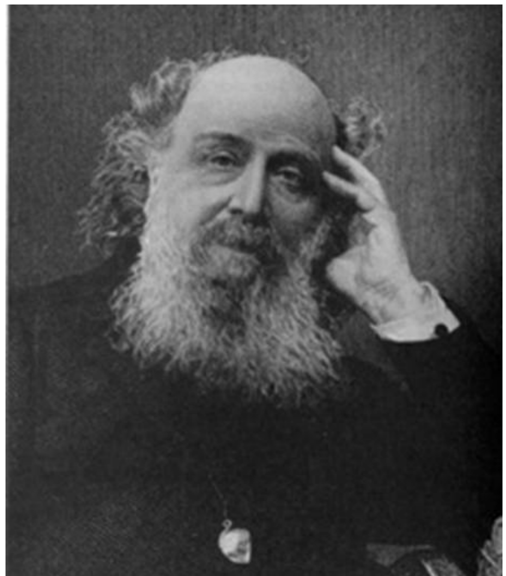
Lo que se clama a gritos es la palabra “libertad”. Libertad de que el artista pueda vivir de su profesión, o cuando menos de percibir alguna retribución económica como producto de su trabajo. Si en las salas o auditorios se cobrara 10 pesos por persona y asistieran en promedio 30, el artista se llevaría una parte de los 300 pesos ya que la otra sería para la institución con la cual podría mandar afinar el piano o arreglarlo en el mejor de los casos. El propio artista se uniría a los esfuerzos de difusión de las instituciones y atraerían más público. Cambiaría la idea de la gente de que la cultura es gratis. No, tiene un costo y un derecho de quien la hace, de poder tener una ganancia como producto de su trabajo. Si esto no se hace, en muy poco tiempo, como ya ha pasado en muchísimas ciudades de nuestro país, desaparecerá por completo el arte musical para quedar únicamente la basura comercial de la música.

Los pianos de muchas salas de la capital y del resto del país son pianos Steinway de la época de Don Porfirio. Desafortunadamente en pésimo estado. Rara vez les han dado mantenimiento y cuando lo han hecho, está realizado de muy mala manera. Es como tener coches Rolls Royce pero todos chocados y descompuestos por dentro.

La Ciudad de México quizá posee el mayor número de auditorios y teatros comparado con otras grandes ciudades del planeta pero desafortunadamente muy mal aprovechados. Se utilizan para todo tipo de actos, y la mayoría no tiene piano. Muchos son públicos, construidos con dinero de los impuestos y por lo tanto pertenecen al pueblo, no a los burócratas que se ostentan como sus dueños y ¡hasta los alquilan!

El público que asiste a las distintas salas donde organizamos conciertos es de diversa índole. Lo hay muy culto, lo hay de melómanos, lo hay de gente que simplemente se deleita con la música, lo hay sin que sepa nada o haya alguna vez asistido a un concierto. Hemos realizado una labor inmensa haciendo público, es decir, tratando de que regrese y se aficione al arte musical. Los agradecimientos que tenemos en cada concierto no se compran con nada. El artista, al dar belleza, el público se lo agradece inmensamente. Esto es suficiente para seguir con nuestra labor, en general tanto el Maestro Edwin Lugo como yo permanecemos detrás o colaboramos anónimamente sin que se nos mencione explícitamente. Todo esto lo hemos hecho sin percibir un solo centavo durante más de 13 años (Edwin Lugo lo ha hecho por varias décadas). Al contrario, hemos puesto nuestro trabajo y dinero para que no se acabe el arte musical en México. Aunamos nuestro esfuerzo a las instituciones gubernamentales para que haya cultura en nuestro país. Lo hemos hecho porque estamos convencidos que las cosas que valen la pena se realizan por convicción y pasión, no por dinero, el cual no existe para esta actividad por lo antes expuesto. Es una lástima que el artista no pueda tener ingresos por su trabajo debido a la manera de pensar (o no pensar) de los gobernantes ejecutivos y legislativos pasados y actuales. Es hora que el artista deje de padecer lo peor de los dos sistemas, por un lado, el Estado no se hace cargo de ellos y por el otro le impide su supervivencia, esto es, extinguirlo por completo.

Recordemos que la ciencia y el arte son actividades esencialmente humanas. La Matemática es una de las "Bellas Artes" que posee el don de ser al mismo tiempo la más elaborada y sofisticada de todas las ciencias. Esta es una frase muy difícil de comprender para la mayoría de las personas. Sin embargo, la ciencia es una manera eficaz y elegante de comprender el universo. La ciencia se auto corrige. Nuestra vida y nuestro destino están indisolublemente ligados a la ciencia. Es esencial para nuestra simple supervivencia que comprendamos la ciencia. Para quien la comprende, la ciencia es un placer. Hemos evolucionado de tal modo que el hecho de comprender nos proporciona placer, porque el que comprende tiene mayores posibilidades de sobrevivir.



James Joseph Sylvester
(1814-1897)

La Matemática, a diferencia de la Música, no es para espectadores. Es un lenguaje que, o bien se habla, o bien no se entiende absolutamente nada. No hay estadios de matemáticas para un gran público. Entonces, vuelvo a preguntar ¿qué relación existe entre la Matemática y la Música? J.J. Sylvester escribe en 1864: “May not Music be described as the Mathematic of Sense, Mathematics as Music of the reason? The soul of each the same?” Es decir, "¿Acaso no puede describirse la Música como la Matemática de lo sensible y la Matemática como la Música del entendimiento? El alma de cada una, la misma". Ambas se crean, se recrean, podemos apreciarlas y disfrutarlas. Una ventaja o desventaja, según se quiera ver, es que para la Matemática no existe un instrumento musical donde tocarla, ésta se queda a nivel de partitura, podría decir, que va directamente de pensamiento a pensamiento.

Para mí, la relación más importante entre la Matemática y la Música es, que ambas son "Bellas Artes". Poseen características similares. Están relacionadas en el sentido de que la Matemática provee una base científica para comprender la Música y la Musicología y para que esta última pueda considerarse una ciencia, no una rama de la literatura poética común y corriente.

Deseamos finalizar esta exposición estableciendo una vez más, que la Matemática es una de las "Bellas Artes", la más pura de ellas, que tiene el don de ser la más precisa y la precisión de las Ciencias.

APÉNDICE I

K-Teoría Algebraica

Un ejemplo: la K-Teoría Algebraica.

A pesar de que desde principios del siglo XX era bien conocido que un monoide conmutativo (un conjunto provisto de una ley de composición asociativa con elemento neutro) sin divisores de cero podía considerarse dentro del grupo conmutativo que genera, es hasta 1957 (en que Grothendieck pensara en esto) que comienza propiamente la K-Teoría. Es de esta misma manera que los enteros negativos se definen a partir del monoide aditivo de los naturales [M-B] y que los números racionales positivos se definen a partir del monoide multiplicativo de los naturales sin el cero.

Alexander Grothendieck (1928-)

La idea de Grothendieck fue la de asociarle a un monoide conmutativo $\mathbf{M}$, un grupo conmutativo $\mathbf{K}(\mathbf{M})$, único salvo isomorfismo, y un homomorfismo canónico definido de monoides $\boldsymbol{\varphi}:\mathbf{M}\to\mathbf{K}(\mathbf{M})$ tal que para cualquier grupo conmutativo $\mathbf{G}$, cualquier homomorfismo de monoides $\mathbf{f}: \mathbf{M}\to \mathbf{G}$ se factoriza en forma única como

$$\mathbf{f: M \to K(M) \to G}.$$

El grupo de Grothendieck apareció publicado por vez primera en 1958. Aparte de su uso en el teorema de Riemann-Roch, una de las aplicaciones más conocidas de la construcción de Grothendieck la realizaron en 1959 Atiyah y Hirzebruch. Aplicaron la construcción al monoide aditivo de las clases de isomorfismo de haces vectoriales complejos con espacio base un CW-complejo **X**.

El grupo de Grothendieck lo denotaron $\mathbf{K^0(X)}$. Definieron $\mathbf{K^{-n}(X)}$ utilizando la suspensión de **X** para $\mathbf{n \geq 1}$. La periodicidad de Bott muestra que $\mathbf{K^n(X) \approx K^{n+2}(X)}$ y es utilizada para definir $\mathbf{K^n(X)}$ para $\mathbf{n \in Z}$. Dichos funtores constituyen una teoría de cohomología conocida como la ***K-Teoría Topológica*** (la referencia clásica es [A-H]) la cual tuvo aplicaciones importantes, entre otras, el Teorema de Atiyah-Singer [A-S] y la solución del problema de obtener el máximo número de campos vectoriales linealmente independientes sobre una esfera [A].

Jean-Pierre Serre (1926-)

Un resultado de Serre [S] generalizado por Swan en 1962 proporcionó una manera de traducir conceptos topológicos en algebraicos. En efecto, si **X** es un espacio Hausdorff compacto y **C(X)** es el anillo de las funciones complejas en **X** entonces existe una equivalencia entre la categoría de los haces vectoriales **B** sobre **X** y la categoría de los módulos proyectivos finitamente generados sobre **C(X)** dada por $\mathbf{B} \to \mathbf{\Gamma(B)}$ donde $\mathbf{\Gamma(B)}$ denota las secciones del haz vistas como módulo sobre **C(X)**. (Véase el artículo de Vaserstein [V] de 1986 para una generalización del teorema de Swan a la categoría de haces vectoriales de tipo finito.)

En pocas palabras, la categoría de los haces vectoriales sobre **X** es equivalente a la categoría de los Λ-módulos proyectivos finitamente generados donde $\mathbf{\Lambda = C(X)}$.

De aquí se tiene una definición de $\mathbf{K(\Lambda)}$ ó $\mathbf{K_0(\Lambda)}$ que tiene sentido para cualquier anillo Λ, como el grupo de Grothendieck de la categoría de los Λ-módulos proyectivos finitamente generados. Así que $\mathbf{K_0(\Lambda)}$ es, entre otras cosas, una herramienta útil para investigar la estructura de los Λ-módulos proyectivos.

Por ejemplo, considere el siguiente problema propuesto por Serre en 1955 [S]. Ya se mencionó que sobre un espacio topológico **X**, es equivalente tener un haz vectorial topológico complejo o un módulo proyectivo finitamente generado sobre el anillo de funciones continuas $\mathbf{C^0(X;\mathcal{C})}$, donde un haz trivial corresponde a un módulo libre (donde $\mathcal{C}$ denota los números complejos).

En particular, cuando $\mathbf{X=\mathcal{C}^n}$, todos los haces topológicos son isomorfos al haz trivial por lo que los módulos proyectivos

finitamente generados sobre $\mathbf{C^0(\mathcal{C}^n;\mathcal{C})}$ son libres. Si ahora tomamos un campo **k** arbitrario entonces los haces algebraicos sobre $\mathbf{k^n}$, corresponden a los módulos proyectivos finitamente generados sobre el anillo de polinomios $\mathbf{k[t_1,t_2,...,t_n]}$.
Como en el caso de haces topológicos sobre $\mathcal{C}^{\mathbf{n}}$, el problema de Serre es si tendremos que todo haz algebraico sobre $\mathbf{k^n}$ es trivial. Es decir, ¿son libres todos los módulos proyectivos finitamente generados sobre $\mathbf{k[t_1,t_2,...,t_n]}$?

En dicho artículo se introducía la Teoría de Gavillas en la Geometría Algebraica. Los haces vectoriales sobre variedades algebraicas se definían como gavillas localmente libres; los haces triviales correspondían a gavillas libres. El espacio afín $\mathbf{A^n{}_k}$ sobre un campo **k** es el espectro primo **Spec** $\mathbf{k[t_1,t_2,...,t_n]}$. Al ser éste un esquema afín sobre el anillo **Spec** $\mathbf{k[t_1,t_2,...,t_n]}$, las gavillas localmente libres están dadas por módulos proyectivos finitamente

generados sobre **Spec** $\mathbf{k[t_1,t_2,...,t_n]}$. Así, los módulos finitamente generados sobre **Spec** $\mathbf{k[t_1,t_2,...,t_n]}$ corresponden a haces vectoriales sobre $\mathbf{A^n{}_k}$. Entonces, el problema de Serre se leía así: ¿es trivial todo haz sobre $\mathbf{A^n{}_k}$?

Detrás de esto estaba la idea de que el espacio afín $\mathbf{A^n{}_k}$ debería comportarse como un espacio contráctil en Topología, y por lo tanto debería tener únicamente haces triviales sobre él. Escrita de otra manera, la conjetura de Serre diría: ¿son libres los módulos proyectivos finitamente generados sobre $\mathbf{k[t_1,t_2,...,t_n]}$?

Invitamos al lector a un paseo guiado por Lam [L], por los bellos paisajes matemáticos que llevaron a probar esta conjetura, finalmente, veinte años después independientemente por Quillen y Suslin.

Los intentos por resolver la conjetura de Serre en los años sesenta dieron lugar al nacimiento de otra área: la K-Teoría Algebraica. Una de las metas de la K-Teoría Algebraica fue la de proporcionar técnicas e ideas para atacar el problema de Serre.

A pesar de que la solución final de la conjetura en forma afirmativa no dependió de la K-Teoría Algebraica, no disminuye para nada la gran influencia que tuvo en el enorme desarrollo que ha alcanzado con mayor relevancia de la esperada.

La K-Teoría Algebraica es un fenómeno interdisciplinario dentro de la Matemática y para definir los grupos de K-teoría superior necesitamos de la siguiente construcción debida a Quillen [Q]:

TEOREMA. Sea $\mathbf{X}$ un CW complejo conexo con punto base $\mathbf{p}$. Sea $\mathbf{N}$ un subgrupo normal perfecto de $\boldsymbol{\pi_1(X,p)}$. Entonces existe un espacio $\mathbf{X^+}$ y una transformación $\mathbf{f: X \to X^+}$ tal que

(i) $\boldsymbol{\pi_1(f)}$ induce un isomorfismo $\boldsymbol{\pi_1(X^+,p) \cong \pi_1(X,p)/N}$;

(ii) para cualquier $\boldsymbol{\pi_1(X^+,p)}$-módulo $\mathbf{A}$, $\mathbf{f}$ induce un isomorfismo

$$\mathbf{H_*(X; f^{-1}A) \cong H_*(X^+,A)};$$

(iii) $\mathbf{(X^+,f)}$ está determinado, excepto por equivalencia homotópica por (i) y (ii).

Este teorema se conoce como construcción + de Quillen, y fue inspirada por la necesidad de encontrar una interpretación topológica del funtor $\mathbf{K_2}$ de Milnor. La idea de la demostración es la de adjuntar 2-células para aniquilar **N** y 3-células para neutralizar el efecto de las 2-células en homología.

Quillen en los años setenta definió, para $\mathbf{i} \geq \mathbf{1}$, el **i**-ésimo K-grupo algebraico de Λ como $\mathbf{K_i}\Lambda = \pi_{\mathbf{i}}(\mathbf{BGL}\Lambda^+)$. Como en los casos $\mathbf{i=1,2}$, $\mathbf{K_i}$ es un funtor covariante de la categoría de anillos a la categoría de grupos [Q].

Una de las huellas de avance significativo en la Matemática es el descubrimiento de relaciones inesperadas entre diversas áreas. Quizá uno de los ejemplos más notables de tal avance es el desarrollo de la K-Teoría Algebraica de Quillen en la cual el Álgebra y la Topología se relacionan de una manera nueva y fundamental.

Por un lado, la K-Teoría Algebraica introduce métodos topológicos para definir invariantes algebraicos, tales como los K-grupos de anillos de orden superior. Por otro lado, proporciona una forma de traducir conceptos algebraicos en conceptos topológicos. La K-Teoría Algebraica estudia las propiedades de los grupos $\mathbf{K_i}(\Lambda)$, construidos a partir de un anillo Λ.

Uno de los problemas más importantes en la K-Teoría Algebraica es el cálculo de los grupos $\mathbf{K_i}$ para diversos anillos Λ, pero, a pesar de los esfuerzos de muchos matemáticos, únicamente se conoce un número muy reducido de ellos.

El lector podrá encontrar en [A-LL-S-S], [LL1], [LL2] y [LL3] un panorama e introducción a esta área de la Matemática.

APÉNDICE II

Teoría de Topos

Veamos un poco acerca de la Teoría de Topos. Siguiendo la inmejorable y bella introducción de Mac Lane-Moerdijk de su libro sobre Gavillas en Geometría y Lógica [M-M], el aspecto más sobresaliente de la Teoría de Topos es el de unificar dos (aparente y completamente distantes) campos de la Matemática: por un lado la Topología y la Geometría Algebraica y por otro, la Lógica y la Teoría de Conjuntos.

Un topos puede considerarse como un "espacio generalizado" y a la vez como un "universo generalizado de conjuntos". Esto surgió en 1963 independientemente, de los trabajos de Grothendieck (reformulación de la Teoría de Gavillas para Geometría Algebraica), de Lawvere (en su búsqueda por axiomatizar la categoría de conjuntos), y de Paul Cohen (en el uso del "forcing" para nuevos modelos de la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel).

Vagamente, una gavilla de grupos abelianos A sobre un espacio topológico X es una familia de grupos abelianos A_x, parametrizados por los puntos x en X de una manera "continua" adecuada.

Para Grothendieck, la Topología se convirtió en el estudio de (la cohomología de) gavillas, y las gavillas "situadas" en una topología de Grothendieck dada forman un topos, llamado “topos de Grothendieck”. Las categorías (1945) y los funtores adjuntos (1957) entre ellas, son el lenguaje para entender la Teoría de Topos. Una referencia para los conceptos de categoría, funtor, transformación natural y de adjunto izquierdo es nuestro libro sobre Álgebra Homológica [LL1] y [LL1a].

Las categorías, inicialmente una manera adecuada para formular sucesiones exactas, la "caza de elementos en diagramas" y la homología axiomática para la topología, adquirieron vida independiente.

En 1963 Lawvere se propuso establecer un fundamento puramente categórico de toda la Matemática, comenzando con una axiomatización apropiada de la categoría de conjuntos, reemplazando el concepto de pertenencia con el de composición de funciones.

Casi al mismo tiempo, Tierney observó que el trabajo de Grothendieck podía conducir a una axiomatización del estudio de gavillas. Después, trabajando juntos lograron una axiomatización efectiva de las categorías de gavillas de conjuntos (y en particular de la categoría de conjuntos) vía una formulación apropiada de las propiedades del tipo de los conjuntos.

Así definieron, de una manera elemental, sin suposiciones acerca de los conjuntos, el concepto de topos elemental. La definición original se transformó en una axiomatización de una hermosa y asombrosa simplicidad: un topos elemental es una categoría con límites finitos, objetos función YX (definidos como adjuntos) para cualesquiera dos conjuntos X,Y, y un objeto potencia P(X) para cada objeto X; se requieren que cumplan ciertas axiomas básicos. Invitamos al lector a adentrarse en este maravilloso tema en el libro [M-M].

APÉNDICE III
por
Flor de Ma. Aceff

Bach y Fractales

Aunque en el siglo XVIII, todavía no existía el conjunto de Cantor ni el concepto de fractal, éstos ya existían en la naturaleza. Como los creadores, en particular los músicos, plasman en su obra tanto la naturaleza que observan, así como su época. Johann Sebastian Bach es tal vez uno de los mejores ejemplos donde podemos observar que en su mente ya existían las estructuras de los conjuntos de Cantor, así como la idea generadora de los fractales y las puso en práctica en varias de sus obras.

Hasta hace algunos años se consideraba que los conjuntos de Cantor eran una creación puramente matemática, que estaban totalmente alejados de la naturaleza y del arte, sin embargo ahora se sabe del comportamiento de algunos fenómenos naturales presentan una estructura similar y en el caso del arte tenemos este bello ejemplo que nos regaló Johann Sebastian Bach en su 3ª Suite para violoncelo, la cual fue compuesta en la segunda década del siglo XVIII.

El Conjunto Ternario de Cantor

El conjunto de Cantor toma su nombre del matemático George Cantor que en 1883 lo utilizó como herramienta de investigación para una de sus principales preocupaciones: el continuo. Su verdadero creador fue Henry Smith, un profesor de Geometría de Oxford, quien en 1875 definió, lo que ahora conocemos como los conjuntos generalizados de Cantor.

El Conjunto Ternario de Cantor se obtiene procediendo del siguiente modo: Partimos de un segmento de tamaño uno como se muestra en la etapa 1 de la figura 1 (línea azul). Dividimos el segmento en tres subsegmentos iguales y nos quedamos con los intervalos cerrados de los extremos, así obtenemos el resultado de la etapa 2 de la figura1 (segmentos azules). Repitiendo la división en tres partes cada uno de estos segmentos y quedándonos de nuevo con los intervalos cerrados de los extremos de cada uno, obtenemos los cuatro intervalos siguientes de la etapa 3; para la etapa n, dividimos en tres partes cada uno de los segmentos de la etapa anterior y nos quedamos con los intervalos cerrados de los extremos de cada uno. Repetimos este procedimiento tantas veces como números naturales hay, y el conjunto resultante es el conjunto ternario de Cantor.

Un fractal se obtiene al repetir o iterar un proceso sencillo (o complejo) muchas veces (una infinidad, si se piensa como matemático, o un número muy grande de veces si se quiere ser más pragmático.) Con estas iteraciones se obtiene un objeto el cual está formado por partes, las cuales son parecidas en estructura al objeto completo y dichas partes también están compuestas por sub-partes con la misma característica y así sucesivamente. Estas repeticiones o iteraciones del proceso pueden ser contractivas o expansivas

Figura 1. Procedimiento para la construcción del Conjunto ternario de

n

Cantor. Este procedimiento se realiza de manera contractiva, es decir, las partes son cada vez más pequeñas, se contraen y el conjunto siempre está contenido en uno de tamaño fijo.

En las iteraciones contractivas se va fragmentando el objeto al cual se le está aplicando el proceso de tal modo que los fragmentos se van pareciendo al todo resultante. Un ejemplo de un proceso fractal contractivo es el proceso explicado anteriormente para el Conjunto Ternario de Cantor.

En las iteraciones expansivas se va construyendo el fractal como si tuviéramos bloques de construcción los cuales vamos acomodando de acuerdo a la regla del proceso iterativo.

Veamos cómo podemos construir el Conjunto Ternario de Cantor con un proceso iterativo expansivo (ver figura 2).

Tomemos un bloque en la etapa 1, en la etapa 2 tomemos dos bloques iguales (como el de la etapa 1) y acomodémoslos con una separación entre ellos del mismo tamaño del bloque; en la etapa 3 tomemos dos construcciones iguales a las de la etapa 2 y acomodémoslas con una separación entre ellas del mismo tamaño de la construcción de la etapa2, y así sucesivamente; así que la etapa n está formada por dos construcciones iguales a la obtenida en la etapa anterior separadas por un espacio del mismo tamaño.

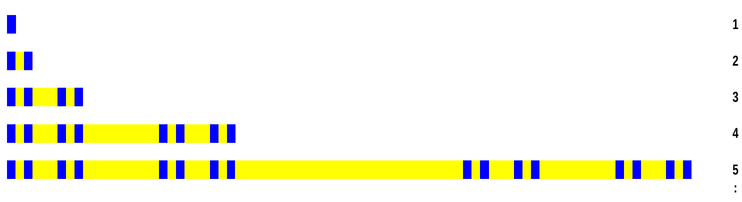


Figura 2. Procedimiento expansivo para la construcción del Conjunto ternario de Cantor. Este procedimiento se realiza de manera constructiva, es decir, las partes son cada vez más grandes, y el conjunto siempre está creciendo.

Notemos que cada etapa de la construcción expansiva se “ve” igual a la etapa correspondiente de la construcción contractiva del conjunto ternario de Cantor.
La estructura de cada etapa de la construcción expansiva del conjunto ternario de Cantor la podemos esquematizar como XYX donde X representa la estructura de la etapa anterior e Y representa un espacio del tamaño de X.

Construyendo el Conjunto de Cantor usado por Bach.

Ahora construyamos otro Conjunto de Cantor el cual es el que se observa en la estructura de la primera Bourrée de la 3ª Suite de Bach para violoncello.

Consideremos la construcción expansiva del Conjunto Ternario de Cantor modificando la regla de repetición o iteración que será la siguiente: en cada etapa, tomar dos bloques o estructuras obtenidas en la etapa anterior y añadirles un espacio del tamaño del doble de una estructura de la etapa anterior,
Llamaremos al conjunto utilizado por Bach, “Conjunto Bach-Cantor”. La estructura de cada etapa de la construcción del Conjunto Bach-Cantor la podemos esquematizar como XXY donde X representa la estructura de la etapa anterior e Y representa un espacio del doble del tamaño de X. Véase la figura 3.

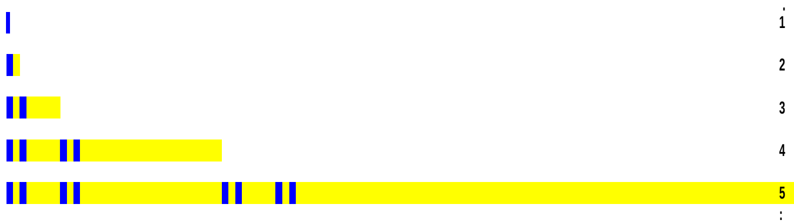


Figura 3. Construcción del conjunto utilizado por Bach

El Conjunto Bach-Cantor en la 3ª Suite para Violoncello de Bach

La primera Bourrée en la Suite No. 3 para violonchelo de Bach es un claro ejemplo de escalamiento estructural. La forma recursiva de su estructura puede verse como el Conjunto Bach-Cantor.

Examinando la partitura, nos enfocamos en el ritmo y fraseo de la primera sección de la primera Bourrée. El fraseo musical se refiere a la forma en que ciertas secuencias de notas son asociadas naturalmente entre ellas.

Observemos que Bach usó el patrón repetido XXY en diferentes escalas, donde cada sección Y dura el doble de cada sección X.
La pieza inicia con dos notas de 1/8 y una nota de 1/4, luego repite ese patrón, entonces continúa con una frase que tiene el doble de su longitud, es decir tiene una longitud de 4/4. Este

mismo patrón de corto, corto, largo se repite, seguido de una secuencia más larga de1 6/4.

Figura 4. Análisis de la primera Bourrée de la suite No. 3 de Bach para violoncello. Las partes marcadas por las llaves corresponden a las repeticiones.

Análogamente los primeros ocho compases se repiten, dando dos secciones cortas de 64/4 que son seguidas por una sección más larga de 20 compases es decir 80/4, pero Bach escribió la pieza con un símbolo de repetición al final de estos 20 compases, es decir hay 160/4 en este bloque, como el doble de 64/4 es 128/4, observemos qué pasa después de 128/4, los 128/4 terminan en el duodécimo compás de la repetición del segundo bloque, las dos últimas notas de 1/8 del dicho compás no son parte de los 128/4 ya que el bloque inició en anacrusa.

Observemos que la estructura del resto del bloque vuelve a ser como la inicial, se tienen dos notas de 1/8 seguidas de otras dos notas de 1/8, pero éstas últimas están unidas por una ligadura, así que esas dos notas realmente están pensadas como un tiempo de 1/4 y se vuelve a repetir este patrón seguido por un bloque de 4/4.

El anidamiento jerárquico del fraseo XXY en el primer Bourrée produce un patrón igual al de la construcción del conjunto que hemos llamado Bach-Cantor.

Notemos que la estructura del primer Bourrée de la 3ª Suite de Bach se ve como parte de la etapa 6 de la construcción expansiva del Conjunto de Bach- Cantor, vista como la etapa 5 seguida por una parte de la etapa 5.

Algunos violoncellistas no tocan este Bourrée con la segunda repetición, sin embargo al tocarla con repeticiones prácticamente estaríamos percibiendo a través del ritmo y fraseo de ésta la esencia del conjunto de Bach-Cantor.

BIBLIOGRAFÍA Y REFERENCIAS

[A] Adams J.F. Vector fields on spheres. Ann. Math. 75 (1962) p.603-632.

Aceff F. Cantor y la tercera suite de Bach para violoncello. Ciencias. Vol.100. p. 28-31. (2010)

[A-LL] Aceff F., Lluis-Puebla E. Matemática en la Matemática, Música, Medicina y Aeronáutica. Pub. Electr. Serie: Divulgación. Vol. 1 (2006)

Agustín-Aquino O, Lluis-Puebla E. Una invitación a la Teoría Matemática de la Música. Primera parte. Ciencias. Vol. 101. p. 60-71. (2011)

Agustín-Aquino O, du Plessis J, Lluis-Puebla E, Montiel M. *Una Introducción a la Teoría de Grupos con Aplicaciones en la Teoría Matemática de la Música,* Sociedad Matemática Mexicana, Publicaciones Electrónicas, Serie Textos, Vol. 10. (2009)

[A-LL-S-S] Aisbett J, Lluis-Puebla E., Snaith V and Soulé C. On K*(Z/n) and K*(Fq[t]/(t2)). Mem. Amer. Math. Soc. Vol. 57, No. 329 (1985).

Apel, W. Harvard Dictionary of Music. Belknap Press. 1972.

[A-H] Atiyah M, Hirzebruch F. Vector bundles and homogeneous spaces. Proc. of Symp. in Pure Math. Amer. Math. Soc. 3 (1961) p.7-38.

[A-S] Atiyah M, Singer I. The index of elliptic operators on compact manifolds. Bull. Amer. Math. Soc. 69 (1963) p.422-433.

Atiyah, M. F. How Research is Carried Out. Bull. IMA. 10 (1974) p.232-234.

Atiyah, M. F. Mathematics and the Computer Revolution. Nuova Civilta delle Macchine II (No. 3) (1984) p. 27-32 y The Influence of Computers and Informatics on Mathematics and its Teaching. Cambridge University Press. (1986) p. 43-51.

Atiyah, M. F. Identifying progress in mathematics. ESF Conference in Colmar. Cambridge University Press (1985) p. 24-41.

Atiyah, M. F. Mathematics in the 20 th. century. Reimpreso de Doctor Honoris Causa 2001. Universidad Nacional Autónoma de México. Instituto de Matemáticas. UNAM. (2001).

Birkhoff, G.D. A Mathematical Theory of Aesthetics. Rice Institute Pamphlet. Vol. 19. (1932).

Birkhoff, G.D. Aesthetic Measure. Cambridge, Mass. (1933).

Birkhoff. G.D. Quelques Elèments Mathèmatics de L'art. Atti Congr. Intern. d. Matem., Bologna. Vol.1. p. 315-333. (1929).

Birkhoff,G.D. Medida Estética. Universidad Nacional del Litoral, Rosario, Argentina. (1945).

[B-S] Borel A, Serre J-P. Le théorème de Riemann-Roch. Bull. Soc. Math. France 86 (1958) p.97-136.

[D-H] Davis, P.J., Hersh R. The Mathematical Experience. Houghton Mifflin Co. Boston. (1981).

[D] Dieudonné J. A Panorama of Pure Mathematics. Academic Press, (1982).

Horowitz, J. Conversations with Arrau. Limelight Ed. 1984.

Huvé, C. Les Dix Commandements. Le Monde de la Musique. Juin 1988.

[L] Lam T.Y. Serre's conjecture. Lecture Notes in Mathematics 635. Springer-Verlag (1978).

Lendvai, E. Bela Bartok: An analysis of his music, Kahn & Averill, London. (1979).

[LL1] Lluis-Puebla E. Álgebra Homológica, Cohomología de Grupos y K-Teoría Algebraica Clásica. Addison Wesley Iberoamericana, (1990).

[LL1a] Lluis-Puebla E. Álgebra Homológica, Cohomología de Grupos y K-Teoría Algebraica Clásica. Segunda Edición. Publicaciones Electrónicas. Sociedad Matemática Mexicana. Serie Textos. Volumen 5. (2005).

[LL2] Lluis-Puebla, E. et al. Higher Algebraic K-Theory: an overview. Lecture Notes in Mathematics 1491. Springer-Verlag. (1992).

[LL3] Lluis-Puebla, E. Álgebra Lineal, Álgebra Multilineal y K-Teoría Algebraica Clásica. SITESA. (1997).

Lluis-Puebla, E. Mazzola,G. Noll,T. eds. Perspectives in Mathematical and Computational Music Theory. Universität Osnabrück. 2004. epOs. ISSN: 3-923486-57-x papel, 3-923486-58-8 CD ROM. http//dnb.ddb.de versión electrónica.

[M-B] MacLane S, Birkhoff G. Algebra. Macmillan. (1968).

[M-M] Mac Lane S, Moerdijk I. Sheaves in Geometry and Logic. Springer (1994).

[M] Mathematics in the Modern World. Scientific American. W.H. Freeman and Co. San Francisco. (1968).

Mazzola, G. Gruppen und Kategorien in der Musik: Entwurf einer mathematischen Musiktheorie. R&E. 10. Heldermann Verlag Berlin. (1985).

Mazzola, G. Mathematical Music Theory- An Informal Survey. Note di matematica e fisica. CEFRIM, Anno 7., Vol.7, Locarno.(1994).

Mazzola, G. Towards Big Science: Geometric Logic of Music and its Technology. In: Symposionsband zur klangart 1995, Hrsg. B. Enders, Rasch, Osnabrück 1998.

Mazzola, G. Mathematical Music Theory-Status Quo 2000. Publicaciones Electrónicas de la Sociedad Matemática Mexicana.

[ToM] Mazzola, G., (contribuyente Lluis-Puebla, E. et al.) The Topos of Music. Birkhäuser Verlag. Basel, Suiza. (2002).

[M-N-LL] Mazzola, G. Noll, T. Lluis-Puebla, E. Perspectives in Mathematical and Computational Music Theory. epOs. Alemania. (2004).

Mazzola, G. Classyfying Algebraic Schemes for Musical Manifolds. Publicaciones Electrónicas de la Sociedad Matemática Mexicana. 2003.

Mazzola, G. www.encyclospace.org.

Mazzola, Guerino. *La vérité du beau dans la Musique*, Delatour-IRCAM, París, Francia. (2007)

Minio R. An inteview with Michael Atiyah. The Mathematical Intelligencer. Vol. 6 No. 1 (1984) p. 9-19.

[M] Montiel, M. El Denotador: Su Estructura, Construcción y Papel en la Teoría Matemática de la Música. Tesis de Maestría. Facultad de Ciencias. UNAM. 1999.

Mozart, W.A. K. 294 (Anh. C) Musikalisches Würfelspiel. B.Schott´s Söhne. (1956)

Rubinstein, A. My Many Years. Jonathan Cape. 1980.

[S] Sagan, C. Cosmos. Ed. Planeta. 1982.

[Sch] Schonberg, H. The Great Pianists. Fireside. 1963.

[Q] Quillen D. Higher Algebraic K-Theory. Proc. Int. Con. of Math. Vancouver (1974).

[S] Serre J.P. Faisceaux algébriques cohérents. Ann. of Math. 61 (1955) p.197-278.

[Sw] Swan R.J. Vector bundles and projective modules. Trans. Amer. Math. Soc. 105 (1962) p.264-277.

[V] Vaserstein L.N. Vector bundles and projective modules revisited. Trans. Amer. Math. Soc. 294 (1986).

EL AUTOR

En Emilio Lluis se conjugan el Arte y la Ciencia paralelamente. Por un lado, realizó sus Estudios Profesionales y de Maestría en Matemática en México. En 1980 obtuvo su Doctorado en Matemática en Canadá. Es catedrático de la Universidad Nacional Autónoma de México en sus Divisiones de Estudios Profesionales y de Posgrado desde hace más de treinta años. Ha formado varios profesores e investigadores que laboran tanto en México como en el extranjero. Su trabajo matemático ha quedado establecido en sus artículos de investigación y divulgación que ha publicado sobre la K-Teoría Algebraica y la Cohomología de Grupos en las más prestigiadas revistas nacionales e internacionales. Ha sido Profesor Visitante en Canadá.

Recibió varias distinciones académicas, entre otras, la medalla Gabino Barreda al más alto promedio en la Maestría, Investigador Nacional (1984-1990) y Cátedra Patrimonial de Excelencia del Conacyt (1992-1993). Es autor de varios libros sobre K-Teoría Algebraica, Álgebra Homológica, Álgebra Lineal y Teoría Matemática de la Música publicados en las editoriales con distribución mundial Addison Wesley, Birkhäuser y Springer Verlag entre otras.

Es miembro de varias asociaciones científicas como la Real Sociedad Matemática Española y la American Mathematical Society. Es presidente de la Academia de Ciencias del Instituto Mexicano de Ciencias y Humanidades, presidente de la Academia de Matemática de la Sociedad Mexicana de Geografía y Estadística y presidente 2000-2002 de la Sociedad Matemática Mexicana.

Por otro lado, inició sus estudios pianísticos a los 6 años de edad tras haber mostrado desde pequeño una gran disposición hacia la música. En México estudió con los distinguidos pianistas Carmela Castillo de Ruvalcaba, José Luis Cházaro, Carlos Barajas y Ma. Teresa Rodríguez. Ha ofrecido numerosas presentaciones como recitalista, como pianista en música de cámara y como solista de orquestas sinfónicas desde 1965. Durante los años setenta realizó estudios en Canadá con el notable pianista Peter Katin y a lo largo de su carrera participó en diversos cursos pianísticos como los de Jörg Demus y Daniel Ericourt. Obtuvo varios premios en concursos de piano y ha ofrecido recitales tanto en nuestro país como en el extranjero.

El maestro Lluis realizó grabaciones para la radio y la televisión, incluyendo el estreno en México de la versión original de la Segunda Sonata para piano de Rachmaninoff en 1980 y 1984. Posee un extenso repertorio tanto de obras clásicas como contemporáneas. En 1992 ofreció la primera audición en México de la Sonata No.1 de Rachmaninoff y en el 2009 la de las Variaciones Corelli también de Rachmaninoff. En 1993 organizó una serie de recitales en homenaje a Rachmaninoff incluyendo sus dos sonatas para piano. Realizó homenajes a Bach (1985), Gershwin (1987 y 2008), Mozart (1991) y Ruvalcaba (2005).

Es miembro de varias asociaciones culturales, entre otras, el Instituto Mexicano de Ciencias y Humanidades (desde 1984, del cual fue presidente en 1991), La Legión de Honor Nacional de México, la Asociación de Escritores y Artistas Españoles desde 1994 (actualmente es su presidente), de la Asociación Musical Kálmán Imre (desde 1989, de la cual fue Asesor Musical y actualmente es su Director Artístico) y de la Sociedad Mexicana de Geografía y Estadística (desde

1987, de la cual fue vicepresidente de la Sección de Bellas Artes y desde 1997 es presidente de la Academia de Música). Con estas dos últimas instituciones ha organizado más de mil conciertos. Fue miembro de la Sociedad Rachmaninoff. En 1988 le fue otorgada la Presea Sor Juana Inés de la Cruz en el área de Música. En el 2003 le fue otorgada la Medalla Benito Juárez.

Frecuentemente ofrece conferencias y cursos de perfeccionamiento pianístico en México y en el extranjero. En los años ochenta presentó el Ciclo Completo de las 32 Sonatas para piano de Beethoven. Es el primer pianista mexicano que interpreta tan majestuosa obra en salas de concierto. Desde 1996 integra un dúo con el oboísta Carlos Santos participando en recitales, conferencias, quintetos, grabaciones para la radio y cd. Desde el 2000 integra un dúo con la cellista Nashelli Uribe ofreciendo múltiples presentaciones y desde julio de 2005 integra el Quinteto "Higinio Ruvalcaba". Con el cellista Iñaki Etxepare ofrece múltiples recitales y prepara actualmente la grabación de la integral de las sonatas de Beethoven para piano y violoncello. La Colección de "Emilio Lluis en CD y en DVD" constituye su semblanza concertística y consta de cuarenta y cinco CD y cuarenta y dos DVD. Puede adquirirse en www.EmilioLluis.org.

Sus actuaciones incluyen giras en repetidas ocasiones por Sudamérica y Europa, actuando como recitalista en Canadá, Dinamarca, Alemania, Suiza, Portugal, República Dominicana, Costa Rica, Perú, Bolivia, Brasil, etc. y como solista de múltiples orquestas sinfónicas nacionales así como extranjeras incluyendo la Orquesta Sinfónica Nacional de La Paz y la Filarmónica de Río de Janeiro interpretando obras como el Concierto Emperador de Beethoven, el Concierto 2 de Brahms y el segundo concierto para piano y orquesta de Rachmaninoff.

En los años recientes, su actividad concertística abarca alrededor de medio centenar de conciertos anuales. Actualmente realiza el nuevo “Ciclo Beethoven de Emilio Lluis” el cual incluye, además de las 32 Sonatas, varias sonatas para piano que no están catalogadas dentro de las 32, obras de cámara para piano y violín, cello o voz, tríos, etc. así como los conciertos para piano y orquesta.