Publicaciones Electrónicas
Instituto Mexicano de
Ciencias y Humanidades

Apuntes de Geometría

Emilio Lluis Riera
Humberto Cárdenas
Miguel Ángel Curiel Ariza
Fidel Peralta Corona
Cuauhtémoc Tavera Guerrero
Elías Villar Quijano

www.imch.org.mx

Academia de Ciencias. Vol. 3 (2017)

A P U N T E S   D E   G E O M E T R I A

Emilio Lluis Riera
Humberto Cárdenas Trigos
Miguel Angel Curiel Ariza
Fidel Peralta Corona
Cuauhtémoc Tavera Guerrero
Elias Villar Quijano

Edición autorizada por los Autores

Edición Preliminar.

Primera edición: julio de 1975

Segunda impresión:
marzo 20 de 1976

Tercera impresión:
febrero de 1977

COMPAÑIA EDITORIAL CONTINENTAL, S. A.
CALZ. DE TLALPAN NÚM. 4620, MÉXICO 22, D. F.

MIEMBRO DE LA CAMARA NACIONAL DE LA INDUSTRIA EDITORIAL
Registro Núm. 43

DISTRIBUIDORES PRINCIPALES EN:

AV. REP. ARGENTINA NÚM. 168, BARCELONA 6, ESPAÑA
SOLÍS NÚM. 1262, BUENOS AIRES, ARGENTINA
AMUNÁTEGUI NÚM. 458, SANTIAGO DE CHILE, CHILE
CRUZ VERDE A VELÁZQUEZ, EDIFICIO CENTRO CRUZ VERDE
LOCAL 12, CARACAS, VENEZUELA
CALLE DEL CHORRO DE EGIPTO (ONCE) NÚM. 2-56,
BOGOTÁ, COLOMBIA

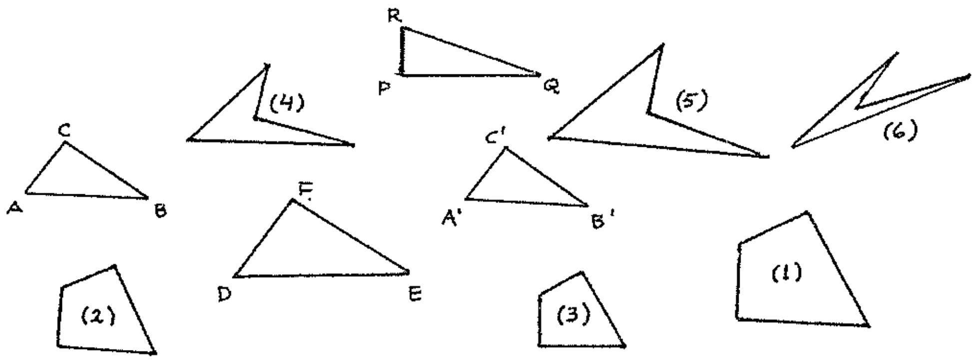
IMPRESO EN MEXICO

PRINTED IN MEXICO

C O N T E N I D O

I. CONGRUENCIA.

Al observar figuras como las que a continuación se ilustran decimos que algunas de ellas "tienen la misma forma". Por ejemplo, decimos que los triángulos $\triangle$ABC, $\triangle$A'B'C' y $\triangle$DEF tienen la misma forma; que las figuras (1), (2) y (3) tienen la misma forma. También los cuadriláteros (4) y (5).



Por el contrario, decimos que los triángulos $\triangle$ ABC y $\triangle$ PQR no tienen la misma forma. Tampoco las figuras (5) y (6) tienen la misma forma.

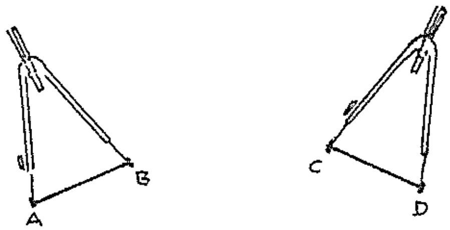
En algunos casos decimos, además, que algunas figuras "tienen la misma forma y el mismo tamaño" como, por ejemplo, los triángulos $\triangle$ ABC y $\triangle$ A'B'C'. También diríamos que los cuadriláteros (2) y (3) tienen la misma forma y el mismo tamaño.

Ahora bien, expresiones como "tienen la misma forma" y "tienen la misma forma y el mismo tamaño" no son del todo precisas y unas personas las pueden interpretar de una manera y otras de otra. Por ello, en matemáticas usaremos otras frases para expresar estas ideas y les daremos un sentido preciso. En lugar de decir "tienen la misma forma", diremos "son semejantes" y aclararemos perfectamente qué significa esto. Análogamente, en vez de decir "tienen la misma forma y el mismo tamaño" diremos "son congruentes".

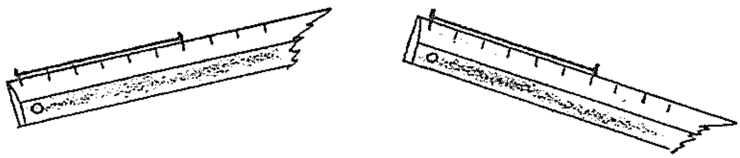
Para segmentos de recta ya hemos precisado el significado de congruencia. Dijimos que

Dos segmentos son congruentes si tienen la misma medida.

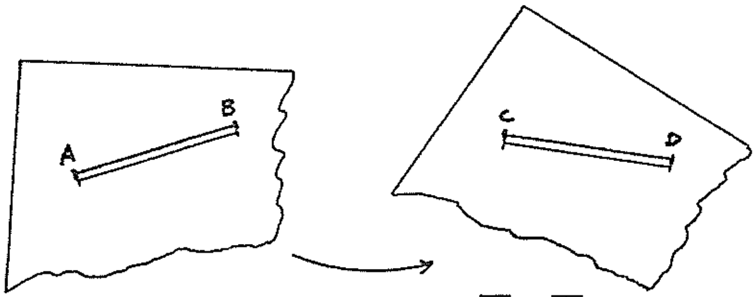
Podemos ver si dos segmentos son congruentes utilizando el compás



o bien una regla con escala



o bien, calcando uno de ellos y superponiéndolo al otro.



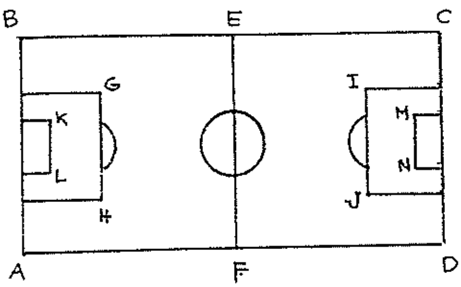
Para indicar que dos segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son congruentes escribiremos simplemente

$$\overline{AB} \cong \overline{CD}$$

(léase $\overline{AB}$ es congruente con $\overline{CD}$). Si los segmentos no son congruentes, es decir, si no miden lo mismo, escribiremos

$$\overline{AB} \ncong \overline{CD}$$

<u>Ejercicio 1</u>. Utilizando el compás diga si los segmentos indicados son o no congruentes y escriba el símbolo adecuado.

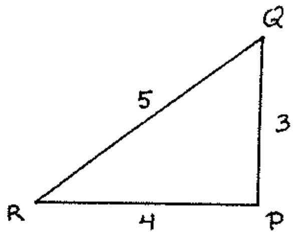


$\overline{AB}$	☐	$\overline{GH}$	$\overline{IJ}$	☐	$\overline{GH}$
$\overline{AB}$	☐	$\overline{CD}$	$\overline{MN}$	☐	$\overline{KL}$
$\overline{EF}$	☐	$\overline{CD}$	$\overline{BE}$	☐	$\overline{FA}$
$\overline{BE}$	☐	$\overline{FD}$	$\overline{AF}$	☐	$\overline{CD}$
$\overline{IJ}$	☐	$\overline{KL}$	$\overline{FD}$	☐	$\overline{AD}$

<u>Notación</u>. El segmento $\overline{BE}$ del dibujo anterior mide 40 mm. Para indicar esto, escribimos

$$BE = 40 \text{ mm}$$

De aquí en adelante, para indicar la medida de un segmento $\overline{AB}$ escribiremos AB (sin la rayita arriba). Por ejemplo, en el triángulo PQR, $\overline{PQ}$ denota el segmento $\overline{PQ}$; es decir, un lado, y en cambio PQ denota la medida de este lado. Es decir, PQ = 3. En



este mismo triángulo, $\overline{QR}$ y $\overline{RP}$ son lados (segmentos) y QR = 5 y RP = 4.

Puesto que es lo mismo decir "dos segmentos son congruentes" que decir "tienen la misma medida", podemos afirmar que

$$\overline{AB} \cong \overline{CD} \text{ equivale a } AB = CD$$

1. Triángulos congruentes.

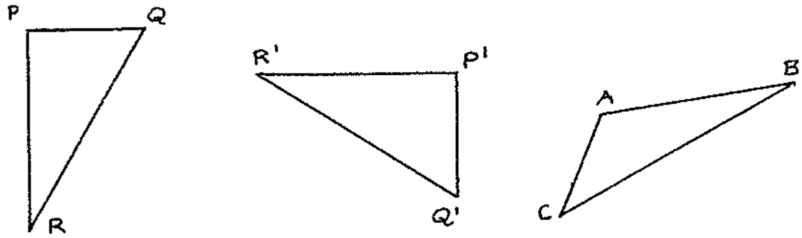
Precisaremos ahora lo que se entiende por triángulos congruentes. (Es decir, lo que en el lenguaje usual corresponde a triángulos que "tienen la misma forma y el mismo tamaño".)

Definición. Se dice que dos triángulos son congruentes si los tres lados de uno de ellos son respectivamente congruentes a los tres lados del otro.

Así, por ejemplo, los siguientes triángulos, $\triangle$ PQR y $\triangle$ P'Q'R' son congruentes porque

$$\overline{PQ} \cong \overline{P'Q'}\ ,\quad \overline{QR} \cong \overline{Q'R'} \quad \text{y} \quad \overline{RP} \cong \overline{R'P'}$$

(Esto puede comprobarse, en el dibujo, con un compás o también calcando uno de ellos y superponiéndolo al otro.)



Dicho en otra forma, los triángulos $\triangle$ PQR y $\triangle$ P'Q'R' son congruentes porque las medidas de los tres lados del $\triangle$ PQR son iguales a las medidas de los tres lados del $\triangle$ P'Q'R'. Es decir, porque

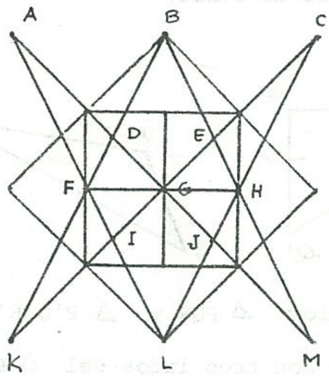
$$PQ = P'Q' , \quad QR = Q'R' \quad y \quad RP = R'P' .$$

Para indicar que dos triángulos son congruentes usaremos también el símbolo $\cong$. Así, en el dibujo anterior,

$$\triangle PQR \cong \triangle P'Q'R'$$

En el caso de triángulos no congruentes, como por ejemplo $\triangle$ PQR y $\triangle$ ABC, escribiremos $\triangle$ PQR $\ncong \triangle$ ABC.

Ejercicio 2. Utilizando el compás, o un papel transparente, diga si los triángulos que se indican son o no congruentes y escriba el símbolo respectivo.

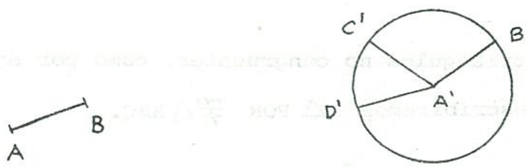


$\triangle$ ADF $\boxed{\cong}$ $\triangle$ CEH	$\triangle$ ADF $\boxed{\ncong}$ $\triangle$ AFG
$\triangle$ ADF $\boxed{}$ $\triangle$ KIF	$\triangle$ FDG $\boxed{}$ $\triangle$ FIK
$\triangle$ KDG $\boxed{}$ $\triangle$ CJG	$\triangle$ KDG $\boxed{}$ $\triangle$ CEH
$\triangle$ MGH $\boxed{}$ $\triangle$ AGI	$\triangle$ JHM $\boxed{}$ $\triangle$ GHC
$\triangle$ IFK $\boxed{}$ $\triangle$ EHC	$\triangle$ BFH $\boxed{}$ $\triangle$ LFH

2. Trazado de polígonos congruentes

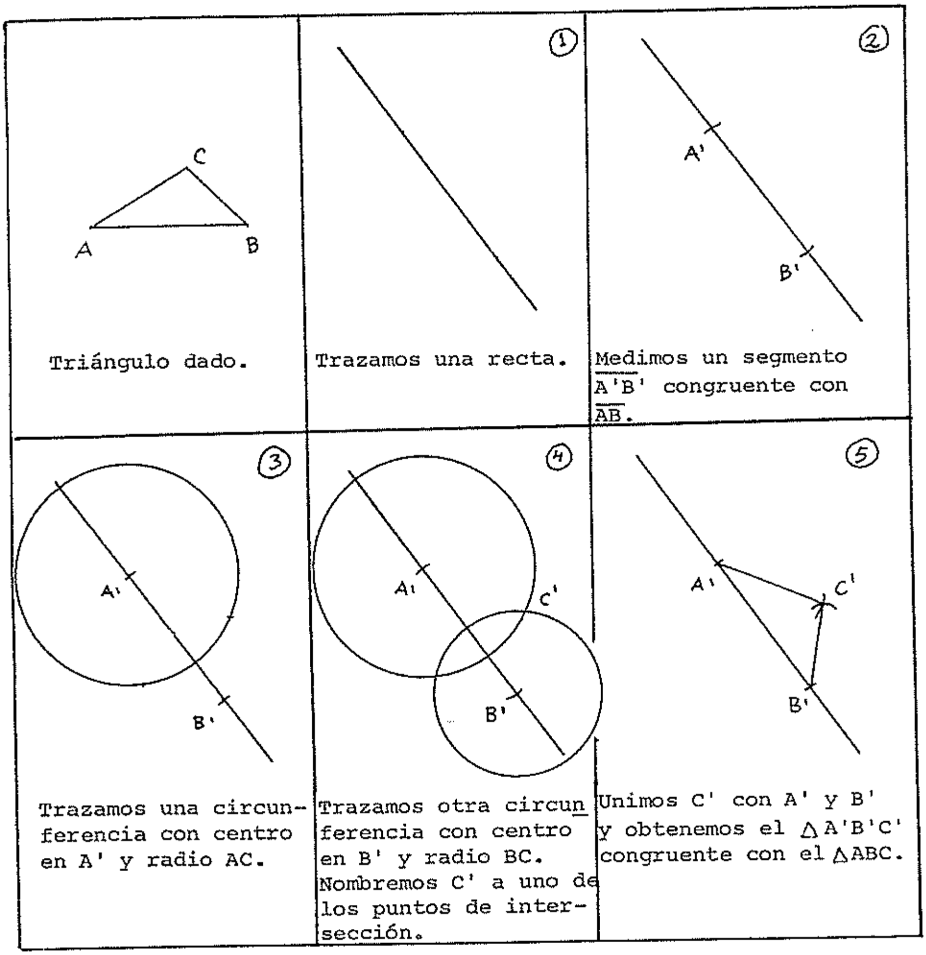
Ya sabemos cómo, utilizando la regla y el compás, podemos trazar segmentos congruentes con uno dado.

Por ejemplo, dado un segmento AB lo medimos con el compás, apoyamos una punta del compás en cualquier punto, digamos A' y cualquier punto que



esté en la circunferencia determina un segmento congruente con $\overline{AB}$. Por ejemplo, $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$, $\overline{AB} \cong \overline{A'C'}$, etc.

Este procedimiento podemos ahora aplicarlo para construir triángulos congruentes. Las siguientes figuras indican cómo construir un triángulo congruente a uno dado.



Triángulo dado.

Trazamos una recta.

Medimos un segmento $\overline{A'B'}$ congruente con $\overline{AB}$.

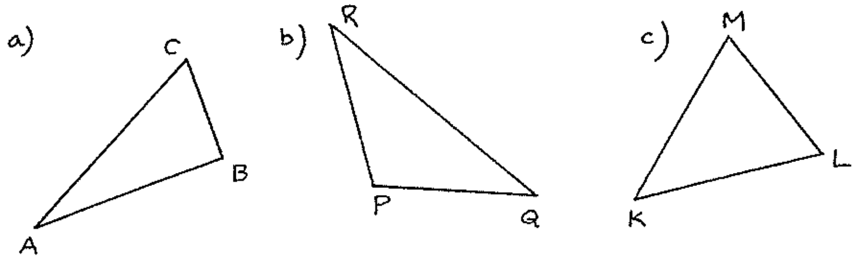
Trazamos una circunferencia con centro en A' y radio AC.

Trazamos otra circunferencia con centro en B' y radio BC. Nombremos C' a uno de los puntos de intersección.

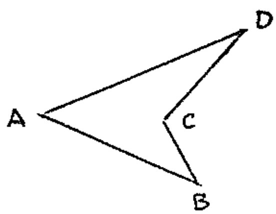
Unimos C' con A' y B' y obtenemos el $\triangle A'B'C'$ congruente con el $\triangle ABC$.

Ejercicio 3. Explique por qué el segmento $\overline{A'C'}$ es congruente con el segmento $\overline{AC}$ y por qué $\overline{B'C'}$ $\overline{BC}$.

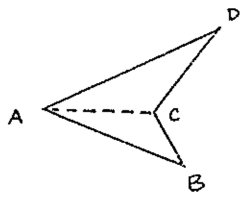
Ejercicio 4. Siguiendo el procedimiento anterior dibuje en su cuaderno triángulos congruentes a los que se dan.



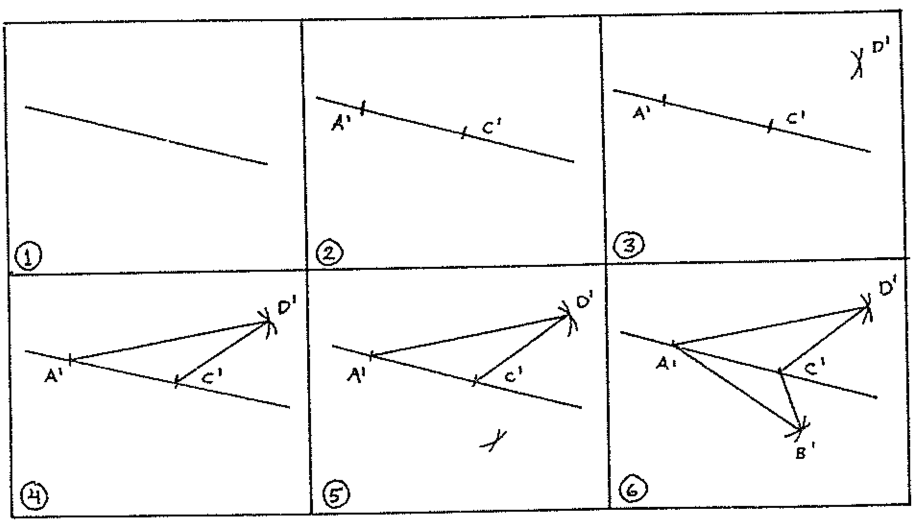
En geometría se estudian con bastante detalle los triángulos, porque éstos nos sirven para analizar otras figuras más complicadas. Por ejemplo, si queremos dibujar un cuadrilátero que sea congruente con el que sigue,



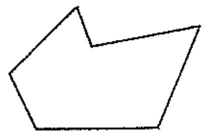
podemos triangular el cuadrilátero en la siguiente forma:



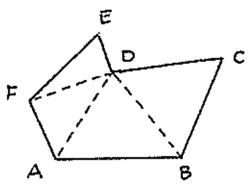
y, ahora, la construcción de un cuadrilátero congruente con el dado se reduce a la construcción de dos triángulos $\triangle$ A'B'C' y $\triangle$ A'C'D' congruentes con los triángulos $\triangle$ ABC y $\triangle$ ACD. Observe la siguiente serie de ilustraciones:



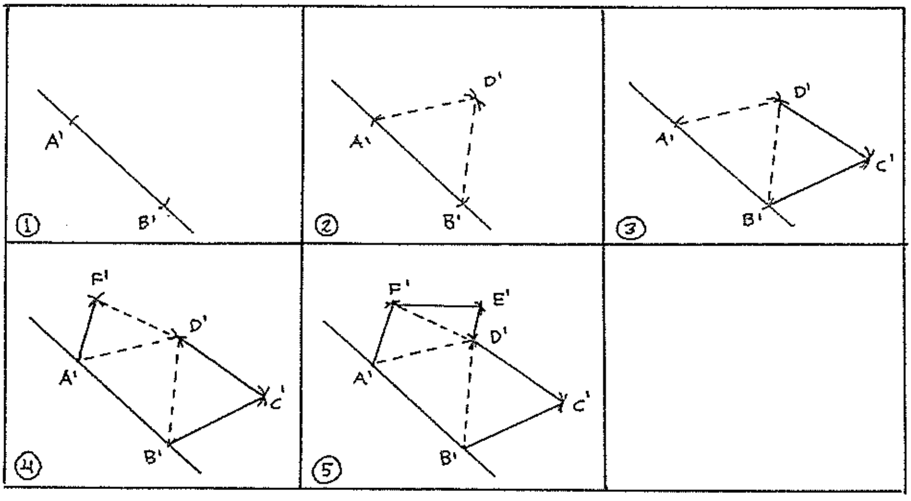
Ejemplo. Trazar una figura congruente con la siguiente.



Primero triangulamos la figura, por ejemplo, así:

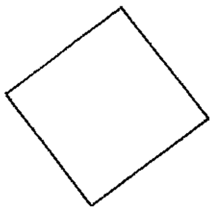


Y después vamos construyendo convenientemente triángulos congruentes a los obtenidos. Podemos empezar de varias maneras. Por ejemplo, con el lado $\overline{AB}$.

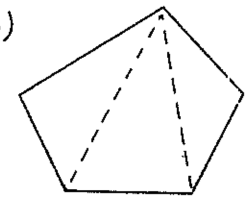


Ejercicio 5. Triangulando convenientemente las figuras dadas, construya en su cuaderno figuras congruentes con ellas. (En algunos incisos se sugieren triangulaciones.)

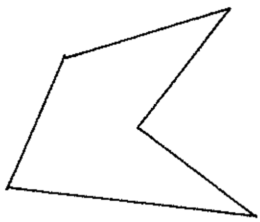
a)



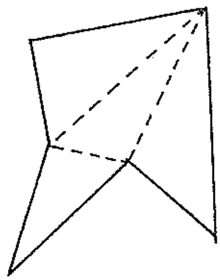
b)



c)



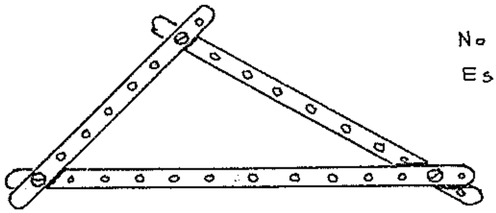
d)



Una observación. En lo anterior hemos visto cómo dibujar polígonos congruentes a un polígono dado, haciendo triangulaciones apropiadas. Sin embargo, no hemos discutido bastante el concepto de congruencia de polígonos.

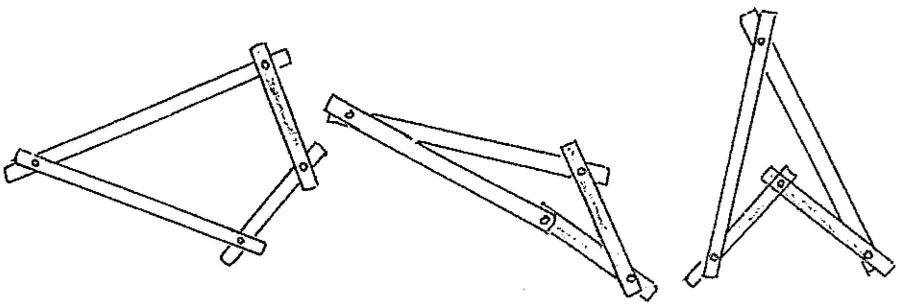
Hagamos un experimento que nos será útil más adelante.

Si unimos tres tiras de madera, metal o cartón, como las que se ilustran a continuación, obtenemos una estructura rígida.

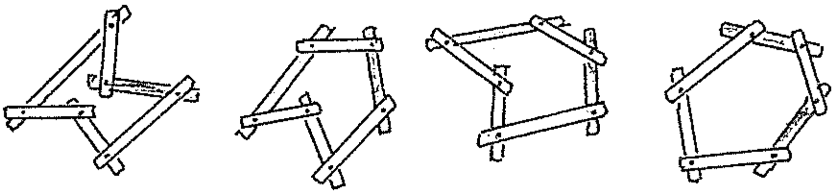


No se puede deformar.
Es rígida.

No ocurre lo mismo si unimos cuatro o más tiras como se ilustra en las figuras siguientes:



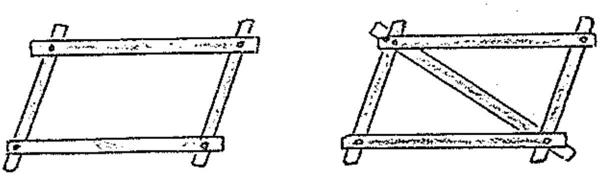
Se puede deformar. No es rígida. Al deformar el aparato construido observamos que se forman diversos polígonos. Estos polígonos tienen lados respectivamente congruentes. Sin embargo, no tienen la misma forma



Se puede deformar. No es rígida. Como en el caso anterior, obtenemos varios polígonos; todos ellos con lados respectivos congruentes y que, sin embargo, no tienen la misma forma.

Ejercicio 6. Repita usted este experimento con tiras de cartón o madera, con clavos en sus extremos, o con tiras metálicas y tornillos (sin apretar).

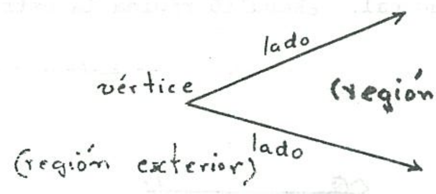
Pregunta. Un carpintero quiso hacer rígido un cuadrilátero y le agregó una tira diagonal. ¿Resultó rígida la estructura que obtuvo? ¿Por qué?



En los ejemplos anteriores vemos que dos polígonos pueden tener sus lados respectivamente congruentes y, sin embargo, no tener la misma forma. Así pués, para poder decir que dos polígonos son congruentes se necesita conocer algo más que la congruencia de sus lados respectivos. A continuación analizaremos el concepto de ángulo, el cual nos servirá para precisar el significado de congruencia de polígonos y, más adelante, de semejanza.

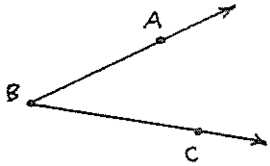
3. Angulos.

Todos tenemos un concepto bastante claro de lo que es un ángulo. La siguiente figura ilustra un ángulo.



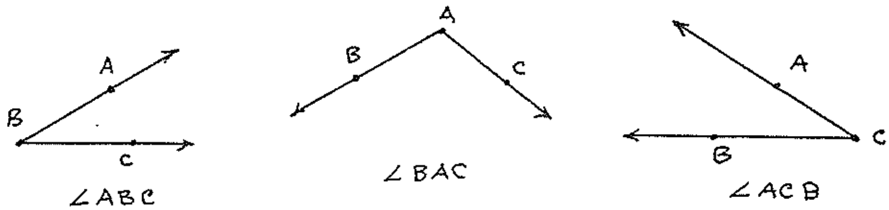
Definición. Un ángulo es la unión de dos rayos que tienen el mismo vértice.

Para referirnos a un ángulo como el siguiente,

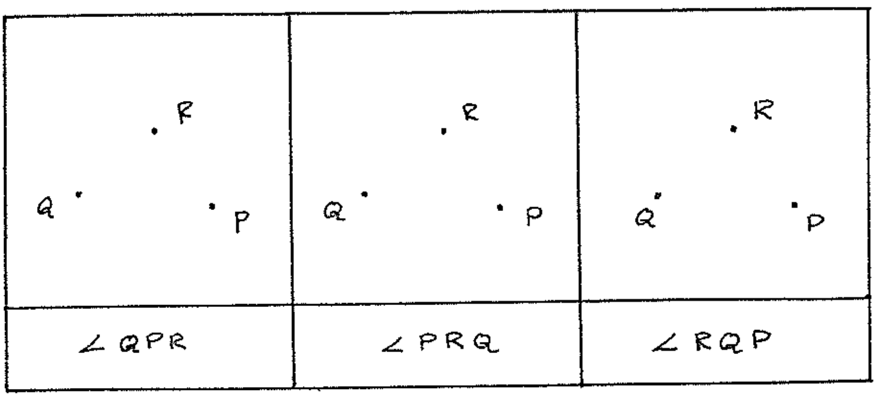


escribimos $\angle$ ABC (léase ángulo ABC) teniendo cuidado en que la letra de en medio sea la que indica el vértice.

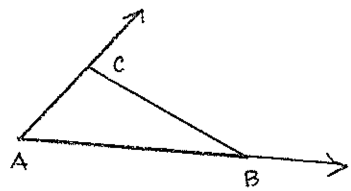
Ejemplo.



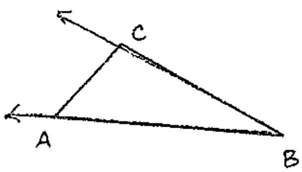
Ejercicio 7. Dibuje los ángulos indicados.



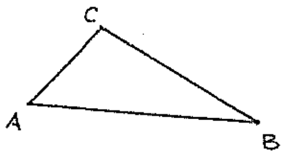
A veces nombraremos un ángulo con una sola letra. Por ejemplo, en un triángulo $\triangle ABC$, cuando hablemos del ángulo $\angle BAC$, diremos simplemente el ángulo A y escribiremos $\angle A$.



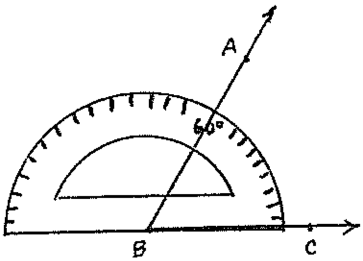
Así, el ángulo B ($\angle B$) será el ángulo $\angle ABC$:



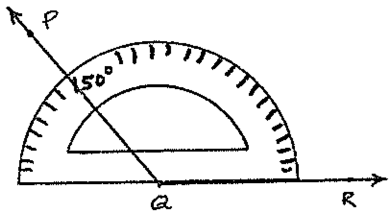
Ejercicio 8. En la siguiente figura marque el $\angle C = \angle ACB$.



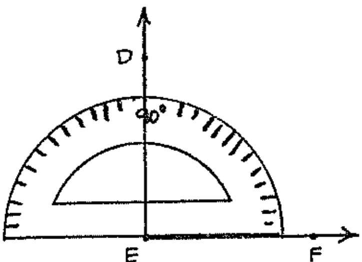
Para medir ángulos se acostumbra usar el transportador. Como unidad de medida se toma el grado.



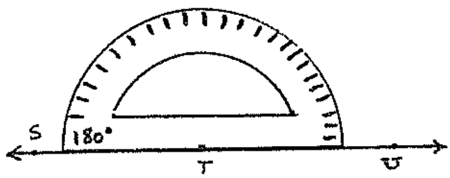
60°



150°



90°
(Angulo recto)



180°
(Angulo llano)

Notación. Si un ángulo $\angle$ ABC mide, por ejemplo, 60°, escribiremos $\measuredangle$ ABC = 60°. Es decir, la notación $\angle$ ABC se refiere al ángulo (unión de dos rayos) y la notación $\measuredangle$ ABC se refiere a un número, que es la medida del ángulo $\angle$ ABC.

Así en las cuatro últimas figuras, podemos escribir

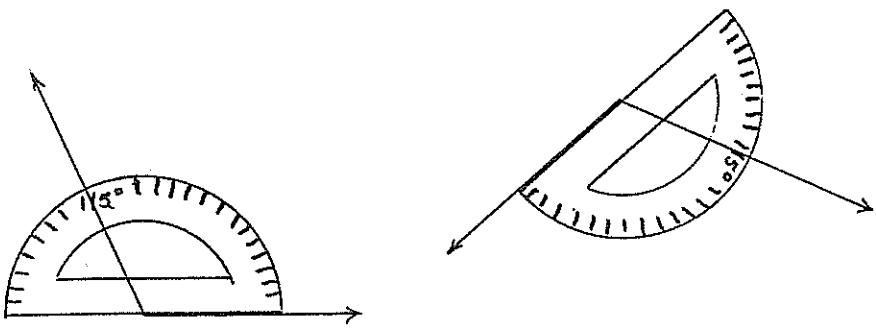
$\measuredangle$ ABC = 60°, $\measuredangle$ PQR = 150°, $\measuredangle$ DEF = 90°, $\measuredangle$ STU = 180°.

Usando la misma idea que para los segmentos, diremos que

Dos ángulos son congruentes si tienen la misma medida.

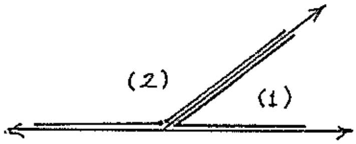
Por ejemplo, los ángulos $\angle$ ABC y $\angle$ KLM, que a continuación se ilustran, son congruentes pues tienen la misma medida:

$\measuredangle$ ABC = $\measuredangle$ KLM = 115°



Para indicar que dos ángulos son congruentes usamos también el símbolo $\cong$. Así pues, decir que $\angle$ ABC $\cong$ $\angle$ PQR equivale a decir que $\measuredangle$ ABC = $\measuredangle$ PQR.

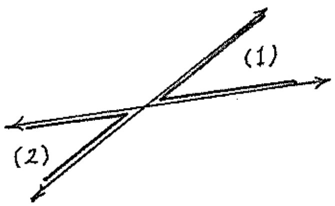
En la siguiente figura se ilustran dos ángulos, $\angle$ (1) y $\angle$ (2), tales que la suma de sus medidas es 180°



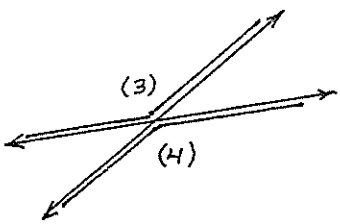
$\measuredangle(1) + \measuredangle(2) = 180°$

Si la suma de las medidas de dos ángulos es 180° se acostumbra decir que los ángulos son suplementarios. Así, en el dibujo anterior, podemos decir que $\angle$ (1) y $\angle$ (2) son suplementarios.

Dos ángulos como los que se ilustran a continuación se llaman opuestos por el vértice:



$\angle$(1) y $\angle$(2) son opuestos por el vértice.



$\angle$(3) y $\angle$(4) son opuestos por el vértice.

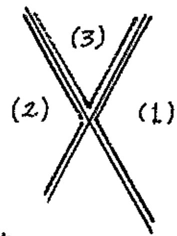
En cada caso podemos ver (midiéndolos) que dos ángulos opuestos por el vértice son congruentes. Por ejemplo,

$$\angle(1) \cong \angle(2) \quad \text{porque} \quad \measuredangle(1) = \measuredangle(2) = 50°$$

Ahora bien, sin necesidad de hacer ninguna medición podemos asegurar que

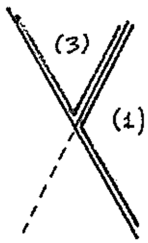
Dos ángulos opuestos por el vértice son congruentes.

Esto lo podemos pensar así:



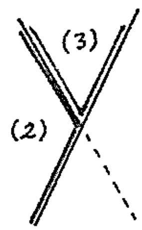
Queremos ver que $\measuredangle(1) = \measuredangle(2)$

Para ello observamos que



$$\measuredangle(1) + \measuredangle(3) = 180°$$

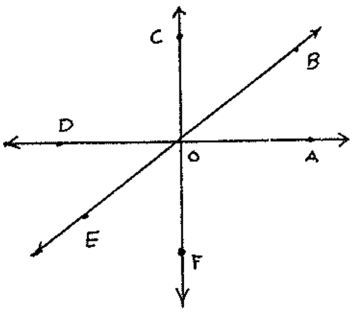
y que también



$$\measuredangle(2) + \measuredangle(3) = 180°$$

Por lo tanto, $\measuredangle(1) + \measuredangle(3) = \measuredangle(2) + \measuredangle(3)$, lo cual nos asegura que $\measuredangle(1) = \measuredangle(2)$. Es decir, $\angle(1)$ y $\angle(2)$ son congruentes.

Ejercicio 9. Si en la siguiente figura $\angle$ AOC = 90° y $\angle$ BOC = 52°, diga cuánto miden los ángulos que se indican (sin hacer ninguna medición).

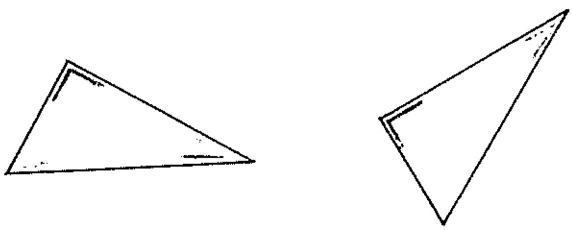


∡ DOC = $\square$	EOF = ∡ $\square$
∡ BOF = $\square$	FOA = ∡ $\square$
∡ DOE = $\square$	EOC = ∡ $\square$
∡ DOF = $\square$	EOB = ∡ $\square$

4. Polígonos congruentes.

Consideremos dos triángulos congruentes; es decir, dos triángulos cuyos lados respectivos son congruentes como, por ejemplo, los triángulos $\triangle$ ABC y $\triangle$ A'B'C' que a continuación se ilustran.

Si medimos sus ángulos nos encontramos con que



$\measuredangle A = \measuredangle A'$

$\measuredangle B = \measuredangle B'$

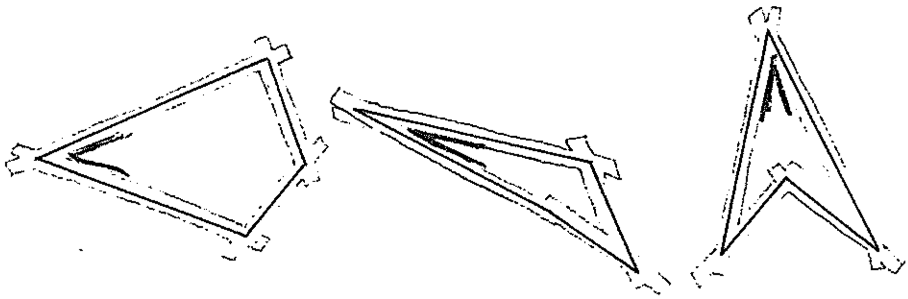
$\measuredangle C = \measuredangle C'$

Esto es cierto para cualquier pareja de triángulos congruentes. Es un hecho que aceptamos:

Si los tres lados de un triángulo son respectivamente congruentes a los tres lados de otro triángulo, entonces los ángulos respectivos son congruentes.

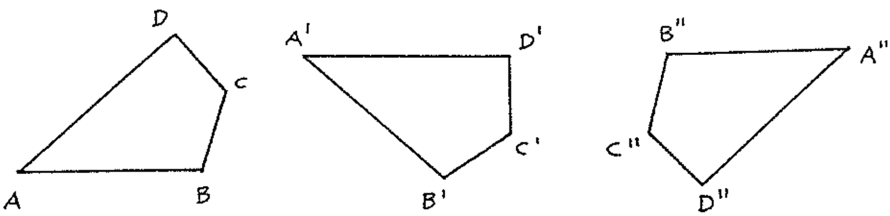
¿Ocurrirá lo mismo para polígonos de más de tres lados? Es decir, si dos polígonos de más de tres lados tienen sus lados respectivos congruentes, ¿podemos afirmar que sus ángulos respectivos son congruentes?

En el experimento que hicimos al final del párrafo 2 de este capítulo (pags. 407 - 408) observamos los siguientes cuadriláteros



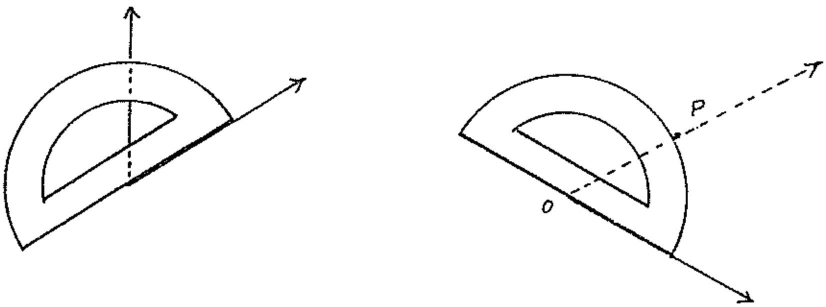
que tienen sus lados respectivos congruentes (compruébelo) y que, sin embargo, sus ángulos respectivos no lo son

Ahora bien, lo anterior nos indica que para que dos polígonos tengan "la misma forma y el mismo tamaño", es decir, para que sean congruentes no basta con que los lados respectivos sean congruentes. Como se muestra en los siguientes cuadriláteros, diremos que dos polígonos son congruentes si además de tener sus lados respectivos congruentes, tienen sus ángulos respectivos congruentes.

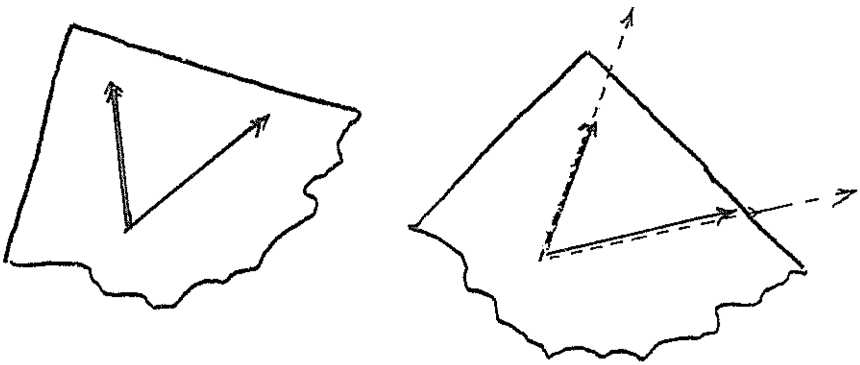


Trazado de ángulos congruentes. La "rigidez" de los triángulos, de la que antes hablábamos, permite trazar ángulos congruentes utilizando la regla y el compás.

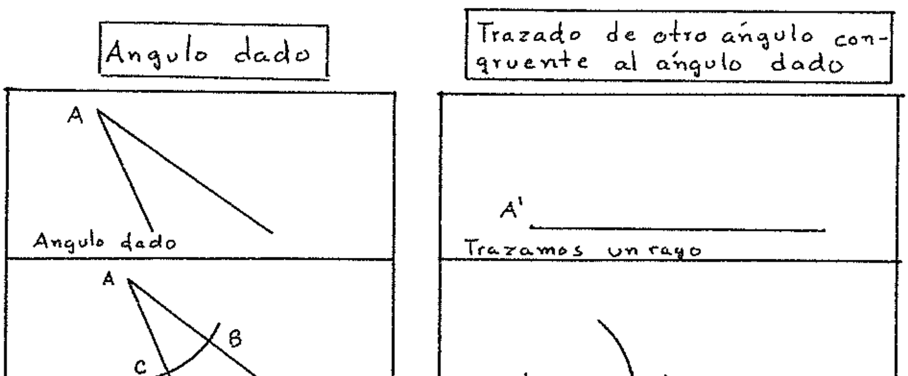
Sabemos ya cómo hacerlo con un transportador:

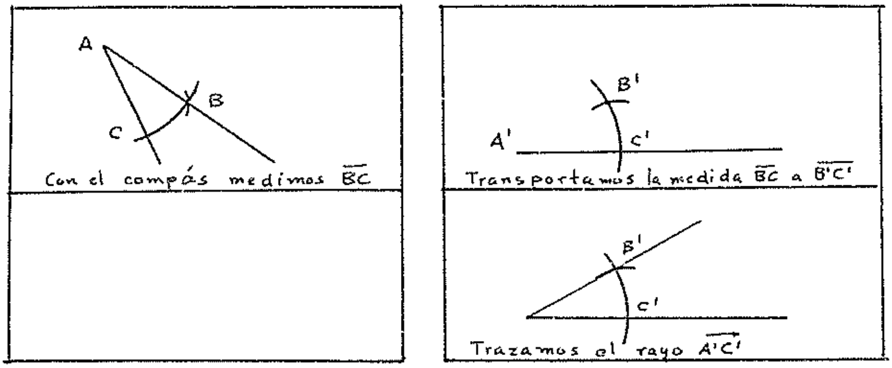


Podemos hacerlo también calcando:



Sin embargo, la construcción que a continuación mostramos es preferible por ser más precisa. Procedemos así:





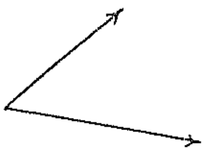
La construcción es correcta por lo siguiente: Los triángulos $\triangle ABC$ que hemos construido sobre el ángulo dado y el $\triangle A'B'C'$ obtenido tienen los tres lados respectivos congruentes:

$$\overline{AC} \cong \overline{A'C'}, \quad \overline{AB} \cong \overline{A'B'}, \quad \overline{BC} \cong \overline{B'C'}$$

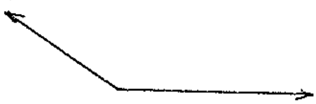
Por lo tanto, los ángulos respectivos son congruentes. En particular, $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$.

Ejercicio 10. Usando el procedimiento anterior trace, en su cuaderno, ángulos congruentes con los siguientes.

(a)

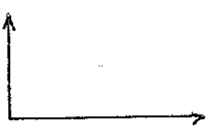


b)



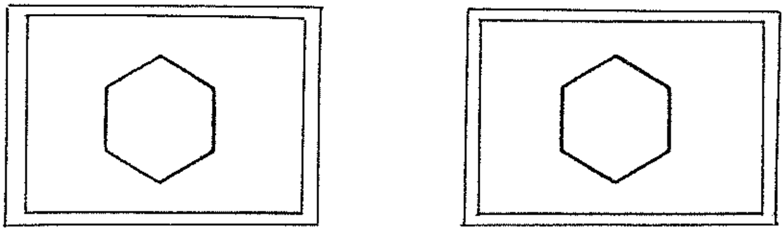
(c)

(d)

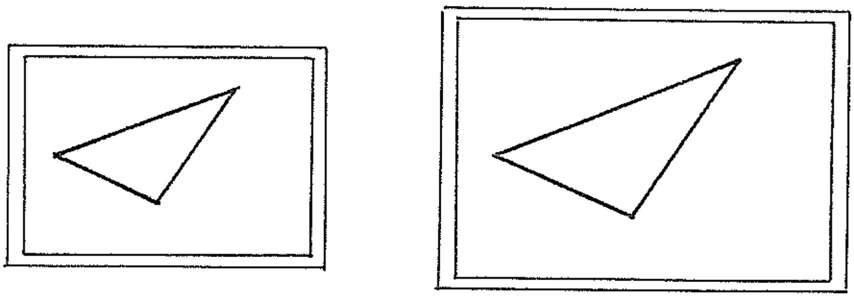


II. SEMEJANZA

Las fotografías siguientes nos muestran dos figuras que "tienen la misma forma y el mismo tamaño". Como vimos antes, en este caso decimos que las figuras son congruentes.



Ahora bien, es claro que cuando amplificamos una fotografía, el tamaño de la figura cambia, pero no la forma:



Ya mencionamos antes que de dos figuras que tienen la misma forma se dice que son semejantes. A continuación precisaremos este concepto y puesto que los triángulos sirven para estudiar figuras más complicadas, empezaremos con los triángulos.

1. Triángulos semejantes.

Diremos que

> Dos triángulos son semejantes si los tres ángulos de uno de ellos son respectivamente congruentes a los tres ángulos del otro.

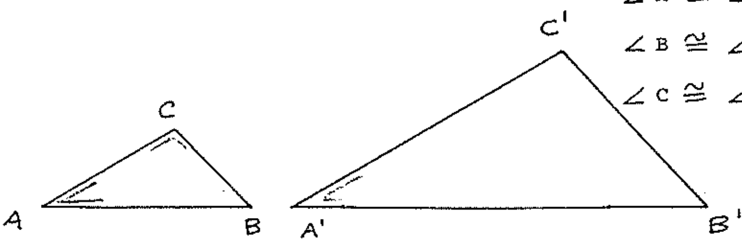
Analicemos esto con más detenimiento. Recordemos que si dos triángulos tienen los lados respectivamente congruentes, entonces sus ángulos respectivos son también congruentes. Pero la afirmación inversa no es cierta. Por ejemplo, si observamos las dos últimas fotografías, vemos que los triángulos tienen ángulos congruentes y que, sin embargo, sus lados respectivos no son congruentes.

Lo mismo observamos en los triángulos siguientes:

$\angle A \cong \angle A'$

$\angle B \cong \angle B'$

$\angle C \cong \angle C'$



¿Habrá alguna relación entre las medidas de los lados? Midámoslos en mm y hagamos una tabla:

AB = 4	BC = 2	CA = 3
A'B' = 8	B'C' = 4	C'A' = 6

Veamos ahora las razones de los lados respectivos:

$\frac{AB}{A'B'} = \frac{1}{2}$	$\frac{BC}{B'C'} = \frac{1}{2}$	$\frac{CA}{C'A'} = \frac{1}{2}$

Por lo tanto, vemos que

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$$

es decir, los lados respectivos son proporcionales.

Esto es cierto en general y lo aceptaremos:

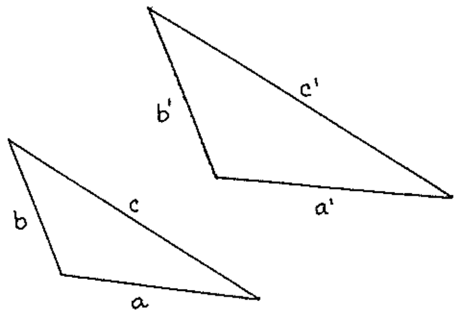
Si dos triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ son semejantes ($\angle A \cong A'$, $\angle B \cong \angle B'$, $\angle C \cong \angle C'$), entonces sus lados respectivos son proporcionales:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'} .$$

Ejemplo. Los siguientes triángulos son semejantes. Midiendo sus lados vemos que

$a = 4, \quad b = 3, \quad c = 6$

$a' = 4.8, \; b' = 3.6, \; c' = 7.2$



Las razones de los lados respectivos son:

$$\frac{a}{a'} = \frac{4}{4.8}, \quad \frac{b}{b'} = \frac{3}{3.6}, \quad \frac{c}{c'} = \frac{6}{7.2}$$

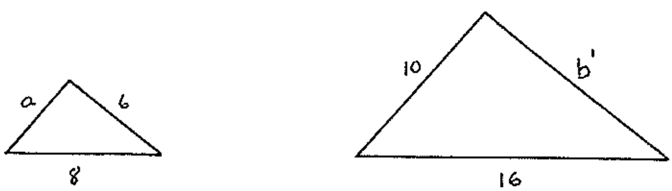
Y ya que

$$\frac{4}{4.8} = \frac{3}{3.6} = \frac{6}{7.2}, \text{ (compruébelo)}$$

entonces,

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

Ejemplo. Los triángulos siguientes son semejantes. ¿Cuánto miden a y b' ?



Resolución.

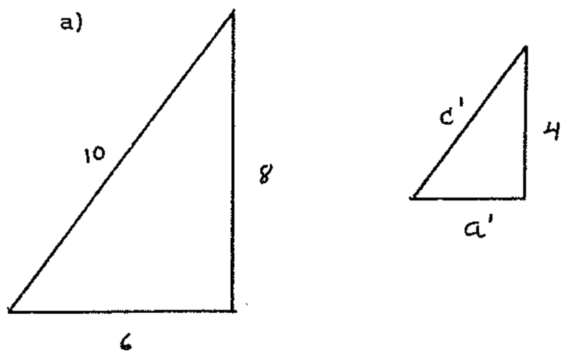
$$\frac{a}{10} = \frac{8}{16} = \frac{6}{b'}$$

$$\frac{a}{10} = \frac{8}{16}; \qquad a = \frac{8 \times 10}{16}; \qquad a = 5$$

$$\frac{8}{16} = \frac{6}{b'}; \qquad b' = \frac{16 \times 6}{8}; \qquad b' = 12$$

Ejercicio 1. En cada uno de los incisos siguientes se dan triángulos semejantes y las medidas de algunos de sus lados. Encuentre las medidas de los lados restantes.

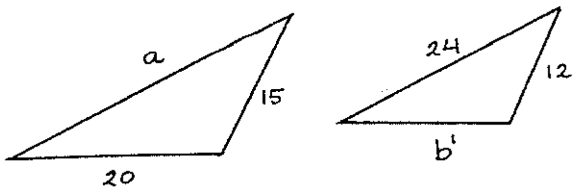
a)



$a' = \boxed{}$

$c' = \boxed{}$

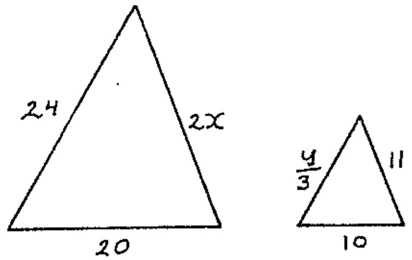
b)



$a = \square$

$b' = \square$

c)

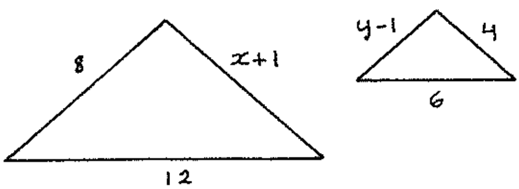


$x = \square$

$y = \square$

Ejercicio 2. En cada inciso encuentre qué números representan las letras, partiendo del hecho de que los triángulos son semejantes y considerando los datos que se proporcionan.

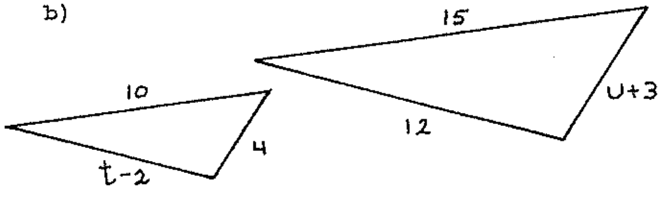
a)



$x = \square$

$y = \square$

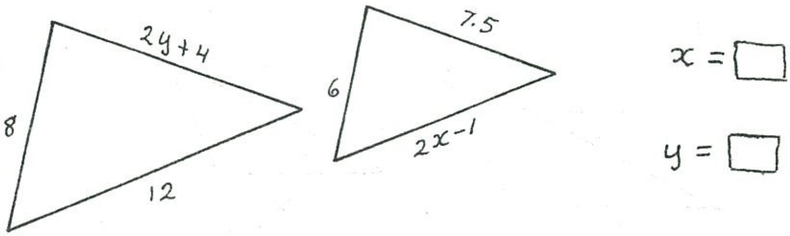
b)



$t = \square$

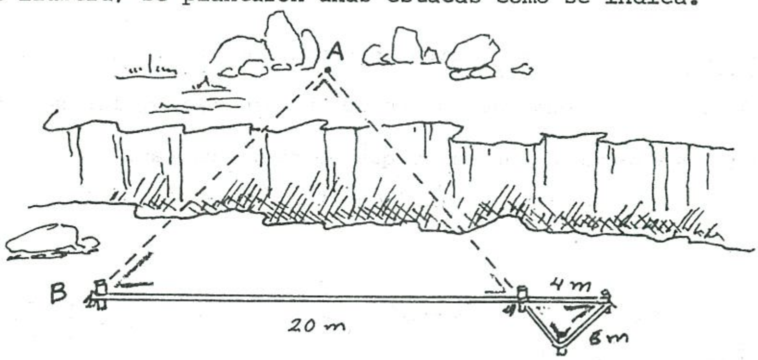
$u = \square$

c)



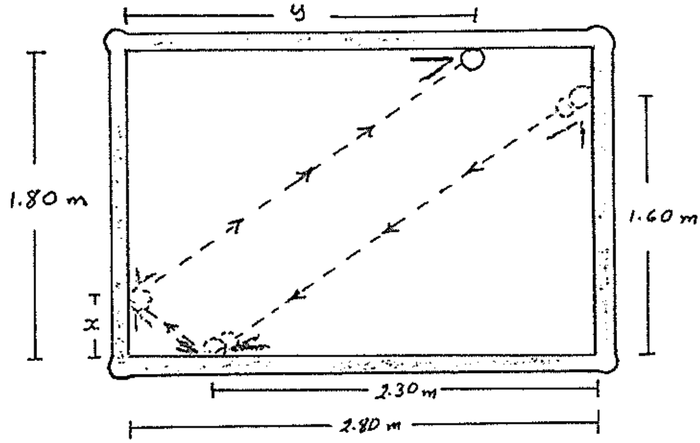
Problemas.

1. Para encontrar la distancia entre dos puntos, uno de los cuales es inaccesible, como en el caso de la barranca que se ilustra, se plantaron unas estacas como se indica.



Se hizo de tal manera que los ángulos marcados fueran congruentes. Después se midieron los segmentos $\overline{BD}$, $\overline{DE}$ y $\overline{EF}$. ¿Puede usted encontrar, con estos datos, la distancia entre los puntos A y B ?

2. En una mesa de billar, la bola blanca es impulsada como se muestra en el dibujo.

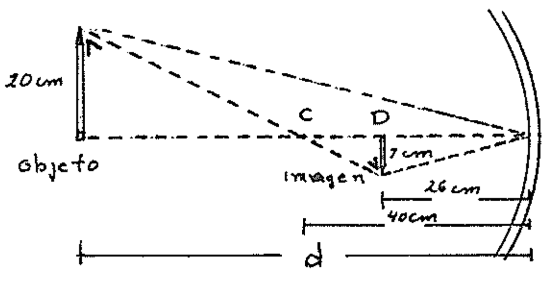


Suponemos que los ángulos marcados con el mismo color son congruentes.

a) Calcule la distancia $\underline{x}$ cuando la bola golpea la banda de la izquierda.

b) Calcule la distancia $\underline{y}$ cuando la bola golpea la banda de arriba.

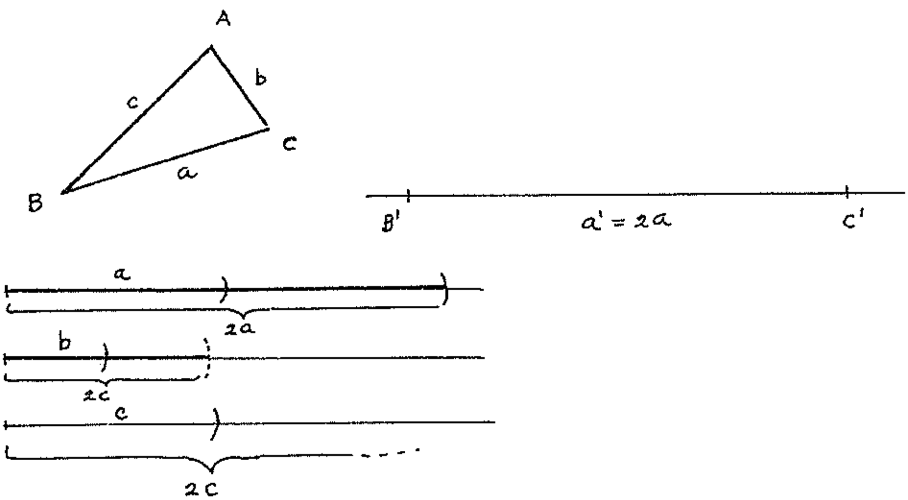
3. Encuentre la distancia $\underline{d}$ a que está situado el objeto del espejo esférico, con los datos que se proporcionan.



Sugerencia. Calcule primero la longitud del segmento $\overline{CD}$.

Hasta aquí hemos visto que si dos triángulos son semejantes, entonces sus lados respectivos son proporcionales. Ahora bien, la afirmación inversa es también cierta. Veamos un ejemplo.

Ejercicio 3. Construya en el espacio de la derecha un triángulo $\triangle$ A'B'C' cuyos lados midan el doble de los lados del triángulo que se da a la izquierda.



En el triángulo que usted construyó, vemos que

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$$

Al medir ahora los ángulos respectivos vemos que

$$\angle A \cong \angle A', \qquad \angle B \cong \angle B', \qquad \angle C \cong \angle C',$$

es decir, los triángulos son semejantes.

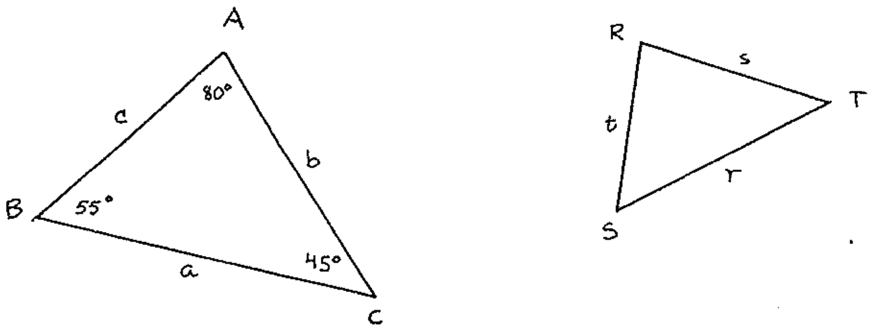
Aceptaremos esta propiedad:

Si los lados respectivos de dos triángulos son proporcionales, entonces los triángulos son semejantes.

Ejercicio 4. Si suponemos que en los siguientes triángulos

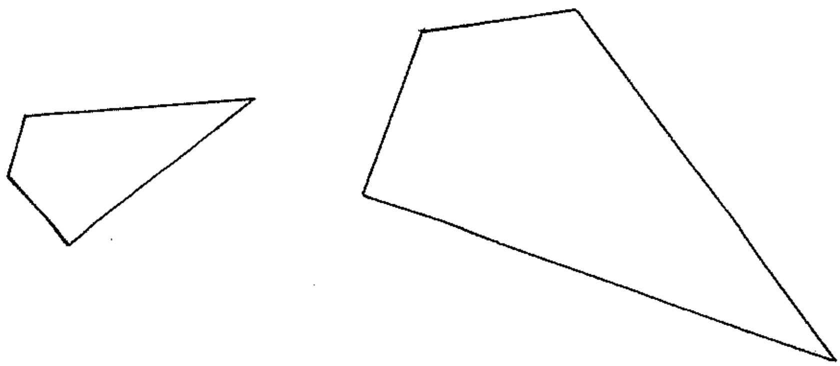
$$\frac{a}{r} = \frac{b}{s} = \frac{c}{t},$$

entonces $\angle R = \square$, $\angle S = \square$ y $\angle T = \square$

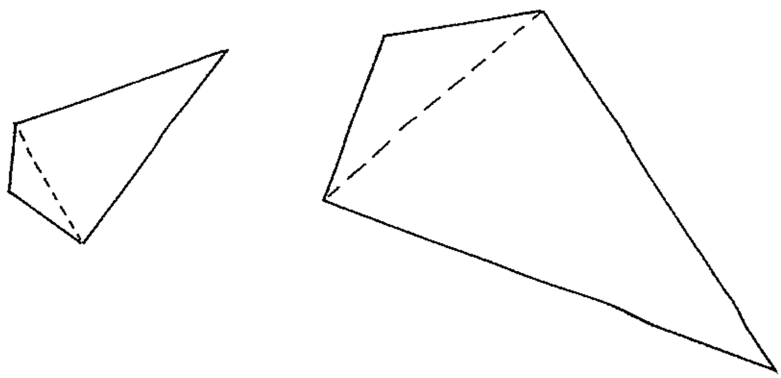


2. Polígonos semejantes.

Los polígonos siguientes "tienen la misma forma".



Si los triangulamos convenientemente vemos que obtenemos triángulos semejantes:



Esto sugiere considerar que dos polígonos son semejantes cuando podemos hacer triangulaciones adecuadas de tal forma que todos los triángulos respectivos sean semejantes.

En tal caso, todos los ángulos respectivos serán congruentes y los lados respectivos, proporcionales.

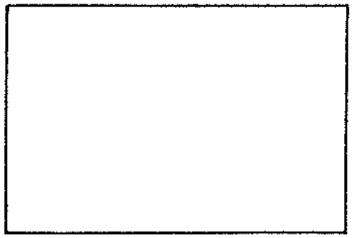
Dibujos a escala.

En la práctica, en el dibujo industrial, en el dibujo arquitectónico y en el dibujo de mapas, se presenta con frecuencia la necesidad de dar información sobre figuras que son muy grandes o muy pequeñas, para ser dibujadas en su tamaño natural. En tales casos, para poder dar información suficiente sobre alguna figura, se recurre a los dibujos a escala.

Por ejemplo, consideremos la siguiente situación:

Se quiere usar un dibujo para dar una idea clara acerca de la forma y el tamaño de un rectángulo que mide 60 metros de base por 40 metros de altura.

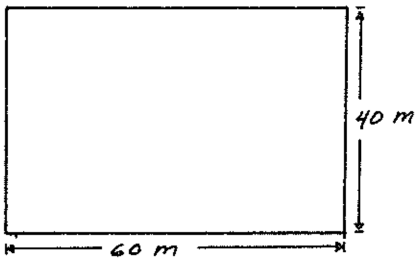
Aquí se puede recurrir al concepto de semejanza de figuras geométricas para dar idea de la forma de ese rectángulo. Así que dibujamos un rectángulo como el siguiente, que tiene los ángulos congruentes y los lados proporcionales a la figura que deseamos describir. (La razón de proporcionalidad de esta figura con respecto a la "original" es de $\frac{1}{1000}$.)



La figura, por lo tanto, es <u>semejante</u> a la original y nos proporciona una idea clara de la <u>forma</u> de ésta.

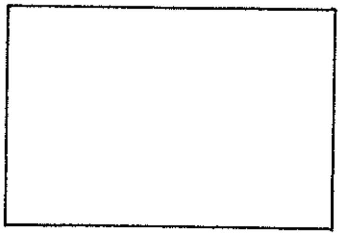
Sin embargo, la figura sola no nos da idea del tamaño de la figura que describe.

Podríamos dar una idea del tamaño de la figura original haciendo algunas anotaciones sobre esta que hemos dibujado.



Pero, en figuras más complicadas, esto resulta impráctico y en algunos casos hasta imposible.

En muchos dibujos, y sobre todo en los mapas geográficos, el problema se resuelve indicando cuál es la razón de proporcionalidad entre la figura dibujada y la figura original. Es costumbre designar esta razón con la palabra "escala"



ESCALA : $\frac{1}{1000}$

También se acostumbra hacer esta anotación en la siguiente forma:

ESCALA: 1 : 1000 (léase: "escala: 1 a 1000")

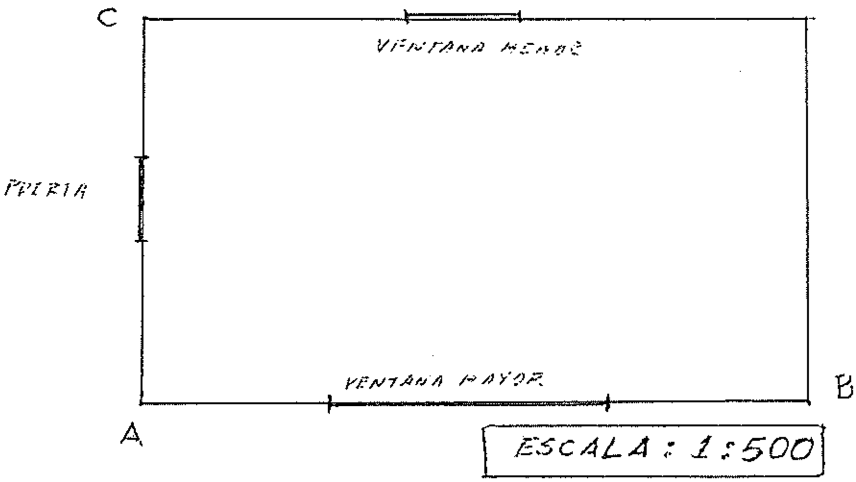
Los dibujos que, como el anterior, describen una figura con otra figura semejante, y en los cuales se indica la razón de proporcionalidad, reciben el nombre de dibujos a escala.

De esta manera, una persona con conocimientos de semejanza puede saber el "tamaño" de la figura original realizando un simple cálculo. Por ejemplo, sí quisiera saber cuál es la longitud de la base del rectángulo que se describe mediante el dibujo anterior, primero mediría la base de éste (la base mide 6 centímetros). Con este dato y sabiendo que la razón de proporcionalidad (la escala) es de $\frac{1}{1000}$; es decir, sabiendo que 1 centímetro del dibujo a escala corresponde a 1000 centímetros de la fi gura original, puede calcular la base del rectángulo original así:

$$6 \times 1000 = 6000 \text{ (centímetros)}$$

Esto es, la base del rectángulo que se describe con la figura mide, en la realidad, 60 metros.

El siguiente es un dibujo a escala de la planta de un laboratorio en una fábrica de aviones.



Ejercicio 5. Mida el dibujo anterior y luego complete las siguientes oraciones.

a) La figura de la planta del laboratorio y la figura del dibujo son ______________________ y, por lo tanto, los ángulos de ellas son congruentes y los lados son proporcionales. En consecuencia, las dos figuras tienen la misma forma.

b) La anotación ESCALA : 1 : 500 nos indica que la razón de proporcionalidad de la figura a escala y la planta del laboratorio es igual a ____________________.

c) Lo anterior segnifica que 1 centímetro del dibujo a escala corresponde a __________________ centímetros de la planta del laboratorio.

d) La longitud de $\overline{AB}$ es aproximadamente igual a _________cm

e) Calculando con el dato anterior, sabemos que el largo de la planta del laboratorio mide aproximadamente ___________ metros.

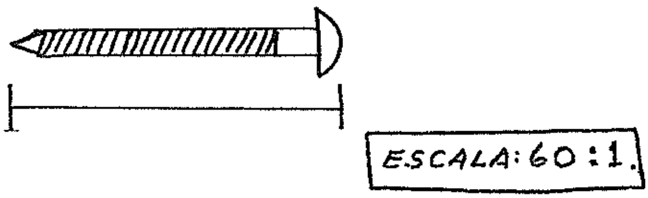
f) El segmento $\overline{AC}$ mide ___________ centímetros.

g) Calculando con ese dato, sabemos que el ancho del laboratorio mide ______________metros.

h) La puerta del laboratorio mide __________ metros de ancho.

i) La ventana mayor tiene una base que mide __________ metros.

El siguiente dibujo a escala corresponde a un tornillo de un reloj para dama.



Ejercicio 6. Complete las siguientes oraciones.

a) La escala del dibujo nos indica que la razón de proporcionalidad entre la figura dibujada y el tornillo real es de ____________________.

b) Esto significa que cada 60 unidades que se midan en la figura corresponden a ____________ unidad medida en el tornillo.

c) Tomando en cuenta lo anterior, podemos decir que a cada centímetro medido en el dibujo le corresponde ______________ de centímetro en el tornillo real.

d) El tornillo del dibujo mide _____________ centímetros de largo. Por lo tanto, el largo del tornillo real es de___________ de centímetro, o sea, un _____________.

El siguiente dibujo es un plano de la ciudad de Monterrey.

PLANO DE LA CIUDAD DE
MONTERREY.

Ejercicio 7. En el plano anterior se han señalado puntos que corresponden a lugares de interés de esa ciudad. A indica el estadio del Tecnológico de Monterrey. B es el Zócalo. C es el Obispado. D es el parque de beisbol de la ciudad.

Midiendo sobre el plano anterior, calcule las distancias reales entre:

a) El estadio del Tecnológico y el Zócalo.

b) El parque de beisbol y el Zócalo.

c) El Obispado y el Tecnológico.

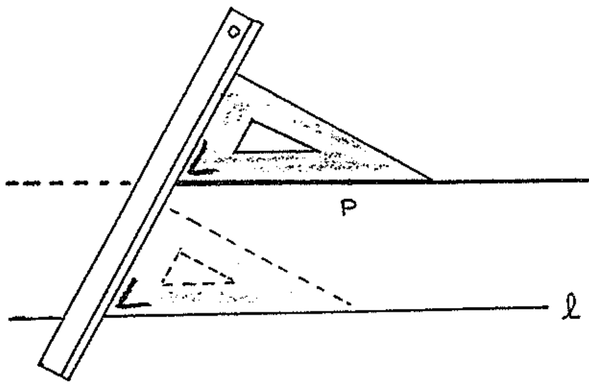
d) El parque de beisbol y el Obispado.

Problema. Se pretende hacer un dibujo a escala de una circunferencia que mide 70 centímetros de radio. Si el dibujo se va a efectuar con la escala 1 : 20 ¿Cuántos centímetros debe medir el radio de la circunferencia en el dibujo?

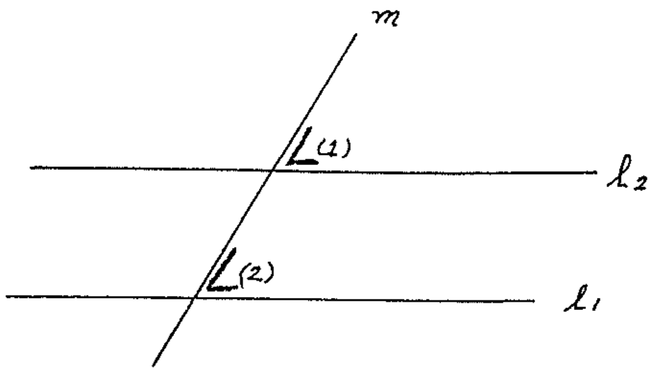
3. Rectas paralelas.

Ya sabemos cómo utilizar una escuadra para trazar rectas paralelas.

Dada una recta ℓ y un punto P podemos trazar una recta paralela a ℓ y que pase por el punto P :



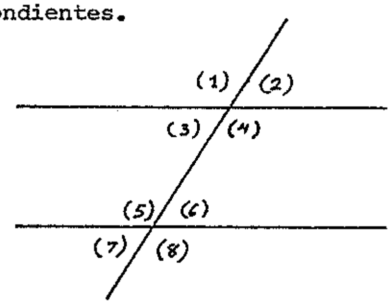
Consideremos ahora una situación como la siguiente, en la que hay dos rectas paralelas ℓ_1 y ℓ_2 y una tercera recta m que las interseca:



Fijémonos en los ángulos (1) y (2), que se llaman correspondientes. Ya sea midiéndolos con un transportador o utilizando un compás vemos que $\angle(1) \cong \angle(2)$. Esto no es casual y es cierto para cualquier par de rectas paralelas cortadas por otra. Lo aceptamos y enunciamos como una propiedad básica:

Los ángulos correspondientes son congruentes.

En la siguiente figura observamos varias parejas de ángulos correspondientes.



El $\angle$ (2) es correspondiente con el $\angle$ (6);

El $\angle$ (4) es correspondiente con el $\angle$ (8);

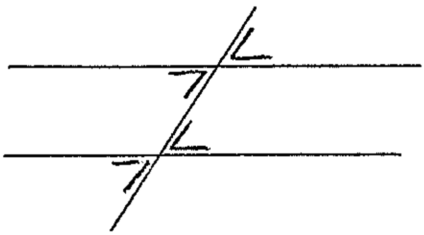
El $\angle$ (1) es correspondiente con el $\boxed{}$ y

el $\boxed{}$ es correspondiente con el $\boxed{}$.

Ahora bien, el $\angle(2) \cong \angle(3)$ porque son opuestos por el vértice. Asimismo $\angle(6) \cong \angle(7)$. Tenemos entonces que los ángulos $\angle(2)$, $\angle(3)$, $\angle(6)$ y $\angle(7)$ son congruentes entre sí.

Con un razonamiento análogo al anterior concluimos que los ángulos $\angle(1)$, $\angle(5)$, $\angle(4)$ y $\angle(8)$ también son congruentes entre sí.

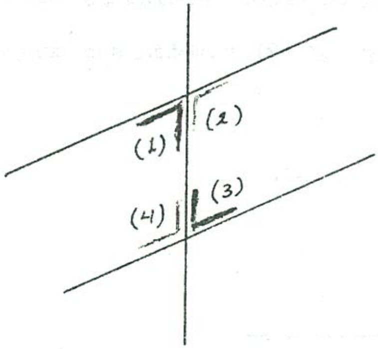
En la siguiente ilustración se señalan los ángulos congruentes entre sí.



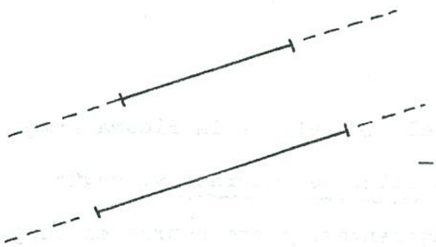
A ángulos como el $\angle(3)$ y el $\angle(6)$, de la figura anterior, se les suele llamar ángulos alternos internos y, según hemos visto, esos ángulos son congruentes. Esto ocurre en cualquier par de rectas paralelas cortadas por otra recta.

Los ángulos alternos internos son congruentes

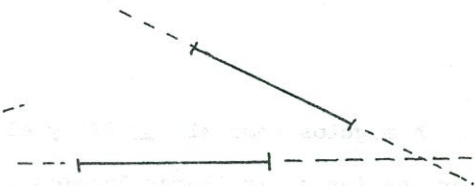
Por ejemplo, en la siguiente figura los ángulos (1) y (3) son alternos internos y su medida es la misma. Es decir, son congruentes. También son alternos internos los ángulos (2) y (4). Y también son congruentes.



Paralelogramos. Convendremos en decir que dos segmentos son paralelos si están contenidos en rectas paralelas.



segmentos paralelos

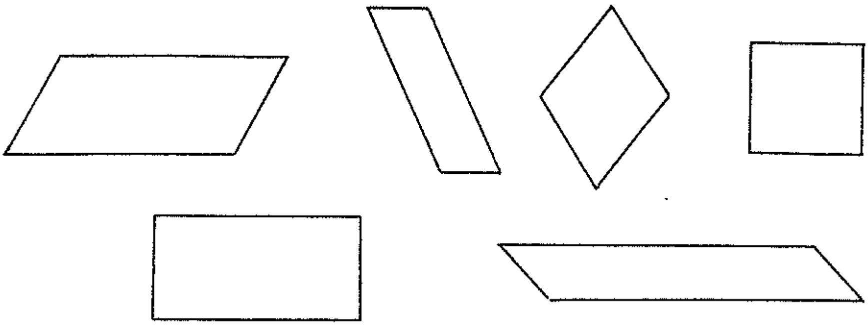


segmentos no paralelos

Recordemos ahora que

> Un paralelogramo es un cuadrilátero cuyos lados opuestos son paralelos.

Las figuras siguientes ilustran paralelogramos



(Algunos paralelogramos reciben nombres especiales:

Rectángulos, los que tienen sus cuatro ángulos rectos;

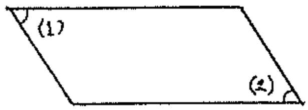
rombos, los que tienen sus cuatro lados congruentes entre sí;

cuadrados, los que son rectángulos y rombos, o sea los que tienen sus cuatro ángulos rectos y sus cuatro lados congruentes entre sí.)

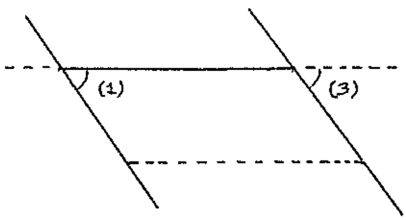
Demostraremos ahora que:

> Los ángulos opuestos de un paralelogramo son congruentes.

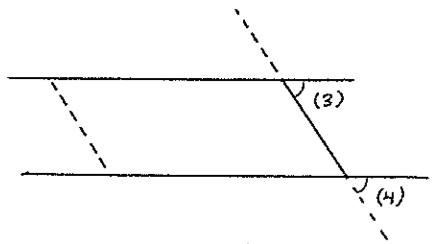
Por ejemplo, en el siguiente paralelogramo, los ángulos $\angle(1)$ y $\angle(2)$ son congruentes.



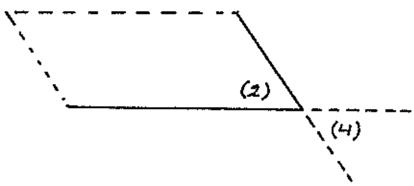
Para ver por qué es así, consideremos las siguientes figuras auxiliares:



$\angle(1) \cong \angle(3)$
(son correspondientes)



$\angle(3) \cong \angle(4)$
(son correspondientes)

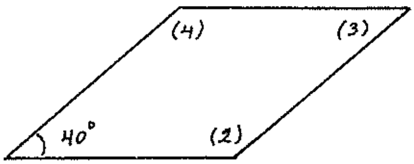


$\angle(4) \cong \angle(2)$
(son opuestos por el vértice)

Por lo tanto, todos esos ángulos son congruentes entre sí. En particular, $\angle(1)$ y $\angle(2)$ son congruentes.

Ejercicio 8. Encuentre los datos que se piden de cada uno de los siguientes paralelogramos.

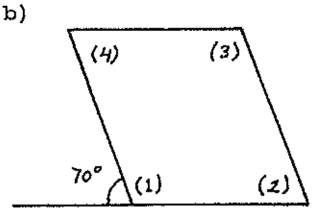
a)



$\measuredangle(3) = \square$ $\measuredangle(4) = \square$

$\measuredangle(2) = \square$

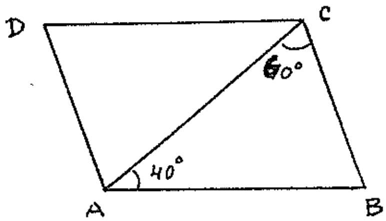
b)



$\measuredangle(1) = \square$ $\measuredangle(3) = \square$

$\measuredangle(2) = \square$ $\measuredangle(4) = \square$

c)



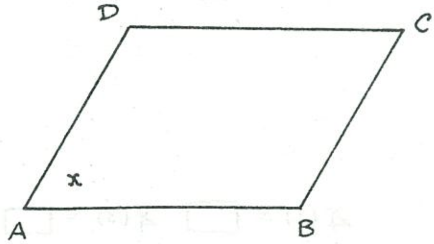
$\measuredangle DCA = \square$ $\measuredangle CAD = \square$

$\measuredangle DAB = \measuredangle DCB = \square$

$\measuredangle D = \measuredangle B = \square$

Ejercicio 9. En el último inciso del ejercicio anterior deduzca que los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle CDA$ son semejantes.

Problema 1. Uno de los ángulos de un paralelogramo mide el doble de otro. ¿Cuánto mide cada uno de los ángulos de ese paralelogramo?



Sugerencia: Llame x a la medida de uno de los ángulos, digamos el $\angle A$. Así tendremos que la medida de $\angle B$ será $2x$. Y como esos dos ángulos son suplementarios tenemos que

$$x + 2x = 180°$$

En esta ecuación es muy fácil hallar el valor de x y así encontraremos las medidas de todos los ángulos del paralelogramo ABCD.

Problema 2. En un paralelogramo ABCD, uno de los ángulos mide el triple de otro. ¿Cuánto mide cada uno de los ángulos de ese paralelogramo?

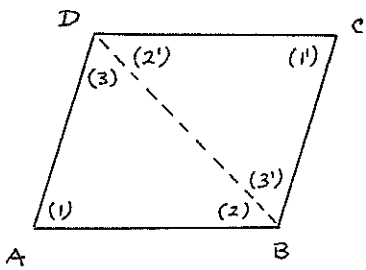
Problema 3. Uno de los ángulos de un paralelogramo ABCD mide $\frac{2}{3}$ de otro. ¿Cuál es la medida de cada uno de los ángulos de ese paralelogramo?

Al observar cuidadosamente un paralelogramo, podemos darnos cuenta que sus lados opuestos miden lo mismo; es decir, que son congruentes. Esta es una propiedad de todos los paralelogramos, y podemos demostrarla:

En un paralelogramo, los lados opuestos son congruentes.

Demostración.

Consideremos un paralelogramo cualquiera y tracémosle una diagonal, como se muestra en la figura.



Así tenemos que,

$\angle(1) \cong \angle(1')$ (son ángulos opuestos en un paralelogramo)

$\angle(2) \cong \angle(2')$ (son alternos internos)

$\angle(3) \cong \angle(3')$ (son alternos internos)

De aquí concluimos que los triángulos $\overset{\triangle}{ABD}$ y $\overset{\triangle}{BCD}$ son semejantes y, por consiguiente, tienen sus lados proporcionales. Esto significa que:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{BC}{AD} = \frac{BD}{BD}$$

Como $\frac{BD}{BD} = 1$, tenemos que $\frac{AB}{CD} = 1$ y $\frac{BC}{AD} = 1$

En consecuencia,

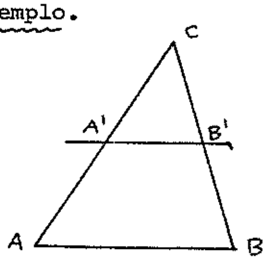
AB = CD y BC = AD

que es lo que queríamos demostrar.

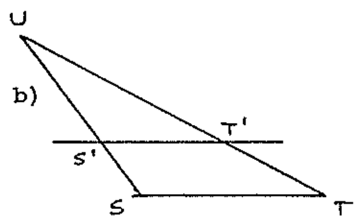
4. El teorema de Tales.

Cuando en un triángulo trazamos una paralela a uno de los lados, el triángulo que se forma es semejante al original.

Ejemplo.

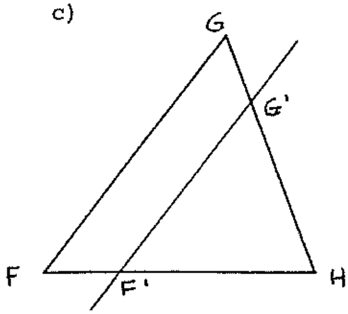
a) 

El △ ABC es semejante al △ A'B'C .

b) 

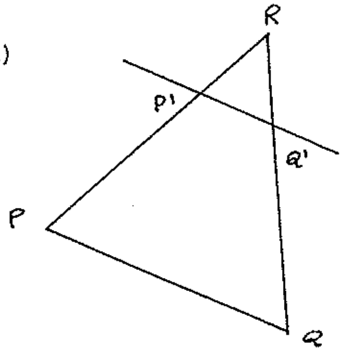
El △ STU es semejante al △ S'T'U .

c)



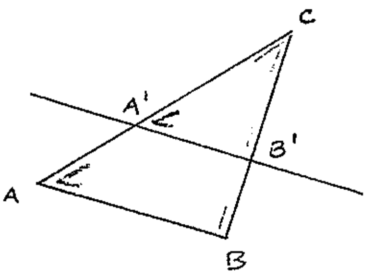
Los triángulos $\triangle$ FGH y $\triangle$ F'G'H son semejantes.

d)



El triángulo $\triangle$ PQR es semejante al $\triangle$ P'Q'R.

Es muy sencillo darnos cuenta del por qué de la afirmación anterior. En efecto, en una situación como ésta, los ángulos



marcados son congruentes, por ser correspondientes. Por la misma razón, los marcados también son congruentes. Además, el ángulo marcado es común a los dos triángulos. Por lo tanto, los dos triángulos son semejantes. Luego, los lados respectivos son proporcionales. Esto es,

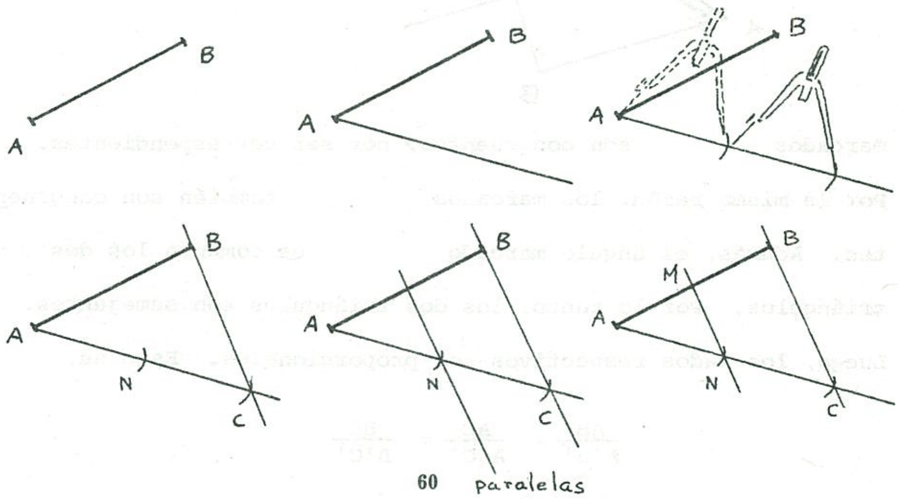
$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$$

Este teorema de Tales se llama así , en honor de Tales de Mileto, uno de los grandes geómetras de la antiguedad que vivió en la primera mitad del siglo sexto antes de nuestra era. Este matemático se hizo famoso, no tanto por sus descubrimientos de tipo experimental o intuitivo, sino por haber sido uno de los primeros en utilizar métodos deductivos en geometría.

Dos construcciones geométricas.

I. Veremos ahora que el método de subdividir un segmento en varias partes congruentes, que ya hemos utilizado varias veces, se basa en el teorema de Tales.

Las siguientes ilustraciones nos recuerdan el procedimiento de dividir un segmento $\overline{AB}$ en dos partes congruentes:



Por ser $\overline{AN}$ y $\overline{NC}$ congruentes, tenemos que

$$\frac{AC}{AN} = \frac{2}{1} = 2$$

Ahora bien, por ser $\overline{MN}$ y $\overline{BC}$ paralelas, podemos aplicar el teorema de Tales y escribir

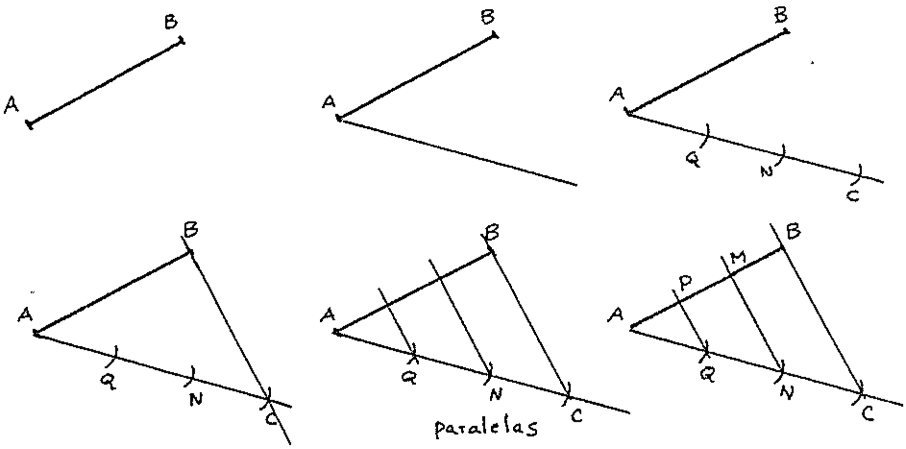
$$\frac{AC}{AN} = \frac{AB}{AN}$$

Por lo tanto,

$$\frac{AB}{AN} = \frac{2}{1},$$

lo cual implica que $\overline{AM} \cong \overline{MB}$.

Ilustremos ahora el procedimiento para dividir un segmento en tres partes congruentes:



Por ser $\overline{AQ} \cong \overline{QN} \cong \overline{NC}$, tenemos que

$$\frac{AC}{AQ} = \frac{3}{1}, \qquad \frac{AN}{AQ} = \frac{2}{1}$$

Ahora bien, por ser paralelas las tres rectas trazadas, podemos aplicar el teorema de Tales y escribir

$$\frac{AC}{AQ} = \frac{AB}{AP}, \qquad \frac{AN}{AQ} = \frac{AM}{AP}$$

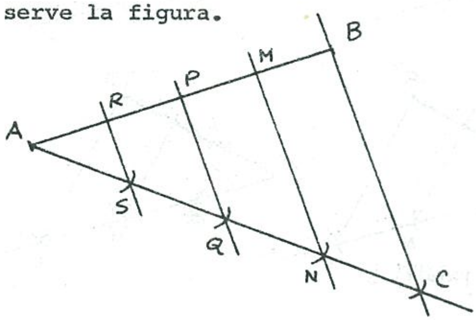
Por lo tanto,

$$\frac{AB}{AP} = \frac{3}{1}, \qquad \frac{AM}{AP} = \frac{2}{1},$$

lo cual implica que AM es 2 veces AP y AB es 3 veces AP. De aquí deducimos que

$$\overline{AP} \cong \overline{PM} \cong \overline{MB}.$$

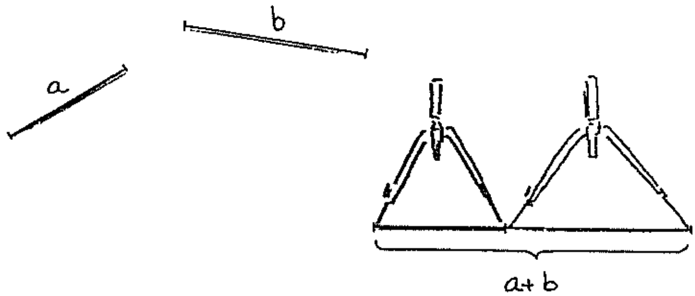
Ejercicio 10. Haga un razonamiento análogo para justificar la subdivisión de un segmento en cuatro partes congruentes. Observe la figura.



Datos: $\overline{AS} \cong \overline{SQ} \cong \overline{QN} \cong \overline{NC}$

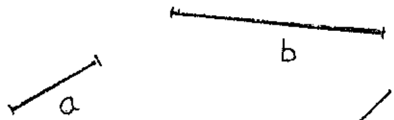
$\overline{RS}$, $\overline{PQ}$, $\overline{MN}$ y $\overline{BC}$ paralelos.

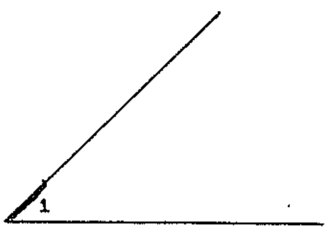
II. Si nos dan dos segmentos, uno de longitud _a_ y otro de longitud _b_, es muy fácil construir un segmento de longitud a + b .



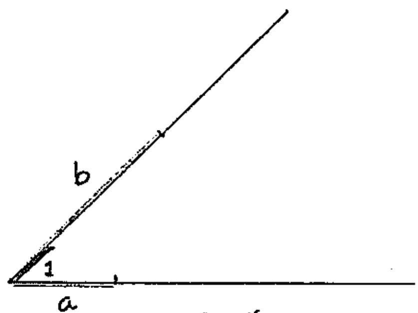
Es algo más difícil dibujar un segmento que mida ab, es decir, el producto de las medidas de los segmentos dados. Veremos ahora cómo, utilizando el teorema de Tales, es posible esta construcción:

Segmentos dados de longitudes a y b

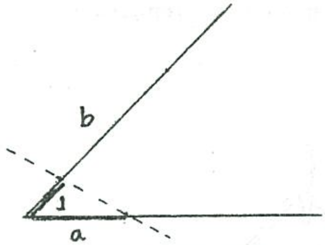




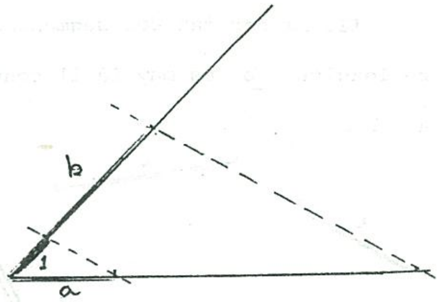
Trazamos un ángulo. Marcamos un segmento de medida 1 sobre uno de los lados.



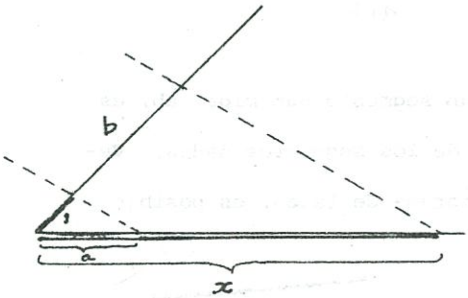
Con el compás ~~medimos~~ marcamos segmentos ~~(sobre los lados)~~ congruentes con los segmentos dados y con un extremo en el vértice.



Trazamos una recta como se indica.



Trazamos una paralela a esta recta por el extremo del otro segmento.



El segmento obtenido marcado con verde es de longitud $x = ab$.

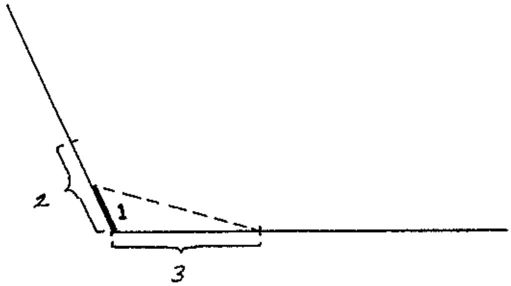
En efecto, por el teorema de Tales, tenemos que

$$\frac{x}{a} = \frac{b}{1}$$

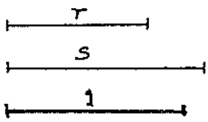
Por lo tanto $x = ab$

Ejercicio 11.

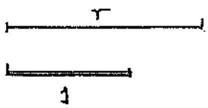
a) Termine la construcción para obtener un segmento de longitud 6. Midiendo, compruebe el resultado.



b) Construya un segmento cuya longitud sea rs.

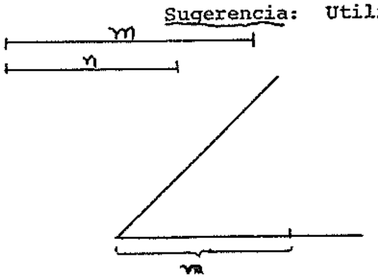


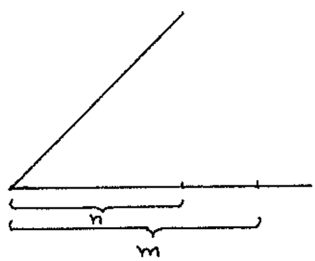
c) Construya un segmento de longitud r^2.

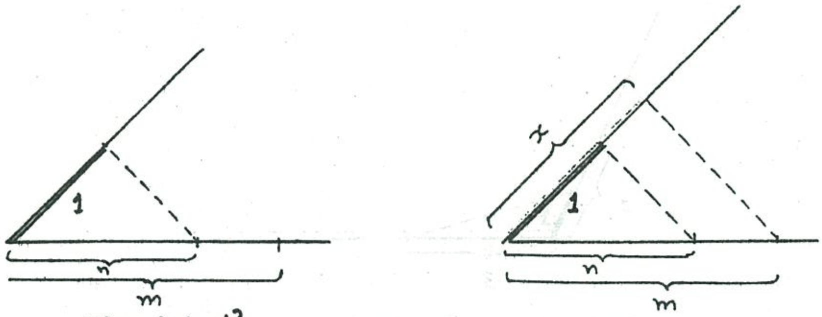


Ejercicio 12. En la siguiente secuencia de dibujos, a partir de dos segmentos de longitud m y n se construye un segmento de longitud x, ¿Puede usted decir qué relación tiene la medida de este segmento con las medidas m y n?

Sugerencia: Utilice el teorema de Tales.







Ejercicio 13.

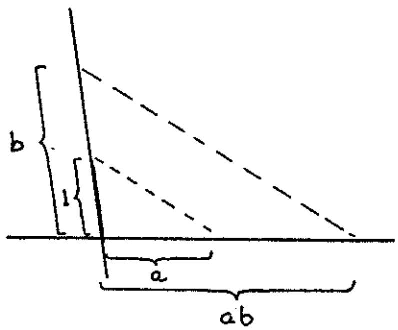
a) Construya un segmento cuya longitud sea el cociente $\frac{p}{q}$.

b) Construya un segmento cuya longitud sea $\frac{1}{r}$.

c) Usando los datos y el resultado del inciso b) construya un segmento cuya longitud sea $r \cdot \frac{1}{r}$

Una ilustración de la multiplicación de números positivos y negativos.

Acabamos de ver, en el párrafo anterior, cómo se construye un segmento de longitud ab, a partir de un segmento de longitud a y otro de longitud b.



Veremos ahora cómo, interpretándola convenientemente, esta construcción puede ilustrar la multiplicación de números positivos y negativos. Más precisamente, con esta construcción puede ilustrarse que:

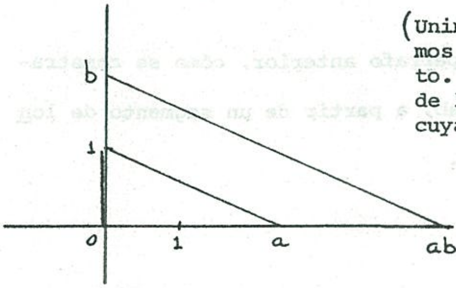
El producto de dos números positivos es positivo;

el producto de un número positivo por uno negativo es negativo y

el producto de dos números negativos es positivo.

En efecto, podemos considerar que las rectas que trazamos son ejes de coordenadas y que tomamos los factores a y b, uno en cada eje.

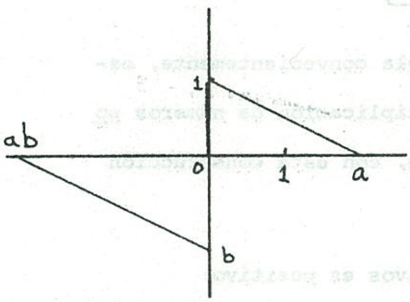
1. Si a y b son positivos, obtenemos la siguiente figura:



(Unimos 1 con a y desde b trazamos una paralela a este segmento. Su intersección con el eje de las abscisas nos da el punto cuya coordenada es ab)

en la que observamos que ab resulta positivo.

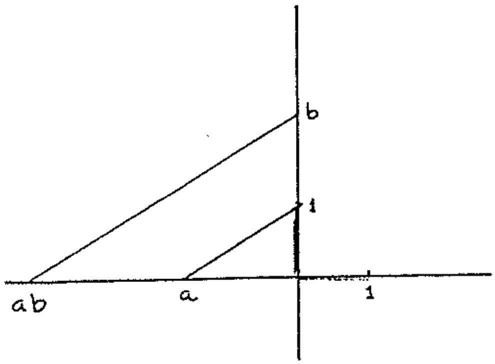
2. Si a es positivo y b es negativo, la construcción queda así:



(Unimos 1 con a y desde b trazamos una paralela a este segmento. Su intersección con el eje de las abscisas nos da el punto cuya coordenada es ab)

Aquí observamos que ab es negativo.

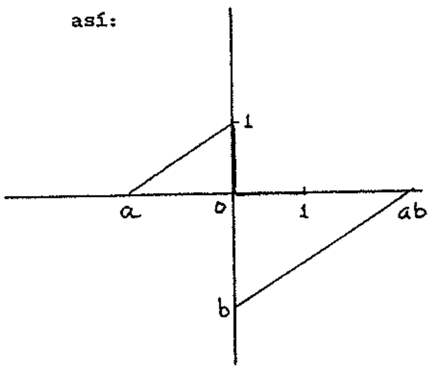
3. Si a es negativo y b es positivo, obtenemos la figura siguiente:



(Unimos 1 con a y desde b trazamos una paralela a este segmento. Su intersección con el eje de las abscisas nos da el punto cuya coordenada es ab)

Aquí observamos que ab es negativo.

4. Si a y b son ambos negativos, la construcción resulta así:



(Unimos 1 con a y desde b trazamos una paralela a este segmento. Su intersección con el eje de las abscisas nos da el punto cuya coordenada es ab)

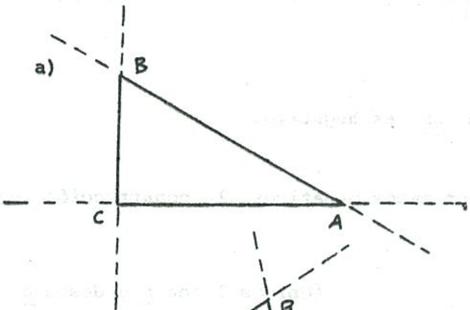
Y observamos que el producto ab es positivo.

III. POLIGONOS

1. Suma de las medidas de los ángulos de un triángulo.

Ejercicio 1. En cada uno de los incisos mida los ángulos del triángulo y encuentre su suma.

a)



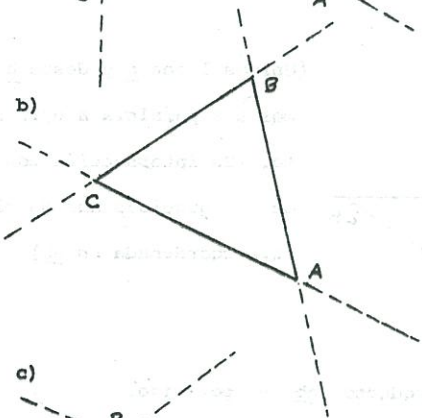
$\measuredangle A = 30^\circ$

$\measuredangle B = \square$

$\measuredangle C = \square$

$\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C = \square$

b)



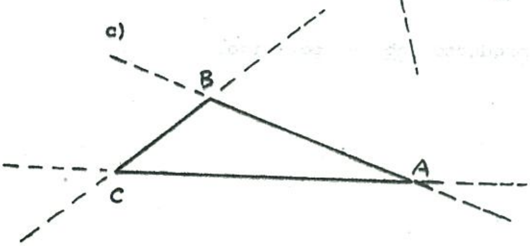
$\measuredangle A = \square$

$\measuredangle B = \square$

$\measuredangle C = \square$

$\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C = \square$

c)



$\measuredangle A = \square$

$\measuredangle B = \square$

$\measuredangle C = \square$

$\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C = \square$

En este ejercicio observamos que la suma de las medidas de los ángulos de un triángulo es 180°. (Posiblemente usted no haya obtenido, en algún caso, exactamente 180°, pero esto se debe a errores de medición.)

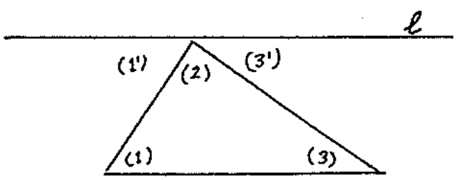
Este es un hecho que vale en todos los triángulos. Es decir, la suma de las medidas de los ángulos de un triángulo es 180°.

Podríamos simplemente aceptar este resultado como hemos hecho algunas veces con otros. Sin embargo, veremos ahora que este resultado lo podemos deducir de otros ya aceptados. En otras palabras, podemos demostrar esta propiedad.

Enunciémosla nuevamente:

> En cualquier triángulo, $\triangle ABC$, la suma de las medidas de sus tres ángulos es 180°. O sea,
>
> $$\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C = 180°$$

Demostración. Consideremos una recta ℓ que pase por el punto C y que sea paralela a $\overline{AB}$ como se muestra en la siguiente figura:



Tenemos que

$$\measuredangle(1') + \measuredangle(2) + \measuredangle(3') = 180°.$$

En esta expresión sustituimos $\measuredangle(1')$ por $\measuredangle(1)$ y $\measuredangle(3')$ por $\measuredangle(3)$ lo cual se puede hacer porque $\measuredangle(1) = \measuredangle(1')$ y $\measuredangle(3) = \measuredangle(3')$, pues son alternos internos. Obtenemos entonces

$$\angle(1) + \angle(2) + \angle(3) = 180°$$

que es lo que se quería demostrar.

De este resultado podemos deducir otros. Por ejemplo el siguiente:

Si en dos triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ sabemos que $\angle A \cong \angle A'$ y $\angle B \cong \angle B'$, entonces los triángulos son semejantes.

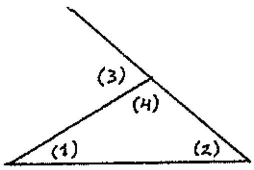
Demostración. En efecto, sabemos que

$$\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C = 180°$$
$$\measuredangle A' + \measuredangle B' + \measuredangle C' = 180°$$

y además $\measuredangle A = \measuredangle A'$ y $\measuredangle B = \measuredangle B'$. Por lo tanto, forzosamente $\measuredangle C = \measuredangle C'$, lo cual quiere decir que $\angle C \cong \angle C'$.

Así pues, para ver que dos triángulos son semejantes, basta ver que dos ángulos de uno de ellos son respectivamente congruentes a dos de los ángulos del segundo.

Ejercicio 2. En la siguiente figura $\measuredangle(1) = 30°$, $\measuredangle(2) = 40°$ ¿Cuánto mide el $\angle(3)$?

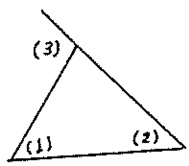


Sugerencia. Use los siguientes hechos:

$$\measuredangle(3) + \measuredangle(4) = 180°$$

$$\measuredangle(1) + \measuredangle(2) + \measuredangle(4) = 180°$$

Ejercicio 3. Utilizando la idea del ejercicio anterior, demuestre que en un triángulo cualquiera $\angle(1) + \angle(2) = \angle(3)$.
(Vea la siguiente figura).



Recordemos que un triángulo rectángulo es un triángulo que tiene un ángulo de 90°.

Ejercicio 4.

a) Un triángulo no puede tener dos ángulos rectos. ¿Por qué?

b) En un triángulo rectángulo, la suma de las medidas de los dos ángulos no rectos es 90°

(Decimos que un ángulo es agudo si mide menos de 90°)

c) Los ángulos no rectos de un triángulo rectángulo son agudos. ¿Por qué?

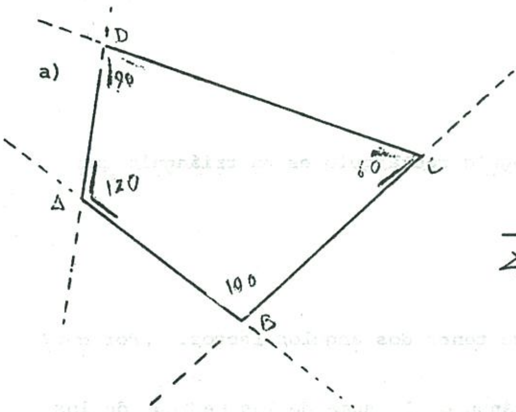
Se dice que un ángulo es obtuso si mide más de 90° y que que un triángulo es obtusángulo si tiene un ángulo obtuso.

Ejercicio 5. ¿Por qué en un triángulo obtusángulo hay solamente un ángulo obtuso y los otros dos son agudos?

2. Suma de las medidas de los ángulos de un polígono.

Ejercicio 6. Mida los ángulos de los siguientes cuadriláteros y encuentre su suma.

a)



$\measuredangle A = \boxed{}$

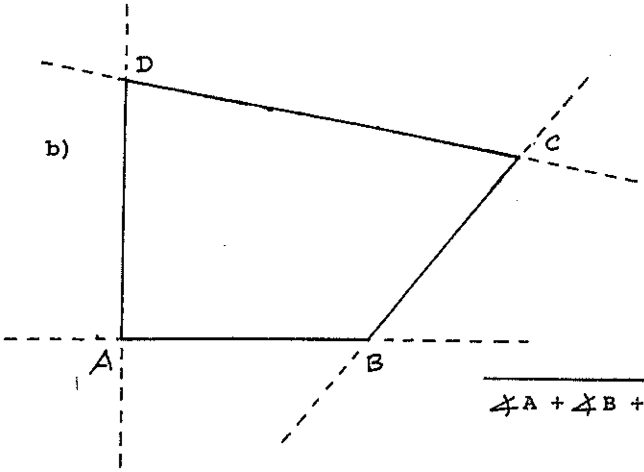
$\measuredangle B = \boxed{}$

$\measuredangle C = \boxed{}$

$\measuredangle D = \boxed{}$

$\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C + \measuredangle D = \boxed{}$

b)



$\measuredangle A = \square$

$\measuredangle B = \square$

$\measuredangle C = \square$

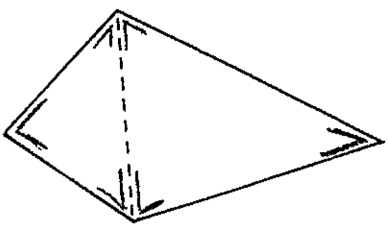
$\measuredangle D = \square$

$\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C + \measuredangle D = \square$

Salvo errores de medición usted habrá obtenido, en ambos casos, que la suma es 360°.

¿Podríamos demostrar que no solamente en los dos cuadriláteros del ejercicio anterior, sino que en cualquier cuadrilátero la suma de las medidas de sus ángulos es 360° ?

Es muy fácil. Consideremos un cuadrilátero cualquiera.



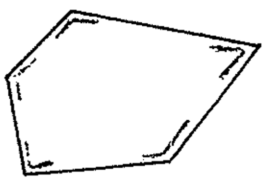
Al unir dos vértices opuestos queda triangulado.

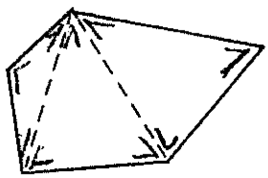
Observemos que la suma de las medidas de los cuatro ángulos del cuadrilátero es igual a la suma de los seis ángulos obtenidos, tres de cada triángulo. Ahora bien, como la suma de las medidas de los ángulos de un triángulo es 180°, ~~obtenemos~~ resulta que en total se obtiene 180° + 180°= = 2 x 180° = 360°.

Es decir, hemos demostrado que

> La suma de las medidas de los 4 ángulos de un cuadrilátero es $2 \times 180° = 360°$.

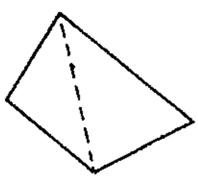
El razonamiento que hemos hecho para cuadriláteros lo podemos hacer para polígonos convexos de cualquier número de lados. Por ejemplo, consideremos un pentágono. Lo triángulamos:





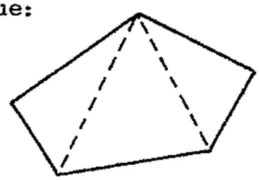
La suma de las medidas de los ángulos del pentágono es igual a la suma de las medidas de todos los ángulos que aparecen en la triangulación. Como hay 3 triángulos, dicha suma es $3 \times 180°$

Para el caso general, observemos que:



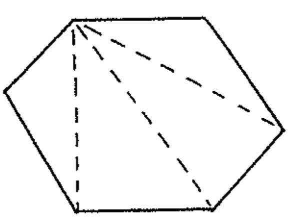
En un polígono de $\boxed{4}$ lados se forman $\boxed{2}$ triángulos. La suma de las medidas de sus ángulos es

$$\boxed{2 \times 180°}$$



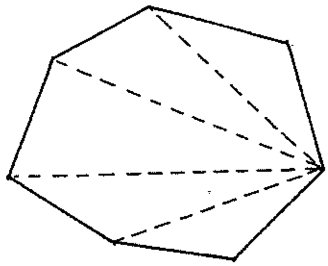
En un polígono de $\boxed{5}$ lados se forman $\boxed{3}$ triángulos. La suma de las medidas de sus ángulos es

$$\boxed{3 \times 180°}$$



En un polígono de $\boxed{6}$ lados se forman $\boxed{4}$ triángulos.
La suma de las medidas de sus ángulos es

$$\boxed{4 \times 180°}$$



En un polígono de $\boxed{7}$ lados se forman $\boxed{5}$ triángulos.
La suma de las medidas de sus ángulos es

$$\boxed{5 \times 180°}$$

En general,

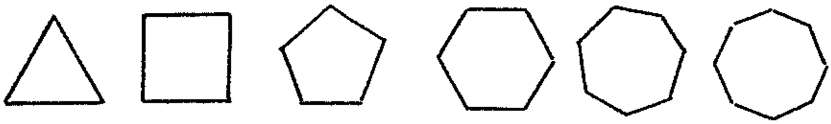
> En un polígono de n lados, la suma de las medidas de sus ángulos es
>
> $$(n - 2)180°.$$

Ejercicio 7. ¿Cuánto suman las medidas de los ángulos de un polígono que tiene 12 lados? ¿Y de un polígono que tiene 17 lados?

3. Polígonos regulares. Medida de sus ángulos.

Un polígono se dice que es regular si todos sus lados son congruentes entre sí y también todos sus ángulos son congruentes entre sí.

Los siguientes dibujos ilustran polígonos regulares de 3, 4, 5, 6, 7 y 8 lados.

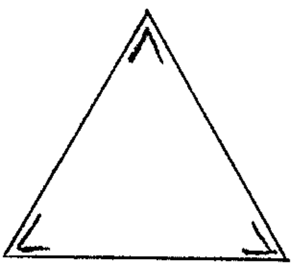


Polígonos regulares

Un triángulo regular se llama equilátero. Un cuadrilátero regular se llama cuadrado.

Lo que vimos en el párrafo anterior nos permite calcular las medidas de los ángulos de los polígonos regulares.

Empecemos con el triángulo equilátero. Sabemos que la suma de las medidas de sus 3 ángulos es 180°. Como todos ellos miden lo mismo (porque son congruentes), cada uno de ellos medirá



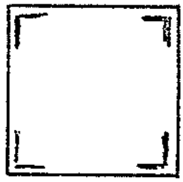
$$\frac{180°}{3} = 60°.$$

$\frac{180°}{3} = 60°$

Los ángulos de un triángulo equilátero miden 60°.

En un cuadrado, sabemos que la suma de las medidas de sus 4 ángulos es $2 \times 180° = 360°$. Como todos miden lo mismo, cada uno de ellos medirá

$$\frac{360°}{4} = 90°;$$

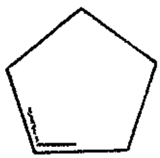


$$\frac{2 \times 180°}{4} = \boxed{90°}$$

es decir, sus cuatro ángulos son rectos.

Los ángulos de un cuadrado son rectos.

Analicemos ahora el pentágono regular. Sabemos que la suma de las medidas de sus 5 ángulos es $3 \times 180°$. Como todos miden lo mismo, cada uno de ellos mide



$$\frac{3 \times 180°}{5} = 3 \times 36° = 108°.$$

$$\frac{3 \times 180°}{5} = \boxed{108°}$$

Los ángulos de los exágonos regulares medirán

$$\frac{4 \times 180°}{6} = 4 \times 30° = 120°$$

$$\frac{4 \times 180°}{6} = \boxed{120°}$$

Ejercicio 8. En forma análoga, calcule la medida de los ángulos de

a) un eptágono regular;

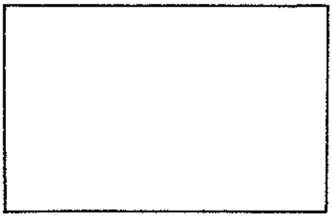
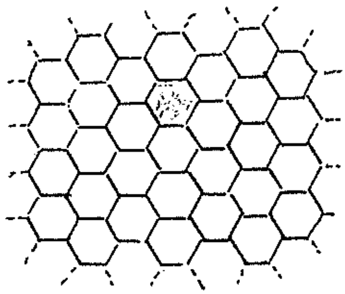
b) un octágono regular;

c) un polígono regular de 12 lados.

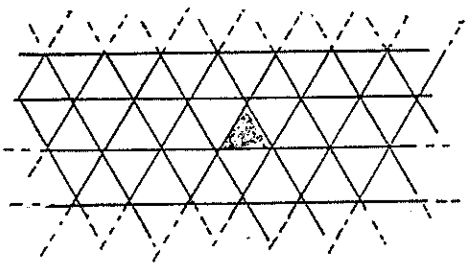
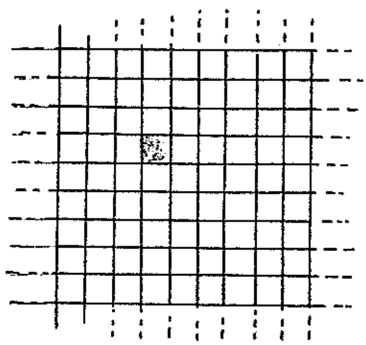
Ejercicio 9. Encuentre una fórmula para calcular la medida de los ángulos de un polígono regular de n lados.

4. Una aplicación.

¿Ha observado usted alguna vez un panal de abejas? Esta hermosa obra de la naturaleza nos muestra cómo, con exágonos regulares, podemos tapizar el plano.

¿Podríamos hacer lo mismo con otros polígonos regulares? Desde luego que sí con triángulos equiláteros y con cuadrados:

¿Y con otros polígonos regulares? Antes de contestar esta pregunta hagamos un ejercicio.

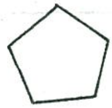
Ejercicio 10.

a) Recorte de una hoja de papel grueso o cartón unos 10 ó 12 triángulos equiláteros, como el de la derecha, y vea cómo puede ir tapizando el plano con ellos (sin dejar "huecos" y sin encimar los triángulos).

b) Haga lo mismo con cuadrados.

c) Lo mismo con exágonos regulares como el que se muestra.

d) Trate ahora de hacer lo mismo con pentágonos regulares como el de la derecha. ¿Qué ocurre?



e) Intente hacer lo mismo con eptágonos regulares.

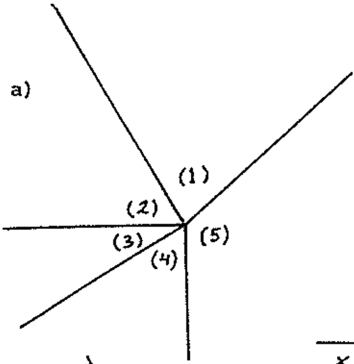
f) Y con octágonos regulares.

Al resolver este ejercicio habrá usted observado que solamente se puede hacer con polígonos regulares de 3, 4 y 6 lados (triángulos equiláteros, cuadrados y exágonos regulares). Con los demás polígonos regulares no podemos tapizar el plano.

¿Por qué ocurre esto? Para contestar esta pregunta conviene primero demostrar otro resultado.

Ejercicio 110. En cada inciso mida con un transportador los ángulos que se indican y encuentre la suma de dichas medidas.

a)



$\measuredangle(1) = \square$

$\measuredangle(2) = \square$

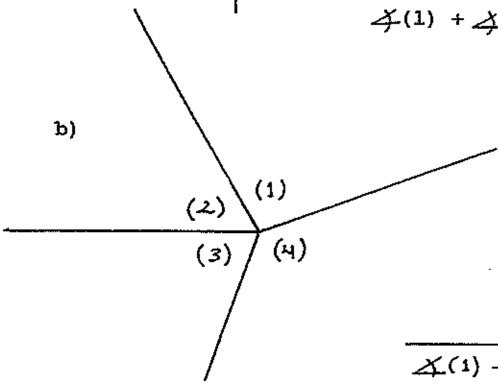
$\measuredangle(3) = \square$

$\measuredangle(4) = \square$

$\measuredangle(5) = \square$

$\measuredangle(1) + \measuredangle(2) + \measuredangle(3) + \measuredangle(4) + \measuredangle(5) = \square$

b)



$\measuredangle(1) = \square$

$\measuredangle(2) = \square$

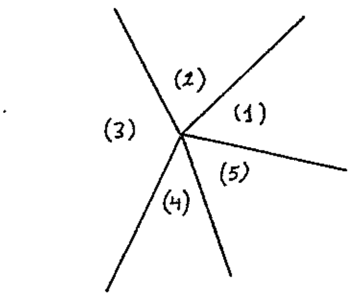
$\measuredangle(3) = \square$

$\measuredangle(4) = \square$

$\measuredangle(1) + \measuredangle(2) + \measuredangle(3) + \measuredangle(4) = \square$

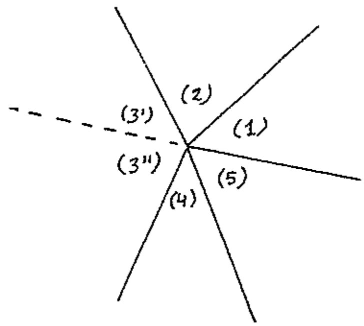
En ambos casos, salvo errores de medición, la suma es 360°.

Este resultado podemos demostrarlo fácilmente. En efecto, supongamos que nos dan varios ángulos con el vértice común y queremos encontrar la suma de sus medidas.



Podemos nosotros trazar un rayo adicional como se muestra en la siguiente figura y encontramos una situación así:

El ángulo $\angle(3)$ ha quedado subdividido en $\angle(3')$ y $\angle(3")$. Tenemos que $\measuredangle(3) = \measuredangle(3') + \measuredangle(3")$.



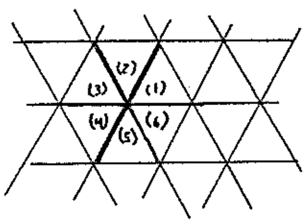
Por lo tanto,

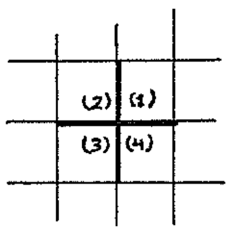
$$\measuredangle(1)+\measuredangle(2)+\measuredangle(3)+\measuredangle(4)+\measuredangle(5) = \underbrace{\measuredangle(1)+\measuredangle(2)+\measuredangle(3')} + \underbrace{\measuredangle(3")+\angle(4)+\angle(5)}$$

$$= \qquad 180° \qquad + \qquad 180°$$

(pues la medida de un ángulo llano es 180°). Por lo tanto la suma mencionada es $180° + 180° = 360°$.

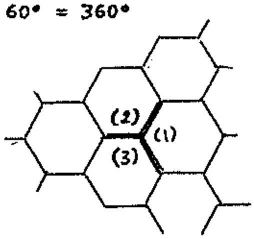
Ahora bien, al tapizar con polígonos el plano, en cada vértice aparecen varios ángulos como en el ejercicio anterior. Veamos esto en los tres casos:





$6 \times 60° = 360°$

$4 \times 90° = 360°$



$3 \times 120° = 360°$

Según lo anterior, la suma de las medidas de estos ángulos debe ser, en cada caso, 360°. Comprobemos esto en los tres casos que tenemos.

1. Triángulos equiláteros. Sabemos que cada ángulo de un triángulo equilátero mide 60°. Si juntamos 6 triángulos equilateros, la suma de los ángulos será 6 x 60° = 360°.

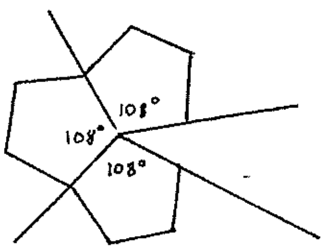
2. Cuadrados. Cada ángulo de un cuadrado mide 90°. Al juntar 4 cuadrados, la suma de los ángulos será 4 x 90° = 360°.

3. Exágonos regulares. Los ángulos de un exágono regular miden 120°. Luego, podemos juntar en un vértice 3 exágonos regulares porque 3 x 120 = 360°.

¿Qué ocurre con los demás polígonos regulares?

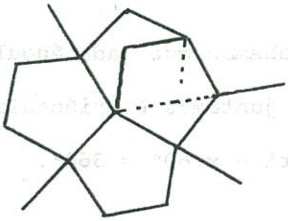
Examinemos el caso de pentágonos regulares. Sabemos que cada ángulo de un pentágono regular mide 108°.

Ahora bien, si juntamos 3 pentágonos regulares, la suma de los ángulos en el vértice será 3 x 108° = 324° $<$ 360°



360° - 324° = 36° (sobra)

Por otro lado, si juntamos 4 pentágonos regulares en un vértice, éstos se traslaparán pues $4 \times 108° = 432° > 360°$



$432° - 360° = 72°$ (se traslapan)

Esto prueba que con pentágonos regulares no podemos tapizar el plano.

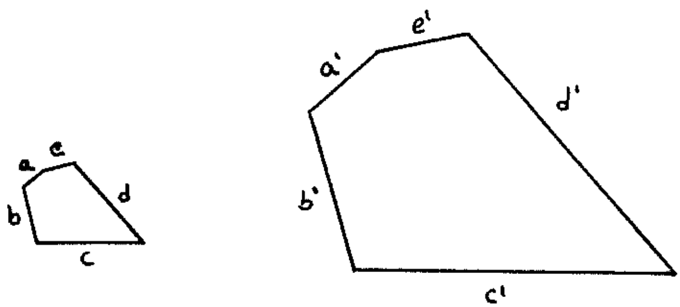
Ejercicio 12. Haga un análisis como el anterior para:

a) eptágonos regulares.

b) octágonos regulares.

5. Perímetros de polígonos semejantes.

En este párrafo estudiaremos la relación que hay entre los perímetros de dos polígonos semejantes. Usted ya tiene alguna idea intuitiva sobre esto. Por ejemplo, si le dicen que las dos figuras ilustradas abajo representan polígonos semejantes cuya razón de semejanza es $\frac{1}{3}$, y sabe que el perímetro de la primera figura es 12 cm., ¿podría decir cuál es el perímetro de la segunda figura sin efectuar ninguna medición directa?



$P = a + b + c + d + e$

$P = 12$ cm.

$P' = a' + b' + c' + d' + e'$

$P' = \boxed{}$

Seguramente su respuesta ha sido correcta: $P' = \boxed{36 \text{ cm.}}$

Analicemos con detalle las dos figuras del ejemplo y observemos la relación que hay entre sus perímetros.

En virtud de que las dos figuras son semejantes, sus lados respectivos son proporcionales. Por eso, considerando la razón de semejanza, tenemos que,

$\frac{a}{a'} = \frac{1}{3}$ y, por lo tanto, $a' = 3a$,

$\frac{b}{b'} = \frac{1}{3}$ y, por lo tanto, $b' = 3b$,

$\frac{c}{c'} = \frac{1}{3}$ y, por lo tanto, $c' = 3c$,

$\frac{d}{d'} = \frac{1}{3}$ y, por lo tanto, $d' = 3d$,

$\frac{e}{e'} = \frac{1}{3}$ y, por lo tanto, $e' = 3e$.

Como el perímetro de la segunda figura es

$$P' = a' + b' + c' + d' + e',$$

podemos escribir

$$P' = 3a + 3b + 3c + 3d + 3e,$$

$$P' = 3(a + b + c + d + e),$$

$$\boxed{P' = 3P.}$$

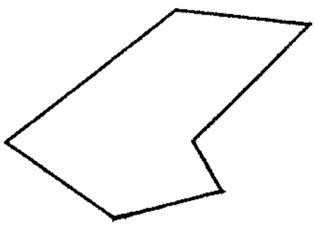
De esta última expresión obtenemos la siguiente:

$$\boxed{\frac{P}{P'} = \frac{1}{3}}$$

Esta expresión nos indica que la razón de los perímetros de los polígonos dados es igual a la razón de semejanza de esos polígonos.

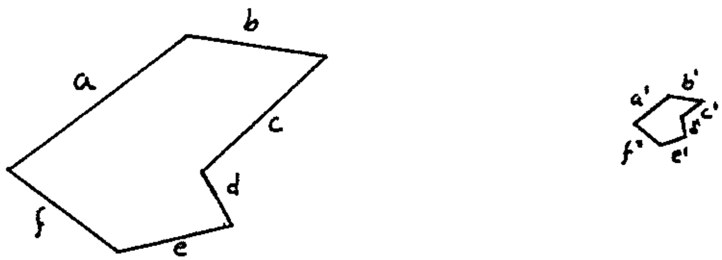
$$\boxed{\frac{36}{12} = \frac{1}{3}}$$

Ejemplo. Sabemos que la razón de semejanza entre los polígonos que se ilustran a continuación es 5 (esto es, 5 : 1) y el perímetro del primero es 30 cm. Con esos datos, y sin medir, vamos a calcular el perímetro del segundo polígono.



P = 30 cm. P' = $\boxed{?}$

Supongamos que las medidas de los lados del primer polígono son a, b, c, d, e y f y las medidas de los lados respectivos en el otro polígono son a', b', c', d', e' y f'.



$P = a + b + c + d + e + f \qquad P' = a' + b' + c' + d' + e' + f'$

Como los polígonos son semejantes podemos afirmar que

$\frac{a}{a'} = 5$ y, por lo tanto, $a = 5\,a'$,

$\frac{b}{b'} = 5$ y, por lo tanto, $b = 5\,b'$,

$\frac{c}{c'} = 5$ y, por lo tanto, $c = 5\,c'$,

$\frac{d}{d'} = 5$ y, por lo tanto, $d = 5\,d'$,

$\frac{e}{e'} = 5$ y, por lo tanto, $e = 5\,e'$,

$\frac{f}{f'} = 5$ y, por lo tanto, $f = 5\,f'$.

Ya que $P = a + b + c + d + e + f$, podemos escribir

$P = 5\,a' + 5\,b' + 5\,c' + 5\,d' + 5\,e' + 5\,f'$

$P = 5\,(a' + b' + c' + d' + e' + f')$

$\boxed{P = 5\,P'}$

De esta última expresión obtenemos la siguiente:

$$\boxed{\frac{P}{P'} = 5}$$

Esto significa que la razón de los perímetros de los polígonos dados es igual a su razón de semejanza.

Por lo tanto, como P es igual a 30 cm., tenemos que

$$\frac{30}{\boxed{P'}} = 5$$

$$30 = 5\,P'$$

$$\frac{30}{5} = P'$$

$$\boxed{6 = P'}$$

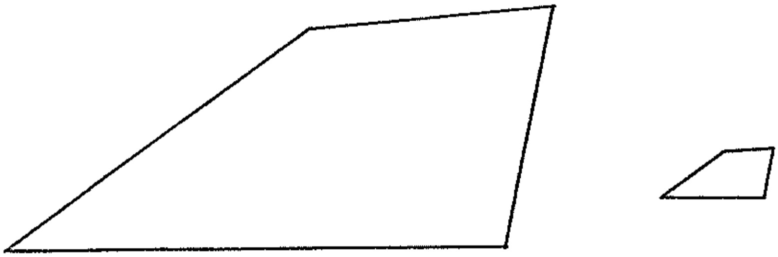
Esto es, el perímetro del segundo polígono es 6 centímetros.

En general, con un procedimiento semejante al que hemos seguido en los ejemplos anteriores, se puede demostrar que

En dos polígonos semejantes cualesquiera, la razón de sus perímetros es igual a su razón de semejanza.

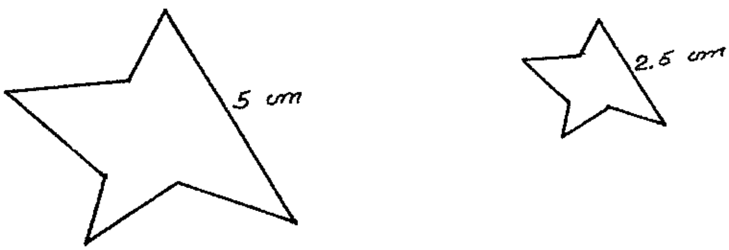
Ejercicio 5. Considerando los datos que se dan, y sin efectuar ninguna medición, complete usted las expresiones en cada inciso.

a) Las dos figuras ilustradas son semejantes. Su razón de semejanza es 5 : 1.



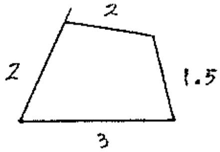
P = $\boxed{27.5 \text{ cm.}}$ P' = $\boxed{}$

b) Las dos figuras son semejantes.

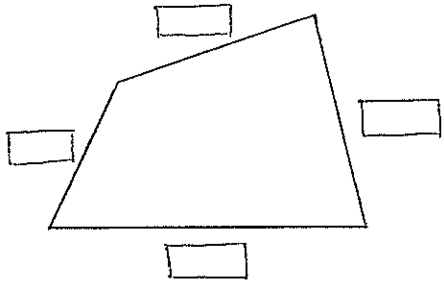


P = 36 P' = $\boxed{}$

c) Las dos figuras son semejantes.



P = $\boxed{}$



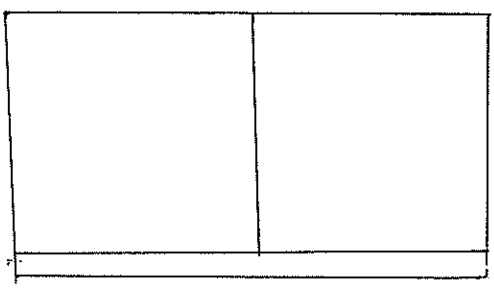
P' = 17 cm.

La razón de semejanza de la primera figura a la segunda es $\boxed{}$.

La razón de semejanza de la segunda figura a la primera es $\boxed{}$.

Problemas. En los siguientes problemas se utilizan figuras a escala. Para resolverlos es necesario aplicar lo que sabemos acerca de figuras semejantes.

a) El siguiente es un dibujo a escala de una cancha de voleibol.

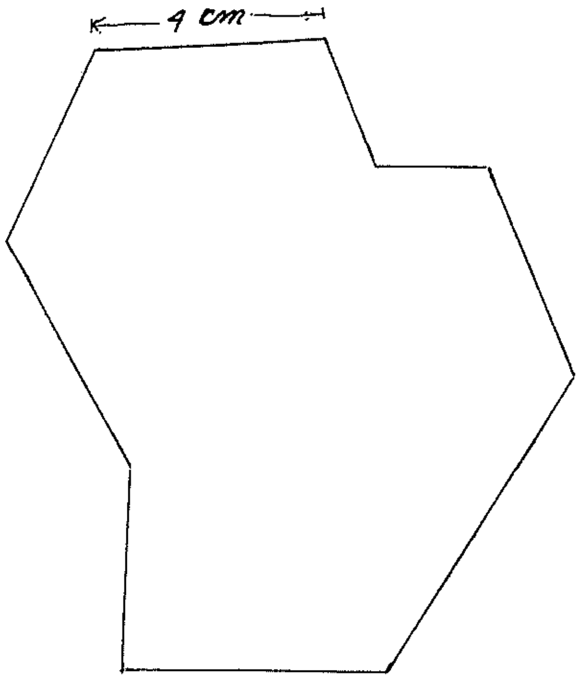


Escala 1 : 200

El perímetro del dibujo a escala es $\boxed{}$.

El perímetro de la cancha de voleibol es $\boxed{}$.

b) A continuación tenemos un mapa a escala de una ciudad en el que se ha marcado una parte de la red de drenaje. Si el tramo señalado con 4 centímetros mide en la realidad 400 metros y el perímetro de la digura dibujada es 35 centímetros, ¿cuántos kilómetros de tubería se ocupan en esa parte del drenaje?



6. Areas de polígonos semejantes

Cuando se comparan las áreas de dos polígonos es fácil cometer errores como el que cometió Daniel, el mosaiquero.

Daniel era un hábil mosaiquero que un día fue contratado para cubrir con azulejos una pared de 4 x 3 metros. Daniel vió unos bonitos azulejos de 10 x 10 cm y razonó así:

"Como la pared mide 4 metros (400 cm) de largo por 3 metros (300 cm) de alto, su área será

$$400 \times 300 = 120\,000 \text{ cm}^2$$

Cada azulejo mide

$$10 \times 10 = 100 \text{ cm}^2$$

Entonces necesito

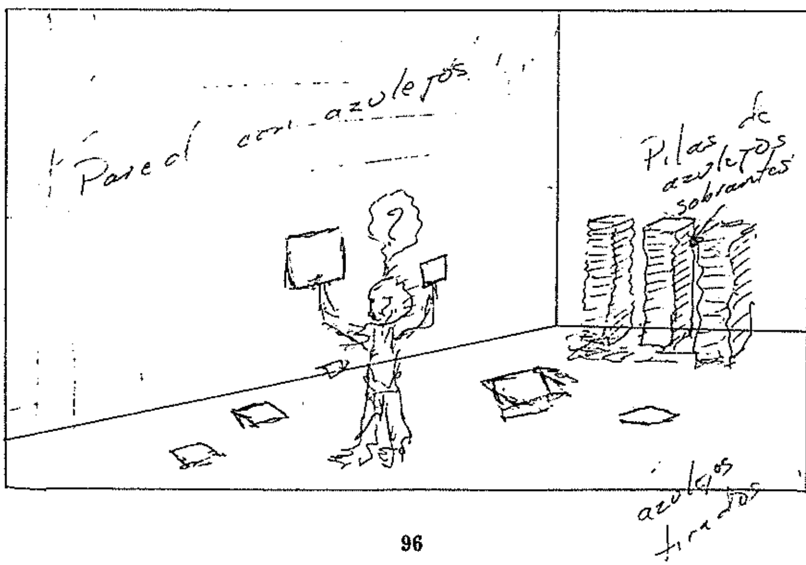
$$\frac{120\,000}{100} = 1\,200 \text{ azulejos".}$$

"Todo esto está muy bien-siguió pensando Daniel- pero colocar 1 200 azulejos me llevará mucho tiempo. ¿Qué tal si los compro más grandes? ¡Eso es! Usaré azulejos de tamaño doble, o sea, de 20 x 20 centímetros. Así tendré que colocar solamente 600 azulejos y acabaré pronto".

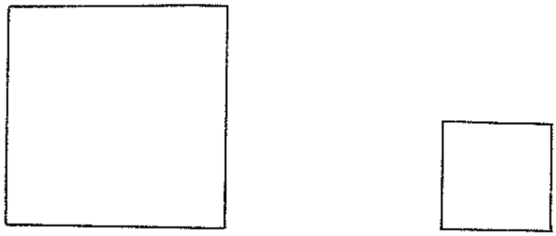
Con esta idea, Daniel encargó 600 azulejos y empezó a trabajar temprano al día siguiente.

Cuando terminó su trabajo vió con horror que le había sobrado un enorme montón de azulejos. ¿En dónde estuvo el error de Daniel?

Indudablemente, Daniel hizo mal sus cálculos. ¿Puede usted decir cuál fue su equivocación?

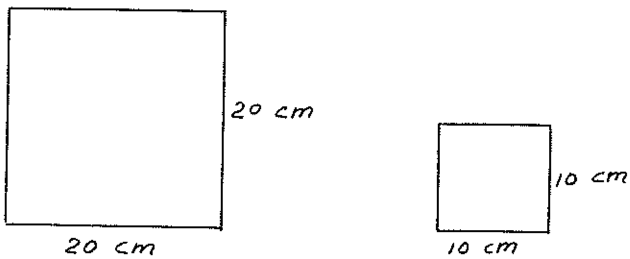


El error del mosaiquero consistió en que comparó dos figuras semejantes, los dos azulejos, pensando que la razón de las áreas era igual a la razón de semejanza entre ellos.



El creyó que, como el lado de un azulejo es el doble del lado del otro, (razón 2 : 1) también el área era el doble.

Veamos cómo están relacionadas esas áreas:



$A = 20 \times 20 = \boxed{400\ cm^2}$ $\qquad$ $A = 10 \times 10 = \boxed{100\ cm^2}$

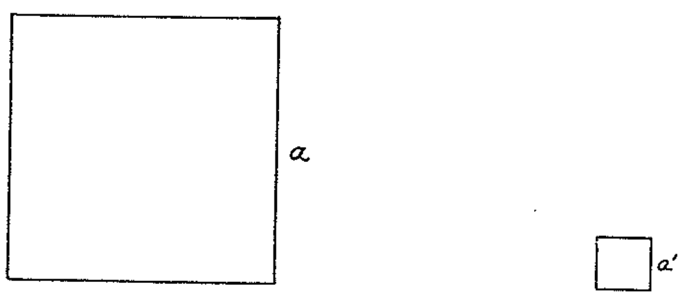
Como vemos, el área del azulejo más grande es el cuádruple del área del otro azulejo. ($\frac{400}{100} = 4$) Es decir, la razón de estas áreas es 4.

Por eso es que para cubrir la pared sólo ocupó 300 azulejos, pues,

$$\frac{120\,000}{400} = 300$$

Lo que observamos aquí nos hace sospechar que, en general, la razón de las áreas de dos polígonos semejantes no es igual a su razón de semejanza. En lo que sigue veremos cómo se relacionan las áreas de dos polígonos semejantes.

Empecemos con los siguientes cuadrados, cuya razón de semejanza es 5. Es decir, 5 : 1.



$A = a^2$ $\qquad\qquad$ $A' = (a')^2$

Puesto que la razón de semejanza es 5, podemos escribir

$$\frac{a}{a'} = 5$$

o bien,

$$a = 5\,a'$$

Como $A = a^2$, y según acabamos de ver, $a = 5\,a'$, podemos escribir

$$A = (5\,a')^2 = \boxed{5^2\,(a')^2}$$

Como $(a')^2$ es A', tenemos que

$$\boxed{A = 5^2\,A'}$$

Y, por consiguiente,

$$\boxed{\frac{A}{A'} = 5^2}$$

Esto es, la razón de las áreas de esos dos polígonos semejantes es igual al cuadrado de su razón de semejanza.

Lo que ocurre en este ejemplo ocurre en general con cualquier par de cuadrados, y se puede demostrar siguiendo un procedimiento análogo al que acabamos de emplear.

Consideremos dos cuadrados cualesquiera cuyos lados midan ℓ y ℓ', respectivamente, y cuya razón de semejanza sea $\frac{\ell}{\ell'} = k$.

Las áreas de estos cuadrados serán:

$A = \ell^2$ y $A' = (\ell')^2$

Como $\frac{\ell}{\ell'} = k$, tenemos que

$$\ell = k\ell'$$

Ya que $A = \ell^2$, y $\ell = k\ell'$, podemos escribir

$$A = (k\ell')^2 = k^2(\ell')^2$$

En vista de que $(\ell')^2$ es igual a A', tenemos que

$$\boxed{A = k^2 A'}$$

Y, por lo tanto,

$$\boxed{\frac{A}{A'} = k^2}$$

Esto es,

La razón de las áreas de dos cuadrados cualesquiera es igual al cuadrado de su razón de semejanza.

Ahora podemos ver, sin necesidad de calcular las áreas, lo que ocurrió en el problema del mosaiquero:

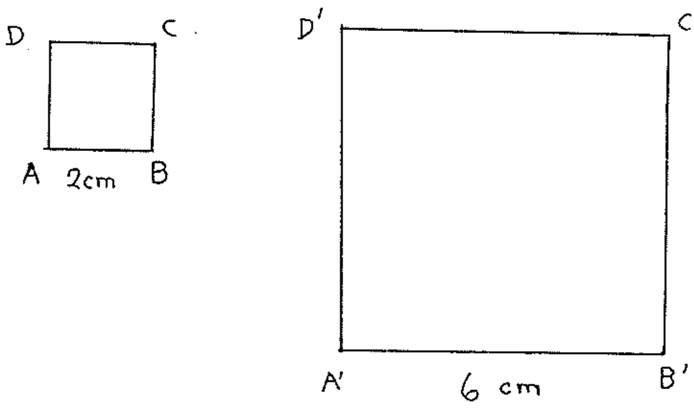
Un azulejo mide 20 cm por lado y el otro mide 10 cm por lado. La razón de semejanza de esas figuras es $\frac{20}{10} = 2$. Por consiguiente, la razón de sus áreas es

$$\frac{A}{A'} = 2^2 = \boxed{4}$$

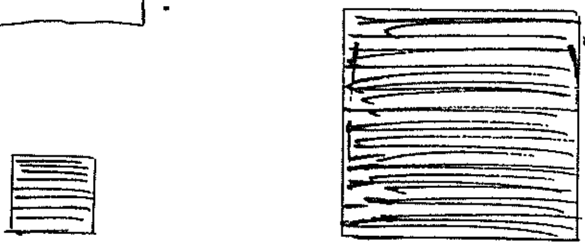
Eso significa que el área del azulejo mayor es 4 veces el área del menor, y no el doble como pensó Daniel.

Ejercicio 6. Considere los datos que se dan en cada inciso y complete las expresiones.

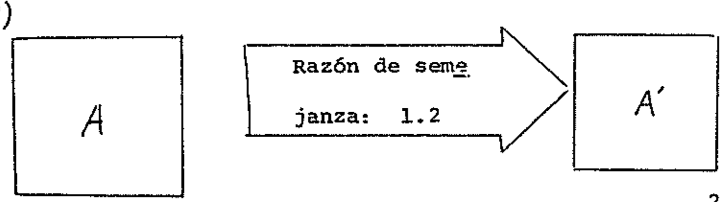
a) La razón del área del cuadrado ABCD al área del cuadrado A'B'C'D' es $\boxed{}$.



b) La razón de semejanza del primer cuadrado al segundo es $\frac{1}{4}$. Si el área del primer cuadrado es .64 cm^2, el área del segundo es $\boxed{}$.



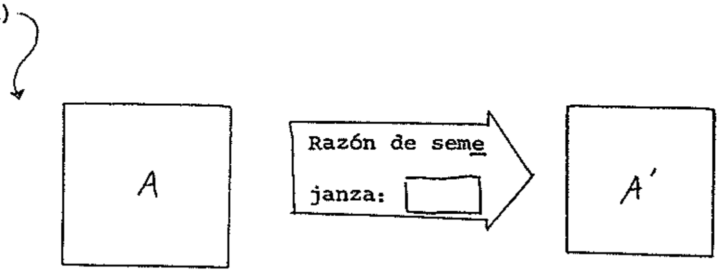
c)



A' = 10 cm^2

A = $\boxed{}$

d)



$A' = 100\ m^2$

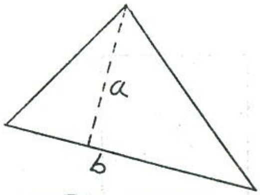
$A = 64\ m^2$

e)

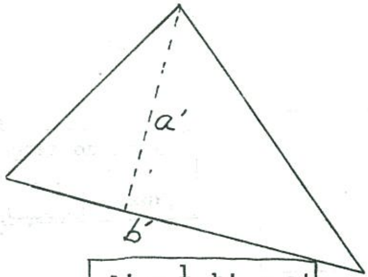
Al dividir A entre A' se obtiene .49 como cociente. La razón de semejanza del primer cuadrado al segundo es $\boxed{}$.

De igual manera que hemos analizado la relación que hay entre las áreas de cuadrados, podemos comparar las áreas de triángulos y polígonos semejantes en general.

Consideremos que los triángulos ilustrados a continuación son semejantes y su razón de semejanza es $\frac{b}{b'} = \frac{a}{a'} = k$.



$\boxed{A = \frac{1}{2}\, b \cdot a}$



$\boxed{A' = \frac{1}{2}\, b' \cdot a'}$

Como $\frac{b}{b'} = k$ y $\frac{a}{a'} = k$, podemos escribir

$$b = k\,b' \quad y \quad a = k\,a'$$

Así, puesto que $A = \frac{1}{2}\, b \cdot a$, tenemos que

$$A = \frac{1}{2}\, k\,b' \cdot k\,a'$$

$$A = k^2 \cdot \frac{1}{2}\, b'\,a'$$

$$A = k^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\, b'\,a'\right)$$

O sea,

$$\boxed{A = k^2 A'}$$

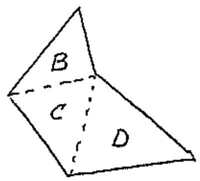
Y, por consiguiente,

$$\boxed{\frac{A}{A'} = k^2}$$

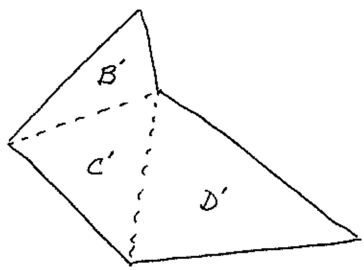
Con este resultado podemos encontrar fácilmente la relación que hay entre las áreas de dos polígonos semejantes cualesquiera.

Recuerde usted que si dos polígonos son semejantes y su razón de semejanza es k, dichos polígonos se pueden triangular de tal modo que los triángulos respectivos sean semejantes y con razón de semejanza igual a k.

Consideremos, por ejemplo, los polígonos semejantes ilustrados a continuación. Digamos que su razón de semejanza es k.



A = B + C + D



A' = B' + C' + D'

Si comparamos las áreas de los triángulos correspondientes, hallamos que

$\frac{B}{B'} = k^2$ y, por lo tanto, $B = \boxed{k^2 B'}$

$\frac{C}{C'} = k^2$ y, por lo tanto, $C = \boxed{k^2 \ C'}$

$\frac{D}{D'} = k^2$ y, por lo tanto, $D = \boxed{k^2 \ D'}$

Con esto, podemos escribir

$A = B + C + D$

$A = k^2 B' + k^2 C' + k^2 D'$

$A = k^2 (B' + C' + D')$

$A = k^2 A'$

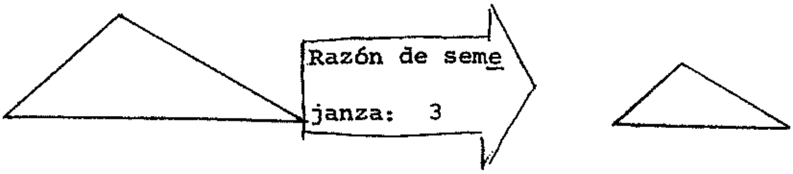
Y, por consiguiente,

$$\boxed{\frac{A}{A'} = k^2}$$

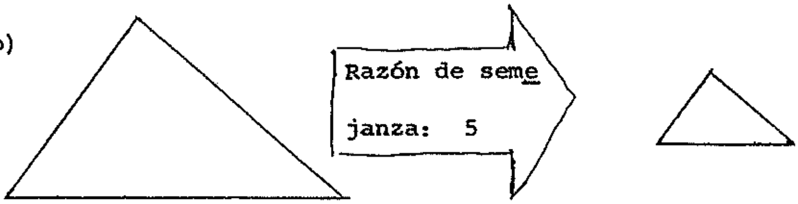
El mismo resultado se obtiene al comparar las áreas de dos polígonos semejantes cualesquiera. Esto es,

La razón de las áreas de dos polígonos semejantes, cualesquiera, es igual al cuadrado de su razón de semejanza.

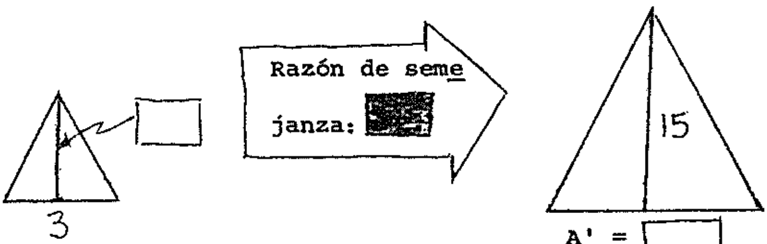
Ejercicio V. En cada inciso las figuras que se mencionan son semejantes, considere los datos y complete las expresiones, escribiendo en cada cuadrito lo que falta.

a) 

$A = 18\ m^2$ $\qquad$ $A' = \boxed{}$

b) 

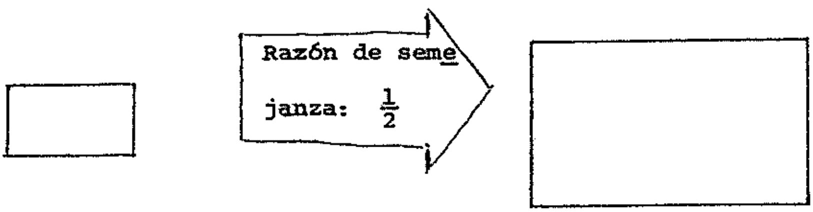
$A = \boxed{}$ $\qquad$ $A' = 12\ cm^2$

c) 

$A' = \boxed{}$

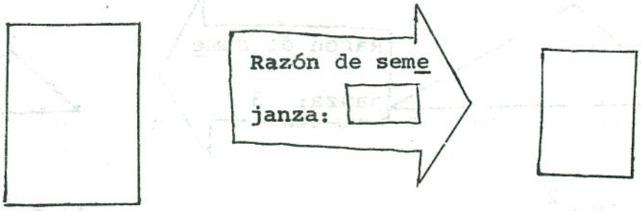
$$\frac{A}{A'} = \frac{1}{9}$$

$A = \boxed{}$

d) 

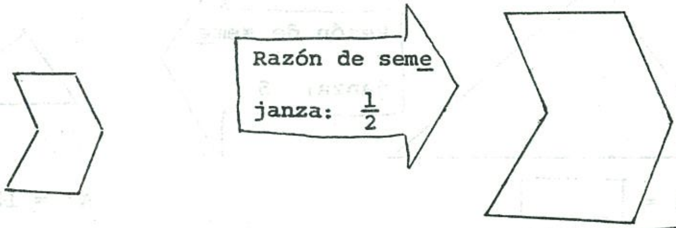
La razón de las áreas es $\frac{A}{A'} = \boxed{}$.

e)



La razón $\frac{A}{A'}$ es igual a $\boxed{1.44}$

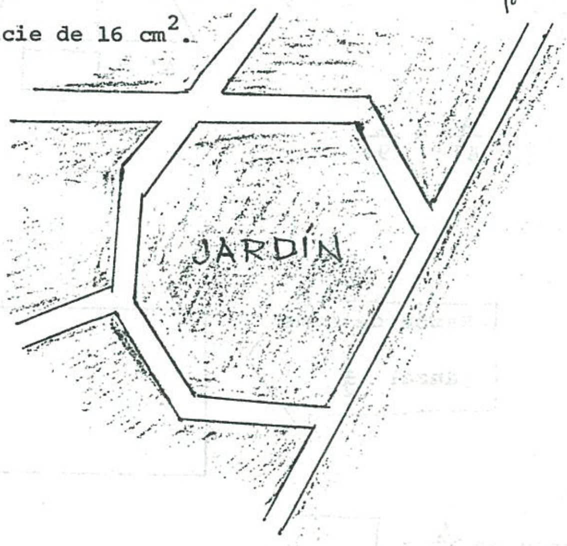
f)



A' = $\boxed{7.8}$ cm²

A = $\boxed{}$

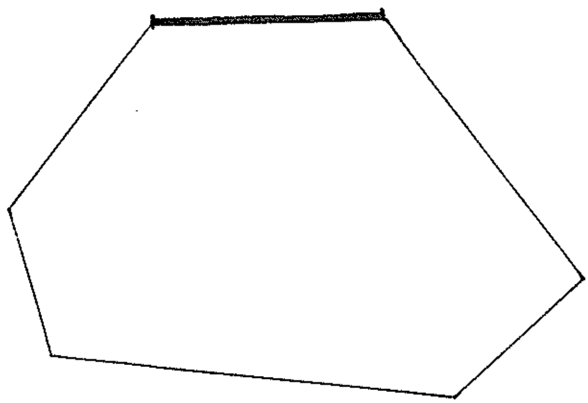
g) En el plano que se ilustra abajo (dibujo) el jardín ocupa una superficie de 16 cm^2.



Escala: $\frac{1}{1\,000}$

El área que ocupa realmente ese jardín es de $\boxed{}$ metros cuadrados.

h) El mapa dibujado a continuación corresponde a un terreno.

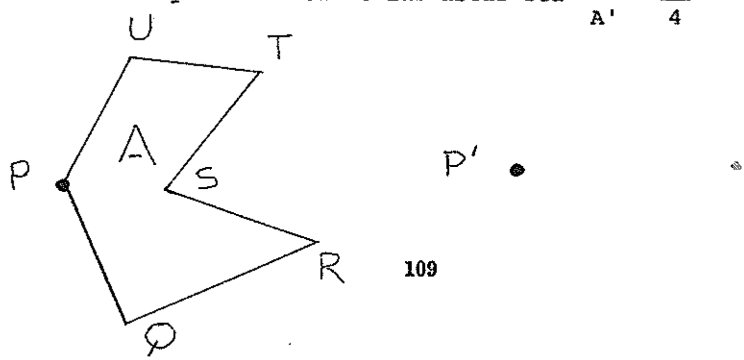


Escala: $\dfrac{1}{\boxed{}}$

El segmento marcado en rojo, representa 900 metros.

Si el área de la figura dibujada es 40 cm^2, entonces el área del terreno en la realidad es $\boxed{}$ metros cuadrados.

Problema. Construya usted un polígono semejante al que se da, de tal modo que la razón de las áreas sea $\dfrac{A}{A'} = \dfrac{1}{4}$



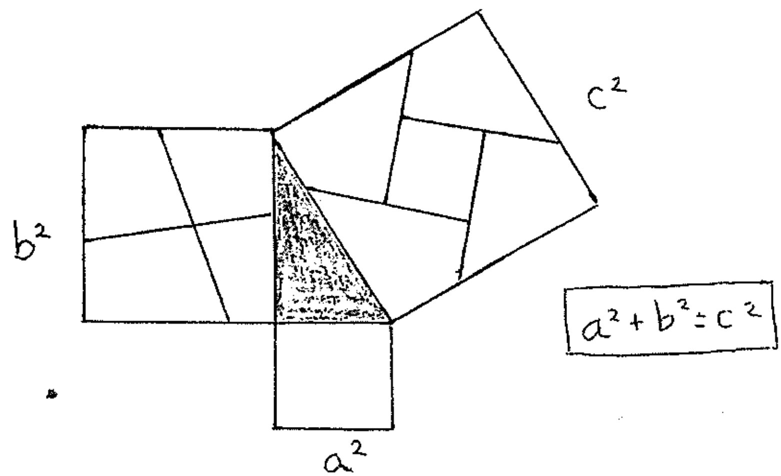
IV. EL TEOREMA DE PITAGORAS

1. El teorema de Pitágoras

En el estudio de semejanza y congruencia que estamos realizando en este capítulo utilizaremos con mucha frecuencia el teorema de Pitagoras. Este teorema fue visto ya en el curso anterior. Lo enunciamos de la siguiente manera:

> En todo triángulo rectángulo, el cuadrado construido sobre la hipotenusa tiene un área que es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos.

Seguramente usted recuerda que en aquella ocasión, para convencernos de la validez de dicho teorema, realizamos algunas actividades de recorte y pegado.



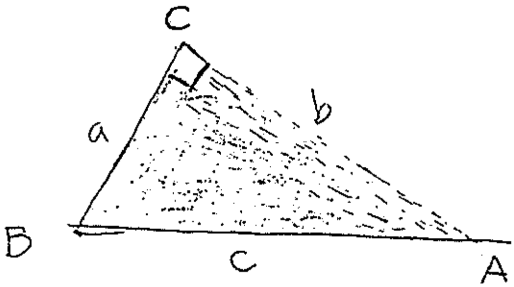
Sin embargo, hasta ahora no hemos hecho ninguna demostración al respecto. Podríamos ahora hacer tal demostración utilizando nuestros conocimientos sobre semejanza.

Empezaremos primero por demostrar lo siguiente:

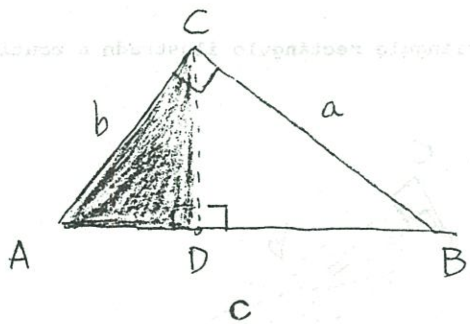
"En todo triángulo rectángulo, la altura que va de la hipotenusa al vértice del ángulo recto determina dos triángulos que son semejantes al triángulo dado y semejantes entre sí".

Demostración.

Consideremos el triángulo rectángulo ilustrado a continuación.



Tracemos la altura que parte del vértice del ángulo recto y señalemos con rojo y azul, respectivamente, los dos triángulos que se forman.



El $\triangle$ ADC (rojo) y el $\triangle$ ABC (inicial) son semejantes, pues los dos son triángulos rectángulos y tienen en común el ángulo A.

El $\triangle$ DEC (azul) y el $\triangle$ ABC (inicial) son semejantes, pues los dos son triángulos rectángulos y tienen en común el ángulo B.

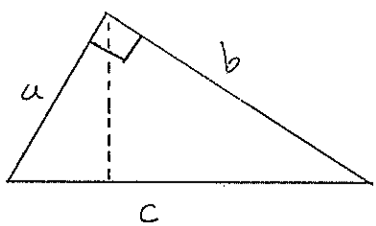
Como el $\triangle$ ADC es semejante al $\triangle$ ABC, y el $\triangle$ DBC es semejante al $\triangle$ ABC, entonces concluímos que el $\triangle$ ADC es semejante al $\triangle$ DBC.

Con esto queda demostrada nuestra afirmación.

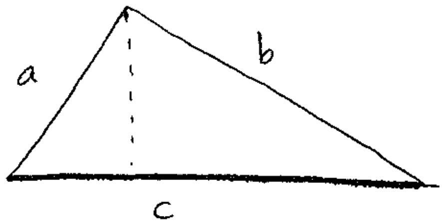
Ahora demostraremos el teorema de Pitágoras, usando nuestros conocimientos sobre semejanza y la afirmación que acabamos de demostrar.

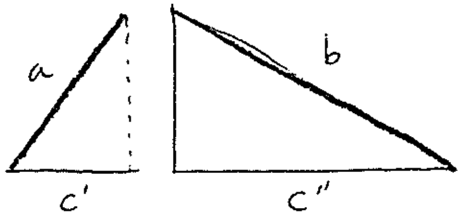
Demostración.

Consideremos un triángulo rectángulo cualquiera ABC y tracemos la altura desde el vértice del ángulo recto.



Ya sabemos que los triángulos que se forman son semejantes entre sí. Para mayor claridad, dibujamos estos triángulos por separado e indicamos con un mismo color los lados correspondientes.





Como los triángulos son semejantes, sus lados respectivos son proporcionales. Por lo tanto, tenemos que

$$\frac{c}{a} = \frac{a}{c'} \qquad \text{y} \qquad \frac{c}{b} = \frac{b}{c''}$$

De estas dos expresiones podemos obtener las siguientes:

$$a^2 = c\,c'$$

$$b^2 = c\,c''$$

Si ahora sumamos a^2 más b^2, tendremos que

$$a^2 + b^2 = c\,c' + c\,c''$$

$$a^2 + b^2 = c\,(c' + c'')$$

Como $c' + c'' = c$ (ver la figura), entonces,

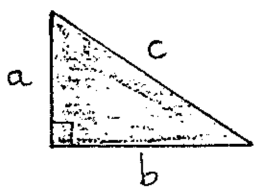
$$a^2 + b^2 = c\,c$$

O sea,

$$\boxed{a^2 + b^2 = c^2}$$

Ejercicio 8. Analice cada problema y resuélvalo aplicando el teorema que acabamos de demostrar. (La ilustración no da las medidas reales.)

a) ¿Cuánto mide la hipotenusa en el siguiente triángulo?



a = 12 m

b = 16 m

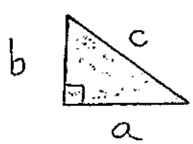
c = $\boxed{}$

b) ¿Cuánto mide el cateto $\underline{b}$ en el siguiente triángulo?

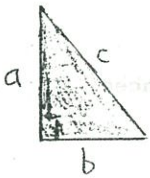
c = 17 m

a = 15 m

b = $\boxed{}$



c) ¿Cuánto mide el cateto $\underline{a}$ en el siguiente triángulo?

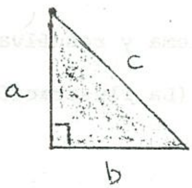


c = 20 m

b = 18 m

a = $\boxed{\quad\quad}$

d) ¿Cuál es la medida $\underline{c}$ en el siguiente triángulo rectángulo?

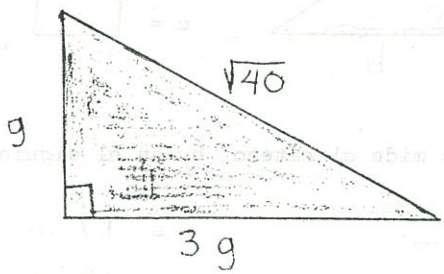


a = 7 m

b = 7 m

c = $\boxed{\quad\quad}$

e) ¿Cuál es el valor de $\underline{y}$ en el siguiente triángulo rectángulo?



Una aplicación del teorema de Pitágoras

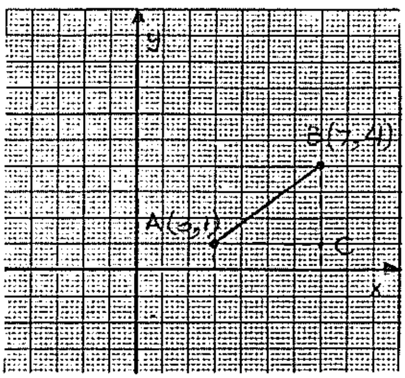
Con el teorema de Pitágoras se pueden atacar y resolver una gran diversidad de problemas que surgen a medida que se avanza en el estudio de la Geometría.

A continuación vamos a utilizar dicho teorema, (además de otros conocimientos que hemos adquirido con anterioridad) para resolver el siguiente problema:

Problema. En un plano cartesiano se tienen dos puntos A y B tales que $A = (3, 1)$ y $B = (7, 4)$: Utilizando sus coordenadas calcúlese la distancia entre esos dos puntos.

Resolución.

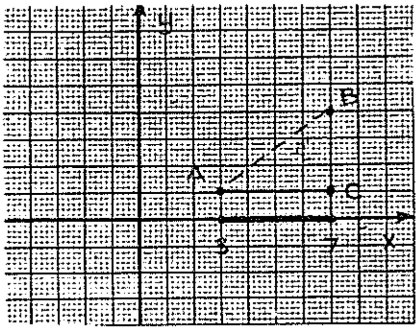
Para ayudarnos a resolver el problema vamos a usar la siguiente ilustración.



Como se observa en esta ilustración, los puntos A, B y C determinan un triángulo rectángulo del cual nos interesa conocer la medida del segmento $\overline{AB}$. (Recuerde usted que la distancia entre dos puntos es la medida del segmento que los une.)

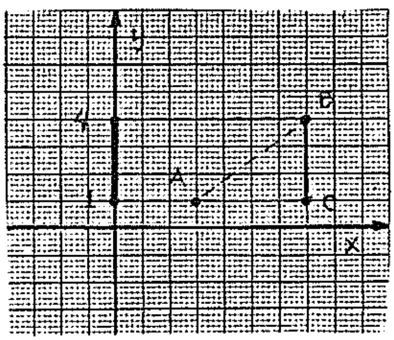
Como $\overline{AB}$ es la hipotenusa del triángulo, podemos encontrar su medida conociendo las medidas de los catetos.

El cateto $\overline{AC}$ mide $\square$



(Obsérvese que la medida AC puede calcularse restando $\square$ - $\square$, que son las abscisas de A y B.)

El cateto $\overline{BC}$ mide $\square$



(Obsérvese que esta medida puede calcularse restando $\boxed{}$ $-\boxed{}$, que son las ordenadas de A y B.)

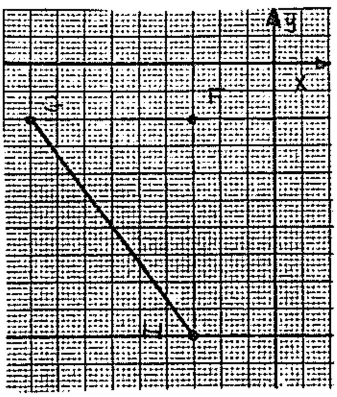
Aplicando el teorema de Pitágoras tenemos que

$$AB = \sqrt{(AC)^2 + (BC)^2} = \sqrt{4^2 + 3^2}$$

$$= \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = \boxed{5}$$

Respuesta. La distancia entre A y B es de 5 unidades.

Problema. Calcúlese la distancia entre los puntos G y H, ilustrados abajo.



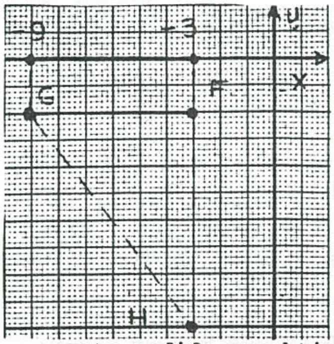
G = (-9, -2)

H = (-3, -10)

Resolución.

Conociendo las medidas de $\overline{GF}$ y $\overline{HF}$, podemos usar el teorema de Pitágoras para hallar la distancia G H.

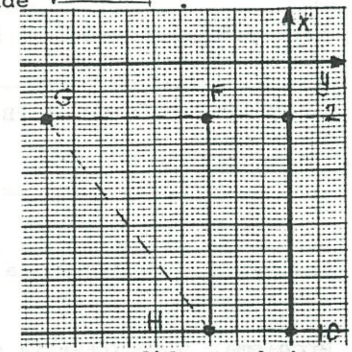
El cateto $\overline{GF}$ mide $\square$.



Esta medida se obtiene restando las abscisas de G y F:

$\square - \square = \square$

El cateto $\overline{HF}$ mide $\square$.



Esta medida se obtiene restando las ordenadas de H y F:

$\square - \square = \square$

(Como la medida de un segmento es siempre un número positivo, en caso de obtener algún número negativo en las restas anteriores, tomaremos su inverso aditivo como medida del segmento.)

Ahora calculamos la distancia GH y encontramos que

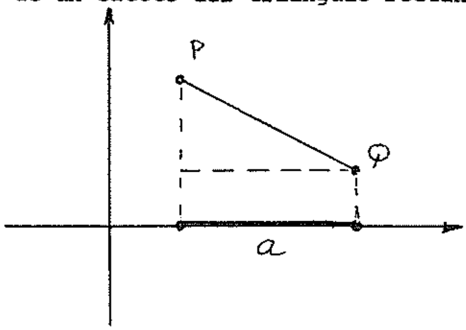
$$GH = \sqrt{(HF)^2 + (GF)^2} = \sqrt{\square^2 + \square^2}$$

$$= \sqrt{\square + \square} = \sqrt{\square} = \square$$

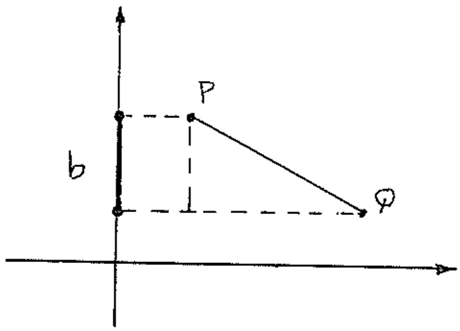
Respuesta. La distancia entre G y H es $\square$ unidades.

Según puede observarse en la resolución de los problemas anteriores, cuando se conocen las coordenadas de dos puntos P y Q, se puede calcular la distancia P Q en la siguiente forma:

1. Se restan las abscisas de P y Q. (Esto permite hallar la medida de un cateto del triángulo rectángulo cuya hipotenusa es $\overline{PQ}$.)



2. Se restan las ordenadas de P y Q. (Esto permite hallar la medida del otro cateto.)

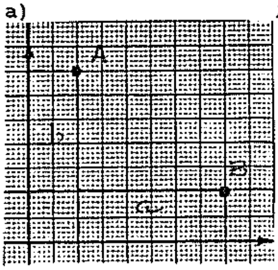


3. Se aplica el teorema de Pitágoras para hallar la distancia P Q.

$$PQ = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Ejercicio 9 . Encuentre la distancia entre cada par de puntos.

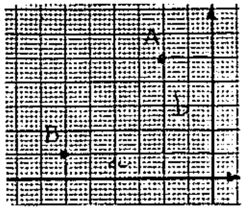
a)



A = (2, 7)

B = (8, 2)

b)



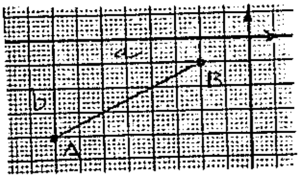
A = (-2, 5)

B = (-6, 1)

c)

A = (-8, -4)

B = (-2, -1)



a = ☐

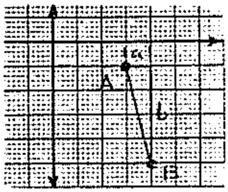
b = ☐

A B = ☐

d)

A = (3, -1)

B = (4, -5)



a = ☐

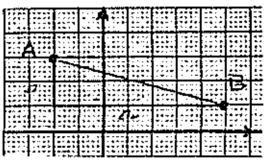
b = ☐

A B = ☐

e)

A = (-2, 3)

B = (5, 1)



a = ☐

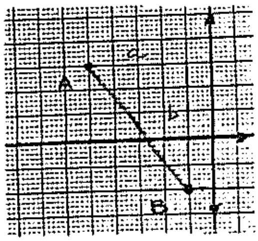
b = ☐

A B = ☐

f)

A = (-5, 3)

B = (-1, -2)



a = ☐

b = ☐

A B = ☐

Ejercicio 10. Encuentre la distancia entre los dos puntos que se mencionan en cada inciso.

a) A = (7, 12)

B = (2, 3)

A B = $\boxed{}$

b) C = (-4, 6)

D = (-9, 2)

C D = $\boxed{}$

c) E = (3, -7)

F = (1, -8)

E F = $\boxed{}$

d) G = (-10, -4)

H = (-2, -15)

G H = $\boxed{}$

e) J = (-5, 3)

K = (4, 7)

J K = $\boxed{}$

f) L = (14, 7)

M = (9, -2)

L M = $\boxed{}$

g) S = (-3, 5)

P = (6, 5)

S P = $\boxed{}$

h) Q = (-4, 7)

R = (-4, -9)

Q R = $\boxed{}$

i) T = (5, 7)

O = (0 0)

T O = $\boxed{}$

j) W = (-8, 3)

O = (0, 0)

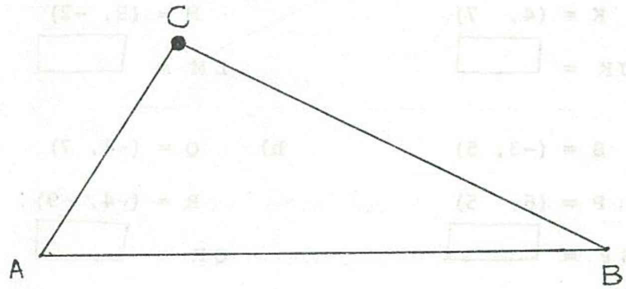
W O = $\boxed{}$

2. Triángulos isósceles

Como ya hemos dicho, el teorema de Pitágoras tiene muchas aplicaciones. En este párrafo y en el siguiente utilizaremos ese teorema para demostrar algunas propiedades de los triángulos isósceles y de los rombos.

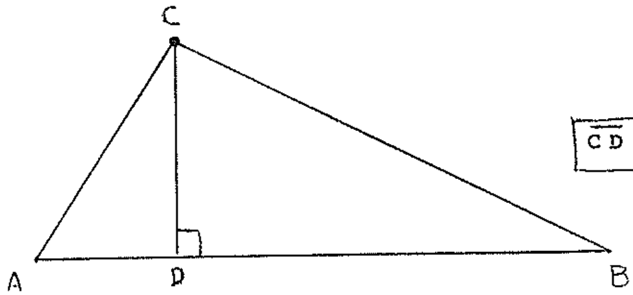
Empezaremos por definir algunos segmentos que se consideran en el estudio de los triángulos.

Consideremos un triángulo A B C y fijémonos en uno de sus vértices; por ejemplo, el vértice C.



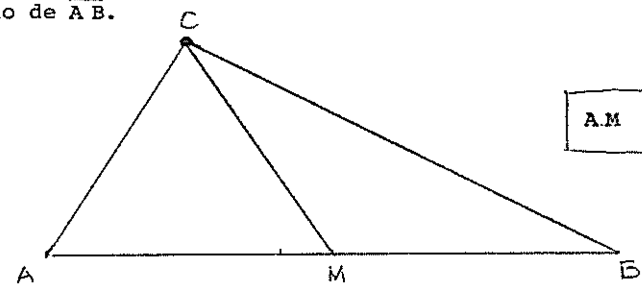
Entre los segmentos que tienen un extremo en C y el otro extremo en la recta A B mencionaremos los siguientes tres:

1. La altura. Es el segmento $\overline{CD}$ tal que $\overline{CD}$ es perpendicular a $\overline{AB}$.



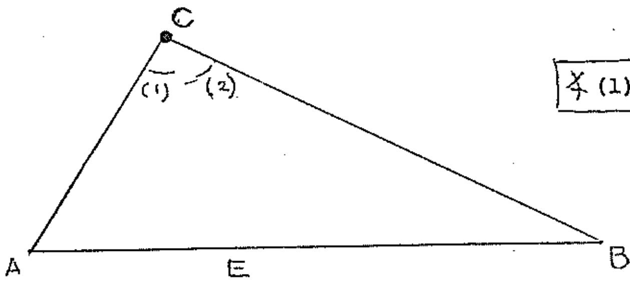
$\boxed{\overline{CD} \perp \overleftrightarrow{AB}}$

2. La mediana. Es el segmento $\overline{CM}$ tal que M es el punto me dio de $\overline{AB}$.



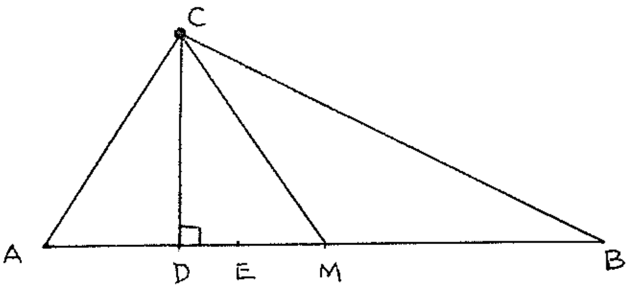
$\boxed{AM = MB}$

3. La bisectriz. Es el segmento $\overline{CE}$ tal que los ángulos (1) y (2) que determina son congruentes.

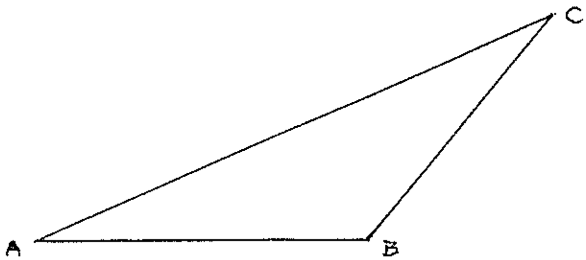


$\boxed{\measuredangle (1) = \measuredangle (2)}$

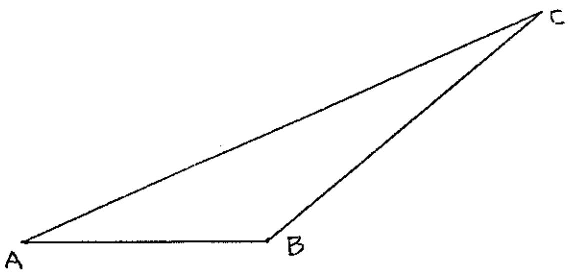
Estos segmentos son, en general, distintos entre sí.



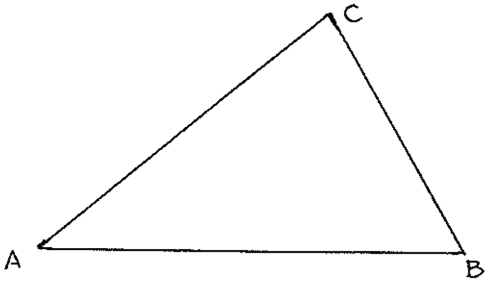
Ejercicio 11. Trace las tres alturas del siguiente triángulo.



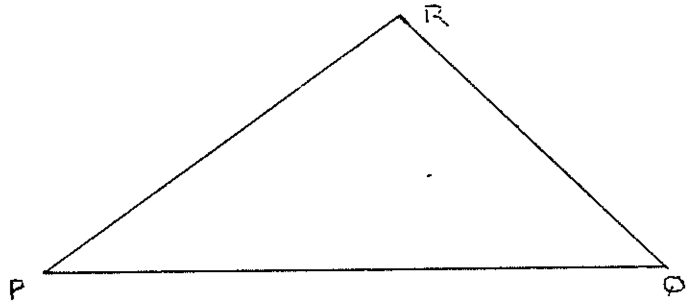
Ejercicio 12. Trace las tres medianas del siguiente triángulo.



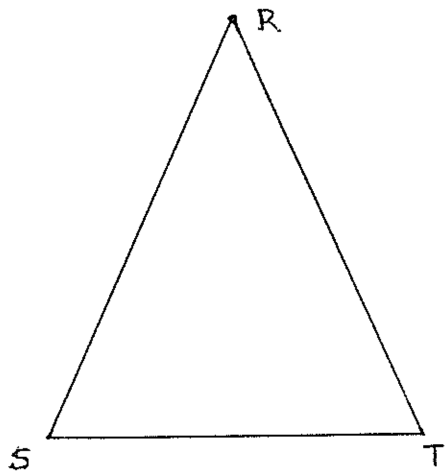
Ejercicio 13. Trace las tres bisectrices del siguiente triángulo.



Ejercicio 14. En el siguiente triángulo trace la altura, la mediana y la bisectriz que parten del punto R.



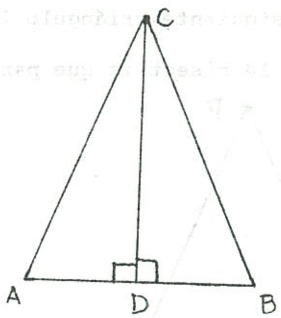
Ejercicio 15. En el siguiente triángulo isósceles trace usted la altura, la mediana y la bisectriz que parten del vértice R.



Habrá usted observado que en el triángulo R S T de este último ejercicio la altura, la mediana y la bisectriz, trazadas desde el vértice R, coinciden. Es decir, un mismo segmento es, a la vez, altura, mediana y bisectriz.

Esto que observamos en el triángulo R S T ocurre en todos los triángulos isósceles. Es decir,

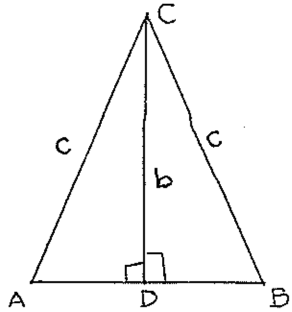
> Si A B C es un triángulo isósceles cualquiera en el que los lados congruentes son $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$, entonces en ese triángulo la altura que parte de C es también mediana y bisectriz.



Demostración.

Como $\overline{CD}$ es la altura, $\overline{CD}$ es perpendicular a $\overline{AB}$ y, por consiguiente, los triángulos A D C y B D C son triángulos rectángulos.

Las hipotenusas de esos dos triángulos miden lo mismo. Llamemos c a esa medida y llamemos b a la medida de la altura $\overline{CD}$, que es cateto de los dos triángulos.



Ahora podemos calcular la medida de los catetos $\overline{AD}$ y $\overline{DB}$:

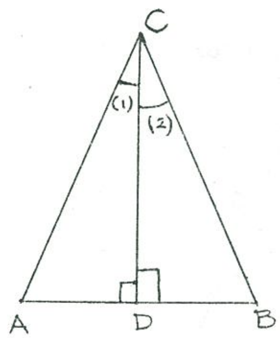
$$AD = \sqrt{c^2 - b^2}$$

$$BD = \sqrt{c^2 - b^2}$$

Como se ve, $\overline{AD}$ y $\overline{DB}$ miden lo mismo. Es decir, D es el punto medio del lado $\overline{AB}$. Por consiguiente, la altura $\overline{CD}$ es también mediana.

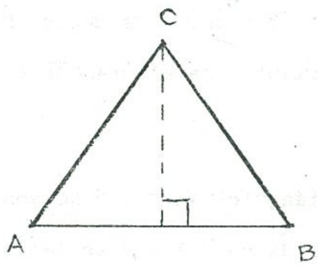
Por otra parte, los dos triángulos A D C y B D C son congruentes. (Pues, por lo que acabamos de ver, los tres lados del triángulo A D C son respectivamente congruentes a los tres lados del triángulo B D C.)

Por lo tanto, sus ángulos respectivos son congruentes. En particular, el ángulo (1) es congruente con el ángulo (2).



Esto significa que la altura $\overline{CD}$ es también bisectriz.

Ejercicio 16. El siguiente triángulo A B C es isósceles. Calcule usted la medida de los lados $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$.



$\boxed{\overline{AC} \cong \overline{BC}}$

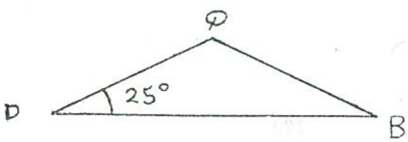
Altura: 35 mm

Base: 50 mm

AC = ☐

BC = ☐

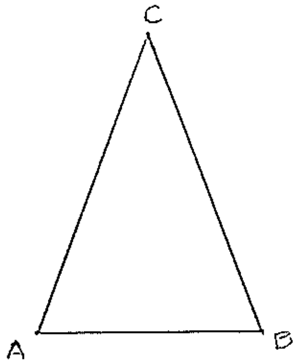
Ejercicio 17. El siguiente es un triángulo isósceles cuyos lados congruentes son $\overline{PQ}$ y $\overline{RQ}$. Calcule la medida de cada uno de sus ángulos.



∢ P R Q = ☐

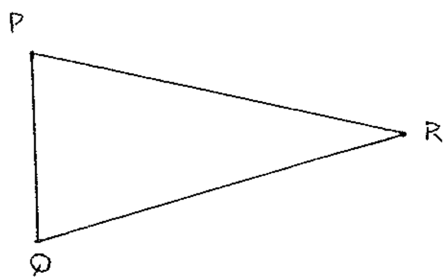
∢ P Q R = ☐

Ejercicio 18. Usando solamente una regla graduada, trácese la altura que parte de C en el siguiente triángulo isósceles.



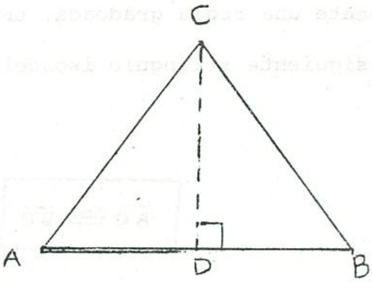
$\overline{AC} \cong \overline{BC}$

Ejercicio 19. Trace usted la altura que parte de R en el siguiente triángulo isósceles. (Emplee solamente regla graduada.)



$\overline{PR} \cong \overline{QR}$

Ejercicio 20. Con los datos que se dan, calcule usted el perímetro del siguiente triángulo isósceles.



$\overline{AC} \cong \overline{BC}$

Base: 12 cm

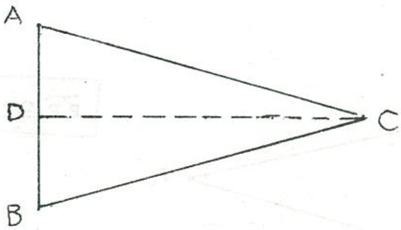
Altura: 8 cm

A C = $\boxed{}$

B C = $\boxed{}$

Perímetro = $\boxed{}$

Ejercicio 21. Con los datos que se dan, calcule el área del siguiente triángulo isósceles.



$\overline{AC} \cong \overline{BC}$

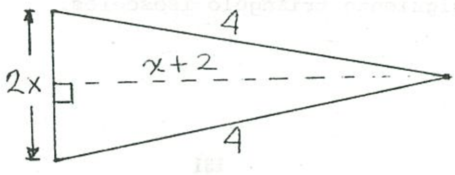
A C = 13 cm

A B = 7 cm

Altura C D = $\boxed{}$

Area = $\boxed{}$

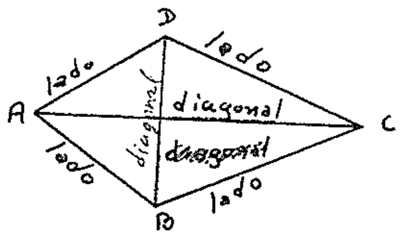
Ejercicio 22. Calcule el valor de x en el siguiente triángulo isósceles.



3. Rombos

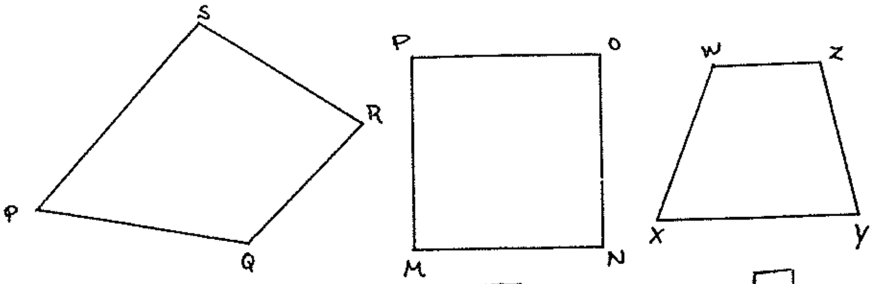
En este párrafo estudiaremos algunas propiedades de las diagonales de los paralelogramos y, en particular, de los rombos. Empezaremos hablando de las diagonales de un cuadrilátero en general.

En un cuadrilátero ABCD los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{DA}$ se llaman los lados y los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$, marcados en color, se llaman las diagonales del cuadrilátero.



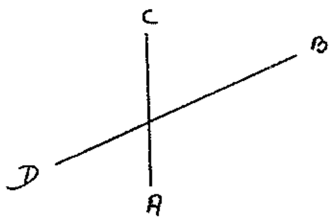
Ejercicio 23.

a) Trace las diagonales de los siguientes cuadriláteros y nómbrelas.



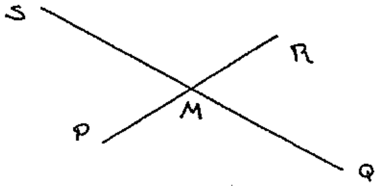
Diagonales $\overline{PR}$

b) $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ son las diagonales de un cuadrilátero. Trace sus lados y nómbrelos.



Lados: $\overline{DA}$

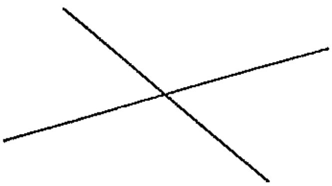
c) Los segmentos $\overline{PR}$ y $\overline{QS}$ son las diagonales de un cuadrilátero y se cortan en su punto medio. Es decir, $PM = MR$ y $QM = MS$. Trace los lados de ese cuadrilátero y, usando escuadras compruebe que es un paralelogramo. (Recuerde que un paralelogramo es un cuadrilátero cuyos lados opuestos son paralelos.)

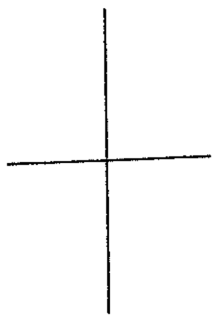


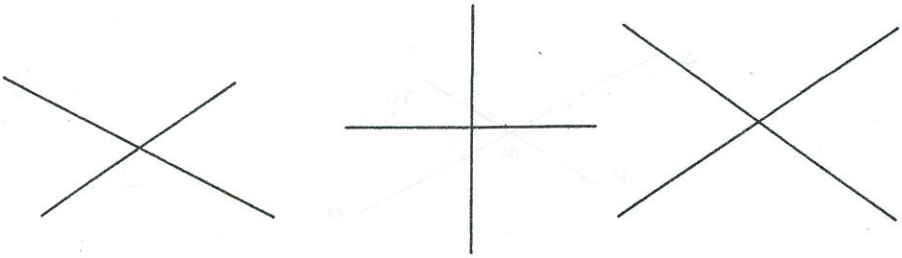
Lo que acabamos de observar en el inciso c) del ejercicio anterior, no es un hecho fortuito que solamente valga para este caso. Ese resultado es general y podemos enunciarlo en la siguiente forma:

Si las diagonales de un cuadrilátero se cortan en su punto medio entonces el cuadrilátero es un paralelogramo.

Ejercicio 24. Compruebe la validez de la afirmación anterior para los siguientes pares de diagonales. (Todas ellas se cortan en sus puntos medios.)





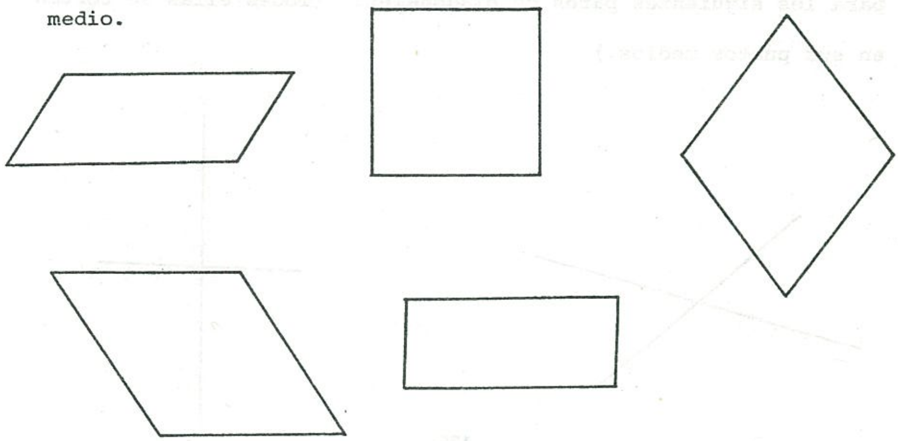


La propiedad inversa de la que acabamos de mencionar es cierta también.

Las diagonales de un paralelogramo se cortan en su punto medio.

Tampoco demostraremos esta propiedad pero podemos ver algunos ejemplos de ella.

Ejercicio 25. Los siguientes cuadriláteros son paralelogramos. Trace las diagonales y compruebe que se cortan en su punto medio.



Acabamos de mencionar dos propiedades sin demostrarlas. Ahora enunciaremos una propiedad que sí vamos a demostrar. Tal propiedad es la siguiente:

Si las diagonales de un cuadrilátero se cortan en su punto medio y, además, son perpendiculares entre sí, entonces el cuadrilátero es un rombo.

(Recordemos que se llama rombo a un cuadrilátero que tiene sus cuatro lados congruentes entre sí.)

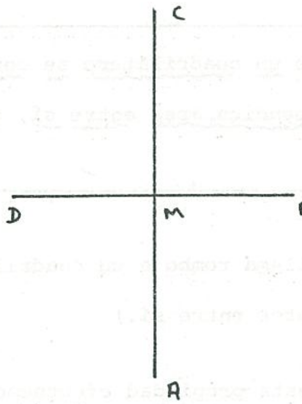
Antes de demostrar esta propiedad efectuemos los siguientes ejercicios.

Ejercicio 26.

a) Las longitudes de dos segmentos perpendiculares entre sí $\overline{PR}$ y $\overline{QS}$ son, respectivamente, 16 y 12 cm. Sabemos además que se cortan en su punto medio (haga un dibujo). ¿Cuánto mide cada uno de los lados del cuadrilátero $PQRS$? ¿Es un rombo?

b) Los segmentos $\overline{EG}$ y $\overline{FH}$ son perpendiculares entre sí y se cortan en su punto medio (haga una figura). Si $EG = 10$ mm y $FH = 26$ mm, ¿cuánto miden los lados del cuadrilátero $EFGH$?. ¿Puede encontrar EF utilizando el teorema de Pitágoras? ¿Y los demás lados?

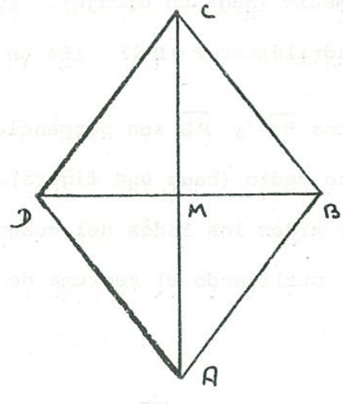
Ejercicio 27. Los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ siguientes son per-pendiculares entre sí y se cortan en su punto medio (es decir, $AM = MC$ y $BM = MD$). Trace el cuadrilátero $ABCD$ y, usando un compás compruebe que es un rombo.



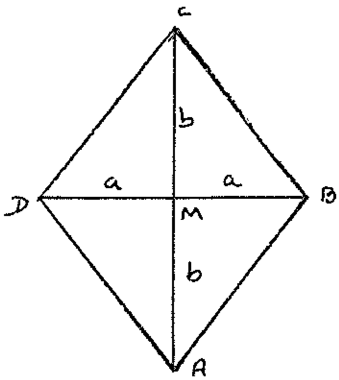
Hagamos ahora la demostración de la propiedad enunciada.

Demostración.

Puesto que las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ son perpendiculares entre sí, ellas determinan cuatro triángulos rectángulos.



Además sabemos que esas diagonales se cortan en su punto medio. Esto es, $BM = MD$ (Llamemos $\underline{a}$ a esta medida) y $AM = MC$ (Llamemos $\underline{b}$ a esta medida).



Usando el teorema de Pitágoras podemos ahora calcular la medida de las hipotenusas.

$$AB = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$BC = \sqrt{a^2 + b^2}$$

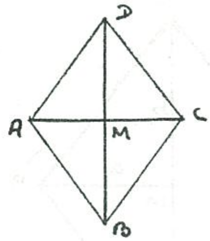
$$CD = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$DA = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Como vemos, los cuatro lados del cuadrilátero $ABCD$ miden lo mismo. Por lo tanto, ese cuadrilátero es un rombo.

Ejercicio 28. En la siguiente figura, $\overline{AC}$ es perpendicular a

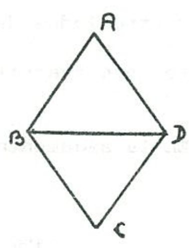
$\overline{BD}$, AM es igual a MC y BM es igual a MD. Si el perímetro del rombo $ABCD$ es 100 mm y la diagonal $\overline{AC}$ mide 30 mm, ¿cuánto mide la diagonal $\overline{BD}$? (Utilice el teorema de Pitágoras.)

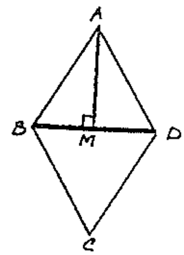
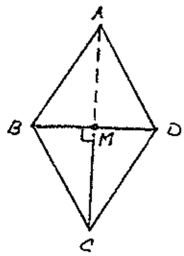
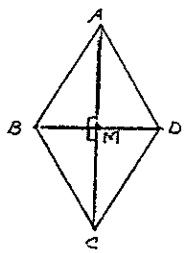


¿Será también cierta la proposición inversa de la que acabamos de demostrar? Veamos qué dice la propiedad demostrada: "Si las diagonales son perpendiculares entre sí y se cortan en su punto medio, entonces el cuadrilátero es un rombo". La proposición inversa será:

Si un cuadrilátero es rombo, entonces sus diagonales son perpendiculares entre sí y se cortan en su punto medio.

Demostración.

Consideremos un rombo cualquiera $ABCD$ y su diagonal $\overline{BD}$. Esta diagonal determina dos triángulos isósceles: el $\triangle ABD$ y el $\triangle BCD$.		$\overline{AB} \cong \overline{AD}$ $\overline{CB} \cong \overline{CD}$

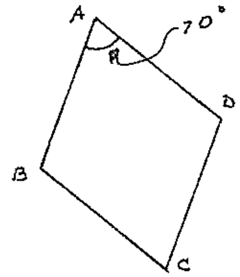
Si en el triángulo A B D trazamos la mediana $\overline{AM}$, encontramos que $\overline{AM}$ es perpendicular a $\overline{BD}$ (Porque esa mediana es también altura.).	
Si en el triángulo B C D trazamos la mediana $\overline{MC}$, ésta resulta perpendicular a $\overline{BD}$ (Porque esa mediana es también altura.).	
La unión del segmento $\overline{AM}$ y el segmento $\overline{MC}$ es un segmento y éste es la diagonal $\overline{AC}$. (Porque la suma de $\measuredangle$ B M A más $\measuredangle$ B M C es 90° + 90° = 180°.)	

En lo anterior hemos demostrado que las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ son perpendiculares entre sí y que la diagonal $\overline{AC}$ corta a $\overline{BD}$ en su punto medio M. En forma análoga se puede demostrar que M es el punto medio de $\overline{AC}$ y, por consiguiente, las dos diagonales se cortan en su punto medio. (Que es lo que se quería demostrar.)

Ejercicio 29. Los lados de un rombo miden 50 mm y una de las diagonales mide 40 mm. ¿Cuánto mide la otra diagonal?

Ejercicio 30. El perímetro de un rombo mide: 180 mm y una de las diagonales mide 70 mm. ¿Cuánto mide la otra diagonal?

Ejercicio 31. En el rombo A B C D, ∡ A = 70°. ¿Cuánto miden los demás ángulos?



Ejercicio 32. Si la diagonal de un rombo mide lo mismo que cada uno de los lados ¿cuánto mide la otra diagonal?

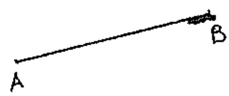
Ejercicio 33. En un rombo como el anterior ¿cuánto miden los ángulos del rombo? (Recuerde que en un triángulo equilátero, los tres ángulos son congruentes entre sí.)

4. Construcciones geométricas

Las propiedades que acabamos de demostrar acerca de los triángulos isósceles y de las diagonales de un rombo nos servirán para justificar las siguientes construcciones geométricas en las que se utiliza solamente una regla no graduada y un compás.

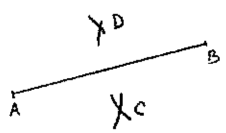
1. Encontrar el punto medio de un segmento.

Consideremos el segmento $\overline{AB}$.

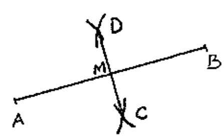


Con una abertura conveniente del compás, y apoyándolo en A, trazamos dos arcos.

Con la misma abertura del compás, y apoyándolo en B, trazamos otros dos arcos que intersequen a los anteriores.



Unimos los puntos C y D obtenidos. La intersección de $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ nos da el punto M.



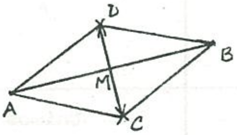
Afirmamos que

El punto M, obtenido con ese procedimiento, es el punto medio del segmento $\overline{AB}$.

Demostración. Puesto que los cuatro arcos los hemos marcado con una misma abertura del compás, resulta que

$$AD = DB = BC = CA.$$

Por lo tanto, al unir los puntos A, B, C y D, se forma un rombo.



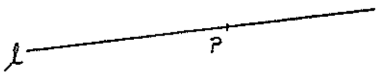
Puesto que las diagonales de un rombo se cortan en su punto medio M es el punto medio de $\overline{AB}$. (Que es lo que queríamos de-- mostrar.)

2. Trazar una perpendicular que pase por el punto medio de un segmento.

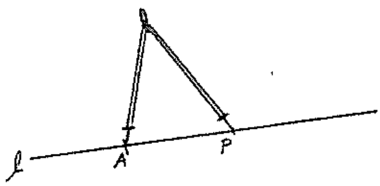
Repetimos exactamente la construcción anterior y la recta $\overleftrightarrow{CD}$ resulta perpendicular al segmento $\overline{AB}$. (Esto es así porque las diagonales de un rombo son perpendiculares entre sí.)

3. <u>Trazar una perpendicular que pase por un punto dado de una recta</u>.

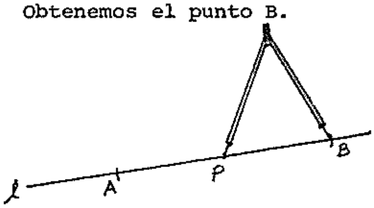
Consideremos la recta ℓ y el punto P, siguientes.



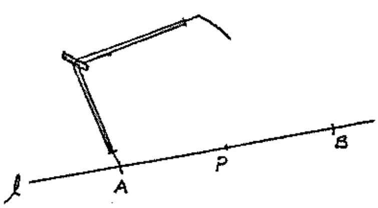
Apoyando el compás en P trazamos un arco que corte a ℓ. Obtenemos un punto A.



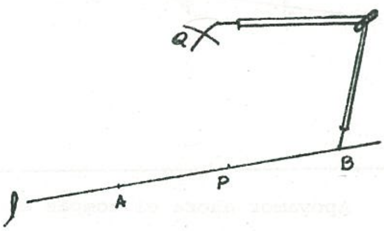
Apoyando nuevamente el compás en P, y con la misma abertura de antes, trazamos otro arco que corte a ℓ. Obtenemos el punto B.



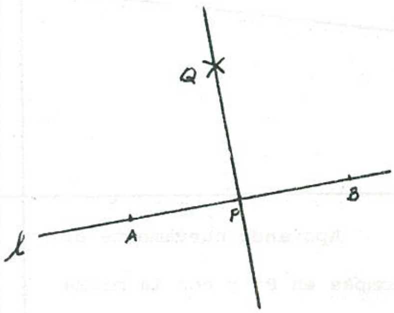
Apoyamos ahora el compás en A y, con una abertura convenien te, trazamos un arco.



Ahora apoyamos el compás en B y, con la misma abertura del paso anterior, marcamos un arco que interseque al ya trazado. Obtenemos el punto Q.



Trazamos la recta $\overleftrightarrow{PQ}$.

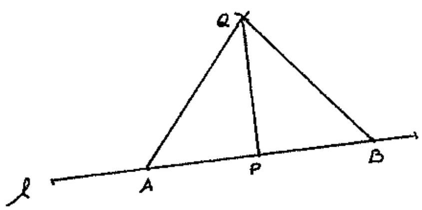


Afirmamos que

La recta $\overleftrightarrow{PQ}$ es perpendicular a ℓ en P.

Demostración. La distancia A Q es igual a la distancia B Q. (Pues en los pasos 4 y 5 hemos usado la misma abertura del compás.) Por consiguiente, el triángulo A B Q es isósceles.

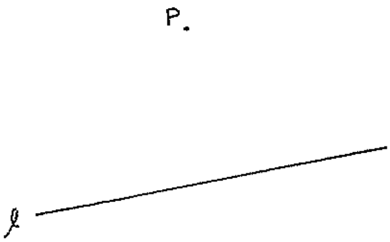
El punto P es el punto medio del lado $\overline{AB}$. (Porque en los pasos 2 y 3 hemos usado una misma abertura del compás.)



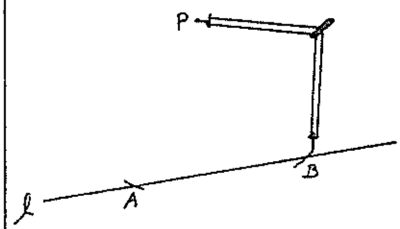
Por lo tanto, $\overline{QP}$ es la mediana. Y como en un triángulo isósceles la mediana y la altura son iguales, resulta que $\overline{QP}$ es también la altura. Es decir, la recta $\overline{PQ}$ es perpendicular a ℓ. (Que es lo que se quería demostrar.)

4. Por un punto P, que no esté en una recta ℓ, trazar una perpendicular a ℓ.

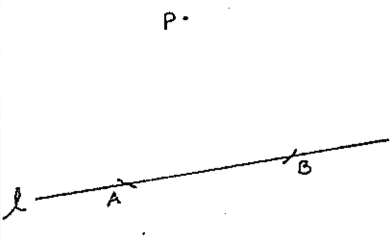
Consideremos el punto P y la recta ℓ.



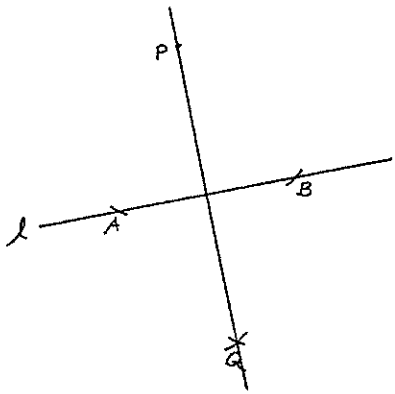
Apoyando el compás en P, y con una misma abertura, trazamos dos arcos que intersequen a ℓ. Obtenemos dos puntos A y B.



Apoyando el compás primero en A y después en B, y con la misma abertura que antes, trazamos dos arcos que se intersequen. Obtenemos el punto Q.



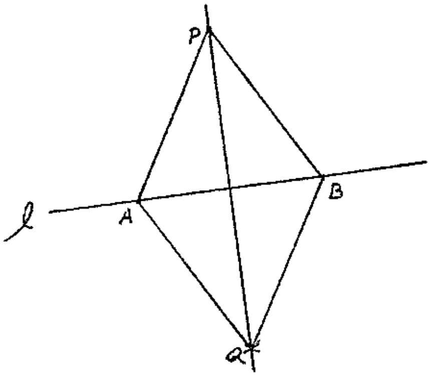
Trazamos la recta $\overleftrightarrow{PQ}$.



Afirmamos que

<u>La recta $\overleftrightarrow{PQ}$ trazada es perpendicular a l.</u>

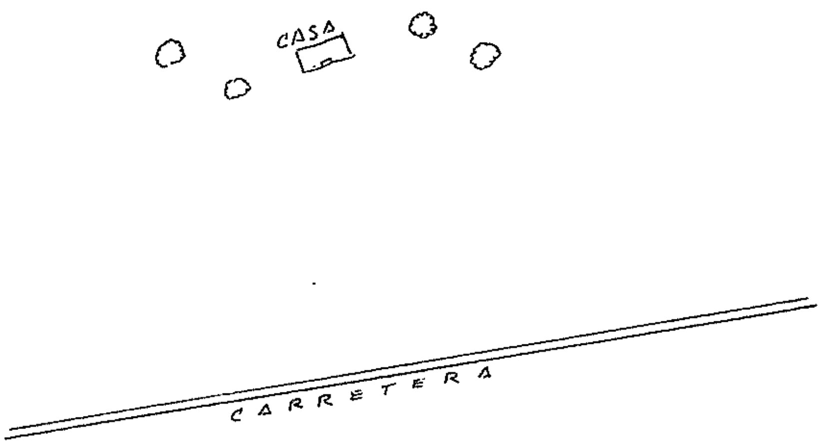
Demostración. El cuadrilátero A Q B P obtenido al trazar los segmentos $\overline{AQ}$, $\overline{QB}$, $\overline{BP}$ y $\overline{PA}$ es un rombo. (Pues en los pasos 2 y 3 hemos usado la misma abertura del compás.)



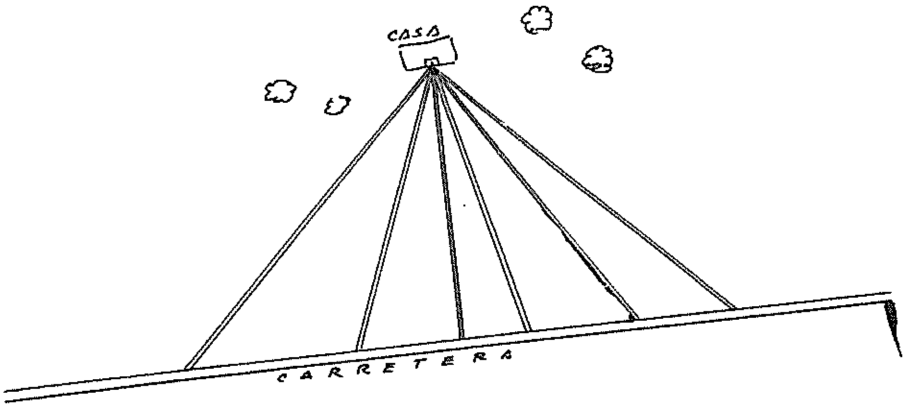
Puesto que las diagonales de un rombo son perpendiculares entre sí, $\overline{PQ}$ es perpendicular a ℓ. (Que es lo que queríamos demostrar.)

5. Distancia de un punto a una recta

Se quiere trazar un camino recto que conecte una casa con la carretera que pasa cerca de ella. Si la carretera es recta en este tramo, ¿cómo trazaría usted dicho camino de modo que fuera lo más corto posible? (Suponemos que el terreno en esta región es plano.)



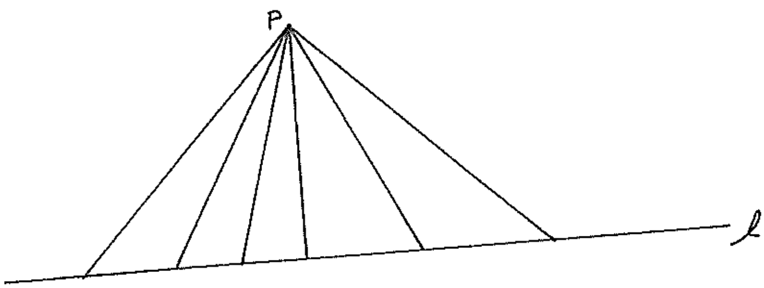
Desde luego, hay muchas posibilidades de comunicar la casa con la carretera mediante un camino recto:



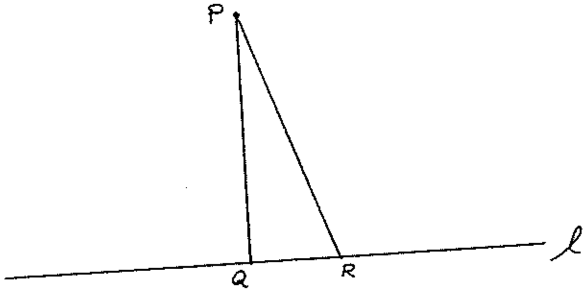
Observe que hay unos más cortos que otros. ¿Cuál será el más corto?

Para resolver este problema podemos plantearlo en la siguiente forma:

Consideremos un punto P y una recta ℓ que no contenga al punto. De todos los segmentos que tienen un extremo en P y el otro en ℓ, ¿habrá alguno que mida menos que todos los demás? ¿Cuál será este segmento?



De todos los segmentos que se puedan trazar, tomemos el segmento $\overline{PQ}$, perpendicular a ℓ y otro segmento cualquiera, por ejemplo, $\overline{PR}$. De esta manera, los puntos P, Q, R determinarán un triángulo rectángulo cuya hipotenusa será el segmento $\overline{PR}$.



Ahora bien, como en todo triángulo rectángulo la longitud de la hipotenusa es mayor que la longitud de (cualquiera de) los catetos, tenemos que

$$PR > PQ$$

Por lo tanto, podemos afirmar que

<u>El segmento más corto que va de P a la recta ℓ es el segmento perpendicular a ℓ.</u>

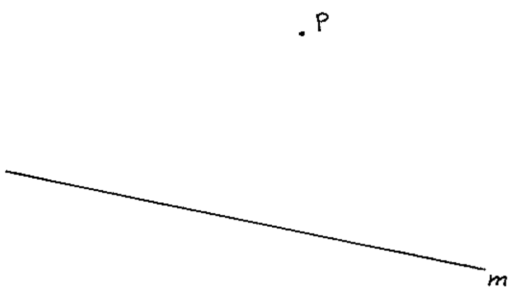
Así entonces, el camino más corto que comunicará la casa con la carretera será el camino que es perpendicular a dicha carretera.

En general.

El segmento más corto que va de un punto a una recta es el segmento perpendicular a ella.

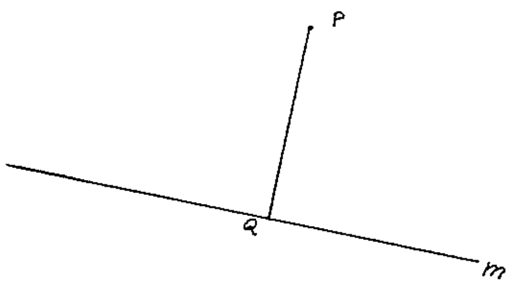
A La longitud de este segmento se le llama la distancia del punto a la recta.

Ejemplo. Tomemos el punto P y la recta m, siguientes:

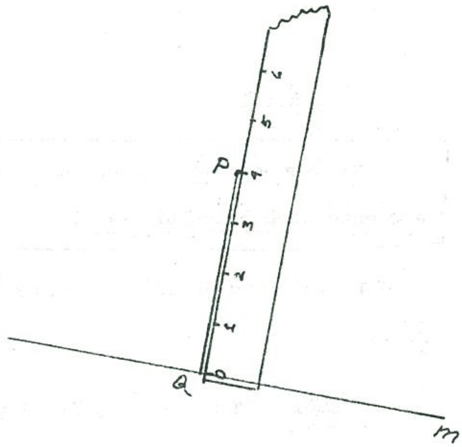


La distancia de P a m se encuentra de la siguiente manera:

1. Trazamos un segmento $\overline{PQ}$ que sea perpendicular a m.



2. Medimos el segmento $\overline{PQ}$. Su medida es la distancia del punto P a la recta m.

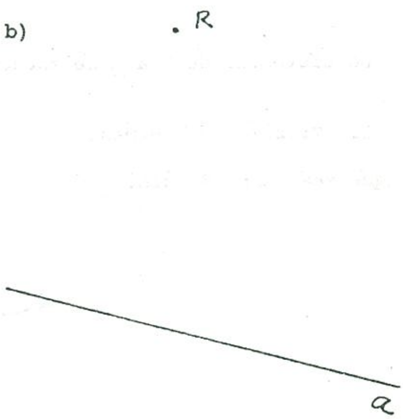


(La distancia de P a m es 4 centímetros.)

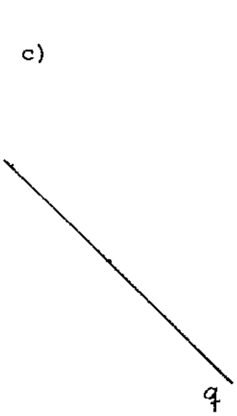
Ejercicio 34. En cada inciso, encuentre la distancia del punto a la recta.

a)

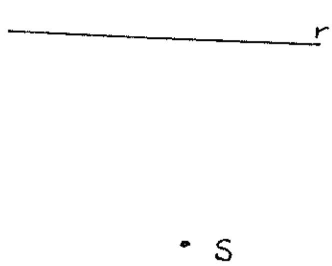
b)



c)

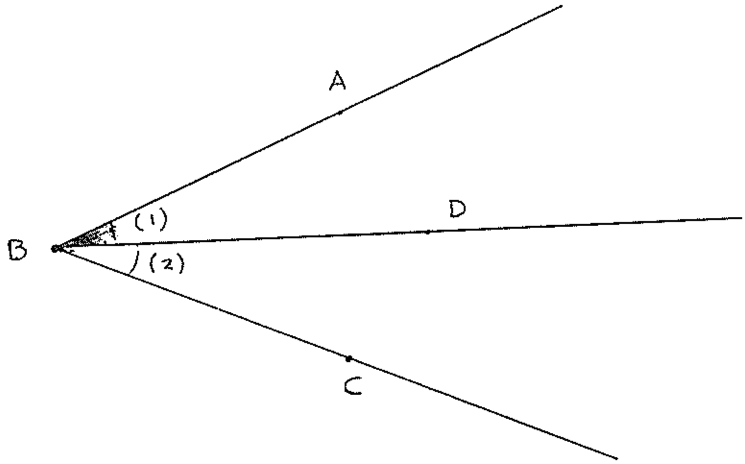


d)



6. Bisectrices

Ya en párrafos anteriores hemos hablado de las bisectrices de un triángulo. Además usted ya está familiarizado con el concepto de bisectriz de un ángulo. Observe la siguiente figura:



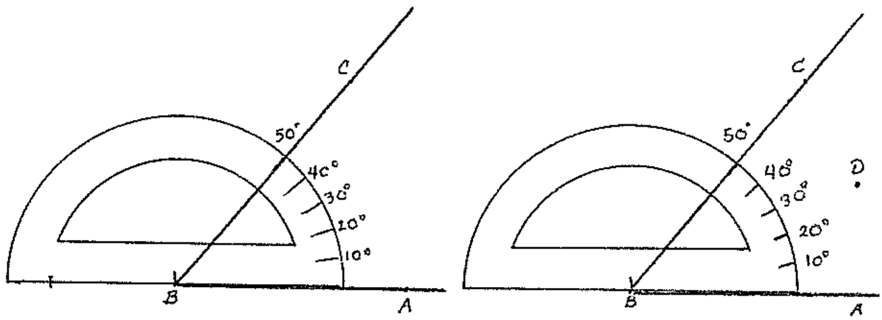
La bisectriz $\overrightarrow{BD}$ del ángulo $\angle ABC$ es la semirrecta que determina dos ángulos congruentes: el ángulo (1) y el ángulo (2). La medida de cada uno de estos ángulos es la mitad de la medida del ángulo ABC dado. Esto es,

$$\measuredangle(1) = \measuredangle(2) = \frac{1}{2}\measuredangle ABC$$

A continuación veremos algunos procedimientos para trazar la bisectriz de un ángulo.

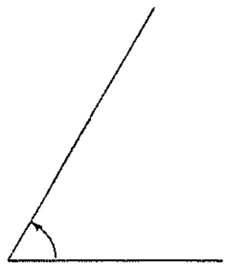
Procedimiento 1. Podemos trazar la bisectriz de un ángulo A B C usando el transportador de la siguiente manera:

Medimos el ángulo dado y después trazamos un ángulo que mida la mitad.

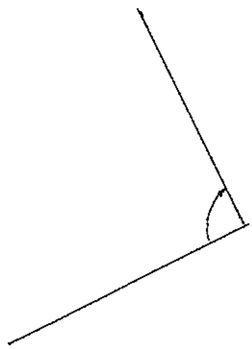


Ejercicio 35. Utilizando el transportador, trace las bisectrices de los siguientes ángulos.

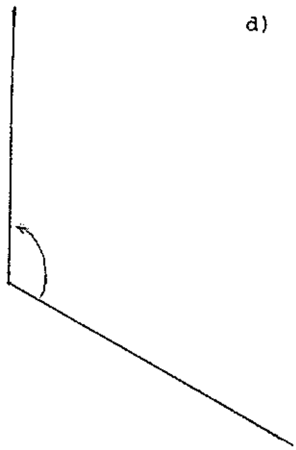
a)



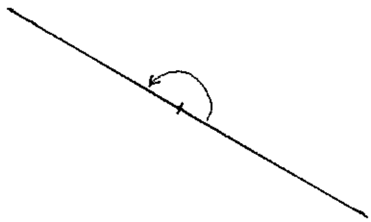
b)



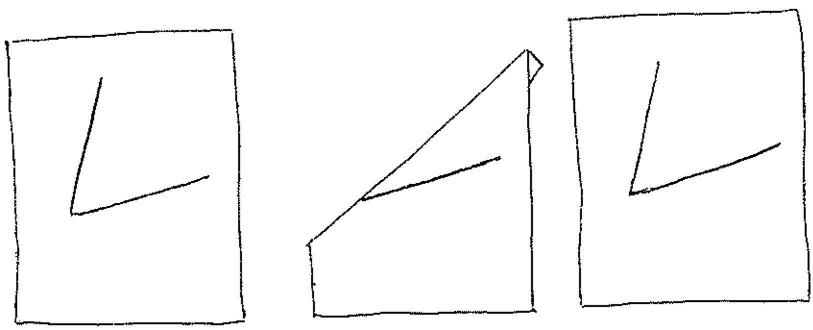
c)



d)



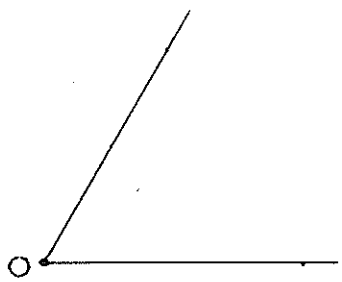
Procedimiento 2. Otro método consiste en doblar el papel de tal modo que el doblez pase por el vértice del ángulo y que, una vez doblado el papel, los dos rayos que forman el ángulo se encimen. El doblez determina la semirrecta bisectriz.



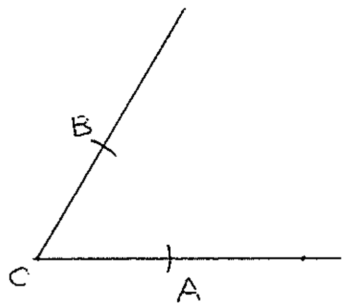
Ejercicio 36. Copie los ángulos del ejercicio anterior en un papel transparente y doblándolo encuentre las bisectrices. Compare los resultados obtenidos aquí y en el ejercicio anterior.

Procedimiento 3. También se puede trazar la bisectriz de un ángulo usando compás y regla no graduada. Este procedimiento está basado en las propiedades del rombo, que ya estudiamos antes.

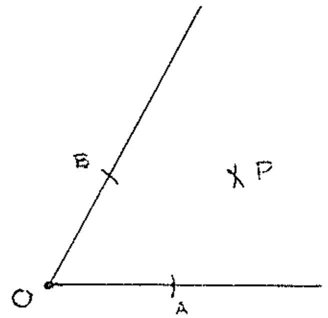
Consideremos el siguiente ángulo O.



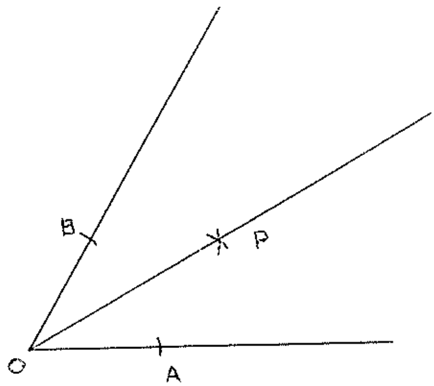
Apoyando el compás en el vértice O, trazamos dos arcos con una misma abertura. Obtenemos los puntos A y B.



Con la misma abertura usada en el paso anterior, y apoyando el compás primero en A y después en B, trazamos dos arcos que se intersequen. Obtenemos un punto P.



Trazamos la semirrecta O P.



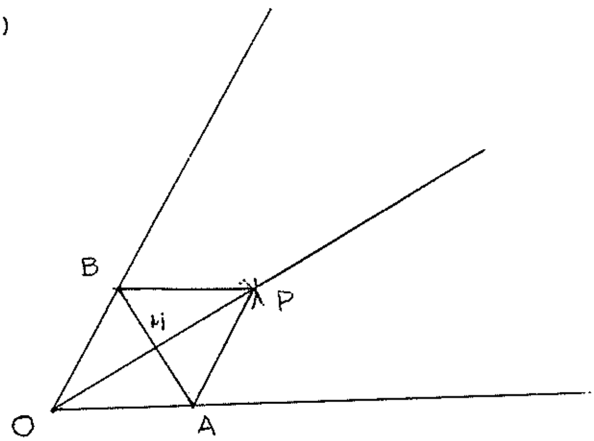
Afirmamos que:

La semirrecta $\overline{OP}$, así obtenida, es la bisectriz del ángulo $\angle AOB$.

Demostración.

Si trazamos los segmentos $\overline{AP}$ y $\overline{BP}$, obtenemos un rombo A O B P. (Porque los cuatro lados se han marcado con una misma abertura del compás.)

Si trazamos la diagonal $\overline{AB}$, tenemos entonces que $\overline{OP}$ es per pendicular a $\overline{AB}$. (Pues las diagonales de un rombo son perpendiculares entre sí.)



Si observamos ahora el triángulo $\triangle AOB$, notamos que es isósceles. (¿Por qué?)

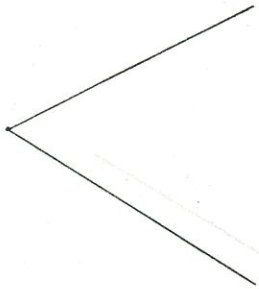
En ese triángulo, el segmento $\overline{OM}$ es altura. (Porque $\overline{OM}$ es perpendicular a $\overline{AB}$.)

Esa altura $\overline{OM}$ también es bisectriz del triángulo $\triangle AOB$. (¿Por qué?)

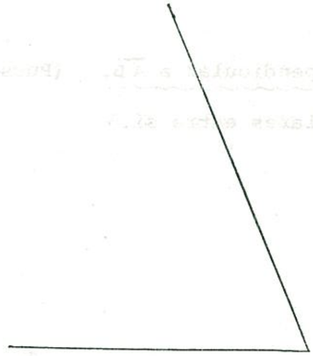
Por todo lo anterior, concluimos que $\overrightarrow{OP}$ es bisectriz del ángulo $\angle AOB$. (Que es lo que se quería demostrar.)

Ejercicio 37. Utilizando compás y regla, trace la bisectriz de cada ángulo.

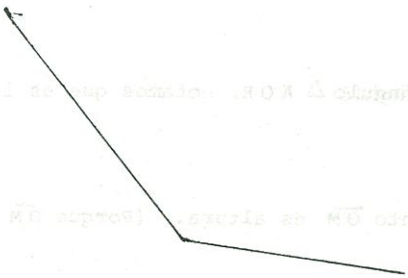
a)



b)



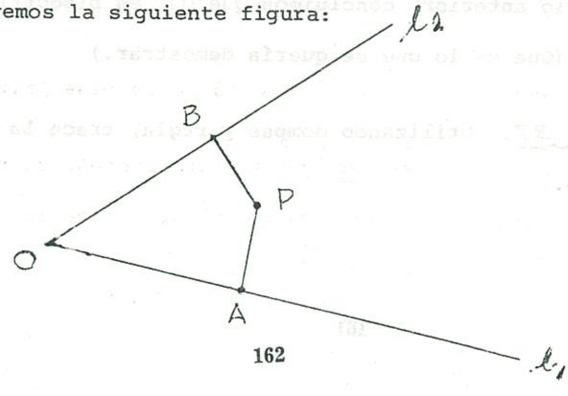
c)



d)

Veremos ahora cómo caracterizar la bisectriz de un ángulo utilizando el concepto de distancia de un punto a una recta.

Observemos la siguiente figura:



En esta figura se tiene que la distancia de P a ℓ_1 es igual que la distancia de P a ℓ_2. Es decir,

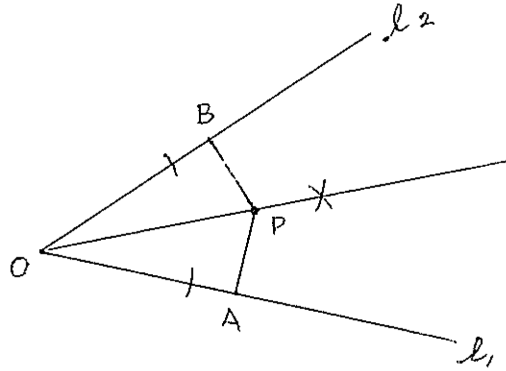
$\overline{PA}$ es perpendicular a ℓ_1

$\overline{PB}$ es perpendicular a ℓ_2

y $AP = BP$

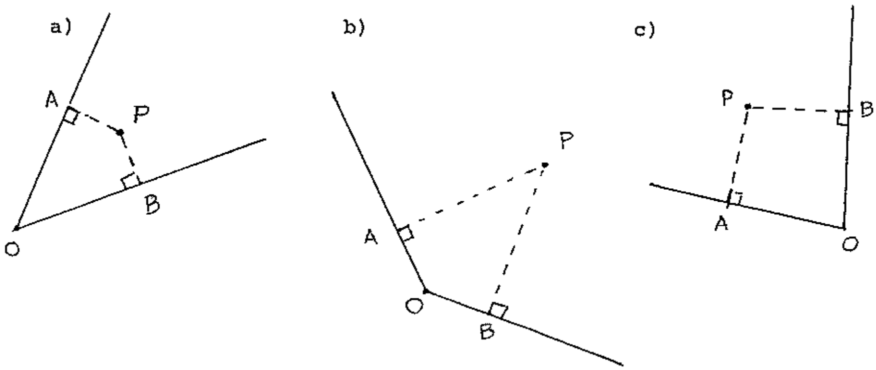
Esto se acostumbra mencionar diciendo que <u>P equidista de los dos lados del ángulo $\angle AOB$</u> ("equidista" significa "está a la misma distancia".)

Tracemos la bisectriz del ángulo



Observamos que, en este caso, P está en la bisectriz.

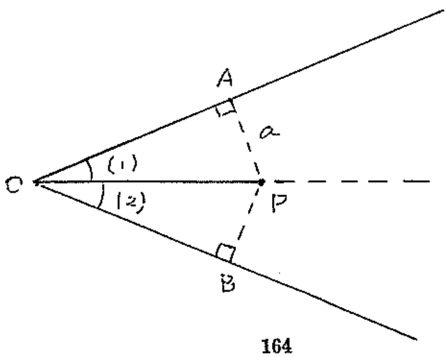
<u>Ejercicio 38</u>. En los tres incisos siguientes, el punto P equidista de los lados del ángulo respectivo. Trace la bisectriz de cada ángulo y vea si ésta pasa por P.



En todos los ejemplos anteriores hemos observado que P está en la bisectriz. Esta propiedad es cierta en general y lo demostraremos usando el teorema de Pitágoras.

> Si un punto P equidista de los lados de un ángulo, entonces P está en la bisectriz de dicho ángulo.

Demostración. Consideremos un ángulo cualquiera y un punto P que equidiste de sus lados. Tracemos el segmento $\overline{OP}$.



Con esto determinamos dos triángulos $\triangle AOP$ y $\triangle BOP$ que son triángulos rectángulos, porque $\overline{PA}$ es perpendicular a $\overline{OA}$ y $\overline{PB}$ es perpendicular a $\overline{OB}$.

En esos dos triángulos llamamos c a la medida de $\overline{OP}$ y llamamos a a la medida de $\overline{AP}$ y la medida de $\overline{BP}$.

Si calculamos la medida de los catetos $\overline{AO}$ y $\overline{BO}$, encontramos que:

$$AD = \sqrt{c^2 - a^2}$$

y

$$BO = \sqrt{c^2 - a^2}$$

Por lo tanto, los dos triángulos tienen sus tres lados respectivamente congruentes. Luego sus ángulos respectivos son también congruentes. En particular, $\measuredangle(1) = \measuredangle(2)$.

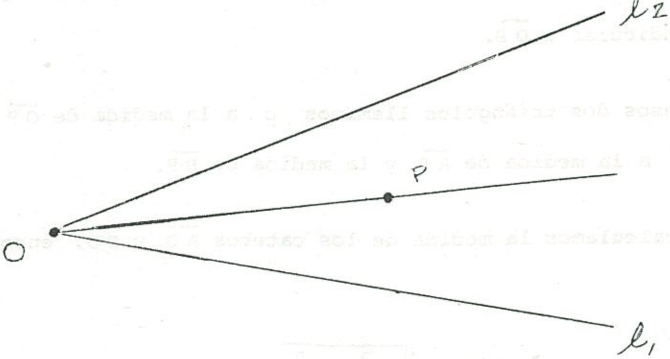
En consecuencia, $\overline{OP}$ es la bisectriz del ángulo y P está en esa bisectriz. (Que es lo que queríamos demostrar.)

También es cierto que:

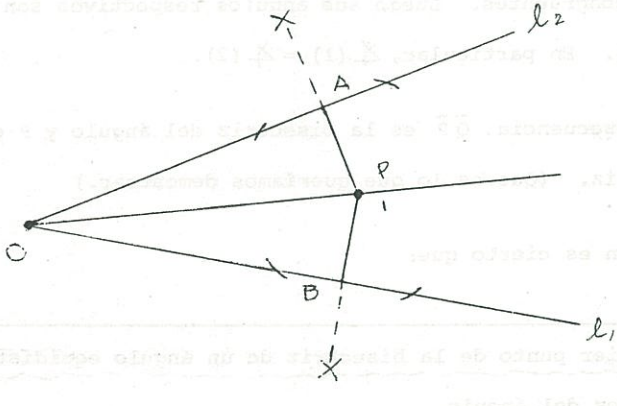
Cualquier punto de la bisectriz de un ángulo equidista de los dos lados del ángulo.

Omitiremos la demostración de esto. Simplemente lo ilustaremos en el ejemplo y en el ejercicio siguientes.

Ejemplo. Consideremos un ángulo, su bisectriz y un punto cualquiera en ella, digamos P.



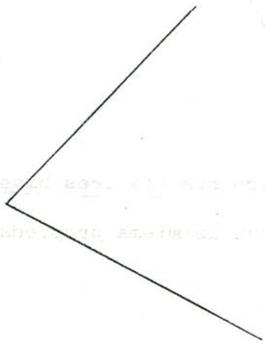
Para medir la distancia de P a ℓ_1 trazamos desde P una perpendicular a ℓ_1. Lo mismo hacemos para encontrar la distancia de P a ℓ_2.



Medimos $\overline{AP}$ con el compás y comprobamos que $\overline{BP}$ mide lo mismo. Es decir, cualquier punto P de la bisectriz equidista de los dos lados del ángulo.

Ejercicio 39. En cada inciso trace primero la bisectriz del ángulo. Tome un punto cualquiera en la bisectriz. Después encuentre la distancia de dicho punto a cada uno de los lados y compruebe que es la misma. Es decir, cualquier punto de la bisectriz equidista de los dos lados del ángulo.

a)



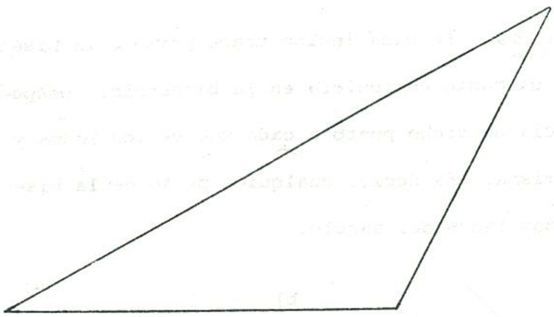
b)

Podemos enunciar las dos proposiciones anteriores diciendo:

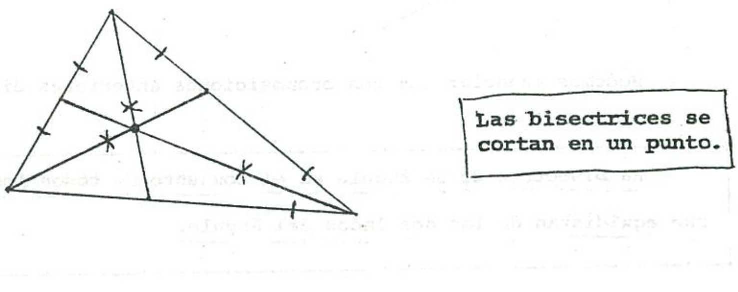
La bisectriz de un ángulo es el conjunto de todos los puntos que equidistan de los dos lados del ángulo.

Veremos ahora una propiedad de las bisectrices de un triángulo.

Ejercicio 40. Trace las tres bisectrices del siguiente triángulo.

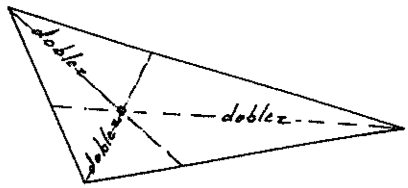


En este ejercicio habrá usted observado que las tres bisec--trices se cortan en un mismo punto. Observe la misma propiedad en otro triángulo:



¿Será cierta esta propiedad para cualquier triángulo? Podemos hacer más experimentos.

Ejercicio 41. Recorte un triángulo de papel y, doblándolo convenientemente, encuentre las tres bisectrices.



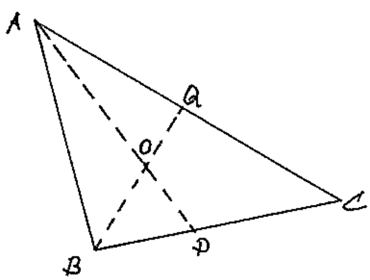
Observe que se cortan en un punto.

Este resultado es cierto para cualquier triángulo y podemos demostrarlo:

<u>Las tres bisectrices de un triángulo se intersecan en un punto.</u>

Demostración.

Consideremos el siguiente triángulo ABC y sus bisectrices $\overrightarrow{AP}$ y $\overrightarrow{BQ}$, que se cortan en un punto O.

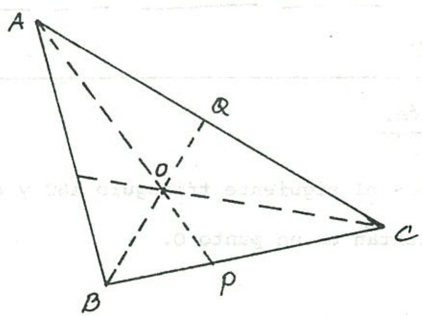


Tenemos entonces que el punto O equidista del lado $\overline{AC}$ y del lado $\overline{AB}$.

(Pues está en la bisectriz $\overrightarrow{AP}$)

El punto O también equidista del lado $\overline{BC}$ y del lado $\overline{BA}$. (Porque está en la bisectriz $\overrightarrow{BQ}$).

Si O equidista del lado $\overline{AC}$ y del lado $\overline{BC}$, entonces ese punto está en la bisectriz del ángulo C.



Por lo tanto, las tres bisectrices del triángulo se cortan en un punto O. (Que es lo que se quería demostrar.)