Publicaciones Electrónicas
Instituto Mexicano de
Ciencias y Humanidades

Matemáticas
Tercer Curso

Emilio Lluis Riera
Humberto Cárdenas
Miguel Ángel Curiel Ariza
Fidel Peralta Corona
Cuauhtémoc Tavera Guerrero
Elías Villar Quijano

www.imch.org.mx

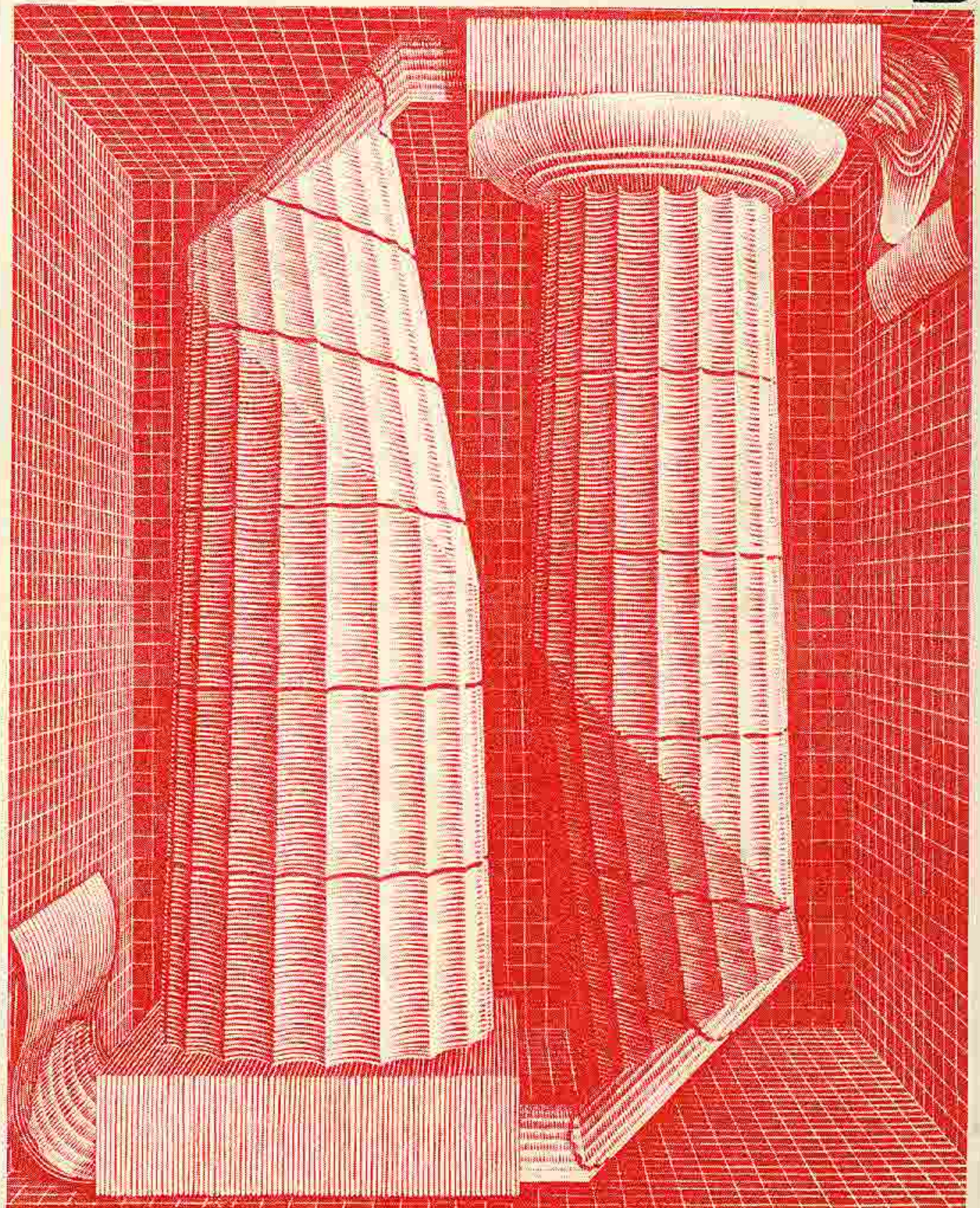
Academia de Ciencias. Vol. 7 (2019)

tercer grado

MATEMATICAS

SEP

secundaria abierta



C.E.C.S.A.

primera parte

Este libro es parte del plan de secundaria abierta, que tiene por objeto acreditar la enseñanza media a sectores de la población que no han tenido oportunidad de ir a la escuela. Se publica dentro de un convenio establecido entre la Secretaría de Educación Pública y la Cámara Nacional de la Industria Editorial, para hacer llegar libros de calidad y a precios económicos, a dichos sectores.

COMPAÑIA EDITORIAL CONTINENTAL, S. A.

MEXICO-ESPAÑA-ARGENTINA-CHILE-VENEZUELA-COLOMBIA

MIEMBRO DE LA CAMARA NACIONAL DE LA INDUSTRIA EDITORIAL
Registro Núm. 43

IMPRESO EN MEXICO PRINTED IN MEXICO

tercer grado
MATEMATICAS
primera parte

SEP CONAFE CNIE CECSA

Autores: Dr. Humberto Cárdenas Trigos
Instituto de Matemáticas, UNAM

Profr. Miguel Angel Curiel Ariza
Secretaría de Educación Pública

Dr. Emilio Lluis Riera
Instituto de Matemáticas, UNAM

Profr. Fidel Peralta Corona
Secretaría de Educación Pública

Profr. Cuauhtémoc Tavera Guerrero
Secretaría de Educación Pública

Profr. Elías V. Villar Quijano
Secretaría de Educación Pública

tercer grado

MATEMATICAS

secundaria abierta

SEP

C. E. C. S. A.

primera parte

Indice

CAPITULO QUINTO

CAPITULO QUINTO

Introducción

"El deseo de saber y de superación es innato en el corazón del hombre".

BENITO JUÁREZ

Estimado lector:

Al terminar los estudios del tercer grado de enseñanza secundaria, usted habrá culminado una etapa importante en su educación.

Por lo que respecta a las matemáticas, en este tercer libro adquirirá usted conocimientos que habrán de capacitarlo para proseguir sus estudios en otra etapa superior a la escuela secundaria, o bien, para integrarse provechosamente a la población trabajadora del país.

Por supuesto, los conocimientos y habilidades que usted logrará con el estudio de este tercer curso de matemáticas, son superiores a los del curso anterior. Entre ellos señalaremos los más importantes.

a) Conocerá usted lo que es un sistema de ecuaciones y resolverá problemas utilizando este conocimiento.

b) Aprenderá usted nuevas formas de expresar números y aumentará su habilidad para manejar esos simbolismos.

c) Conocerá usted las ecuaciones de segundo grado y desarrollará su habilidad para resolver problemas utilizando tales ecuaciones.

d) Se iniciará usted en el estudio de la probabilidad y la estadística.

e) Profundizará aún más su conocimiento de las ideas geométricas y adquirirá una mayor habilidad para aplicar su razonamiento deductivo.

Desde luego, el estudio de las ideas matemáticas contenidas en cada capítulo, no sólo proporciona conocimientos más amplios que los libros anteriores, sino que coadyuva en la formación y desarrollo de ese espíritu de crítica y esa capacidad de análisis que todos debemos poseer. (Quizá esto sea lo más importante del estudio de las matemáticas.)

Una vez que usted, amigo lector, haya dominado el contenido de este libro podrá presentar el examen correspondiente y estará en posibilidad de acreditar su tercer curso de matemáticas.

Algunas orientaciones generales para el estudio de este libro

A fin de lograr una mayor eficacia con un menor esfuerzo en el estudio de este libro, nos permitimos sugerirle a usted lo siguiente:

1. Prepare un sitio adecuado para sus estudios. Un lugar en el que se sienta cómodo y tranquilo para trabajar a gusto.
2. Elabore su propio horario de estudios de acuerdo con sus otras ocupaciones. Es conveniente estudiar entre 50 y 60 minutos diarios, por lo menos 5 días a la semana.
3. Empiece cada sesión de estudio teniendo a la mano los útiles que va a necesitar: cuaderno, lápiz, papel, goma, pinturas, etc.
4. Procure usted cumplir con el horario que se haya fijado para estudiar. El contenido de este libro podrá cubrirse aproximadamente en 150 horas de trabajo; pero esto es muy relativo, pues todo depende de las condiciones y necesidades de cada persona.

A continuación le explicamos cómo está hecho el libro y le indicamos cómo estudiar en él para obtener el máximo provecho.

Cada lección en el libro consta de una breve explicación, algunos ejemplos y varios ejercicios y problemas.

Lea cuidadosamente la explicación hasta que capte la idea que se expone. Los ejemplos ayudan a aclarar la misma idea; por eso, léalos también con mucho cuidado. Finalmente, resuelva los ejercicios.

Para una mayor comodidad en su manejo, el libro está dividido en dos tomos relativamente delgados.

Al final de cada tomo se encuentra la solución de los ejercicios correspondientes. Compare sus respuestas con las que ahí se dan. Si tuvo errores, analice por qué, repase las explicaciones y ejemplos y, por último, corrija las fallas que haya tenido en su resolución. No pase usted a la lección siguiente sin haber hecho este trabajo por completo. Esto es de vital importancia para lograr un aprendizaje firme.

En la resolución de algunos ejercicios necesitará usted obtener raíces cuadradas de números racionales. A fin de facilitarle el trabajo incluimos, al final del primer tomo, una tabla de raíces cuadradas con su correspondiente instructivo de manejo. Consúltela cada vez que lo considere necesario.

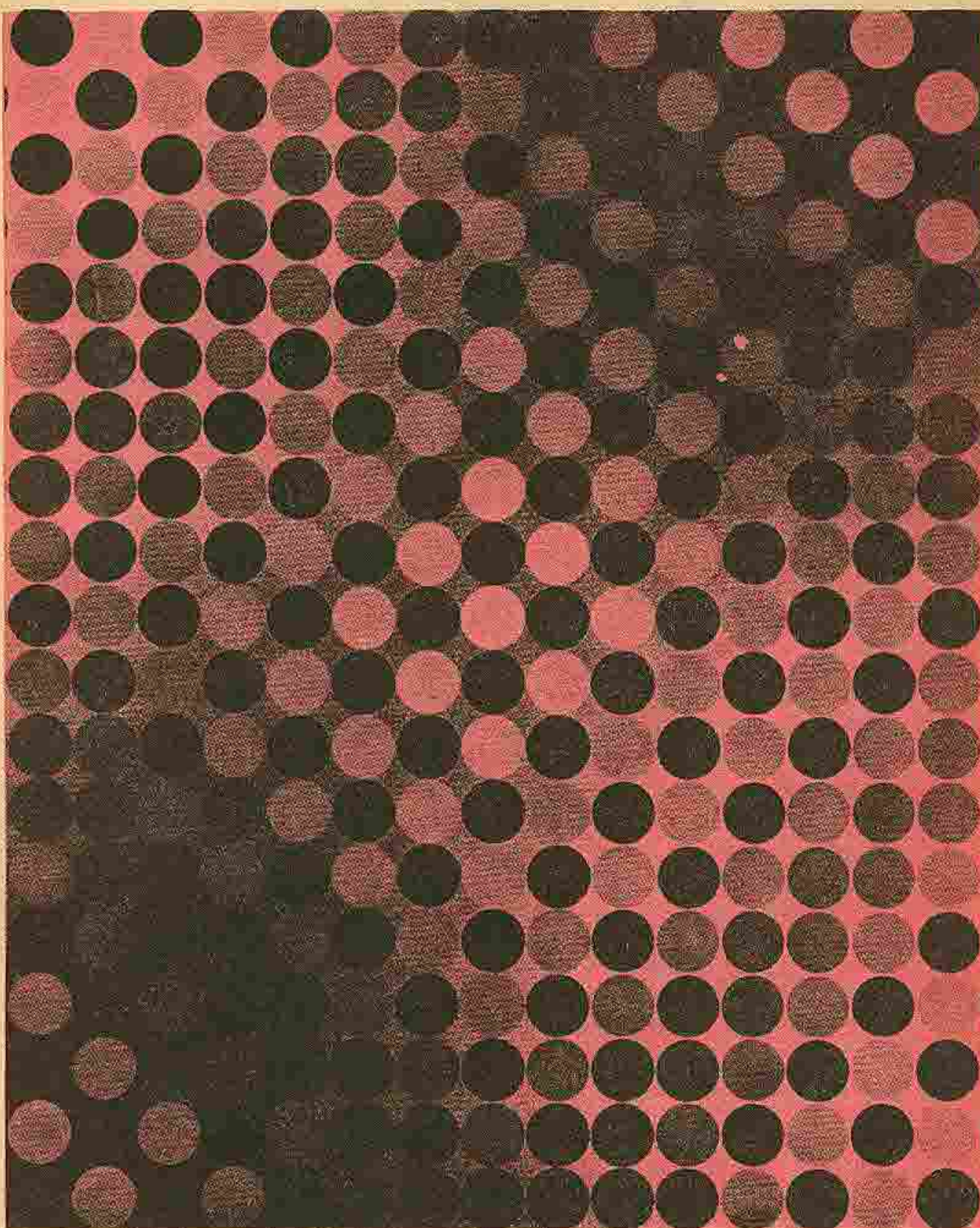
También hay que hacer notar que los capítulos de esta obra guardan cierta independencia entre sí. De manera que, si usted quiere programar su estudio siguiendo un orden distinto al que se da en el índice, puede hacerlo y eso no afectará su aprendizaje final.

El presente libro, al igual que los anteriores, es un texto y cuaderno de trabajo a la vez. Esperamos que su estudio le ayude a lograr los objetivos que usted se ha fijado.

Los autores

Capítulo primero

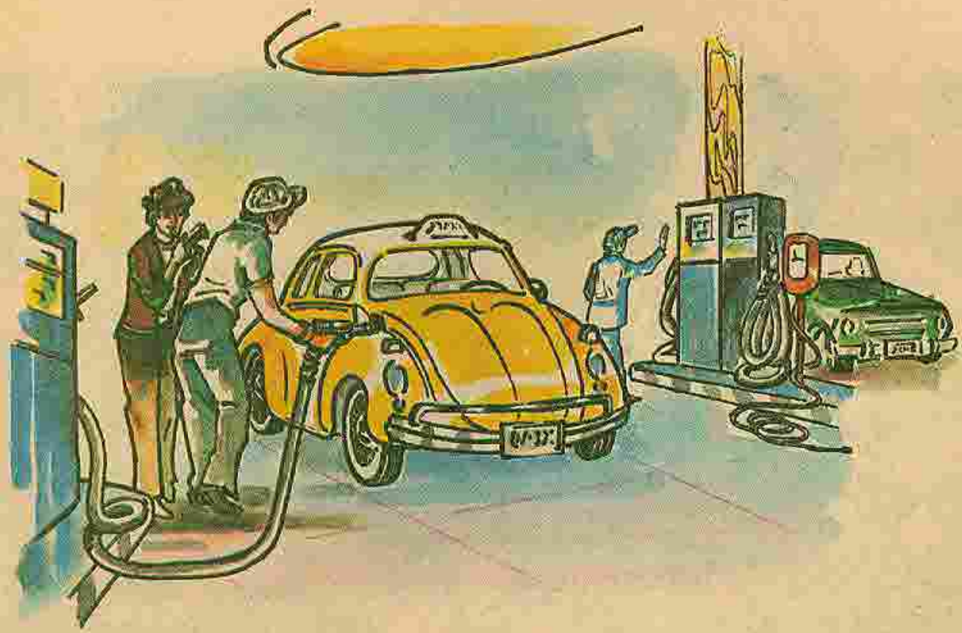
Sistemas de ecuaciones lineales



1. Ecuaciones lineales

Existe una gran diversidad de problemas cuyo planteamiento da origen a expresiones con más de una incógnita. Por ejemplo, veamos el siguiente:

Un taxista llenó el tanque de la gasolina con una mezcla de "nova" y "extra", las dos gasolinas disponibles en el expendio. Si el tanque se llenó con 9 litros, ¿cuántos litros puso de cada tipo de gasolina?



Obviamente, planteado así, este problema tiene muchas respuestas correctas. Si consideramos únicamente litros enteros podríamos dar, por ejemplo, las siguientes soluciones:

1 litro de "nova" y 8 litros de "extra" (son 9 litros).
2 litros de "nova" y 7 litros de "extra" (son 9 litros).
3 litros de "nova" y 6 litros de "extra" (son 9 litros).
4 litros de "nova" y 5 litros de "extra" (son 9 litros).
5 litros de "nova" y 4 litros de "extra" (son 9 litros).
6 litros de "nova" y 3 litros de "extra" (son 9 litros).
7 litros de "nova" y 2 litros de "extra" (son 9 litros).
8 litros de "nova" y 1 litro de "extra" (son 9 litros).

En general, podemos indicar para este problema que

x litros de "nova" más y litros de "extra" igual a 9 litros.

Esto es, en símbolos,

$$\boxed{x + y = 9}$$

Veamos ahora el siguiente problema, que es análogo al anterior.

Problema. Un químico tiene un recipiente con capacidad para 9 litros y desea llenarlo con una mezcla de ácido clorhídrico y ácido nítrico. ¿Cuántos litros de cada uno de esos ácidos puede poner en el recipiente citado?

Para plantear esa situación, el químico denominó con x el número de litros de ácido clorhídrico y con y el número de litros de ácido nítrico y describió el problema con la expresión

$$\boxed{x + y = 9}$$

Podemos observar, una vez descrito así, que el problema tiene muchísimas soluciones. Algunas de ellas están dadas por las siguientes parejas de números.

$x = 6, y = 3$ (porque $6 + 3 = 9$);

$x = 8, y = 1$ (porque $8 + 1 = 9$);

$x = 4, y = 5$ (porque $4 + 5 = 9$);

$x = 2.5, y = 6.5$ (porque $2.5 + 6.5 = 9$);

$x = \frac{1}{10}, y = 8\frac{9}{10}$ (porque $\frac{1}{10} + 8\frac{9}{10} = 9$)

Sin embargo, no cualquier par de números es solución del problema. Por ejemplo, la pareja (5, 12) no puede ser solución porque al sustituir la x por el 5 y la y por el 12, encontramos que $5 + 12$ no es igual a 9.

Tampoco puede ser, por ejemplo que $x = 2$ y $y = 4$ pues $2 + 4$ no es igual a 9.

Ejercicio 1. Indique si la pareja dada en cada inciso es o no solución del problema anterior.

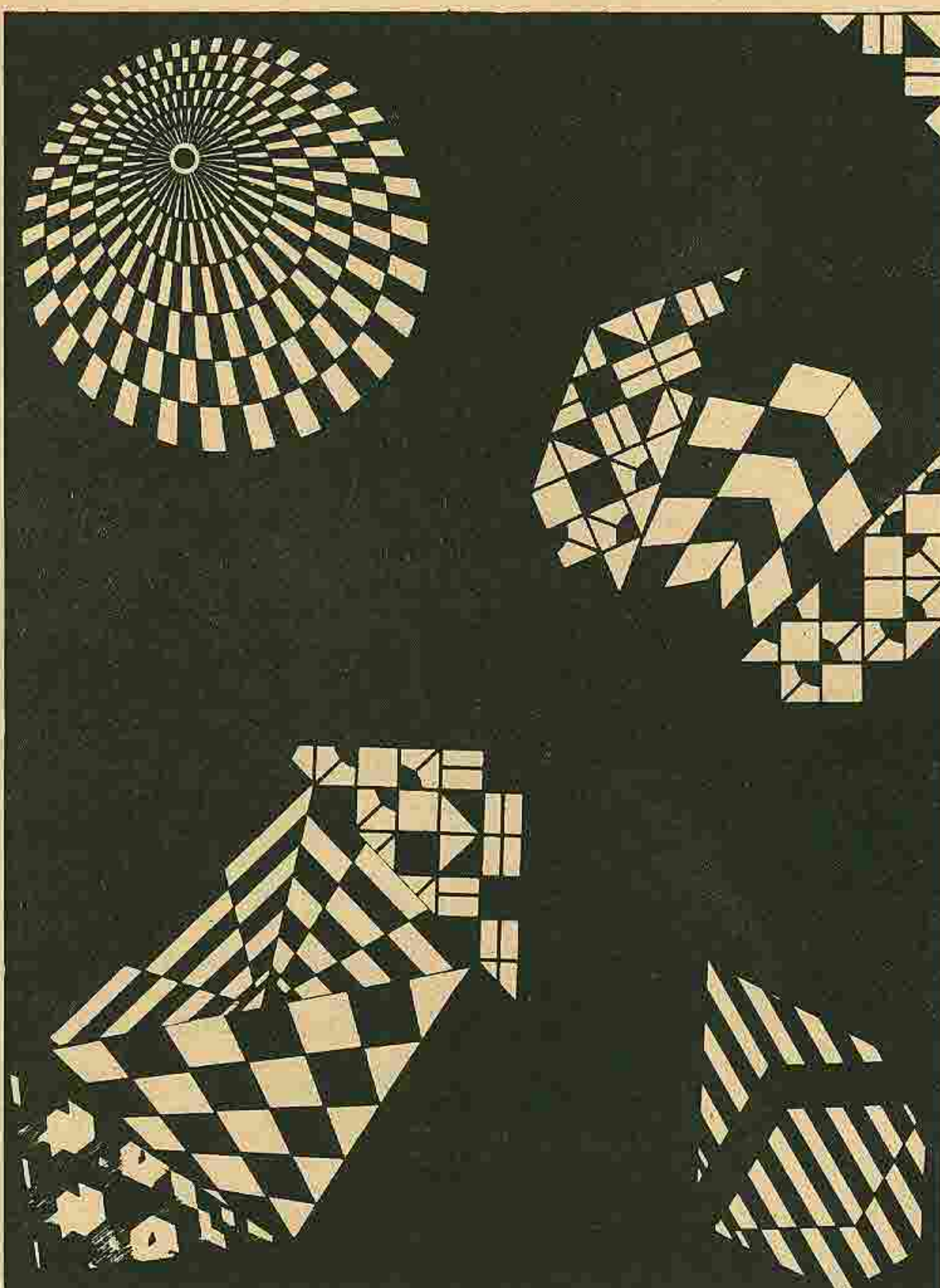
a) 2 y 7	sí	es solución porque	$2 + 7 = 9$
b) 3 y 8	no	es solución porque	$3 + 8 \neq 9$
c) 10 y 1		es solución porque	
d) .6 y 8.4		es solución porque	
e) .4 y 9		es solución porque	
f) 1 y 8		es solución porque	
g) $\frac{3}{4}$ y $8\frac{1}{4}$		es solución porque	
h) $6\frac{1}{2}$ y $2\frac{1}{2}$		es solución porque	

i) 1.45 y 7.55 es solución porque

j) 5.68 y 4.32 es solución porque

En los dos problemas anteriores hemos manejado la expresión $\boxed{x + y = 9.}$ A expresiones como esa se les da el nombre de **ecuaciones de primer grado con dos incógnitas.** O bien, **ecuaciones lineales.**

Una ecuación de este tipo tiene muchas soluciones. Y, según observamos en los problemas anteriores, cada una de esas soluciones es una pareja ordenada de números.



2. Gráfica de una ecuación lineal

Nosotros ya sabemos representar gráficamente cualquier pareja ordenada de números. Por consiguiente, podemos *mostrar gráficamente* las soluciones de una ecuación de primer grado con dos incógnitas.

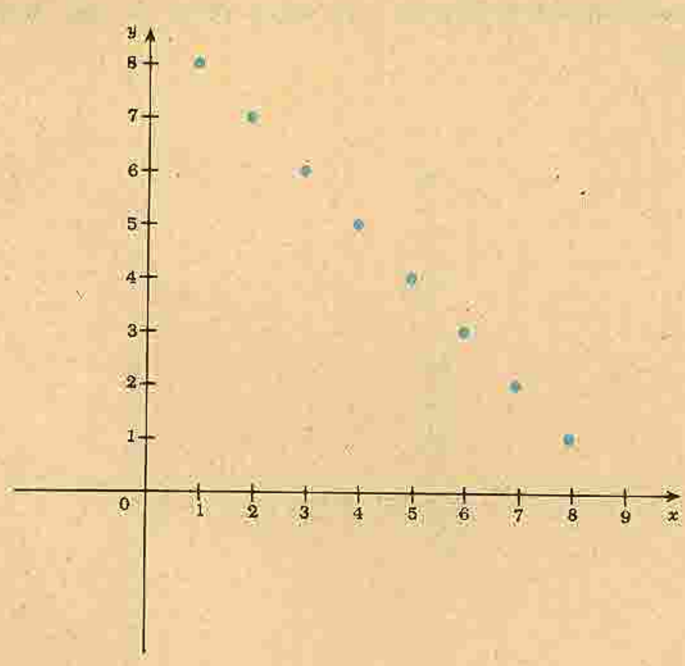
Ejemplo. Algunas soluciones en el problema del taxista fueron las parejas

$\boxed{x = 1, y = 8}$; $\boxed{x = 2, y = 7}$; $\boxed{x = 3, y = 6}$;

$\boxed{x = 4, y = 5}$; $\boxed{x = 5, y = 4}$; $\boxed{x = 6, y = 3}$;

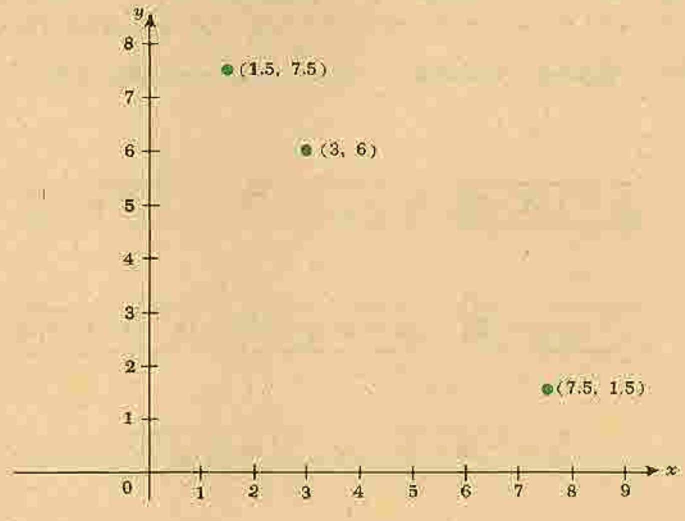
$\boxed{x = 7, y = 2}$ y $\boxed{x = 8, y = 1.}$

Si consideramos como abscisas los valores de x y como ordenadas los valores de y, podemos trazar la siguiente gráfica:

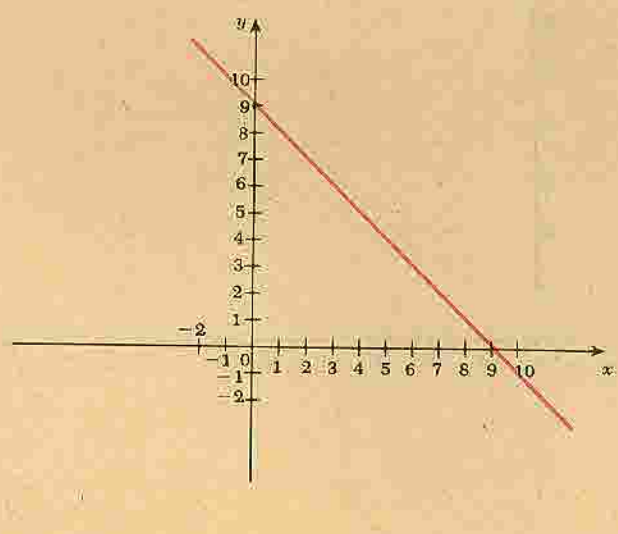


Ejercicio 2. Con una regla trace una recta que pase por dos puntos cualesquiera de la gráfica anterior. ¿Los demás puntos de la gráfica quedan en la recta o quedan fuera de ella?

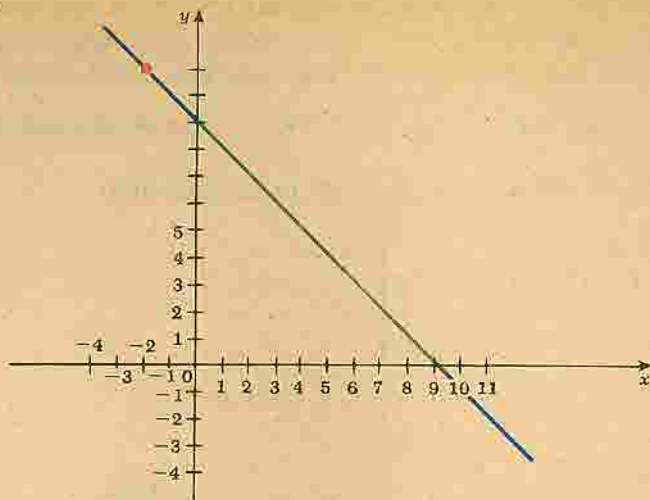
Ejemplo. En el problema del químico, si tomamos como abscisas los valores de x y como ordenadas los valores de y, podemos trazar la gráfica de algunas de las soluciones. Por ejemplo, las siguientes:



Como puede verse, la ecuación $x + y = 9$ tiene una infinidad de soluciones. Además, se puede demostrar que los puntos que representan a todas estas soluciones forman una línea recta, la que ilustramos a continuación:



Observe usted que la gráfica de las soluciones en el problema del químico no es toda la recta, sino sólo la parte que mostramos en color verde.



Esto significa que no todas las soluciones de la ecuación son soluciones del problema. Por ejemplo, consideremos el punto rojo, cuyas coordenadas son $(-2, 11)$.

Obviamente, la pareja $(-2, 11)$ es solución de la ecuación (porque $-2 + 11$ es igual a 9). Pero no es solución del problema porque no tiene sentido hablar de una mezcla con -2 litros de ácido clorhídrico.

Ejercicio 3.

a) Haciendo las sustituciones adecuadas, compruebe si las parejas dadas a continuación son soluciones de la ecuación $a + b = 5$.

$\boxed{a = 1, b = 4}$; $\boxed{a = 2.5, b = 2.5}$; $\boxed{a = 4.2, b = .8}$;

$\boxed{a = 3, b = 2}$; $\boxed{a = 1.6, b = 3.4}$

b) Tome como abscisas los valores de a y como ordenadas los valores de b y trace la gráfica de las anteriores soluciones de la ecuación $a + b = 5$.

Observe que todos estos puntos (que representan gráficamente las soluciones dadas de la ecuación $a + b = 5$) están en una línea recta. Cualquier otro punto que represente una solución de la ecuación $a + b = 5$ estará en esa misma recta. En otras palabras, todos los puntos que forman esa recta representan soluciones de esa ecuación.

Lo que hemos observado en los ejemplos y ejercicios anteriores ocurre en general:

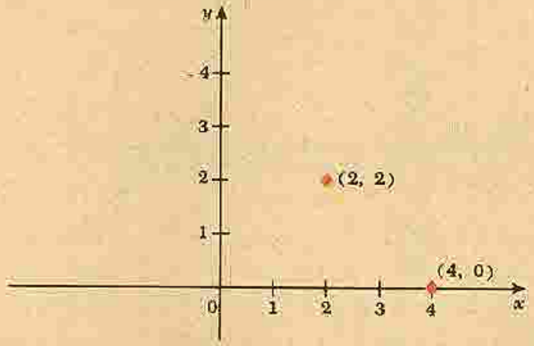
Toda ecuación de primer grado, con dos incógnitas, tiene una infinidad de soluciones.

Todos los puntos que representan soluciones de una ecuación de primer grado, con dos incógnitas, forman una línea recta. (Por eso es que a este tipo de ecuaciones también se les llama *ecuaciones lineales.*)

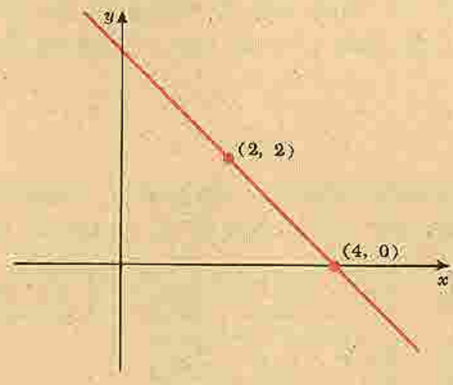
Antes hemos visto que para determinar una recta son suficientes dos puntos. Ahora aplicaremos ese conocimiento para trazar la recta que representa todas las soluciones de una ecuación lineal dada.

Ejemplo. Las parejas (2, 2) y (4, 0) son soluciones de la ecuación $x + y = 4$.

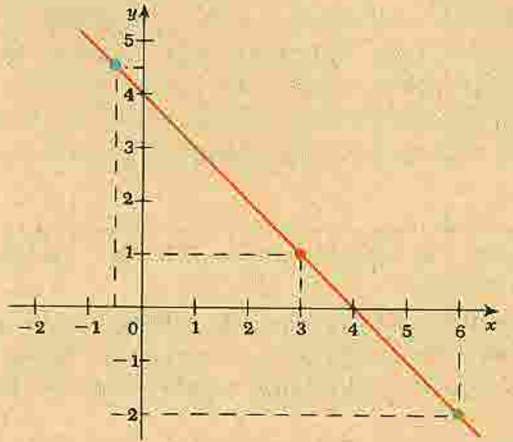
La gráfica de estas dos soluciones es la siguiente:



La gráfica de todas las soluciones de esa ecuación, $x + y = 4$, es la recta que pasa por esos dos puntos.

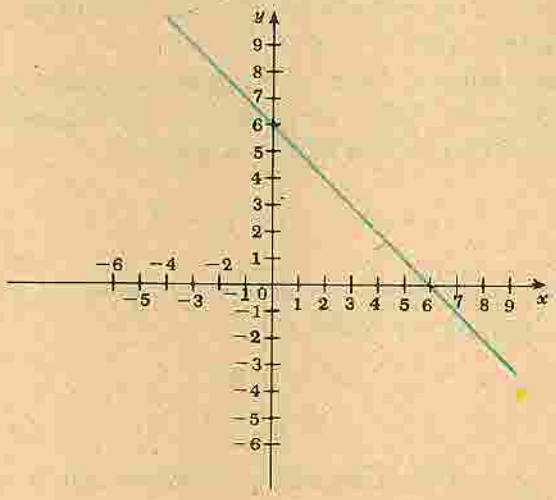


Así, cualquier punto de esta recta representa una solución de la ecuación $x + y = 4$. Por ejemplo, las coordenadas del punto rojo, marcado en la gráfica, son $x = 3$, $y = 1$ y ésta es una solución de la ecuación porque $3 + 1 = 4$.



Ejercicio 4. Determine las coordenadas del punto azul y del punto verde, marcados en la gráfica, y compruebe que son soluciones de la ecuación $x + y = 4$.

Ejercicio 5. Observe la siguiente gráfica de soluciones de la ecuación $x + y = 6$.



Considerando que las siguientes parejas son soluciones de la ecuaciones $x + y = 6$, utilice la gráfica anterior para encontrar el número que falta en cada pareja.

a) $x = 0$, $y =$

b) $x = 4.5$, $y =$

c) $x = -3$, $y =$

d) $x = 7.5$, $y =$

e) $x =$, $y = 0$

f) $x =$, $y = 2$

g) $x =$, $y = -2.5$

h) $x =$, $y = -2$

En el ejercicio anterior habrá usted notado que, teniendo la gráfica de las soluciones de una ecuación, es fácil completar cualquier pareja de números de modo que ésta sea una de las soluciones. Todo se reduce a localizar la ordenada de un punto cuando conocemos su abscisa; o bien, localizar la abscisa del punto cuando conocemos su ordenada.

El trabajo que hemos realizado en ese ejercicio también puede efectuarse sin tener la gráfica de las soluciones. Por ejemplo, si nos piden completar la pareja

$$x = 4, \; y = $$

de manera que resulte una solución de la ecuación $x + y = 7$, podemos sustituir la x por el valor que nos han dado y así obtenemos una ecuación con una sola incógnita

$$x + y = 7$$

$$4 + y = 7$$

Al resolver esta ecuación hallamos que

$$4 + y - 4 = 7 - 4$$

$$\boxed{y = 3}$$

El valor de y es 3 cuando el valor de x es 4. Esto es, la pareja $(4, 3)$ es solución de la ecuación $x + y = 7$.

Así como hallamos el valor de y correspondiente a un valor dado de x, también podemos hallar el valor de x correspondiente a un valor dado de y. Por ejemplo, completemos la pareja.

$$x = \square, \quad y = 5$$

de modo que sea solución de la ecuación $x + y = 7$.

Sustituimos la y por su valor 5.

$$x + y = 7$$

$$x + 5 = 7$$

Resolvemos esta última ecuación y hallamos que $x = 2$. Esto es, el valor de x es 2 cuando $y = 5$.

Ejercicio 6. Complete las siguientes parejas de manera que cada una de ellas sea solución de la ecuación $x + y = 7$.

a) $x = 1$, $y = \square$

b) $x = 5$, $y = \square$

c) $x = .5$, $y = \square$

d) $x = \frac{3}{4}$, $y = \square$

e) $x = -3$, $y = \square$

f) $x = -\frac{1}{2}$, $y = \square$

g) $x = \square$, $y = 4$

h) $x = \square$, $y = 7$

i) $x = \square$, $y = -2$

j) $x = \square$ $y = \frac{2}{5}$

Ejercicio 7. Las parejas anotadas en la siguiente tabla son soluciones de la ecuación $x + y = 5$. Complete la tabla.

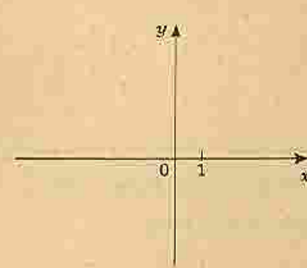
x	2	4	6					
y	3			5	-2	.6	$\frac{1}{3}$	

Ejercicio 8. Anote usted en la última columna de la tabla anterior cualquier pareja de números que sea solución de la misma ecuación $x + y = 5$. Fije primero un valor para x y encuentre después el correspondiente valor de y.

Ejercicio 9. En cada inciso complete la tabla y trace la gráfica de soluciones de la ecuación dada.

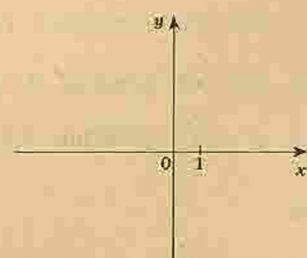
a) $x + y = 3$

x	y
0	
-1	
3	



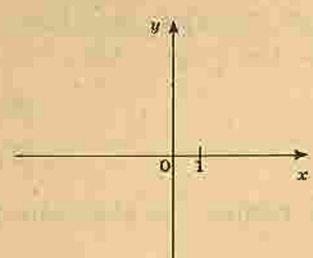
b) $x + y = 2$

x	y
	0
	-1
	2



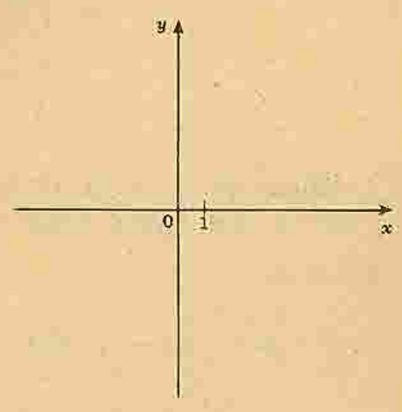
c) $x + y = -3$

x	y
	0
-2	
0	
	2



d) $x + y = -1$

x	y
0	
-1	
	2
	1



Analicemos ahora otros problemas que conducen a ecuaciones de primer grado con dos incógnitas.

En una reunión de amigos una persona planteó el siguiente problema:

"Si sumamos el triple de la edad de María con el doble de la edad de Pedro, obtenemos 60 años. ¿Qué edad tiene María y cuál es la edad de Pedro?"

Para resolver el problema algunos razonaron así: "Si llamamos m a la edad de María y p a la edad de Pedro, podemos describir la situación por medio de la siguiente ecuación, que es de primer grado con dos incógnitas."

$$\boxed{3m + 2p = 60}$$

Una vez que plantearon el problema en esta forma, observaron que no tenía una respuesta única. Algunas posibles soluciones son, por ejemplo, las siguientes:

$m = 15$, $p = 7.5$ [porque $3\ (15) + 2\ (7.5) = 45 + 15 = 60$]

$m = 2$, $p = 27$ [porque $3\ (2) + 2\ (27) = 6 + 54 = 60$]

$m = 12$, $p = 12$ [porque $3\ (12) + 2\ (12) = 36 + 24 = 60$]

$m = 14$, $p = 9$ [porque $3\ (14) + 2\ (9) = 42 + 18 = 60$]

Etcétera.

Según observamos, el problema admite muchas respuestas correctas. Para hallarlas se puede seguir un procedimiento como el que hemos estudiado en los problemas y ejercicios anteriores. Por ejemplo, si suponemos una edad de 10 años para María, hacemos la sustitución respectiva en la ecuación $3m + 2p = 60$.

$$3m + 2p = 60$$
$$3\ (10) + 2p = 60$$

Así obtenemos una ecuación que ya sabemos resolver.

$$3\ (10) + 2p = 60$$
$$30 + 2p = 60$$
$$2p = 30$$
$$\boxed{p = 15}$$

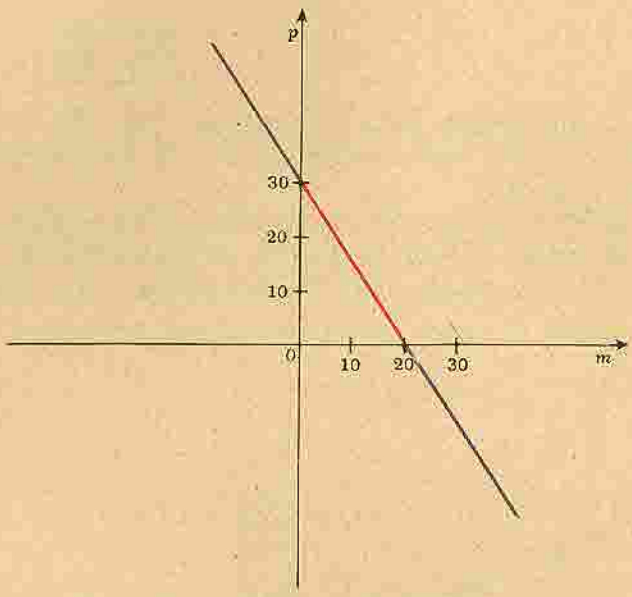
Y hallamos que $p = 15$. Es decir, Pedro tiene una edad de 15 años (en el caso de que María tenga 10 años).

Comprobación

$$3m + 2p = 3\ (10) + 2\ (15) = 30 + 30 = \boxed{60}$$

Aquí también conviene destacar que hay soluciones de la ecuación que no son respuestas al problema. Por ejemplo, la pareja $m = -6$, $p = 39$ es solución de la ecuación [porque $3(-6) + 2(39) = -18 + 78 = 60$]; pero no puede ser una respuesta al problema porque no tiene sentido decir que la edad de María es -6 años.

En virtud de que la ecuación $3m + 2p = 60$ es de primer grado con dos incógnitas, al representar gráficamente todas sus soluciones, tomando como abscisas los valores de m y como ordenadas los valores de p, encontramos que tal gráfica es una línea recta, la que ilustramos a continuación:



El conjunto de puntos marcados en rojo representa las soluciones al problema. (Observe usted que éstas forman un subconjunto de todas las soluciones de la ecuación.)

Otras ecuaciones de primer grado con dos incógnitas son, por ejemplo, las siguientes:

$5x + y = 21$	$2n + 7p = 4$
$.3a + .5b = 67$	$x - 3y = 45$
$-2n + 7x = -3$	$\frac{3}{4}x + \frac{1}{5}y = -6$

Todas estas ecuaciones, y las que son como ellas, tienen una infinidad de soluciones cuya gráfica es siempre una línea recta. Por lo tanto, si deseamos determinar gráficamente todas las soluciones de alguna ecuación de estas, bastará con encontrar dos soluciones.

Ejemplo. Tracemos la gráfica de soluciones de la ecuación $-2n - 5a = 14$. [Esta ecuación también puede escribirse como $-2n + (-5a) = 14$].

Primero escogemos dos valores cualesquiera para n, a fin de hallar dos parejas que sean soluciones de la ecuación. Por ejemplo, $n = -2$ y $n = -12$.

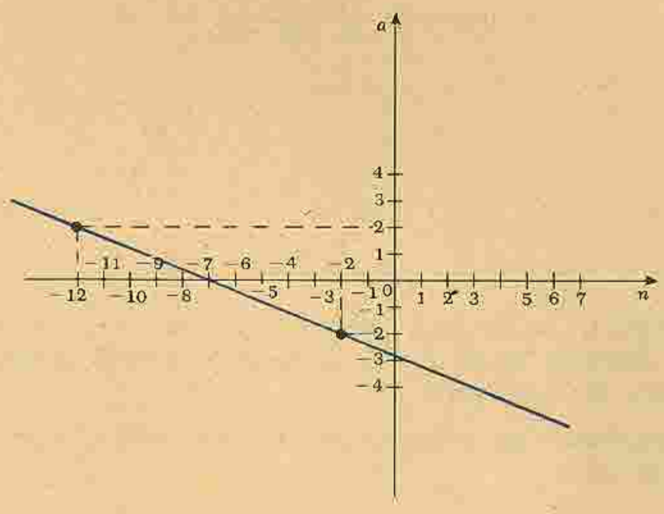
Si $\boxed{n = -2}$, tenemos que $-2n + (-5a) = 14$

$$-2(-2) + (-5a) = 14$$
$$4 + (-5a) = 14$$
$$-5a = 10$$
$$a = \frac{10}{-5}$$
$$\boxed{a = -2}$$

De manera que una solución es la pareja $(-2, -2)$.

Al tomar $n = -12$ encontramos que $a = 2$. Es decir, otra solución es la pareja $(-12, 2)$.

Por consiguiente, si tomamos como abscisas los valores de n y como ordenadas los valores de a, la gráfica de soluciones de la ecuación $-2n - 5a = 14$ es la recta que pasa por los puntos $(-2, -2)$ y $(-12, 2)$.



Ejercicio 10. Trace la gráfica de soluciones de cada una de las siguientes ecuaciones lineales.

a) $2x + y = 5$

b) $3x + 2y = 10$

c) $x - y = 0$

d) $x + 2y = 4$

Ejercicio 11. En un mismo sistema de coordenadas trace las gráficas de soluciones de las ecuaciones.

$$x + y = 5 \quad \text{y} \quad 3x +$$

¿Tienen algún punto de intersección las dos rectas trazadas? ¿Hay alguna solución de la primera ecuación que sea también solución de la segunda? En caso de ser así, ¿cuál es esa solución común?

Ejercicio 12. Trace en un mismo sistema de coordenadas las gráficas de las soluciones de

$$x + y = 3 \quad \text{y} \quad x + y = -2.$$

Las dos rectas que usted trazó no tienen ningún punto de intersección. ¿Habrá alguna solución de la primera ecuación que sea también solución de la segunda?

Ejercicio 13. Encuentre una ecuación que describa cada uno de los siguientes problemas:

a) La suma de dos números es 13. ¿Cuáles son esos números?

b) Al sumar la edad de Pepe más el doble de la edad de Luis se obtienen 30 años. ¿Qué edad tiene cada quién?

c) El triple de un número menos el doble de otro nos da 26. ¿Qué números son esos?

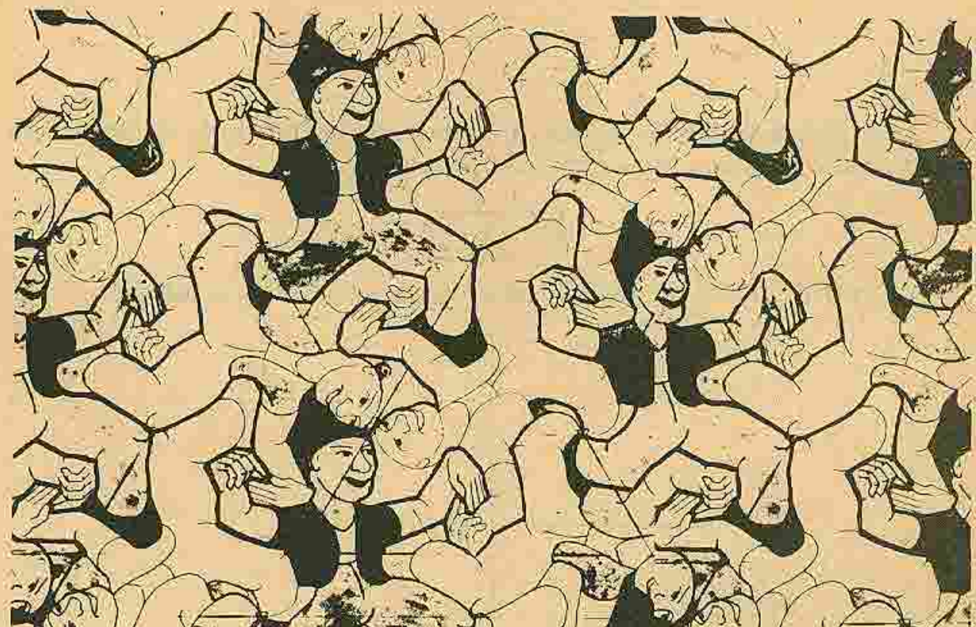
d) La diferencia de dos números a y b es 5. ¿Qué número es a y qué número es b?

e) El 5% de un número más el 12% de otro es igual a 12.5. ¿Cuáles son esos números?

f) Las 3 centésimas partes de a menos las 12 milésimas partes de b, dan por resultado 6.24. ¿Qué números son a y b?

g) Una persona cambia 2 000 pesos en billetes de 10 pesos y de 20 pesos. ¿Cuántos billetes de a 10 y cuántos de a 20 le dieron?

h) El doble de la edad de Luis y el triple de la edad de Antonio suman 84 años. ¿Cuál es la edad de cada uno?



3. Sistemas de ecuaciones lineales

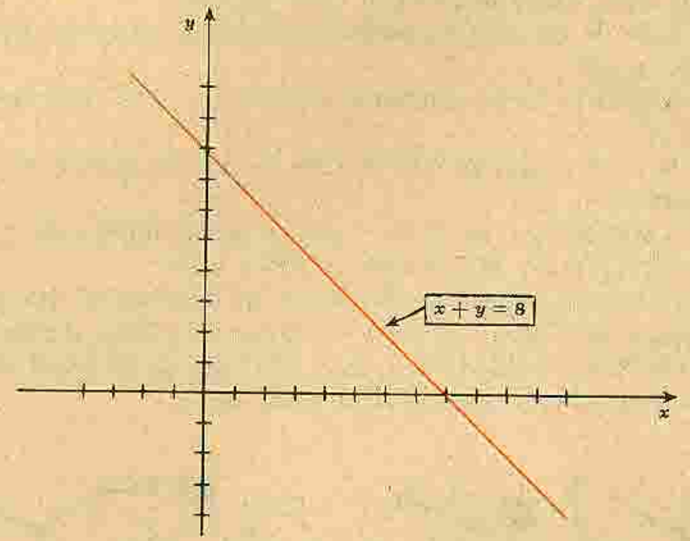
En la sección anterior hemos analizado algunos problemas cuyo planteamiento da origen a ecuaciones lineales. Veamos ahora el siguiente problema:

Problema. La suma de dos números es 8, y la diferencia de esos mismos números es 2. ¿Qué números son esos?

Resolución. Este problema se refiere a dos números que deben satisfacer *dos condiciones*. La primera de ellas es que su suma sea 8. Esto se puede expresar con la ecuación

$$\boxed{x + y = 8}$$

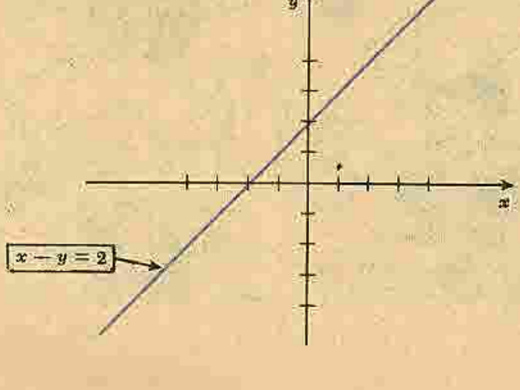
cuyas soluciones se pueden mostrar gráficamente por medio de la siguiente recta:



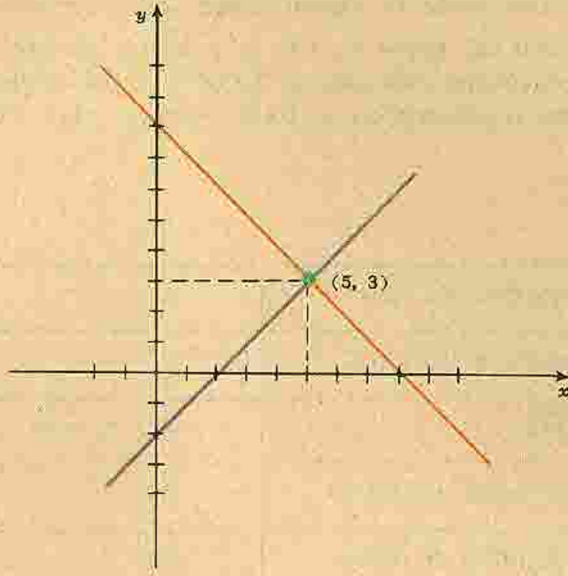
La segunda condición es que al restar los dos números su diferencia sea 2. Esto se puede indicar con la ecuación

$$\boxed{x - y = 2}$$

La gráfica de soluciones de esta ecuación es la recta siguiente:



Como los números que buscamos deben satisfacer las dos condiciones al mismo tiempo, la pareja formada con esos números debe ser solución tanto de una ecuación como de la otra. Esa solución común de las dos ecuaciones es el punto de intersección de las dos gráficas.



En consecuencia, los números que buscamos son el 5 y el 3.

Comprobación:

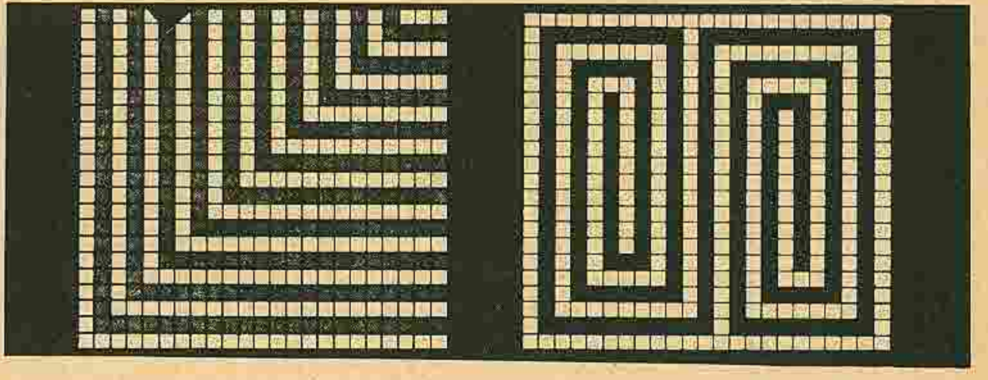
$x + y = 8$ $\qquad\qquad$ $x - y = 2$

$\boxed{5 + 3 = 8}$ $\qquad\qquad$ $\boxed{5 - 3 = 2}$

El problema anterior (en el cual se pidió que los números cumplieran dos condiciones simultáneamente) se puede indicar simbólicamente así:

$$x + y = 8$$
$$x - y = 2$$

A cualquier expresión como la anterior le daremos el nombre de **sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.**



4. Resolución gráfica de sistemas de ecuaciones

A continuación estudiaremos algunos problemas que se pueden describir y resolver por medio de algún sistema de ecuaciones lineales.

Problema. Con 25 pesos se van a comprar timbres del impuesto sobre la renta cuyos precios son de \$2.00 y 5.00, respectivamente. Si han de comprarse 8 estampillas en total, ¿cuántas de cada precio deben pedirse?

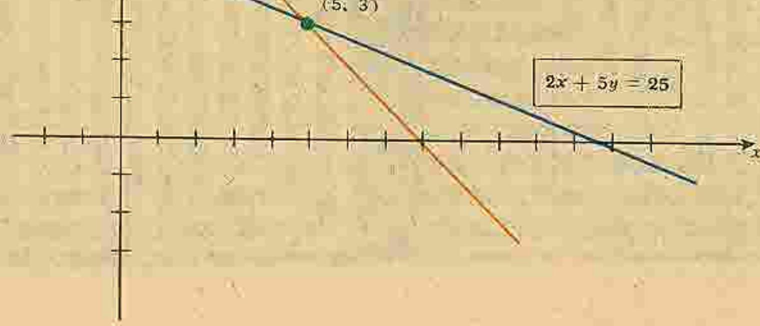
Resolución.

Número de estampillas de \$2.00	y
Número de estampillas de \$5.00	x
Total de estampillas	$x + y = 8$
Costo de las estampillas de \$2.00	$2x$
Costo de las estampillas de \$5.00	$5y$
Gasto total	$2x + 5y = 25$

Los números x y y deben cumplir simultáneamente dos condiciones. Por tanto, esos números serán la solución del sistema

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ 2x + 5y = 25 \end{cases}$$

Las gráficas correspondientes a las ecuaciones que forman el sistema son las siguientes:



El punto de intersección de las dos gráficas representa la única solución común a las dos ecuaciones. Por consiguiente, la solución al sistema es la pareja $x = 5$, $y = 3$.

Respuesta. Deben pedirse 5 estampillas de \$2.00 y 3 estampillas de \$5.00.

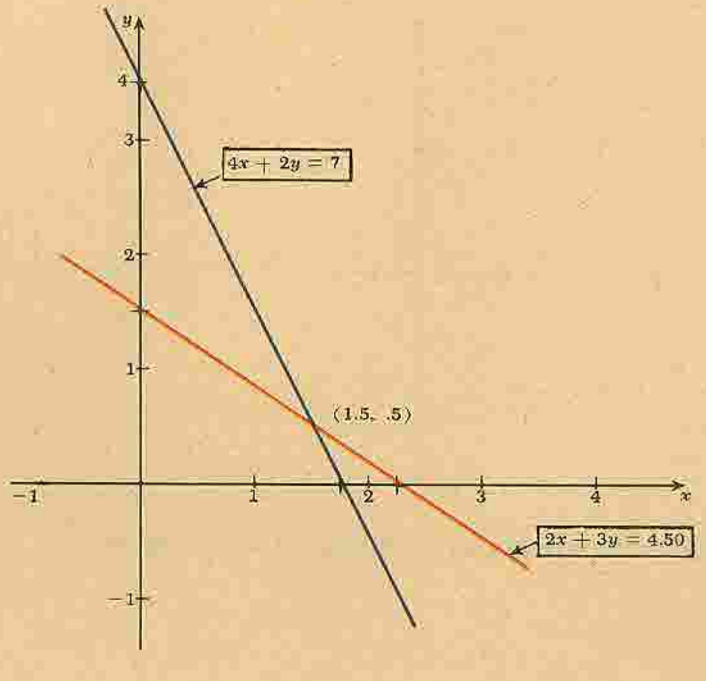
Problema. En una papelería se compran 2 plumas y 3 lápices con \$4.50. Si después se compraron 4 plumas y 2 lápices en \$7.00 ¿cuál es el precio de cada artículo?

Resolución.

Precio de una pluma	x
Precio de un lápiz	y
Importe de dos plumas	$2x$
Importe de tres lápices	$3y$
Importe de la primera compra	$2x + 3y = 4.50$
Importe de 4 plumas	$4x$
Importe de 2 lápices	$2y$
Importe de la segunda compra	$4x + 2y = 7$

La solución al problema será la solución del siguiente sistema.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 4.50 \\ 4x + 2y = 7 \end{cases}$$



En la gráfica vemos que la solución del sistema es la pareja $x = 1.5$, $y = .5$

Respuesta. El precio de una pluma es \$1.50 y el precio de un lápiz es \$0.50.

Ejercicio 14. Tomando como ejemplo la resolución de los problemas anteriores, complete los cuadros siguientes y dé la respuesta a cada problema.

Problema 1. Un ama de casa pagó en una frutería \$12.00 por 3 piñas y 2 melones. Si su vecina pidió 2 piñas y 4 melones y también le cobraron \$12.00. ¿Cuál era el precio de cada una de esas frutas?

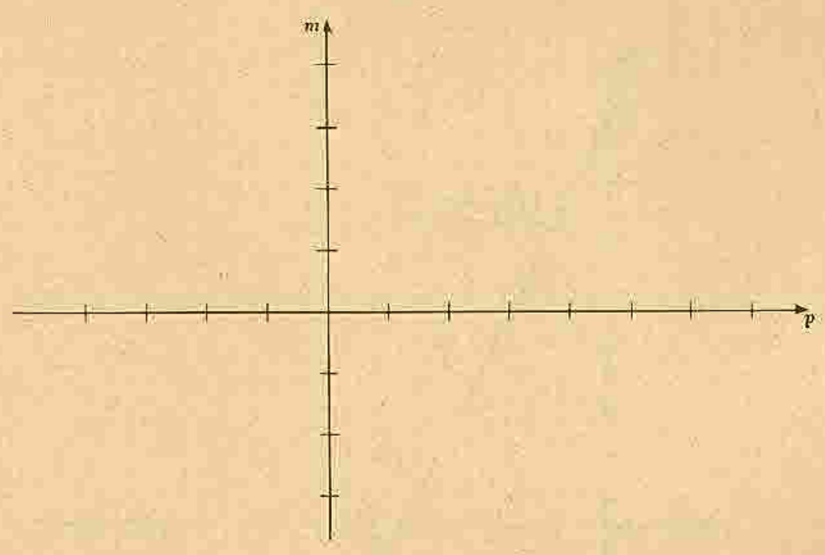
Resolución.

Precio de una piña	p
Precio de un melón	m
Importe de 3 piñas y 2 melones	$\square + 2m = 12$
Importe de 2 piñas y 4 melones	$2p + \square =$

El problema se describe con el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \square + \square = \square \\ \square + \square = \square \end{cases}$$

Tomando como abscisas los valores de p y como ordenadas los valores de m, la gráfica correspondiente a este sistema de ecuaciones resulta así:



La solución al sistema es la pareja $p = \square$, $m = \square$

Respuesta. Una piña cuesta ________ y un melón cuesta ________.

Problema 2. El largo de un rectángulo es el doble de su ancho. Si el perímetro de ese rectángulo es 12 metros ¿cuáles son sus dimensiones?

Resolución.

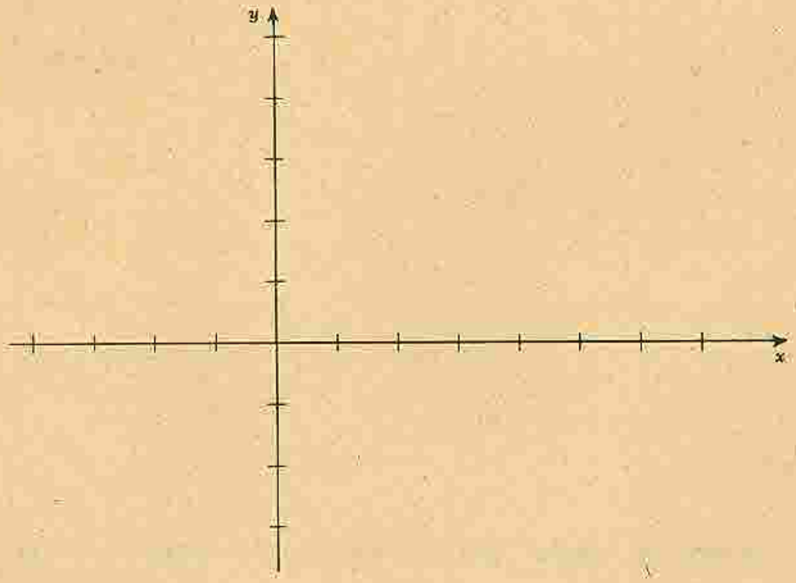
Representemos el largo del rectángulo con la letra x y el ancho con la letra y.

El largo es igual al doble del ancho	$x = \square$
Así que podemos escribir	$x - 2y = \square$
El perímetro es 12 metros	$2x + 2y = \square$

Para saber cuánto es x y y debemos resolver el sistema

$$\begin{cases} \square - \square = 0 \\ \square + \square = 12 \end{cases}$$

La gráfica correspondiente a este sistema es la siguiente:



En la gráfica vemos que la solución del sistema es $x = \square$, $y = \square$.

Respuesta. El largo del rectángulo es $\square$ metros y el ancho es $\square$ metros.

Problema 3. Un distribuidor de maquinaria tiene 8 unidades entre tractores y camiones. Si vendiera 2 tractores le quedaría igual número de tractores que de camiones. ¿Cuántas unidades tiene de cada clase?

Resolución.

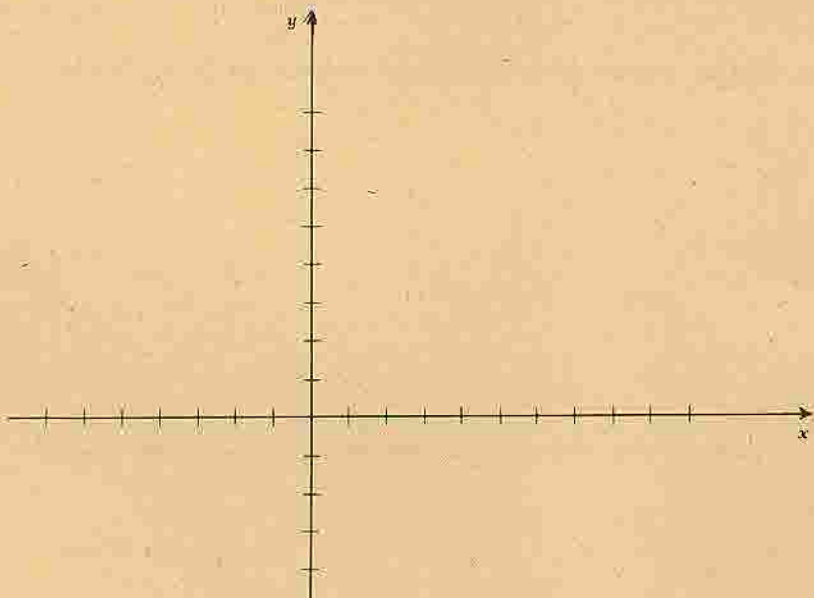
Sea x el número de tractores que tiene y y el número de camiones.

Tiene 8 unidades en total	$x + \square = \square$
Si vendiera dos tractores	$x - \square$
Tendría igual número de tractores que de camiones	$x - 2 = \square$
Esto podría indicarse también como	$x - y = 2$

Para resolver el problema debemos resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales.

$$\begin{cases} x + y = \square \\ x - \square = 2 \end{cases}$$

La gráfica correspondiente al sistema es la siguiente:



En la gráfica vemos que la solución del sistema es la pareja $x = \square$, $y = \square$.

Respuesta. El distribuidor tiene $\square$ tractores y $\square$ camiones.

Ejercicio 15. Tal como hicimos anteriormente, resuelva usted los siguientes problemas por medio de sistemas de ecuaciones.

1. Con \$13.00 se compran 3 cuadernos y 2 plumas en una papelería. Con \$14.00 se compran 2 cuadernos y 4 plumas. ¿Cuál es el precio de un cuaderno y cuál el de una pluma en esa papelería?

2. En una tienda Juan compra 6 kilogramos de maíz y 1 kilogramo de frijol en \$14.00. Pedro pide 4 kg de maíz y 2 kg de frijol y le cobran \$16.00. ¿A qué precio les están vendiendo el maíz y el frijol en esa tienda?

3. El doble de un número n sumado con el triple de otro número r da 6. Si la diferencia $n - r$ es igual a -7, ¿cuáles son esos números n y r?

Ejercicio 16. Resuelva gráficamente cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones lineales.

1. $\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 0 \end{cases}$ $\quad x = \boxed{}$ $\quad y = \boxed{}$

2. $\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 5 \end{cases}$ $\quad x = \boxed{}$ $\quad y = \boxed{}$

3. $\begin{cases} 2x + y = 10 \\ 4x - y = 8 \end{cases}$ $\quad x = \boxed{}$ $\quad y = \boxed{}$

4. $\begin{cases} 5x - 2y = 4 \\ 2x + 2y = 10 \end{cases}$ $\quad x = \boxed{}$ $\quad y = \boxed{}$

5. $\begin{cases} x - y = -2 \\ 2x + y = 11 \end{cases}$ $\quad x = \boxed{}$ $\quad y = \boxed{}$

6. $\begin{cases} x + y = 3 \\ x + y = 5 \end{cases}$ $\quad x = \boxed{}$ $\quad y = \boxed{}$

7. $\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x + 2y = 8 \end{cases}$ $\quad x = \boxed{}$ $\quad y = \boxed{}$

En este ejercicio podemos observar algunas cosas interesantes.

En primer lugar vemos que el sistema de ecuaciones dado en el inciso número 6, no tiene solución, pues la gráfica de las soluciones de esas dos ecuaciones resultan dos rectas paralelas.

A los sistemas que no tienen solución se les acostumbra llamar **sistemas inconsistentes.**

Como ejemplos de sistemas inconsistentes podemos indicar los siguientes:

a) $\begin{cases} x + y = 2 \\ x + y = 4 \end{cases}$ $\qquad$ b) $\begin{cases} x - y = 3 \\ x - y = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$ $\qquad$ d) $\begin{cases} x - 3y = 1 \\ x - 3y = 3 \end{cases}$

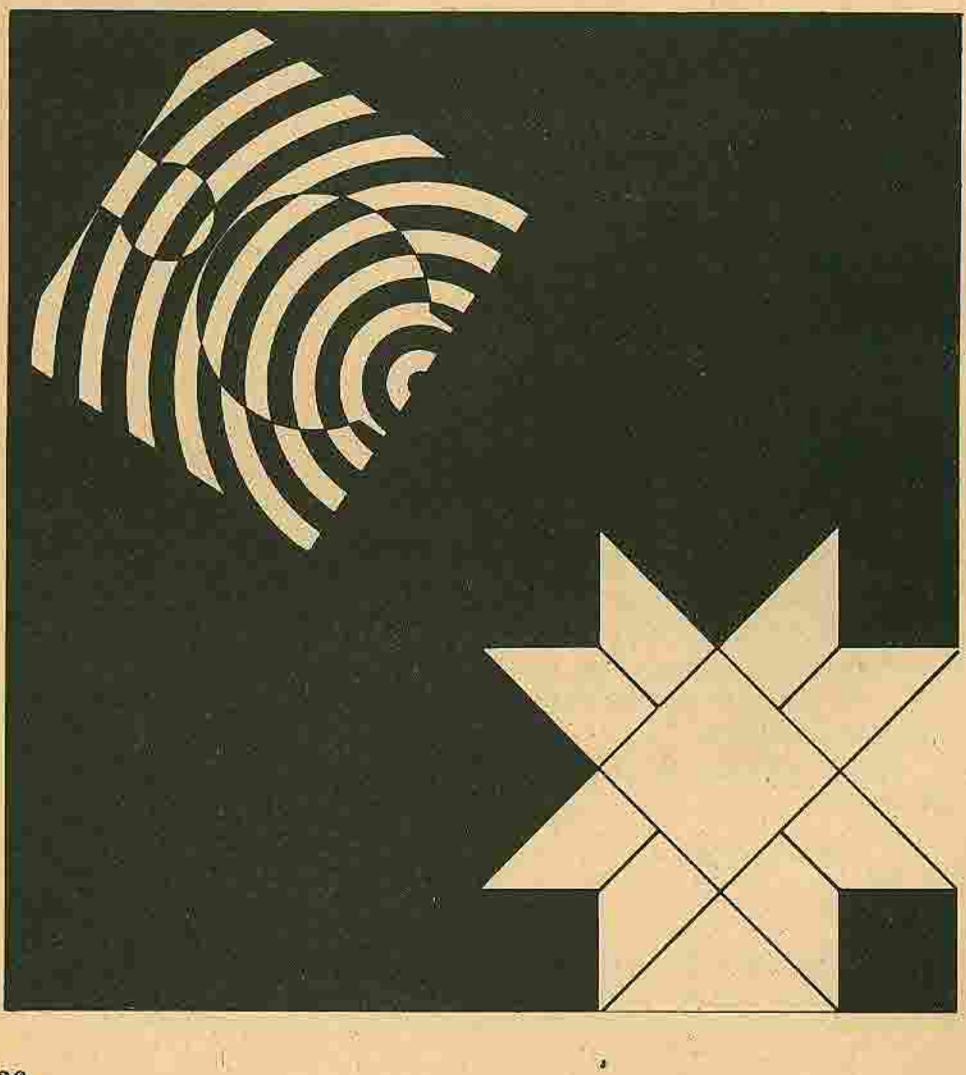
En segundo lugar, observamos que el sistema de ecuaciones del inciso número 7, tiene una infinidad de soluciones, pues la gráfica de soluciones de cada una de las ecuaciones del sistema resulta ser la misma recta. Observamos, además, que la segunda ecuación del sistema $(2x + 2y = 8)$ se obtiene multiplicando por 2 los dos miembros de la primera ecuación $(x + y = 4)$.

Otros sistemas que están en el mismo caso son, por ejemplo, los siguientes:

a) $\begin{cases} x + y = 5 \\ 3x + 3y = 15 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 10x - 5y = 10 \\ 2x - y = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ 8x - 12y = 16 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 18x + 12y = 24 \\ 3x + 2y = 4 \end{cases}$

(Note usted que en cada uno de estos sistemas las ecuaciones se obtienen multiplicando, o dividiendo, por un mismo número distinto de cero los dos miembros de la otra.)



5. Resolución algebraica de sistemas de ecuaciones

Existen varios procedimientos algebraicos para resolver sistemas de ecuaciones lineales sin necesidad de trazar gráficas. A continuación estudiaremos uno de estos procedimientos al que suele llamársele "reducción por suma y resta", y en el cual se aplican las propiedades de las ecuaciones, que ya hemos estudiado antes.

Analicemos este procedimiento en los siguientes ejemplos y ejercicios.

Ejemplo 1. Consideremos el siguiente sistema y resolvámoslo.

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

Ya sabemos que se puede sumar o restar un mismo número a los dos miembros de una ecuación dada y la ecuación que así se obtiene tiene las mismas soluciones que la ecuación original. En este caso sumaremos el número $x - y$ o sea el 2, a ambos miembros de la primera ecuación del sistema.

$$x + y = 8$$

$$x + y + (x - y) = 8 + (2)$$

$$\boxed{2x = 10}$$

Así obtenemos una nueva ecuación que sólo tiene una incógnita y cuya solución es la misma que la de la ecuación original.

$$2x = 10$$

$$\boxed{x = 5}$$

Por lo tanto, en el sistema el valor de x es 5.

Ahora, para hallar el valor de y, sólo tenemos que sustituir la x por el 5:

$$x + y = 8$$

$$5 + y = 8$$

$$\boxed{y = 3}$$

Y encontramos que la pareja $\boxed{x = 5, y = 3}$ es la solución del sistema.

Comprobación.

$x + y = 8$	$x - y = 2$
$5 + 3 = 8$	$5 - 3 = 2$

Algunas personas dicen que en este procedimiento lo que se hace es "sumar o restar miembro a miembro" las dos ecuaciones del sistema, a fin de eliminar una de las incógnitas.

Ejemplo 2. Resolvamos el sistema.

$$\begin{cases} 3x + y = 17 \\ x + y = 9 \end{cases}$$

Aquí conviene restar a los dos miembros de la primera ecuación el número $x + y$, que es el número 9. Y si aplicamos lo de "restar miembro a miembro", podemos hacerlo así:

$$\begin{array}{r} 3x + y = 17 \\ - \quad x + y = 9 \\ \hline \boxed{2x + 0 = 8} \end{array}$$

La ecuación que obtenemos en esa forma tiene una sola incógnita y su solución $x = 4$ es la misma que en las otras ecuaciones del sistema.

Por consiguiente, sustituimos la x en cualquiera de las ecuaciones, digamos la segunda:

$$x + y = 9$$

$$4 + y = 9$$

$$\boxed{y = 5}$$

Y de esa manera encontramos el valor de y. En este caso, la solución del sistema es la pareja $\boxed{x = 4,\ y = 5.}$

Comprobación.

$$3x + y = 17 \qquad\qquad x + y = 9$$

$$3(4) + 5 = 17 \qquad\qquad 4 + 5 = 9$$

Ejercicio 17. Tal como hicimos en los ejemplos anteriores, resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones y compruebe sus soluciones.

Solución:

a) $4x + y = 11$ $\qquad x = \square,\ y = \square$
$4x + 2y = 2$

b) $3x - 5y = 2$ $\qquad x = \square,\ y = \square$
$x - 5y = 14$

c) $5x + 4y = 33$ $\qquad x = \square,\ y = \square$
$5x + y = 27$

d) $3a + 5b = 21$ $\qquad a = \square,\ b = \square$
$8a - 5b = 1$

Ejemplo 3. Resolvamos el sistema.

$$\begin{cases} 2x + 5y = 25 \\ x + y = 8 \end{cases}$$

En este caso, si tomamos las ecuaciones tal como están y las sumamos o restamos "miembro a miembro", no eliminamos ninguna incógnita. Así que primero vamos a multiplicar por un mismo número los dos miembros de una de ellas. Por ejemplo, podemos multiplicar por 2 los dos miembros de la ecuación $x + y = 8$:

$$(2)(x + y) = (2)(8)$$

$$\boxed{2x + 2y = 16}$$

Ahora escribimos esta nueva ecuación, en lugar de $x + y = 8$, en el sistema que queremos resolver.

$$\begin{cases} 2x + 5y = 25 \\ 2x + 2y = 16 \end{cases}$$

Y así ya podemos proceder a "restar miembro a miembro".

$$\begin{array}{r} 2x + 5y = 25 \\ -\quad 2x + 2y = 16 \\ \hline \boxed{0 + 3y = \ \ 9} \end{array}$$

Resolvemos esta última ecuación que obtuvimos:

$$3y = 9$$

$$y = 3$$

Después sustituimos este valor de y en cualquiera de las ecuaciones del sistema, para hallar el valor de x.

$$2x + 5y = 25$$

$$2x + 5\,(3) = 25$$

$$2x + 15 = 25$$

$$2x = 10$$

$$\boxed{x = \ 5}$$

Así encontramos que la solución del sistema presentado originalmente es la pareja $\boxed{x = 5, y = 3.}$

Comprobación.

$2x + 5y = 25$	$x + y = 8$
$2\,(5) + 5\,(3) = 25$	$5 + 3 = 8$

Ejercicio 18. Tal como se hizo en el ejemplo, resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones y compruebe sus soluciones.

a) $\begin{cases} 3x + 2y = 23 \\ x + y = 1 \end{cases}$ $x = \square$, $y = \square$

b) $\begin{cases} 2x + y = 10 \\ x + 3y = 15 \end{cases}$ $x = \square$, $y = \square$

c) $\begin{cases} x + 3y = 3 \\ 3x + 2y = 16 \end{cases}$ $x = \square$, $y = \square$

d) $\begin{cases} 6n + 2t = 28 \\ 2n - t = 1 \end{cases}$ $n = \square$, $t = \square$

Ejemplo 3. Resolvamos el sistema.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 14 \\ 3x - 4y = 4 \end{cases}$$

En este caso tenemos que sustituir las dos ecuaciones del sistema antes de proceder a sumar o restar. Para ello podríamos, por ejemplo, hacer lo siguiente:

Multiplicar por 3 los dos miembros de la primera ecuación:

$$(3)\ (2x + 3y) = (3)\ (14)$$

$$\boxed{6x + 9y = 42}$$

Después multiplicar por -2 los dos miembros de la segunda ecuación del sistema.

$$(-2)\ (3x - 4y) = (-2)\ (4)$$

$$\boxed{-6x + 8y = -8}$$

Sustituir cada ecuación del sistema.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 14 \longrightarrow \\ 3x - 4y = 4 \longrightarrow \end{cases} \begin{cases} 6x + 9y = 42 \\ -6x + 8y = -8 \end{cases}$$

Y luego sumar miembro a miembro:

$$\begin{array}{r} 6x + 9y = 42 \\ \underline{-6x + 8y} = \underline{-8} \end{array}$$

$$\boxed{0 + 17y = 34}$$

Resolvemos la ecuación obtenida

$$17y = 34$$

$$\boxed{y = 2}$$

Sustituimos este valor de y en cualquiera de las ecuaciones del sistema.

$$2x + 3y = 14$$
$$2y + 3\,(2) = 14$$
$$2y + 6 = 14$$
$$2x = 8$$

$$\boxed{x = 4}$$

Así encontramos que la solución del sistema es: $\boxed{x = 4,\ y = 2.}$
Lo podemos comprobar:

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 14 \\ 2\,(4) + 3\,(2) &= 14 \\ 8 \;+\; 6 &= 14 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} 3x - 4y &= 4 \\ 3\,(4) - 4\,(2) &= 4 \\ 12 \;-\; 8 &= 4 \end{aligned}$$

Ejercicio 19. Tal como se hizo en el ejemplo, resuelva usted los siguientes sistemas de ecuaciones y compruebe sus soluciones.

a) $3x + 2y = 12$ $\qquad x = \square, \quad y = \square$
$5x - 3y = 1$

(Sugerencia: Multipliique la primera ecuación por 3 y la segunda por 2).

b) $4x - 3y = 23.5$ $\qquad x = \square, \quad y = \square$
$5x + 5y = 42.5$

Sugerencia: Multiplique una ecuación por 5 y la otra por 3).

c) $2x - 4y = 10$ $\qquad x = \square, \quad y = \square$
$3x - 3y = 22.5$

(Sugerencia: Multiplique una ecuación por 3 y la otra por 2).

d) $7a - 5b = -7$ $\qquad x = \square, \quad y = \square$
$2a + 3b = 13.5$

(Sugerencia: Multiplique una ecuación por 3 y la otra por 5).

e) $10p - 3q = 9$ $\qquad p = \square, \quad q = \square$
$5p + 2q = 8$

(Sugerencia: Multiplique una ecuación por 2 y la otra por 3).

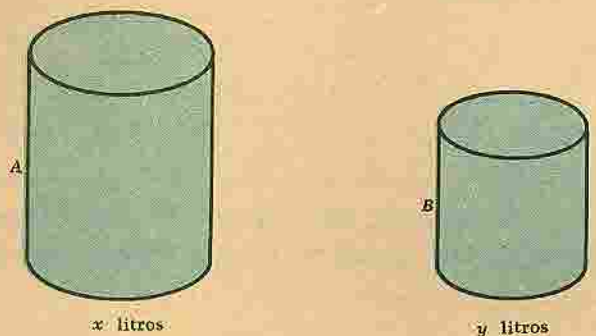
Ejercicio 20. Describa cada uno de los siguientes problemas por medio de un sistema de ecuaciones lineales; resuelva el sistema y luego dé la respuesta correspondiente.

1. La suma de dos números es -30 y su diferencia es 4. ¿Cuáles son dichos números?

2. Dos hombres construyeron una barda con 500 ladrillos. Si el primero colocó 50 ladrillos menos que el segundo, ¿cuántos ladrillos colocó cada uno?

3. Dos ángulos de un triángulo suman 112° y su diferencia es de 15°. ¿Cuánto mide cada uno de los 3 ángulos de ese triángulo?

4. Si sumamos el número de litros que tiene el tinaco A con el número de litros de B, el resultado que se obtiene es 430. Si el tinaco A contiene 120 litros más que el B, ¿cuántos litros contiene A y cuántos contiene B?



5. Se compran timbres postales aéreos de \$ .80 y ordinarios de \$ .40. En total son 40 timbres y por ellos se pagan \$22.80. ¿Cuántos timbres de cada clase se compraron?

6. Una persona cambia 1 000 pesos en billetes de 50 y 20 pesos. Si le dan 29 billetes en total, ¿cuántos billetes de cada denominación le dieron?

7. En una dieta normal la diferencia que hay entre las proteínas y las grasas es de 20 gramos. Si se duplicaran las proteínas, entonces se ingerirían 220 gramos de proteínas y grasas. ¿Cuántos gramos de proteína y cuántos de grasa hay en una dieta normal?

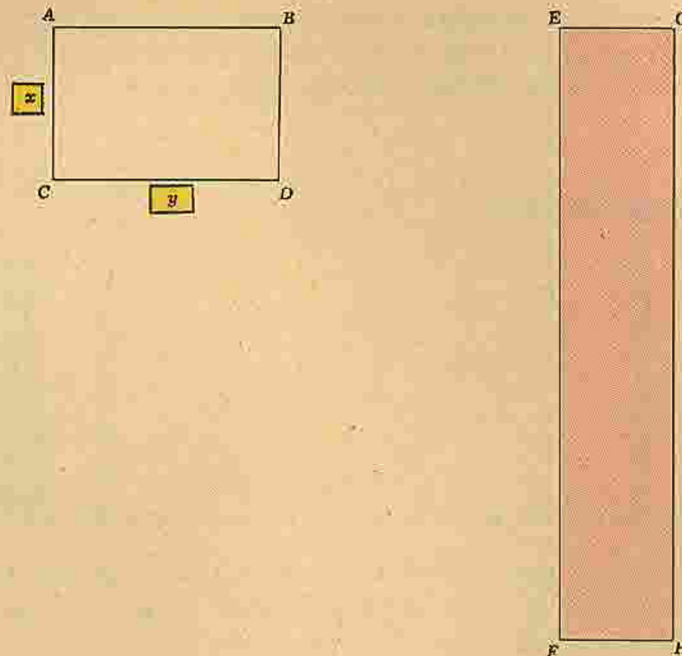
8. Se tienen \$380 en billetes de \$5 y \$20. Si en total son 25 billetes, ¿cuántos hay de 5 pesos y cuántos de 20 pesos?

9. En una peluquería el corte de pelo cuesta 6 pesos para los niños y 8 pesos para los adultos. Si se hacen el corte 28 personas en un día y se recaudan 200 pesos en total, ¿cuántos niños y cuántos adultos se cortaron el pelo ese día?

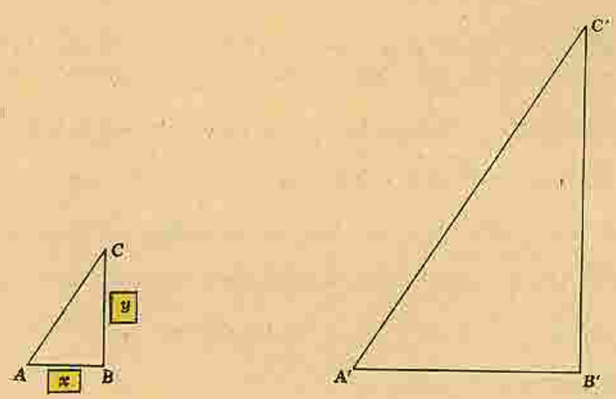
10. Para un baile escolar se vendieron 150 boletos. Los boletos para damas costaron \$3.50 y para varones costaron \$5.00. Si la suma recaudada por la venta de los boletos fue de \$630.00, ¿cuántos boletos para damas y cuántos para varones se vendieron?

11. En los rectángulos que siguen el perímetro de la figura ABCD es de 100 metros y el de la figura EFGH es de 190 metros. Si el lado

$\overline{EF}$ es 4 veces mayor que el lado $\overline{AC}$ y el lado $\overline{FH}$ es de la mitad del lado $\overline{CD}$, ¿cuánto miden los lados de esos dos cuadriláteros?



12. Los dos triángulos rectángulos ilustrados son semejantes y su razón de semejanza es 3.



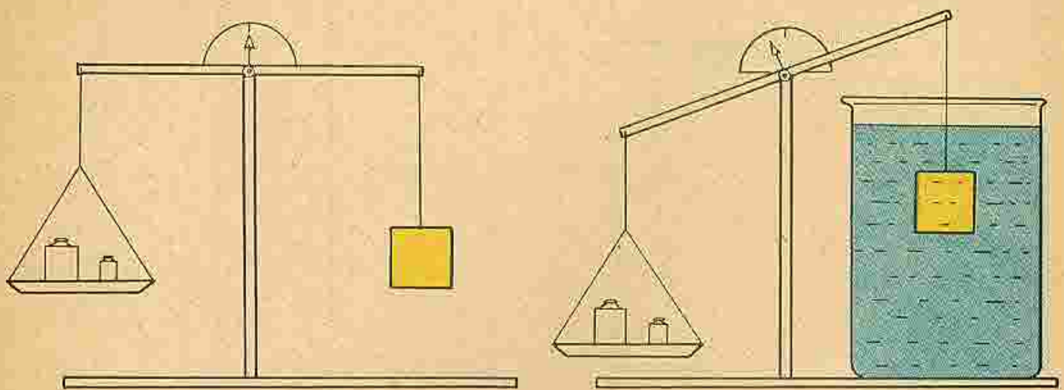
La diferencia entre el lado CB y el lado AB es de 5 metros. Si la suma de las medidas de los catetos del otro triángulo es de 75 metros. ¿Cuánto miden los 3 lados de cada triángulo?

13. Un hombre es maestro de secundaria y maestro de primaria. En el primer empleo le descontaban el 8% de su sueldo y en el segundo el 6%, y el total de descuentos era de \$250. Al aumentar los impuestos, en su sueldo de secundaria le descontaban el 17% y en el de primaria el 9%. Si el total de descuentos es actualmente de \$475. ¿Cuál es su sueldo sin descuentos en cada empleo?

14. Un comerciante compra alcohol de dos clases. Con dos litros del primero y 3 del segundo obtiene una mezcla que cuesta \$9.50 el litro.

Si con 3 litros del primero y 2 del segundo obtiene una mezcla que cuesta \$10.50 el litro, ¿cuánto cuesta el litro de cada una de las dos clases de alcohol?

15. Arquímedes de Siracusa, notable matemático griego de la antigüedad, descubrió que al sumergir en agua cuerpos de igual peso y diferentes sustancias, esos cuerpos perdían una parte de su peso.



Y el peso que perdían era diferente para las distintas sustancias.

En cierta ocasión Herón de Siracusa mandó hacer una corona de oro y plata que pesaba 7 465 gramos, una vez hecha, le encargó a Arquímedes que determinara la cantidad de oro que había en ella. Arquímedes la sumergió en agua y encontró que perdió 467 gramos de su peso. Si se sabe que el oro pierde en el agua 52 milésimos de su peso y la plata pierde 95 milésimos del suyo, ¿cuántos gramos de oro y plata contenía esa corona?

16. La distancia recorrida por un móvil se calcula multiplicando la velocidad por el tiempo que tarda en hacer el recorrido. ($e = vt$).

A una velocidad constante, un automóvil A recorre cierta distancia en $\frac{3}{4}$ de hora y otro automóvil B recorre otra distancia en $\frac{1}{2}$ hora. Si se suman las distancias recorridas por los dos automóviles se obtienen 65 km.

Conservando las velocidades anteriores, ahora A recorre cierta distancia en $\frac{1}{2}$ hora y B recorre otra distancia en $\frac{3}{4}$ de hora. La diferencia entre estas distancias es cero.

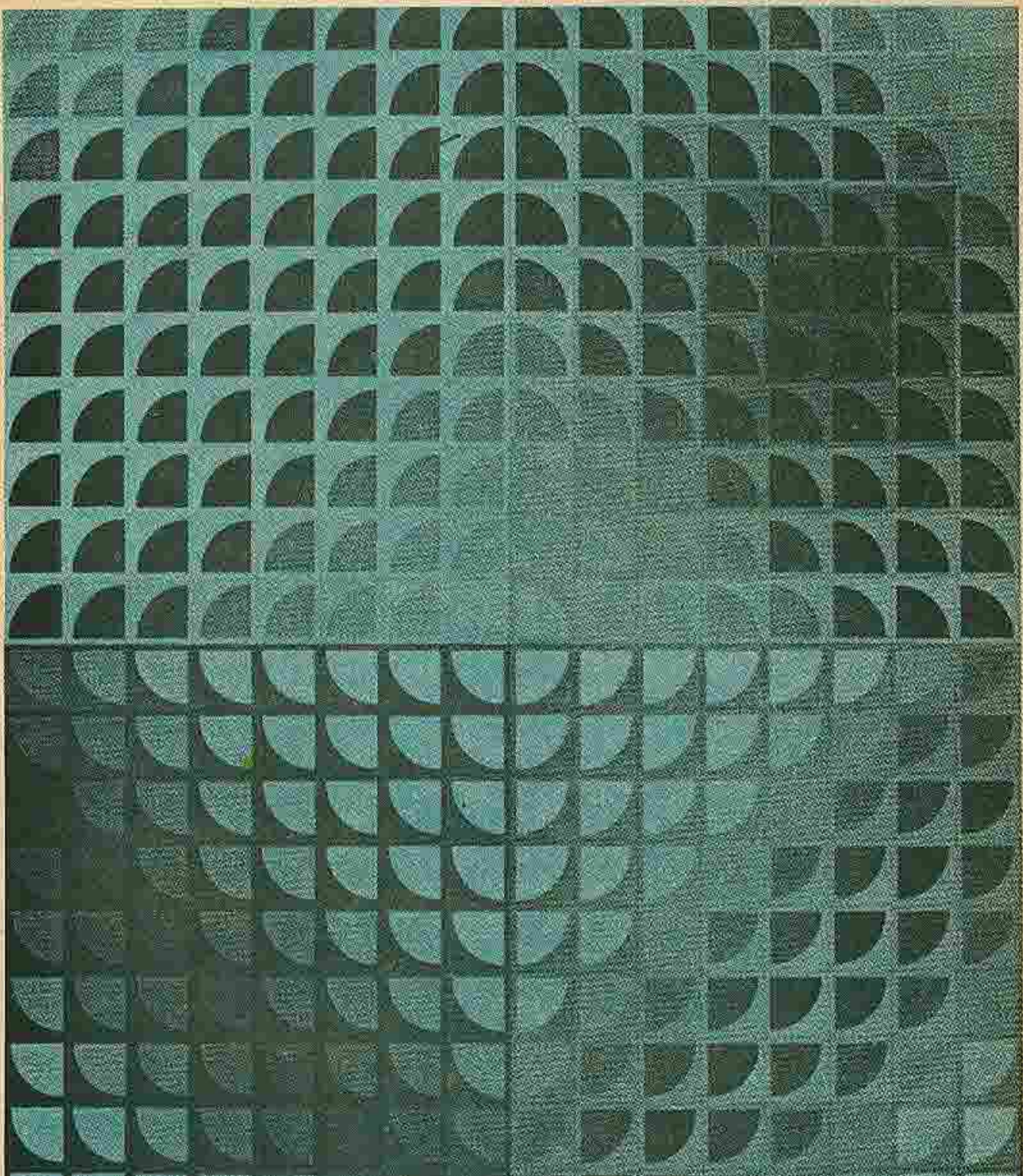
Con esos datos ya se pueden contestar las siguientes preguntas:

a) ¿A qué velocidad hizo sus recorridos A?
b) ¿A qué velocidad hizo sus recorridos B?
c) ¿Qué distancia recorrió A en el primer caso? ¿Y en el segundo?
d) ¿Qué distancia recorrió B en el primer caso? ¿Y en el segundo?

17. Un número n está formado por dos dígitos y la suma de esos dos dígitos es 11. Si se invierten los dígitos el número n se incrementa en 45. ¿Qué número es n?

Capítulo segundo

La notación exponencial y sus aplicaciones



1. Exponentes naturales

En cursos anteriores, al estudiar los números naturales y los números racionales, aprendimos a usar la *notación exponencial* para indicar productos de factores iguales. Por ejemplo, al producto 7×7 lo hemos expresado también 7^2 ("7 al cuadrado"); al producto $3 \times 3 \times 3 \times 3$ lo hemos indicado también como 3^4 ("3 a la cuarta potencia"); etcétera.

La notación exponencial también se utiliza para indicar productos de números cualesquiera. Por ejemplo,

a) $(-6)^2 = (-6)(-6)$
b) $1.2^2 = (1.2)(1.2)$
c) $(\sqrt{5})^3 = (\sqrt{5})(\sqrt{5})(\sqrt{5})$
d) $b^4 = bbbb$
e) $(3a)^3 = (3a)(3a)(3a)$
f) $(2 + x)^2 = (2 + x)(2 + x)$
g) $(ab)^5 = (ab)(ab)(ab)(ab)(ab)$

En general,

Si a es un número cualquiera, y n es un número natural mayor que *1*, entonces

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ factores}}$$

Además, se conviene en que

$$\boxed{a^1 = a}.$$

De acuerdo con lo que se ha dicho sobre notación exponencial, la expresión 7^2, por ejemplo, representa al número 49 porque

$$7^2 = 7 \cdot 7 = \boxed{49}$$

La expresión $(-2)^3$ representa al número -8 porque

$$(-2)^3 = (-2)(-2)(-2) = \boxed{-8}$$

Y la expresión $(-2.6)^1$ representa al número -2.6, pues

$$(-2.6)^1 = \boxed{-2.6}$$

Ejercicio 1. Complete las siguientes igualdades tal como se hace en los primeros incisos.

a) $3.5^2 = (3.5)(3.5) = \boxed{12.25}$

b) $(-15)^2 = (-15)(-15) = \boxed{225}$

c) $(-3x)^3 = (-3x)(-3x)(-3x) = (-3)(-3)(-3)(x)(x)(x)$
$= (-3)^3 \cdot x^3 = \boxed{-27x^3}$

d) $(x+y)^2 = \boxed{(x+y)(x+y)}$

e) $5^4 =$ ______ = ______

f) $14^2 =$ ______ = ______

g) $50^1 =$ ______ = ______

h) $(-4)^4 =$ ______ = ______

i) $(-5)^1 =$ ______ = ______

j) $(3.4)^2 =$ ______ = ______

k) $(-2.5)^2 =$ ______ = ______

l) $(-1.2)^3 =$ ______ = ______

m) $(\sqrt{4})^2 =$ ______ = ______

n) $(\sqrt{7})^2 =$ ______ = ______

o) $(4a)^2 =$ ______ = ______

p) $(7x)^1 =$ ______ = ______

q) $(2r)^3 =$ ______ = ______

r) $(-3a)^4 =$ ______ = ______

s) $(x+3)^2 =$ ______

t) $(6+a)^2 =$ ______

u) $(y-1)^3 =$ ______

Conviene ahora recordar que en la notación exponencial un número se llama *base* y el otro se llama *exponente*. Por ejemplo, en la expresión 3^4 la base es 3 y el exponente es 4:

exponente

3^4

base

Recordemos además que, cuando se tiene una expresión como

$$3^4 = 81,$$

se acostumbra decir que "3^4 es la **cuarta potencia** de 3"; o bien, que "81 es la **cuarta potencia** de 3".

2. Polinomios

En el estudio de las matemáticas y sus aplicaciones se utilizan con mucha frecuencia expresiones algebraicas que reciben el nombre de **polinomios**. A continuación anotamos algunos ejemplos de polinomios:

$$x; \qquad 3x; \qquad \frac{2}{3}x + 8; \qquad 5x^2 - 2x + 7$$
$$n; \qquad .6n; \qquad 7n - 4; \qquad n^3 + 2n^2 - n + 6$$
$$z^3; \qquad 4z^2; \qquad -2z^5 + 4z^3 + 5$$

De los polinomios que aparecen en el primer renglón se acostumbra decir que son "polinomios en x". Los del segundo renglón son "polinomios en n" y los últimos son "polinomios en z".

A veces se les dan nombres especiales a los polinomios. Por ejemplo, los que anotamos a continuación se llaman **monomios** (por que constan de un solo término):

$$2x; \qquad 6x^3; \qquad -3ax; \qquad -\frac{1}{2}y^5$$

Los polinomios que constan de dos términos, como los que anotamos abajo, se llaman **binomios**.

$$y^2 + y; \qquad 2r - 5; \qquad -8x + 3; \qquad 7x^3 - 4x^2$$

Si constan de tres términos, se llaman **trinomios**. Por ejemplo,

$$2x^3 - x^2 + 5; \qquad m^2 + m - 3.4; \qquad 7y^3 + 3y^2 + y$$

En un polinomio en x, por ejemplo, al término en el que no figure la x se le llama **término independiente**. Así, en los siguientes polinomios los términos independientes son el -6, el $.9$ y $-\sqrt{3}$.

$$3x^2 - \underset{\substack{\uparrow\\ \text{término}\\ \text{independiente}}}{6} \qquad -.5x + \underset{\substack{\uparrow\\ \text{término}\\ \text{independiente}}}{.9} \qquad 2x^2 - 5x - \underset{\substack{\uparrow\\ \text{término}\\ \text{independiente}}}{\sqrt{3}}$$

En cada uno de los otros términos, al número que aparece como factor se le da el nombre de **coeficiente**.

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{coeficiente}}}{3}x^2 - 6 \qquad -\underset{\substack{\uparrow\\ \text{coeficiente}}}{.5}x + .9 \qquad \underset{\substack{\uparrow\\ \text{coeficiente}}}{2}x^2 - \underset{\substack{\uparrow\\ \text{coeficiente}}}{5}x - \sqrt{3}$$

3. Multiplicación de polinomios

Ya antes hemos hecho algunas operaciones con polinomios. Recordará usted, por ejemplo, que en el curso anterior hicimos algunas adiciones y sustracciones. Incluso hasta efectuamos multiplicaciones como

$$(a+7)(a+3) = a^2 + 10a + 21$$

Ahora estudiaremos la multiplicación y división de polinomios un poco más complicados. Para ello conviene que primero veamos la multiplicación de números expresados como potencias de una misma base. Observe usted los siguientes ejemplos.

a) $3^2 \cdot 3^3 = \underbrace{(3 \cdot 3)}_{\text{2 factores}} \underbrace{(3 \cdot 3 \cdot 3)}_{\text{3 factores}} = \underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}_{\text{5 factores}} = 3^5$

b) $2^4 \cdot 2^2 = \underbrace{(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2)}_{\text{4 factores}} \underbrace{(2 \cdot 2)}_{\text{2 factores}} = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{\text{6 factores}} = 2^6$

c) $x^3 \cdot x^4 = \underbrace{(x \cdot x \cdot x)}_{\text{3 factores}} \underbrace{(x \cdot x \cdot x \cdot x)}_{\text{4 factores}} = x^7$

d) $a^5 \cdot a^4 = \underbrace{(a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a)}_{\text{5 factores}} \underbrace{(a \cdot a \cdot a \cdot a)}_{\text{4 factores}} = a^{5+4} = a^9$

e) $n^3 \cdot n^3 = \underbrace{(n \cdot n \cdot n)}_{\text{3 factores}} \underbrace{(n \cdot n \cdot n)}_{\text{3 factores}} = n^{3+3} = n^6$

Ejercicio 2. Como se hizo en las anteriores multiplicaciones, exprese cada uno de los siguientes productos en notación exponencial.

a) $4^4 \cdot 4^2 =$

b) $6^3 \cdot 6^2 =$

c) $\left(\frac{3}{4}\right)^5 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3 =$

d) $(2.9^2)(2.9^5) =$

e) $(-2)^3 \cdot (-2)^4 =$

f) $5^3 \cdot 5^2 =$

g) $a^6 \cdot a^4 =$

h) $x^5 \cdot x^8 =$

Al observar las multiplicaciones realizadas vemos fácilmente que:

Si a es un número cualquiera y m y n son números naturales, entonces,

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Nota. Si definimos que $a^0 = 1$ (para cualquier a diferente de cero), podemos aplicar la regla anterior también a los casos en que m o n sean cero. Por ejemplo,

a) $a^5 \cdot a^0 = a^{5+0} = \boxed{a^5}$

b) $a^0 \cdot a^7 = a^{0+7} = \boxed{a^7}$

Ejercicio 3. Indique cada producto en notación exponencial.

a) $7^2 \cdot 7^4 =$ ______ b) $6^3 \cdot 6^4 =$ ______

c) $(-4)^2 \cdot (-4) =$ ______ d) $(-2)^6 \cdot (-2)^3 =$ ______

e) $(.3^2)(.3^8) =$ ______ f) $(1.3^4)(1.3^2) =$ ______

g) $36.^5 \cdot 36^m =$ ______ h) $45^x \cdot 45^y =$ ______

i) $x^r \cdot x^s =$ ______ j) $8^2 \cdot 8^3 \cdot 8^4 =$ ______

k) $(-6.2)^5(-6.2)^2(-6.2)^1 =$ ______ l) $a^p \cdot a^q \cdot a =$ ______

m) $(3x)^4(3x)^1 =$ ______ n) $(a+b)(a+b)^3 =$ ______

o) $(5)^3 \cdot (5)^0 =$ ______ p) $(2x)^0 \cdot (2x)^4 =$ ______

q) $m^0 \cdot m^1 =$ ______ r) $r^0 \cdot r^0 =$ ______

La regla que acabamos de estudiar nos permite efectuar fácilmente algunas multiplicaciones de polinomios como las siguientes:

a) $3x^2 \cdot 5x^3$
b) $(-8x^3y^4)(-2.5xy^2)$
c) $(4a^2b)(-2a^2 + 7ab^2 - 3b^4)$

En los incisos a y b, por ejemplo, podemos aplicar las propiedades conmutativa y asociativa de la multiplicación para multiplicar esos monomios:

a) $3x^2 \cdot 5x^3 = 3 \cdot 5 \cdot x^2 \cdot y^3$

$= (3 \cdot 5)(x^2 \cdot x^3)$

$= \boxed{15x^5}$

b) $(-8x^3y^4)(-2.5xy^2) = (-8)(-2.5) \cdot x^3 \cdot x \cdot y^4 \cdot y^2$

$= (-8)(-2.5) \cdot (x^3 \cdot x)(y^4 \cdot y^2)$

$= \boxed{20x^4y^6}$

En la expresión c necesitamos aplicar, además, la propiedad distributiva.

c) $4a^2b(-2a^2 + 7ab^3 - 3b^4) = (4a^2b)(-2a^2) + (4a^2b)(7ab^3) + (4a^2b)(-3b^4)$

$= \boxed{-8a^4b + 28a^3b^4 - 12a^2b^5}$

Ejercicio 4. Tal como hicimos en los ejemplos, efectúe usted las siguientes multiplicaciones.

a) $3a^2(2a^3) =$ b) $-2m^3(-7m^4) =$

c) $-1.8r^2(2.3r^2) =$ d) $2a^2(3a^3)(2a^5) =$

e) $-x^4 \cdot (-3x^3)\ x =$ f) $2a^2b^3(3a^3b^2) =$

g) $-2mn^2(-1m^2n) =$ h) $-3axy(-2a^2xy^2) =$

i) $2xy^2z^3(-3x^3y^2z) =$ j) $-.3x^2yz(8xy^2z) =$

k) $m^2(3m^3 + 2m^2) =$ l) $x^3(2x^2 + 5x + 2) =$

m) $r(2xr + 2x^2r + .5) =$ n) $a^2b(2ab^2 + 3a^2) =$

o) $-2b^2(-5b^3 + 2b^2 + 3b) =$ p) $-3mn(-2m^2 + 3n^2 - 1) =$

Más adelante, en este curso, manejaremos expresiones de multiplicación como $(x + 5)(x - 3)$ o como $(a + 7)^2$. Recuerde usted que para efectuar esas multiplicaciones de polinomios podemos aplicar la propiedad distributiva:

$\underbrace{\boxed{(x+5)}}(x-3) = \boxed{(x+5)}(x) + \boxed{(x+5)}(-3) =$

$= x^2 + 5x + (-3x) + (-15) =$

$= x^2 + 2x - 15$

$(a + 7)^2 = \underbrace{(a + 7)}(a + 7) = (a + 7)(a) + (a + 7)(7)$

$= a^2 + 7a + 7a + 49$

$= a^2 + 14a + 49$

Ejercicio 5. Efectúe usted en su cuaderno las siguientes multiplicaciones de polinomios.

a) $(y + 3)(y + 2)$ b) $(x + 6)(x - 2)$

c) $(n + .4)(n - 1.3)$

d) $\left(x - \frac{3}{4}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)$

e) $(a + 5)^2$

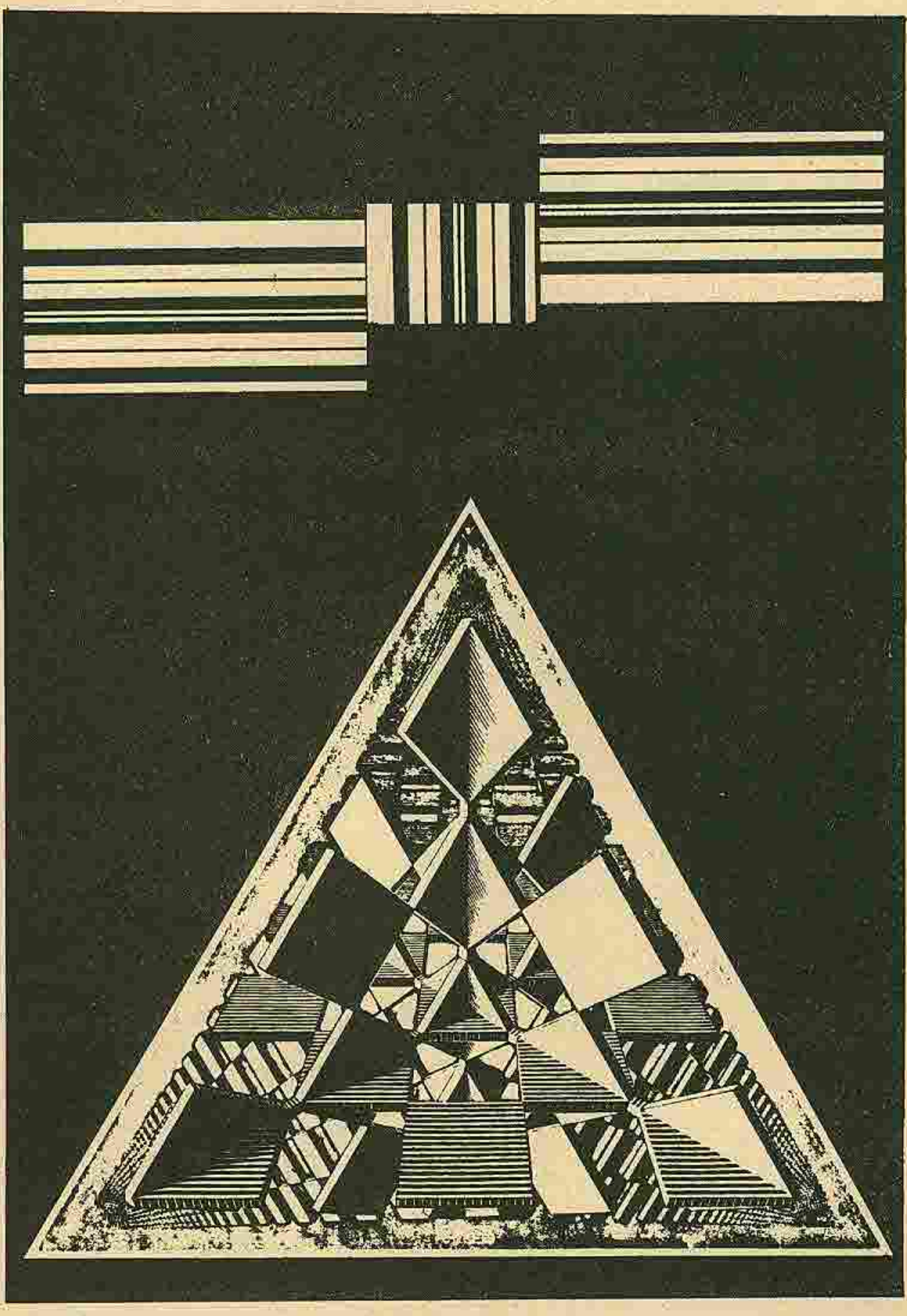
f) $(x - 5)^2$

g) $(x - 1.5)^2$

h) $(y + 4.9)^2$

i) $(x + d)^2$

j) $(x - d)^2$



4. División de polinomios

A continuación estudiaremos algunas divisiones de polinomios como las siguientes:

$$\frac{x^5}{x^2} \qquad \frac{4x^2}{x} \qquad \frac{12a^7}{3a^5} \qquad \frac{15x^3 - 12x^2 + 18x}{3x}$$

(Observe usted que en estas divisiones el divisor es un monomio.)

Empecemos por analizar las divisiones del ejemplo y ejercicio siguientes:

Ejemplo.

a) $\frac{7^5}{7^3} = \boxed{7^2}$ (porque $\underset{\text{cociente}}{7^2} \cdot \underset{\text{divisor}}{7^3} = \underset{\text{dividendo}}{7^5}$)

b) $\frac{(-6)^8}{(-6)^2} = \boxed{(-6)^6}$ [porque $(-6)^6 \cdot (-6)^2 = (-6)^8$]

c) $\frac{2.5^{10}}{2.5^8} = \boxed{2.5^2}$ [porque $(2.5^2)(2.5^8) = 2.5^{10}$]

d) $\frac{a^7}{a^2} = \boxed{a^5}$ (porque $a^5 \cdot a^2 = a^7$)

Ejercicio 6. Tal como se hizo en el ejemplo, efectúe usted las siguientes divisiones. (Las letras representan números diferentes de cero.)

a) $\frac{6^4}{6^2} = \square$ porque $\square \times \square = \square$

b) $\frac{(-12)^5}{(-12)^2} = \square$ porque $\square \times \square = \square$

c) $\frac{(13.4)^7}{(13.4)^5} = \square$ porque $\square \times \square = \square$

d) $\frac{(-14.5)^8}{(-14.5)^6} = \square$ porque $\square \times \square = \square$

e) $\frac{n^{10}}{n^6} = \square$ porque $\square \times \square = \square$

f) $\frac{r^{30}}{r^{22}} = \square$ porque $\square \times \square = \square$

g) $\frac{\pi^9}{\pi^3} = \square$ porque $\square \times \square = \square$

Si analiza usted con cuidado los resultados de las divisiones anteriores se dará cuenta que en todas ellas el cociente se puede obtener aplicando la siguiente regla:

> **Si a es un número distinto de cero, entonces,**
>
> $$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Ejemplo.

a) $\dfrac{7^5}{7^2} = 7^{5-2} = \boxed{7^3}$

b) $\dfrac{(a-b)^4}{(a-b)^2} = (a-b)^{4-2} = \boxed{(a-b)^2}$

c) $\dfrac{(-3.2)^8}{(-3.2)^3} = (-3.2)^{8-3} = \boxed{(-3.2)^5}$

Ejercicio 7. Aplique la regla anterior y exprese cada cociente en notación exponencial. (Las letras representan números distintos de cero.)

a) $\dfrac{4^5}{4^2} = \boxed{}$ b) $\dfrac{18^9}{18^7} = \boxed{}$

c) $\dfrac{(-10)^6}{(-10)} = \boxed{}$ d) $\dfrac{(-2.5)^4}{(-2.5)^3} = \boxed{}$

e) $\dfrac{n^8}{n^7} = \boxed{}$ f) $\dfrac{(3x)^{10}}{(3x)^7} = \boxed{}$

g) $\dfrac{6^r}{6^s} = \boxed{}$ h) $\dfrac{x^a}{x^b} = \boxed{}$

i) $\dfrac{(n+8)^{10}}{(n+8)^9} = \boxed{}$ j) $\dfrac{(x+y)^4}{(y+x)^3} = \boxed{}$

Con lo que llevamos visto hasta aquí ya podemos efectuar divisiones como las siguientes:

a) $\dfrac{15x^3}{3x^2}$ b) $\dfrac{24a^5b^4}{-6a^3b}$

c) $\dfrac{5x^3 + 15x^2 - 10x}{5x}$

En la división del inciso a) procedemos así:

a) $\dfrac{15x^3}{3x^2} = \dfrac{15}{3} \cdot \dfrac{x^3}{x^2} =$

$= \boxed{5x}$

Para comprobar que el resultado de la división es correcto, multiplicamos el cociente por el divisor y encontramos que el producto de ellos es el dividendo:

$$\underset{\text{cociente}}{\underset{\uparrow}{5x}} \quad \underset{\text{divisor}}{\underset{\uparrow}{3x^2}} = \underset{\text{dividendo}}{\underset{\uparrow}{15x^3}}$$

Con la división b, procedemos en forma semejante:

$$\text{b)}\quad \frac{24a^5b^4}{-6a^3b} = \frac{24}{-6}\cdot\frac{a^5}{a^3}\cdot\frac{b^4}{b}$$

$$= \boxed{-4a^2b^3}$$

Comprobación.

$$\underset{\text{cociente}}{(-4a^2b^3)}\underset{\text{divisor}}{(-6a^3b)} = \underset{\text{dividendo}}{24a^5b^4}$$

Para efectuar la división del inciso c) trabajamos en la siguiente forma:

$$\text{c)}\quad \frac{5x^3+15x^2-10x}{5x} = \frac{5x^3}{5x}+\frac{15x^2}{5x}-\frac{10x}{5x}$$

$$= \boxed{x^2+3x-2}$$

Comprobación.

$$\underset{\text{cociente}}{(x^2+3x-2)}\underset{\text{divisor}}{(5x)} = \underset{\text{dividendo}}{5x^3+15x^2-10x}$$

Ejercicio 8. Efectúe las siguientes divisiones y compruébelas.

a) $\dfrac{20a^6}{4a^2} = \boxed{}$

b) $\dfrac{-14y^7}{2y^5} = \boxed{}$

c) $\dfrac{8b^4}{-2b^3} = \boxed{}$

d) $\dfrac{-6x^5}{-5x^3} = \boxed{}$

e) $\dfrac{12a^3b^6}{-3ab^3} = \boxed{}$

f) $\dfrac{-36t^{10}w^6}{9t^4w^6} = \boxed{}$

g) $\dfrac{3.6h^2k^4}{-4hk^2} = \boxed{}$

h) $\dfrac{4.8x^7y^9}{1.2x^6y^4} = \boxed{}$

i) $\dfrac{18a^4+9a^3-27a^2}{9a^2} = \boxed{}$

j) $\dfrac{3.5x^7-3x^4+.6x^3}{-5x^3} = \boxed{}$

k) $\dfrac{24a^5b^3-36a^4b^2-16a^3b^5}{4a^3b^2} = \boxed{}$

l) $\dfrac{-18r^7+5.4r^5-10.8r^4+12.6r^3}{-6r^2} = \boxed{}$

m) $\dfrac{-48x^7y^4-8.4x^5y^5+15.6x^4y^7+38.4x^3y^{10}}{12x^3y^4} = \boxed{}$

5. Exponentes enteros negativos

En todas las divisiones que hasta el momento hemos tratado, el exponente del dividendo ha sido mayor o igual que el exponente del divisor. Si efectuamos divisiones en las que el exponente del dividendo sea menor que el exponente del divisor, restando los exponentes, llegaremos a expresiones que todavía no sabemos interpretar, como las que se muestran en los ejemplos siguientes.

Ejemplo.

$$\frac{a^2}{a^4} = a^{2-4} = a^{-2} \ (?)$$

$$\frac{m^4}{m^5} = m^{4-5} = m^{-1} \ (?)$$

En esta sección vamos a dar una interpretación de esas expresiones que nos permitirá manejarlas en forma útil.

Ejemplo. Efectuemos las siguientes divisiones aplicando la regla que conocemos.

a) $\dfrac{x^2}{x^5} = x^{2-5} = \boxed{x^{-3}}$

b) $\dfrac{a^3}{a^8} = a^{3-8} = \boxed{a^{-5}}$

c) $\dfrac{n^6}{n^7} = n^{6-7} = \boxed{n^{-1}}$

Ahora efectuemos las mismas divisiones sin usar la regla. Esto podría hacerse en la siguiente forma.

a) $\dfrac{x^2}{x^3} = \dfrac{x^2 \cdot 1}{x^2 \cdot x^3} = \dfrac{x^2}{x^2} \cdot \dfrac{1}{x^3} = 1 \cdot \dfrac{1}{x^3} = \boxed{\dfrac{1}{x^3}}$

b) $\dfrac{a^3}{a^8} = \dfrac{a^3 \cdot 1}{a^3 \cdot a^5} = \dfrac{a^3}{a^3} \cdot \dfrac{1}{a^5} = 1 \cdot \dfrac{1}{a^5} = \boxed{\dfrac{1}{a^5}}$

c) $\dfrac{n^6}{n^7} = \dfrac{n^6 \cdot 1}{n^6 \cdot n^1} = \dfrac{1}{n^1} = \dfrac{n^6}{n^6} \cdot \dfrac{1}{n^1} = 1 \cdot \dfrac{1}{n} = \boxed{\dfrac{1}{n}}$

Los resultados de estas divisiones nos indican que

la expresión x^{-3} puede interpretarse como $\dfrac{1}{x^3}$,

la expresión a^{-5} puede interpretarse como $\dfrac{1}{a^5}$,

la expresión n^{-1} puede interpretarse como $\dfrac{1}{n}$.

En símbolos,

$\boxed{x^{-3} = \frac{1}{x^3}}$ $\boxed{a^{-5} = \frac{1}{a^5}}$ $\boxed{n^{-1} = \frac{1}{n}}$

En general, para interpretar expresiones con exponente negativo, como las que estamos viendo, aceptaremos la siguiente definición.

Si a es número diferente de cero y n es un natural, entonces,

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Ejemplo.

a) $3^{-4} = \frac{1}{3^4}$

b) $5^{-2} = \frac{1}{5^2}$

c) $6^{-3} = \frac{1}{6^3}$

d) $10^{-3} = \frac{1}{10^3}$

e) $10^{-2} = \frac{1}{10^2}$

f) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}$

g) $\left(-\frac{3}{4}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(-\frac{3}{4}\right)^3}$

h) $(\sqrt{5})^{-6} = \frac{1}{(\sqrt{5})^6}$

Usando la definición, es posible encontrar el número que representa cualquier expresión con exponente entero negativo. Por ejemplo, con la expresión 5^{-2} denotamos al número .4 porque

$$5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25} = \boxed{.4}$$

Con la expresión 10^{-3} denotamos al número .001 porque

$$10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1\,000} = \boxed{.001}$$

Con la expresión $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$ representamos al número 4 porque

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = \boxed{4}$$

Ejercicio 9. Encuentre qué número representa cada una de las siguientes expresiones.

a) $2^{-3} =$ $\qquad=\qquad=$

b) $5^{-3} =$ ______ $=$ ______ $=$ ______

c) $10^{-2} =$ ______ $=$ ______ $=$ ______

d) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-3} =$ ______ $=$ ______ $=$ ______

e) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-2} =$ ______ $=$ ______ $=$ ______

f) $(-3)^{-2} =$ ______ $=$ ______ $=$ ______

g) $(-4)^{-3} =$ ______ $=$ ______ $=$ ______

h) $(\sqrt{6})^{-2} =$ ______ $=$ ______ $=$ ______

i) $\left(-\frac{3}{4}\right)^{-2} =$ ______ $=$ ______ $=$ ______

j) $(-.3)^{-4} =$ ______ $=$ ______ $=$ ______

Ejercicio 10. Represente en notación exponencial cada uno de los siguientes números. (Observe los ejemplos resueltos.)

a) $\frac{1}{3^2} = \boxed{3^{-2}}$

b) $\frac{1}{8} = \frac{1}{2^3} = \boxed{2^{-3}}$

c) $\frac{1}{1\,000} = \frac{1}{10^3} = \boxed{10^{-3}}$

d) $\frac{1}{4^2} =$ ______

e) $\frac{1}{5^3} =$ ______

f) $\frac{1}{9} =$ ______ $=$ ______

g) $\frac{1}{27} =$ ______ $=$ ______

h) $\frac{1}{10^2} =$ ______

i) $\frac{1}{10} =$ ______ $=$ ______

j) $\frac{1}{100} =$ ______ $=$ ______

k) $\dfrac{1}{1\,000} = \boxed{\quad} = \boxed{\quad}$

l) $\dfrac{1}{10\,000} = \boxed{\quad} = \boxed{\quad} =$

m) $\dfrac{1}{1\,000\,000} = \boxed{\quad} = \boxed{\quad} =$

Ejercicio 11. Escriba el signo $<$, o el signo $>$, o el signo $=$ en cada cuadrito, según corresponda.

a) $3^4 \boxed{\quad} 3^2$ b) $2^1 \boxed{\quad} 2^0$

c) $5^{-3} \boxed{\quad} 5^3$ d) $6^2 \boxed{\quad} 6^{-2}$

e) $3^{-4} \boxed{\quad} 3^2$ f) $7^{-1} \boxed{\quad} 7^0$

g) $8^{-2} \boxed{\quad} 8^{-3}$ h) $10^{-4} \boxed{\quad} 10^{-1}$

i) $9^{-2} \boxed{\quad} 9^0$ j) $1^0 \boxed{\quad} 1^1$

k) $1^{-1} \boxed{\quad} 1^0$ l) $1^1 \boxed{\quad} 1^{-1}$

m) $0^1 \boxed{\quad} 0^6$ n) $1^0 \boxed{\quad} 0^1$

o) $(-3)^2 \boxed{\quad} (-3)^{-2}$ p) $(-2)^3 \boxed{\quad} (-2)^{-3}$

q) $(-4)^0 \boxed{\quad} (-4)^{-2}$ r) $(-1)^{-1} \boxed{\quad} 1^{-1}$

Se puede demostrar que con esta interpretación que hemos dado a las expresioines con exponente negativo siguen siendo válidas las reglas

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Por lo tanto, se pueden efectuar fácilmente multiplicaciones y divisiones de números expresados en notación exponencial, aunque los exponentes no sean siempre positivos.

Ejemplo.

a) $4^3 \cdot 4^{-2} = 4^{3+(-2)} = 4^1 = 4$

b) $6^{-2} \cdot 6^5 = 6^{-2+5} = 6^3 = 216$

c) $2^{-4} \cdot 2^{-1} = 2^{-4+(-1)} = 2^{-5} = \dfrac{1}{2^5} = \dfrac{1}{32}$

Ejemplo.

a) $\dfrac{5^1}{5^{-2}} = 5^{1-(-2)} = 5^3 = \boxed{125}$

b) $\dfrac{2^{-4}}{2^2} = 2^{-4-2} = 2^{-6} = \dfrac{1}{2^6} = \boxed{\dfrac{1}{64}}$

c) $\dfrac{3^{-2}}{3^{-5}} = 3^{-2-(-5)} = 3^3 = \boxed{27}$

Ejercicio 12. Efectúe las siguientes operaciones.

a) $5^{-2} \cdot 5^5 =$

b) $10^4 \cdot 10^{-8} =$

c) $2^{-4} \cdot 2^{-1} =$

d) $(6.4)^{-7} \cdot (6.4)^4 =$

e) $10^{-5} \cdot 10^{-2} =$

f) $10^{-8} \cdot 10^5 =$

g) $10^7 \cdot 10^{-2} =$

h) $10^6 \cdot 10^{-9} =$

i) $10^4 \cdot 10^{-9} \cdot 10^3 =$

j) $r^{10} \cdot r^{-10} =$

k) $\dfrac{4^{-3}}{4^2} =$

l) $\dfrac{5^2}{5^{-2}} =$

m) $\dfrac{10^{-8}}{10^{-10}} =$

n) $\dfrac{2^{-5}}{2^{-8}} =$

o) $\dfrac{3}{3^{-2}} =$

p) $\dfrac{10^5}{10^{-3}} =$

q) $\dfrac{10^{-7}}{10^{-7}} =$

r) $\dfrac{10^{-3}}{10} =$

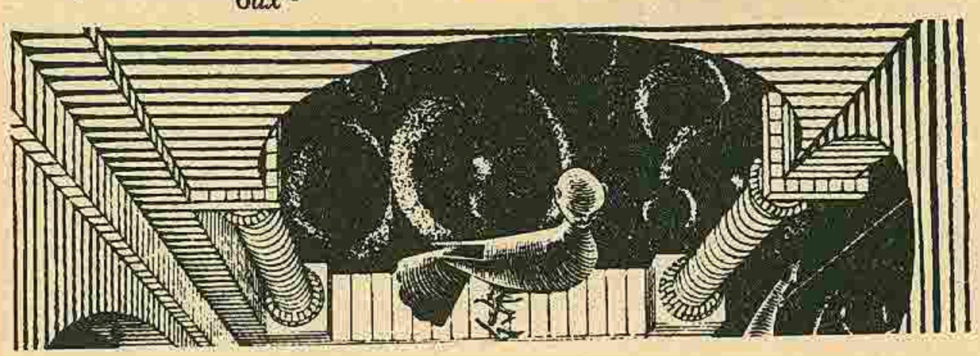
s) $\dfrac{f}{f^{-4}} =$

t) $\dfrac{15b^{-5}}{-3b^2} =$

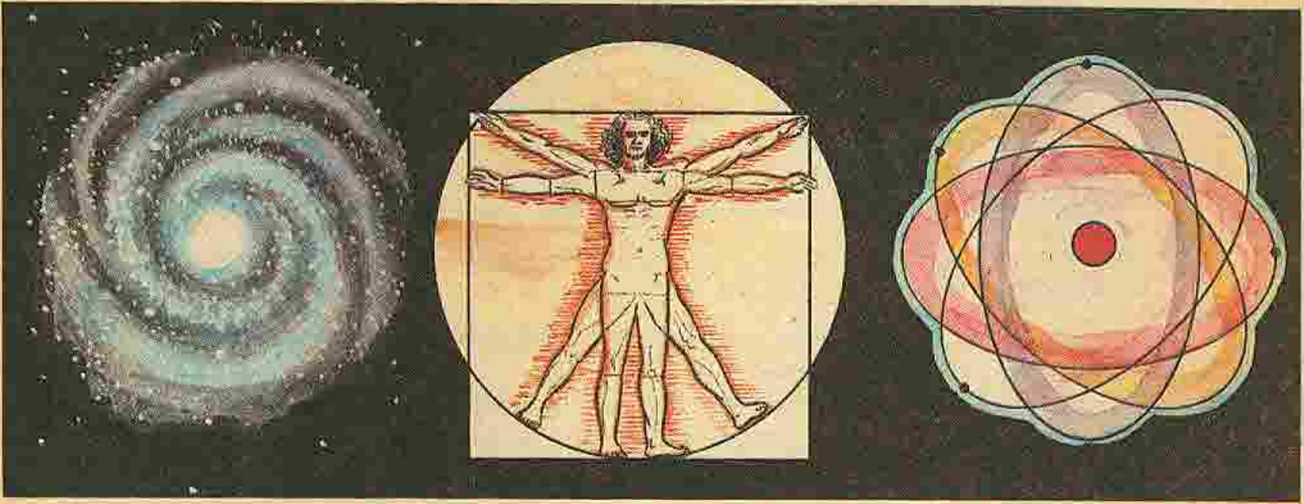
u) $\dfrac{x^{-4}\,y^6}{x^{-7}\,y^0} =$

v) $\dfrac{-20a^{-5}\,b^4}{-4a^3\,b^{-6}} =$

w) $\dfrac{12ax^4 + 6ax^{-3} - 18ax^{-2}}{6ax^{-2}} =$



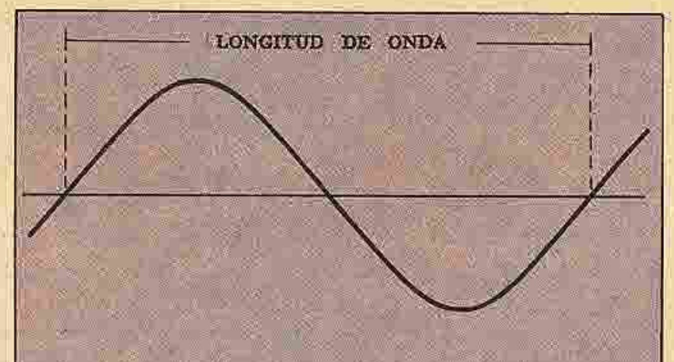
6. Notación científica



En sus actividades diarias, tanto en la ciencia como en la técnica, la industria, el comercio, etcétera, el hombre frecuentemente se ve en la necesidad de emplear números para describir situaciones y hechos. Y en muchas ocasiones esos números son muy grandes o muy pequeños, como se aprecia en los siguientes ejemplos:

Ejemplo. Los astrónomos miden las enormes distancias que hay entre los astros tomando como unidad el "parsec". Esta unidad equivale a 30 800 000 000 000 de kilómetros.

Ejemplo. Los rayos *x* que se usan para obtener radiografías del cuerpo humano son ondas electromagnéticas. En el dibujo de abajo se muestra un esquema de tales ondas



La longitud de onda de los rayos X es de .000 000 001 centímetros.

Ejemplo. En 22 400 centímetros cúbicos de gas helio se encuentran 602 000 000 000 000 000 000 000 átomos de esa sustancia. ¿Cuántos átomos de helio hay en 1 centímetro cúbico?

Para responder a la pregunta anterior es necesario hacer el siguiente cálculo:

$$\frac{602\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000}{22\,400} =$$

Por supuesto, esta división se puede efectuar con el procedimiento que usted conoce. Pero resulta muy engorroso hacerlo así. ¿Gusta usted intentarlo?

A continuación vamos a estudiar una forma cómoda de representar algunos números muy grandes o muy pequeños y veremos cómo se simplifica el trabajo al realizar cálculos con ellos. Para eso tomaremos como base los conocimientos que hemos adquirido sobre notación exponencial.

Potencias enteras del número 10.

En el estudio que vamos a realizar manejaremos constantemente las potencias enteras del número 10.

Los siguientes ejercicios tienen como finalidad familiarizarnos con las diversas formas en que pueden presentarse dichas potencias.

Ejercicio 13. Tal como se hace en b), represente en notación exponencial los siguientes números. En todos los casos la base debe ser el número 10.

a) $10 =$ b) $100 = \boxed{10^2}$ c) $1\,000 =$

d) $10\,000 =$ e) $100\,000 =$

f) $1\,000\,000 =$ g) $10\,000\,000 =$

h) $1\,000\,000\,000 =$ i) $1 =$

Ejercicio 14. Complete las igualdades tal como se hace en el inciso a).

a) $10^4 = \boxed{10\,000}$ b) $10^5 =$

c) $10^6 =$ d) $10^7 =$

e) $10^1 =$ f) $10^0 =$

g) $10^n = \boxed{1\underbrace{0\cdots0}_{n\ \text{ceros}}}$

Ejercicio 15. Complete usted las siguientes igualdades, tal como se hace en a).

a) $10^{-3} = \boxed{\dfrac{1}{10^3} = \dfrac{1}{1\,000}}$

b) $10^{-2} =$ c) $10^{-1} =$

d) $10^{-4} =$ e) 10^{-6}

f) $10^{-5} =$ g) $10^{-9} =$

h) Si n es un número natural, entonces

$$10^{-n} =$$

Ejercicio 16. Complete las siguientes igualdades, tal como se hace en algunos incisos.

a) $.01 = \boxed{\frac{1}{100} = \frac{1}{10^2} = 10^{-2}}$

b) $.001 =$ c) $.1 =$

d) $.0001 =$ e) $.00001 =$

f) $.000001 =$ g) $.000\,000\,001 =$

h) $10^{-3} = \boxed{\frac{1}{1\,000} = .001}$ i) $10^{-1} =$

j) $10^{-4} =$ k) $10^{-2} =$

l) $10^{-7} =$ m) $10^{-8} =$

Producto de un número por una potencia de 10.

Es fácil efectuar "abreviadamente" aquellas multiplicaciones en las cuales uno de los factores es potencia de 10. Observe bien los siguientes ejemplos y luego resuelva el ejercicio.

Ejemplo.

a) $3\,825 \times 10^4 = 3\,825\underbrace{0000}$

Se aumentaron $\boxed{4}$ ceros.

b) $72 \times 10^6 = 72\,\underbrace{000\,000}$

Se aumentaron $\boxed{6}$ ceros.

c) $8.52 \times 10^4 = 85\,200.$

El punto decimal se "corrió" $\boxed{4}$ lugares a la derecha.

d) $.02736 \times 10^{3} = 27.36$

El punto decimal se "corrió" 3 lugares a la derecha.

Ejercicio 17. Efectúe las siguientes multiplicaciones en forma abreviada.

a) $3 \times 10^{3} =$ ____ b) $8 \times 10^{4} =$ ____

c) $5 \times 10^{0} =$ ____ d) $9 \times 10^{2} =$ ____

e) $95 \times 10^{6} =$ ____ f) $342 \times 10^{2} =$ ____

g) $3874 \times 10^{1} =$ ____ h) $86.7 \times 10^{2} =$ ____

i) $3.42 \times 10^{3} =$ ____ j) $3.05 \times 10^{4} =$ ____

k) $1.2 \times 10^{4} =$ ____ l) $21.478 \times 10^{5} =$ ____

m) $.0867 \times 10^{4} =$ ____ n) $.04 \times 10^{3} =$ ____

o) $.000367 \times 10^{1} =$ ____ p) $.000367 \times 10^{3} =$ ____

¿Recuerda usted el procedimiento para dividir "abreviadamente" un número entre 10, 100, 1000, etc.? Observe usted las divisiones y multiplicaciones de los siguientes ejemplos. Después resuelva el ejercicio.

Ejemplo.

a) $567 \times 10^{-2} = 567 \times \frac{1}{10^{2}} = \frac{567}{100} = 5.67$

El punto decimal se corrió 2 lugares a la izquierda.

b) $0.48 \times 10^{-3} = .048 \times \frac{1}{1\,000} = \frac{.048}{1\,000} = .000048$

El punto decimal se corrió 3 lugares a la izquierda.

c) $43.9 \times 10^{-2} = \boxed{\frac{43.9}{100} = .439}$

El punto decimal se corrió 2 lugares a la izquierda.

Ejercicio 18. Simplifique las siguientes expresiones como en los ejemplos de arriba.

a) $36 \times 10^{-1} =$ ___ b) $875 \times 10^{-2} =$ ___

c) $35 \times 10^{-3} =$ ___ d) $398 \times 10^{-5} =$ ___

e) $6.3 \times 10^{-2} =$ ___ f) $7.6 \times 10^{-4} =$ ___

g) $3.875 \times 10^{-5} =$ ___ h) $896.7 \times 10^{-1} =$ ___

i) $125.73 \times 10^{-4} =$ ___ j) $.086 \times 10^{-3} =$ ___

Notación científica

Cuando un número se expresa como el producto de cualquier potencia de 10 por otro número mayor de 1 y menor que 10, se dice que tal número está expresado en notación científica.

Ejemplo. Los siguientes números están expresados en notación científica.

$$3.68 \times 10^{2}$$
$$6.32 \times 10^{-5}$$
$$9 \times 10^{-8}$$
$$1.017 \times 10^{6}$$

Ejemplo. Los siguientes números no están expresados en notación ciencientífica.

$$60 \times 10^{3}$$
$$.1 \times 10^{5}$$
$$74.5 \times 10^{-3}$$

Para expresar cualquier número en notación científica se puede seguir un procedimiento como el que se ilustra en el ejemplo siguiente.

Ejemplo.

a) $4\,850 = \frac{4\,850}{1\,000} \times 1\,000 = \boxed{4.850 \times 10^{3}}$

b) $578.5 = \frac{578.5}{100} \times 100 = \boxed{5.785 \times 10^{2}}$

c) $.125 = .125 \times 10 \times \frac{1}{10} = \boxed{1.25 \times 10^{-1}}$

d) $.00814 = .00814 \times 1\,000 \times \frac{1}{1\,000} = \boxed{8.14 \times 10^{-3}}$

e) $.000015 = .000015 \times 10^{5} \times 10^{-5} = \boxed{1.5 \times 10^{-5}}$

En los ejemplos anteriores compare usted las dos formas de describir a un número. Observe usted la posición del punto decimal en ambas representaciones y relacione esta observación con el exponente de la potencia de 10.

Ejercicio 19. Represente en notación científica los siguientes números.

a) 36 000 b) 850 000

c) 56 000 000 d) 8

e) 50 000 000 000 f) 85 300

g) 9.875 h) 8597.2

i) .025 j) .00397

k) .000000031 l) .000000003

Ejercicio 20. Represente los siguientes números en notación decimal.

a) 5×10^3 b) 1.8×10^4 c) 6.36×10^7

d) 1.501×10^3 e) 5.25×10^8 f) 6.384×10^2

g) 1.7×10^{-3} h) 3.25×10^{-4} i) 3.6×10^{-1}

j) 9.9×10^{-10}

Ejercicio 21. Complete el siguiente cuadro, que muestra las distancia medias aproximadas de los planetas de nuestro sistema al Sol.

DISTANCIA AL SOL
(en kilómetros)

Planeta	Notación decimal	Notación científica
Mercurio	58 000 000	
Venus		1.08×10^8
Tierra	150 000 000	
Marte		2.3×10^8
Júpiter	780 000 000	
Saturno	1 400 000 000	
Urano		2.9×10^9
Neptuno	4 500 000 000	
Plutón		5.9×10^9

Ejercicio 22. Complete el cuadro siguiente, donde se muestran diversas medidas de algunas partículas atómicas.

Dato	N. científica	Notación decimal
Diámetro de un neutrón	1.5×10^{-13} cm	
Masa de un neutrón	1.7×10^{-24} g	
Diámetro de un electrón		.0000000000000056 cm
Masa de un electrón		.00000000000000000000000000091 g
Diámetro de un protón	1.8×10^{-14} cm	
Masa de un protón	1.7×10^{-24} g	

La notación científica en las operaciones

La notación que estamos ahora usando, además de simplificar la representación de números muy grandes o muy pequeños, permite efectuar algunos cálculos de manera muy simple. Observe usted los siguientes ejemplos y resuelva los ejercicios.

Ejemplo.

a) $58\,000 \times 3\,600 = 5.8 \times 10^4 \times 3.6 \times 10^3 = 5.8 \times 3.6 \times 10^7 =$

$= 20.88 \times 10^7 = \boxed{2.088 \times 10^8} = 208\,800\,000$

b) $32\,000 \times .0027 = 3.2 \times 10^4 \times 2.7 \times 10^{-3} = 3.2 \times 2.7 \times 10^1 =$

$= \boxed{8.64 \times 10^1} = 86.4$

c) $.000018 \times .0003 = 1.8 \times 10^{-5} \times 3 \times 10^{-4} = \boxed{5.4 \times 10^{-9}} =$

$= .0000000054$

Ejercicio 23. Efectúe las siguientes operaciones en su cuaderno.

a) $37\,000\,000 \times 1\,500\,000$

b) $30\,000\,000 \times 3\,600\,000\,000$

c) $27\,000\,000 \times .05$

d) $.00011 \times 3\,000\,000$

e) $.000008 \times .00012$

f) $.000013 \times .0046$

g) $35\,000 \times 8\,000 \times 5\,000$

h) $80\,000\,000 \times 40\,000 \times .00003$

De igual manera, usando la notación científica, se pueden simplificar los cálculos en la división.

a) $\dfrac{84\,000\,000}{7\,000} = \dfrac{8.4 \times 10^7}{7 \times 10^3} = \dfrac{8.4}{7} \times \dfrac{10^7}{10^3} = 1.2 \times 10^4 = \quad 12\,000$

b) $\dfrac{.048}{.00006} = \dfrac{4.8 \times 10^{-2}}{6 \times 10^{-5}} = \dfrac{4.8}{6} \times \dfrac{10^{-2}}{10^{-5}} = .8 \times 10^3 = \quad 800$

Ejercicio 24. Efectúe las operaciones que siguen y resuelva los problemas.

a) $\dfrac{36\,000\,000}{90\,000}$ b) $\dfrac{48\,000}{120\,000}$

c) $\dfrac{30\,000}{4\,000\,000}$ d) $\dfrac{2\,000\,000}{5\,000\,000}$

e) $\dfrac{99\,000}{.03}$ f) $\dfrac{7\,200\,000}{.0012}$

g) $\dfrac{.0016}{.0004}$ h) $\dfrac{.03045}{.00015}$

i) $\dfrac{3.6 \times 200 \times .3}{600 \times 1\,800}$ j) $\dfrac{30\,000 \times 1\,800 \times .005}{5\,000 \times 20\,000}$

Problemas.

1. Use la tabla de la página 66 y resuelva los siguientes problemas:

a) ¿Cuál es la razón de la distancia de Plutón al Sol entre la distancia de Mercurio al Sol?

b) Las distancias astronómicas se miden con una unidad equivalente a la distancia de la Tierra al Sol. Calcule usted, en esa unidad astronómica, las distancias al Sol de Plutón, Urano, Júpiter y Mercurio.

2. Usando los datos de la página 67 resuelva las siguientes cuestiones:

a) Los mesones pesados (μ-mesones), que son partículas atómicas, tienen una masa 270 veces mayor que la del electrón. Calcule la masa de uno de ellos.

b) La partícula llamada hiperón tiene una masa igual a la de 2 200 electrones. ¿Cuál es su masa?

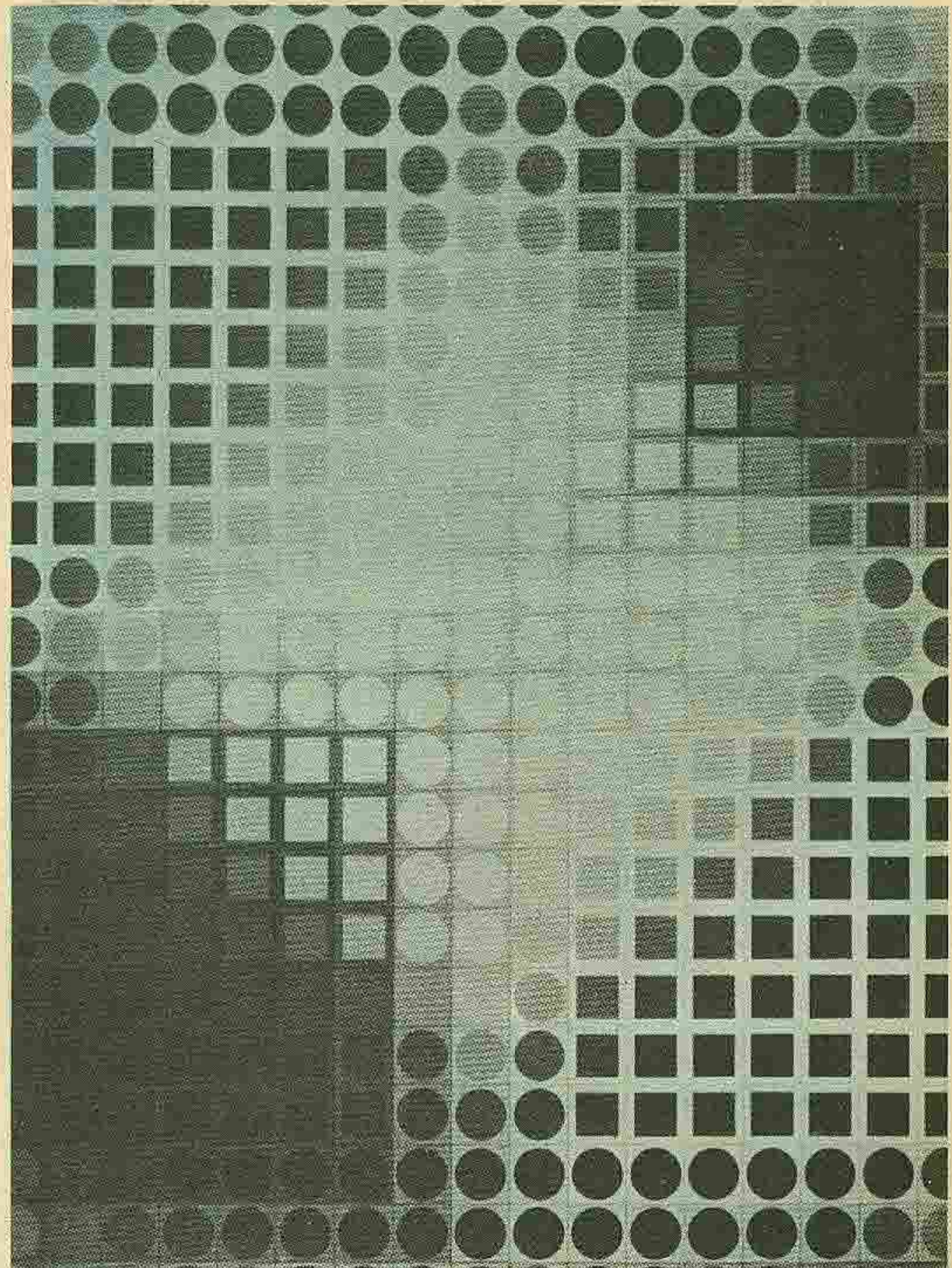
c) El neutrino tiene una masa de $\dfrac{1}{2\,000}$ de un electrón. ¿Cuál es su masa?

d) ¿Cuántas veces es mayor el diámetro del protón que el del electrón?

e) ¿Cuántas veces es menor la masa del electrón comparada con la del neutrón?

Capítulo tercero

Ecuaciones de segundo grado

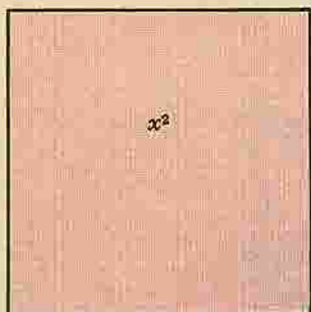


1. Ecuaciones de la forma $x^2 = r$

El ingeniero Ramírez se vio precisado en cierta ocasión a resolver el siguiente problema: ¿Cuánto mide por lado un terreno cuadrado cuya área es de 400 metros cuadrados?

Para resolver el problema hizo el siguiente razonamiento:

"Si llamamos x a la medida de un lado del terreno, tendremos que x elevada al cuadrado debe ser igual a 400".



Expresó esto de la siguiente manera:

$$\boxed{x^2 = 400}$$

Así el ingeniero Ramírez llegó a establecer lo que se llama una ecuación de segundo grado.

Como x es el número que elevado al cuadrado da 400, ese número es, por definición, la raíz cuadrada de 400.

Esto es,

$$x = \sqrt{400} = 20$$

Por eso, el ingeniero dio la siguiente respuesta:

"Ese terreno mide 20 metros por lado".

Comprobación.

$$\boxed{20^2 = 20 \times 20 = 400}$$

En virtud de que el problema se refiere a la longitud del lado de un cuadrado, la solución que da el ingeniero es la raíz cuadrada positiva de 400. Sin embargo, él sabe que la ecuación

$$x^2 = 400$$

también tiene por solución al número -20, que es la raíz cuadrada negativa de 400. $(-\sqrt{400} = -20)$.

Comprobación.

$$\boxed{(-20)^2 = (-20) \cdot (-20) = 400}$$

Observamos entonces que la ecuación de segundo grado, $x^2 = 400$, tiene dos soluciones. Lo mismo ocurre con cualquiera otra ecuación como ésa. Por ejemplo, la ecuación $x^2 = 25$, que nos pide hallar un número que elevado al cuadrado dé 25, tiene por soluciones la *raíz cuadrada de* 25 y la *raíz cuadrada negativa de* 25. Esto es, sus soluciones son el 5 y el -5 porque $\sqrt{25} = 5$ y $-\sqrt{25} = -5$.

Comprobación.

$$\boxed{5^2 = 5 \cdot 5 = 25}$$

$$\boxed{(-5)^2 = (-5) \cdot (-5) = 25}$$

Como la ecuación $x^2 = 25$ tiene dos soluciones, usaremos las siguientes expresiones para indicar este hecho:

$$\boxed{x_1 = 5}$$

$$\boxed{x_2 = -5}$$

Ejercicio 1. Encuentre las soluciones de cada ecuación y compruébelas.

a) $x^2 = 4$

$x_1 = \sqrt{} = $

$x_2 = -\sqrt{} = $

b) $x^2 = 36$

$x_1 = \sqrt{} = $

$x_2 = -\sqrt{} = $

c) $y^2 = 64$

$y_1 = \sqrt{} =$

$y_2 = -\sqrt{} =$

d) $a^2 = 121$

$a_1 = \sqrt{} =$

$a_2 = -\sqrt{} =$

e) $n^2 = 6.25$

$n_1 = \sqrt{} =$

$n_2 = -\sqrt{} =$

f) $x^2 = 10.24$

$x_1 = \sqrt{} =$

$x_2 = -\sqrt{} =$

En general,

La ecuación $x^2 = r$ en donde r es cualquier número positivo, tiene dos soluciones:

$$x_1 = \sqrt{r}$$

$$x_2 = -\sqrt{r}$$

Observación. Si r fuera un número negativo (como en la ecuación $x^2 = -9$) la ecuación no tendría ninguna solución con números reales, pues ningún número real elevado al cuadrado puede dar como resultado un número negativo.

En la realización de varios ejercicios de los que siguen será necesario calcular la raíz cuadrada de algunos números. A fin de facilitarle el trabajo se incluye al final del libro una tabla de raíces cuadradas con su correspondiente instructivo de manejo. Consulte usted esa tabla cada vez que lo crea conveniente.

Ejercicio 2. Resuelva usted las siguientes ecuaciones:

a) $x^2 = 2\,916$

$x_1 =$

$x_2 =$

b) $y^2 = 1\,225$

$y_1 =$

$y_2 =$

c) $n^2 = 46$

$n_1 =$

$n_2 =$

d) $r^2 = 125$

$r_1 =$

$r_2 =$

e) $s^2 = 1.69$

$s_1 =$

$s_2 =$

f) $k^2 = 3.24$

$k_1 =$

$k_2 =$

g) $b^2 = 5$

$b_1 =$

$b_2 =$

h) $c^2 = 19$

$c_1 =$

$c_2 =$

i) $x^2 = 0$

$x_1 =$

$x_2 =$

Observación. Note usted que en la última ecuación las soluciones son $\sqrt{0}$ y $-\sqrt{0}$. Como $\sqrt{0} = -\sqrt{0} = 0$, tenemos que esta ecuación en realidad tiene solamente una solución: el cero.

Si nos presentan una ecuación como $x^2 - 25 = 0$, también podemos hallar sus soluciones. Basta con sumar 25 a sus dos miembros para hallar la ecuación $x^2 = 25$; que ya sabemos resolver y que tiene las mismas soluciones que la ecuación dada.

$$x^2 - 25 = 0$$

$$x^2 - 25 + 25 = 0 + 25$$

$$\boxed{x^2 = 25}$$

Ejercicio 3. Resuelva las ecuaciones siguientes y compruebe sus soluciones.

a) $x^2 - 16 = 0$

$x_1 =$

$x_2 =$

b) $y^2 - 36 = 0$

$y_1 =$

$y_2 =$

c) $n^2 - 3.24 = 0$

$n_1 =$

$n_2 =$

d) $r^2 - 1.69 = 0$

$r_1 =$

$r_2 =$

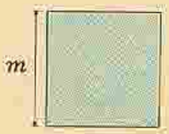
Ejercicio 4. Utilice ecuaciones para encontrar la longitud del lado de cada uno de los siguientes cuadrados.

a) 

Area: 81 metros cuadrados.

Ecuación:

Medida del lado:

b) 

Area: 144 metros cuadrados.

Ecuación:

Medida del lado:

c) 

Area: 73.96 metros cuadrados.

Ecuación:

Medida del lado:

d) 

Area: 9.61 centímetros cuadrados.

Ecuación:

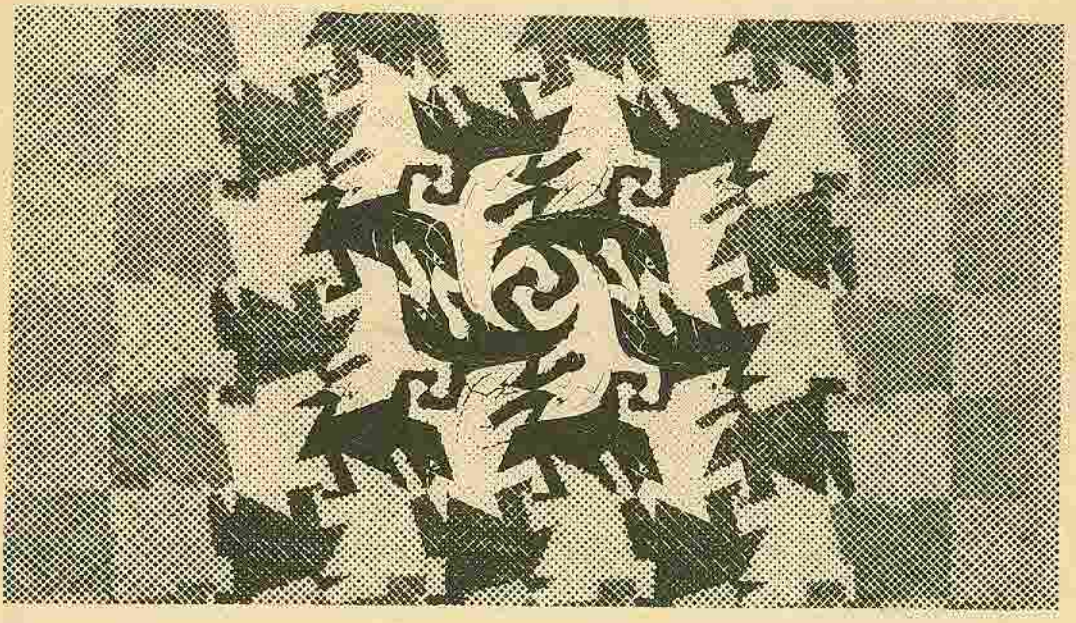
Medida del lado:

e) 

Area: 3.61 kilómetros cuadrados.

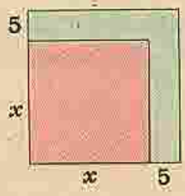
Ecuación:

Medida del lado:



2. Ecuaciones de la forma $(x + d)^2 = r$

Problema. La siguiente ilustración corresponde a un terreno cuadrado cuya área es de 625 metros cuadrados. Se desea ocupar sólo la parte que aparece en color rojo. Si x es la medida del lado de ese cuadrado rojo, ¿cuánto vale x?



Area: 625 m²

Resolución.

Sabemos que el lado del terreno completo es $x + 5$ y su área es 625 m². Entonces, podemos establecer la ecuación

$$\boxed{(x + 5)^2 = 625}$$

Si resolvemos esta ecuación sabremos cuánto vale x, y podremos dar la respuesta al problema.

La ecuación establece que el número $x + 5$ elevado al cuadrado da 625, por consiguiente, el número $x + 5$ es la raíz cuadrada de 625. Esto es,

$$\boxed{x + 5 = \sqrt{625}}$$

En esta expresión encontramos que x es el número 20:

$$x + 5 = \sqrt{625}$$

$$x + 5 = 25$$

$$\boxed{x = 20}$$

Pero, por lo que sabemos, el número $x + 5$ también es la raíz cuadrada negativa de 625. Esto es,

$$\boxed{x + 5 = -\sqrt{625}}$$

Y en esta expresión encontramos que x es el número -30.

$$x + 5 = -\sqrt{625}$$

$$x + 5 = -25$$

$$\boxed{x = -30}$$

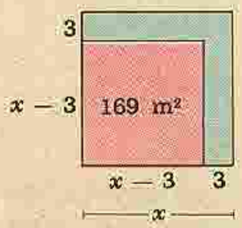
Por consiguiente, la ecuación de segundo grado $(x + 5)^2 = 625$ tiene dos soluciones: $\boxed{x_1 = 20}$ y $\boxed{x_2 = -30.}$ (Puede usted comprobarlo.)

En virtud de que el problema se refiere a la longitud de un cuadrado, tenemos que descartar la solución negativa. Por eso la respuesta al problema será como sigue:

Respuesta. El valor de x es 20 metros.

Analicemos ahora el siguiente problema, que es análogo al anterior.

Problema. En la ilustración siguiente, el área del cuadrado rojo es 169 metros cuadrados. ¿Cuánto mide el lado del cuadrado mayor?



Resolución. Puesto que el lado del cuadrado rojo es $x - 3$ y su área es 169 m², podemos establecer la ecuación

$$\boxed{(x - 3)^2 = 169}$$

Ahora, si resolvemos esta ecuación sabremos el valor de x; es decir, econtraremos la medida del lado del cuadrado mayor.

Si $x - 3$ elevado al cuadrado da 169, entonces $x - 3$ es, por definición, la raíz cuadrada, o bien la raíz cuadrada negativa de 169.

$$\boxed{x - 3 = \sqrt{169}}$$

o bien,
$$\boxed{x - 3 = -\sqrt{169}}$$

Si $x - 3 = \sqrt{169}$, entonces x es el número 16:

$$x - 3 = \sqrt{169}$$
$$x - 3 = 13$$
$$\boxed{x = 16}$$

Si $x - 3 = -\sqrt{169}$, entonces x es el número -10:

$$x - 3 = -\sqrt{169}$$
$$x - 3 = -13$$
$$x = -10$$

Como vemos, las soluciones de la ecuación $(x - 3)^2 = 169$ son: $\boxed{x_1 = 16}$ y $\boxed{x_2 = -10}$

La respuesta al problema será:

Respuesta. El lado del cuadrado mayor mide 16 metros.

Ejercicio 5. Encuentre el valor de x en cada uno de los siguientes cuadrados.

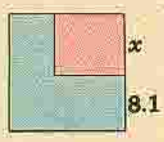
a)

Area total: 196 metros cuadrados.
$x =$

b)

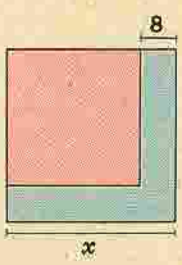
Area total: 225 metros cuadrados .
$x =$

c)



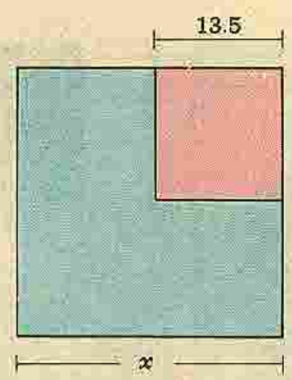
Area total: 420.2 metros cuadrados.
$x =$

d)



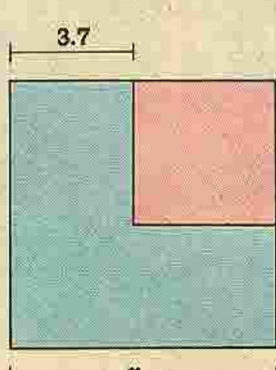
Area del cuadrado rojo: 484 metros cuadrados. $x =$

e)



Area del cuadrado rojo:
210.2 metros cuadrados.
$x =$

f)



Area del cuadrado rojo:
18.49 metros cuadrados.
$x =$

Ejercicio 6. Resuelva las siguientes ecuaciones de segundo grado.

a) $(x + 3)^2 = 196$ $x_1 =$

$x_2 =$

b) $(y + 1)^2 = 72.25$ $y_1 =$

$y_2 =$

c) $(n + 9)^2 = 576$ $n_1 =$

$n_2 =$

d) $(x - 6)^2 = 144$ $x_1 =$

$x_2 =$

e) $(x - 3.5)^2 = 121$ $x_1 =$

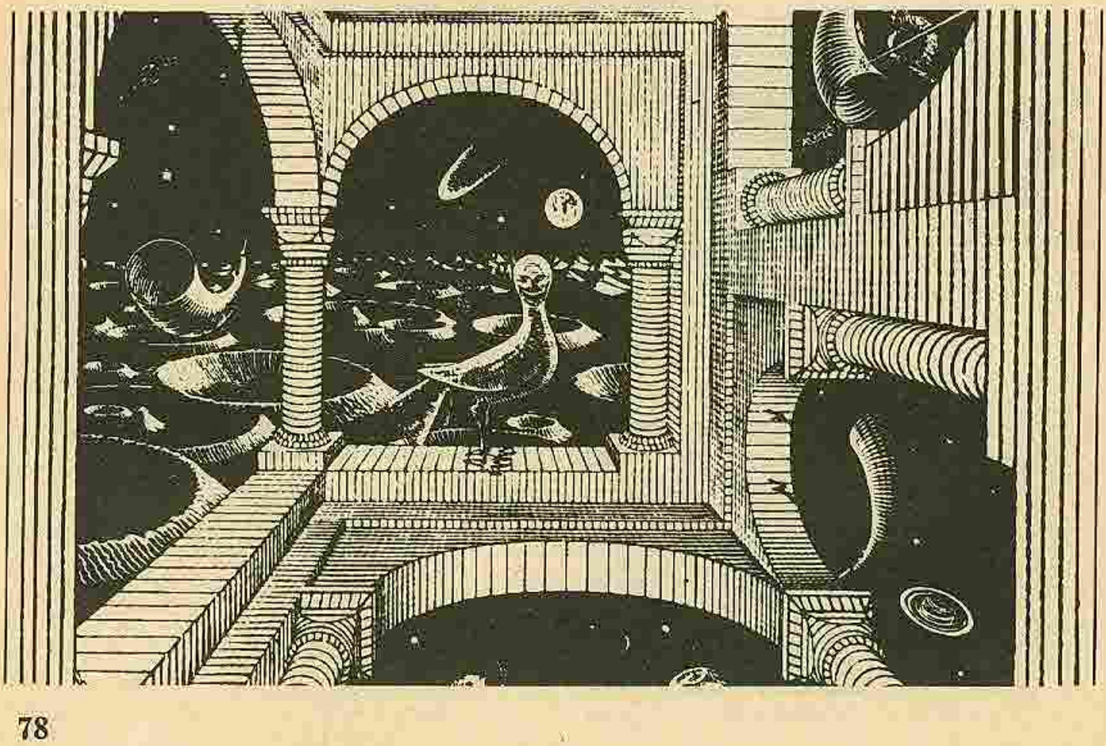
$x_2 =$

f) $(r - .1)^2 = 53.29$ $r_1 =$

$r_2 =$

g) $(y - 2)^2 = 18.49$ $y_1 =$

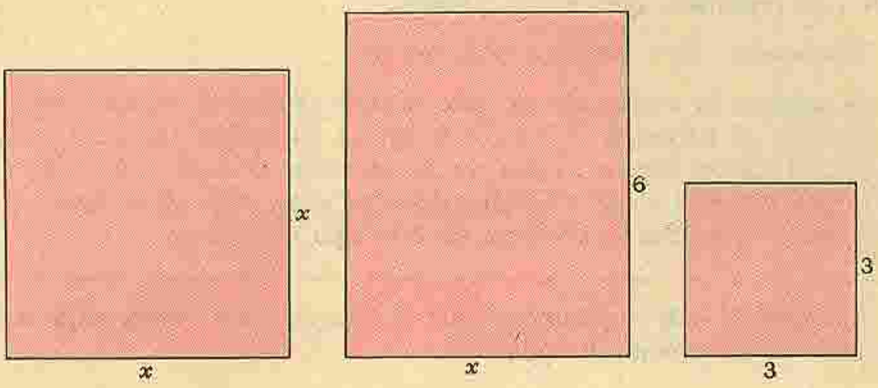
$y^2 =$



3. Ecuaciones de la forma $x^2 + 2dx + d^2 = r$

En el párrafo anterior hemos aprendido a resolver ecuaciones de la forma $(x + d)^2 = r$. Este conocimiento nos servirá para resolver otras ecuaciones de segundo grado, como la que se usa en la resolución del problema siguiente.

Problema. La suma de las áreas de los tres rectángulos que se ilustran es 64 metros cuadrados. ¿Cuál es el valor de x?



Resolución

El área del primer rectángulo es $\boxed{x^2}$

El área del segundo rectángulo es $\boxed{6x}$

El área del tercer rectángulo es $\boxed{9}$

Y, como la suma de estas áreas es 64, podemos establecer la ecuación

$$\boxed{x^2 + 6x + 9 = 64}$$

Si resolvemos esta ecuación tendremos la solución al problema.

Hasta el momento no sabemos cómo resolver una ecuación de éstas. Sin embargo, si podemos escribirla en la forma $(x + d)^2 = r$ nos será fácil hallar sus soluciones.

En uno de los ejercicios del capítulo anterior vimos que

$$\boxed{(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9}$$

Por consiguiente podemos escribir la ecuación

$$\boxed{x^2 + 6x + 9 = 64}$$

en la forma

$$\boxed{(x + 3)^2 = 64}$$

Ya sabemos resolver ecuaciones como ésta. En este caso encontramos que sus soluciones son: $\boxed{x_1 = 5}$ y $\boxed{x_2 = -11}$

Comprobación

Si $x = 5$, entonces,

$$x^2 + 6x + 9 = (5)^2 + 6(5) + 9 = 25 + 30 + 9 = \boxed{64}$$

Si $x = -11$, entonces,

$$x^2 + 6x + 9 = (-11)^2 + 6(-11) + 9 = 121 + (-66) + 9 = \boxed{64}$$

A pesar de que la ecuación tiene dos soluciones, el problema sólo admite una respuesta, que es la siguiente:

Respuesta. El valor de x es 5 metros.

Si analiza la resolución de este último problema notará usted que al sustituir el trinomio $x^2 + 6x + 9$ por la expresión $(x + 3)^2$, resultó muy fácil hallar las soluciones de la ecuación $x^2 + 6x + 9 = 64$. Conviene que resuelva usted los siguientes ejercicios, pues ellos tienen como finalidad proporcionarle destreza en este tipo de trabajo.

Ejercicio 7. De los números que se dan en cada inciso, elija el que complete correctamente la igualdad.

1) $(x + \square)^2 = x^2 + 10x + 25$

a) 10 b) 25 c) 5

2) $(y + \square)^2 = y^2 + 8y + 16$

a) 16 b) 4 c) 8

3) $(n - \square)^2 = n^2 - 12n + 36$

a) 6 b) 12 c) 36

4) $(x - \square)^2 = x^2 - 20x + 100$

a) 10 b) -10 c) -20

5) $x^2 + 2x + 1 = (x + \square)^2$

a) 2 b) 1 c) -1

6) $y^2 - y + \frac{1}{4} = (y - \square)^2$

a) -1 b) $-\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{2}$

7) $x^2 + 1.4x + .49 = (x + \square)^2$

a) 1.4 b) .7 c) $-.7$

Ejercicio 8. Resuelva las siguientes ecuaciones y compruebe sus soluciones.

a) $x^2 + 10x + 25 = 49$

$x_1 =$

$x_2 =$

b) $y^2 + 8y + 16 = 9$

$y_1 =$

$y_2 =$

c) $n^2 - 12n + 36 = 81$

$n_1 =$

$n_2 =$

d) $x^2 - 20x + 100 = 64$

$x_1 =$

$x_2 =$

e) $x^2 + 1.4x + .49 = 1.44$

$x_1 =$

$x_2 =$

f) $y^2 - y + \frac{1}{4} = \frac{9}{16}$

$y_1 =$

$y_2 =$

En cada una de las ecuaciones resueltas en el ejercicio anterior, el trinomio que aparece como primer miembro es de la forma

$$\boxed{x^2 + 2dx + d^2}$$

Observamos en estos trinomios que:

El término independiente es el cuadrado de la mitad del coeficiente de x.

En efecto, el coeficiente de x es $2d$; la mitad es d y el término independiente es d^2.

$$x^2 + 2dx + d^2$$

coeficiente de x

término independiente

Ejemplo. En el trinomio $x^2 + 10x + 25$ tenemos que

$$x^2 + 10x + 25$$

La mitad del coeficiente de x es 5.

El término independiente es 5^2.

Ejemplo. En el trinomio $n^2 - 12n + 36$ tenemos que

$$n^2 - 12n + 36$$

La mitad del coeficiente de n es -6.

El término independiente es $(-6)^2$.

Todo trinomio de la forma

$$x^2 + 2dx + d^2$$

Se puede escribir en la forma

$$(x + d)^2$$

pues

$$\boxed{(x + d)^2} = (x + d)(x) + (x + d)(d) =$$

$$= x^2 + dx + dx + d^2 =$$

$$= \boxed{x^2 + 2dx + d^2}$$

En la expresión

$$x^2 + 2dx + d^2 = (x + d)^2$$

se observa que

$$x^2 + 2dx + d^2 = (x + d)^2$$

La mitad del coeficiente de x es d.

La observación de este hecho nos permitirá encontrar rápidamente la expresión $(x + d)^2$ que corresponde a un trinomio como los que estamos viendo.

Ejemplo.

$$x^2 - 20x + 100$$

La mitad del coeficiente de x es -10.

Por lo tanto,

$$x^2 - 20x + 100 = (x - 10)^2$$

Comprobación.

$$\begin{aligned}(x - 10)^2 = (x - 10)(x - 10) &= (x - 10)(x) + (x - 10)(-10)\\ &= x^2 - 10x - 10x + 100\\ &= \boxed{x^2 - 20x + 100}\end{aligned}$$

Ejemplo.

$$x^2 + 1.4x + .49 = (x + .7)^2$$

La mitad del coeficiente de x es .7

Comprobación. (Hágala usted.)

Ejercicio 9. Encierre en un rectángulo los trinomios que se pueden poner en la forma $(x + d)^2$

a) $x^2 + 22x + 121$ b) $n^2 - 4n + 4$

c) $y^2 + .8x + .16$ d) $x^2 - .6x + .9$

e) $x^2 + .6x + .09$ f) $y^2 - y + \frac{1}{4}$

g) $x^2 - x - \frac{1}{4}$ h) $r^2 + \frac{2}{3}r + \left(\frac{2}{6}\right)^2$

Ejercicio 10. Escriba en la forma $(x + d)^2$ los trinomios que marcó en el ejercicio anterior.

Ejercicio 11. Resuelva las siguientes ecuaciones.

a) $x^2 - 10x + 25 = 289$ b) $x^2 + 14x + 49 = 529$

c) $x^2 + 3.4x + 2.89 = 196$ d) $y^2 - 12y + 36 = 13.69$

e) $a^2 - 10.4a + 27.04 = 14.44$ f) $r^2 + 10.6r + 28.09 = 75.69$

g) $z^2 + 1.6z + .64 = .36$ h) $t^2 - \frac{8}{3}t + \frac{16}{9} = \frac{25}{9}$

Ejercicio 12. Complete los trinomios de tal manera que puedan ponerse en la forma $(x + d)^2$

a) $x^2 + 6x + \square$ b) $y^2 + 16x + \square$

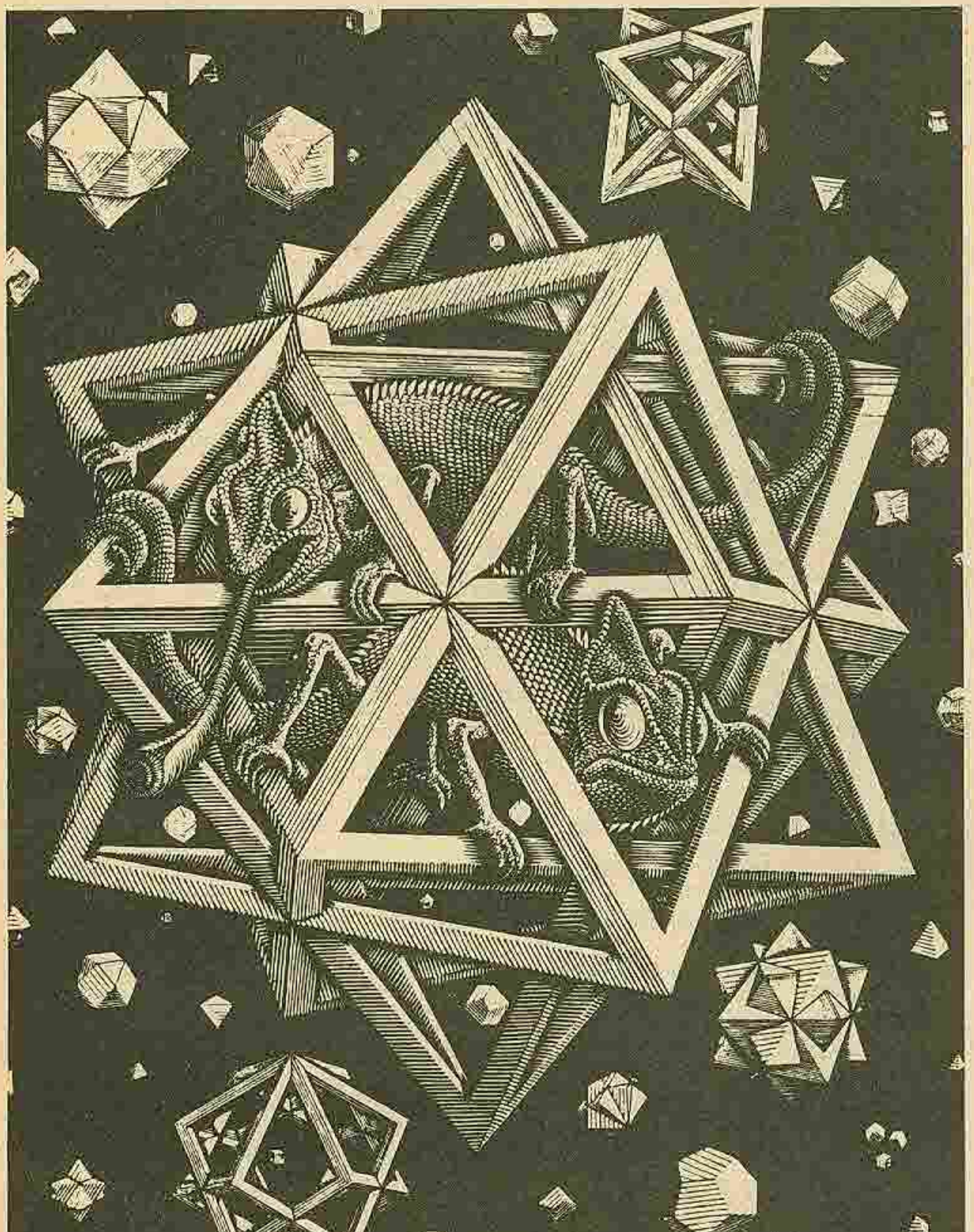
c) $x^2 - 10x + \square$ d) $x^2 - 12x + \square$

e) $p^2 + 3p + \square$ f) $z^2 - 5z + \square$

g) $y^2 - 26y + \square$ h) $x^2 + 30x + \square$

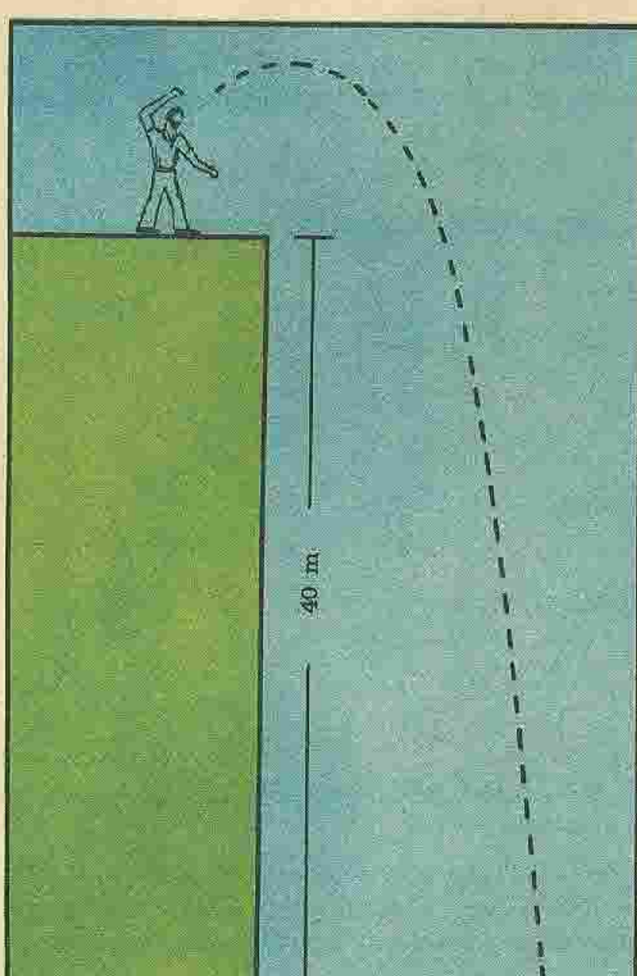
i) $x^2 + 1.2x + \square$ j) $x^2 - .2x + \square$

El trabajo que se ha realizado en este último ejercicio suele llamarse **"completar el cuadrado"**. Más adelante vamos a emplear este procedimiento en la resolución de algunas ecuaciones de segundo grado.



4. La ecuación general de segundo grado

En el planteamiento del siguiente problema se presenta una ecuación de segundo grado que es de un tipo diferente a los que hemos estudiado hasta ahora. En la resolución de tal ecuación será necesario aplicar mucho de lo que hemos estudiado con anterioridad.



Problema. Desde un edificio de 40 metros de altura un hombre arroja una piedra (ver la figura) con una velocidad de 10 metros por segundo.

¿Cuánto tiempo tarda en llegar la piedra hasta el suelo desde el momento en que es arrojada?

Resolución. En física hay una fórmula para hallar, aproximadamente, el tiempo (t) que tarda en llegar la piedra hasta el suelo, en las condiciones anotadas. Tal fórmula es:

$$\boxed{5t^2 - 10t - 40 = 0}$$

Al resolver esta ecuación de segundo grado sabremos el valor de t y, por lo tanto, habremos resuelto el problema.

Para resolverla procedemos así:

1) Dividimos ambos miembros de la ecuación entre 5, (que es el coeficiente de t^2) y obtenemos una ecuación con las mismas soluciones que la ecuación original.

$$\frac{5t^2 - 10t - 40}{5} = \frac{0}{5}$$

Simplificando obtenemos:

$$t^2 - 2t - 8 = 0$$

Esta ecuación no la podemos resolver con el procedimiento que conocemos, porque el trinomio $t^2 - 2t - 8$ no es de la forma $x^2 + 2dx + d^2$. (Compruébelo.)

2) Sumamos a los dos miembros de la ecuación el inverso aditivo del término independiente

$$t^2 - 2t - 8 + 8 = 0 + 8$$

y simplificando tenemos:

$$t^2 - 2t = 8$$

Con los términos del primer miembro de esta ecuación podemos obtener un trinomio de la forma $x^2 + 2dx + d^2$, "completando el cuadrado"

$$t^2 - 2t + \boxed{1}$$

3) Sumamos a ambos miembros de la ecuación $t^2 - 2t = 8$ el número $\boxed{1}$ y tenemos así la ecuación

$$t^2 - 2t + \boxed{1} = 8 + \boxed{1}$$

O sea,

$$t^2 - 2t + 1 = 9$$

4) Escribimos esta ecuación en la forma

$$(t - 1)^2 = 9$$

5) La resolvemos. Sus soluciones son:

$$\boxed{t_1 = 4}$$

$$\boxed{t_2 = -2}$$

Dadas las condiciones del problema, descartamos la solución negativa y damos la respuesta siguiente:

Respuesta. La piedra tarda 4 segundos en llegar al suelo.

Este procedimiento que hemos seguido en la resolución de la ecuación $5t^2 - 10t - 40 = 0$ nos servirá para resolver cualquier otra ecuación del mismo tipo.

Ejemplo. Resolvamos la ecuación

$$\boxed{4x^2 - 24x + 20 = 0}$$

1) Dividimos sus dos miembros entre el coeficiente de x^2.

$$\frac{4x^2 - 24x + 20}{4} = \frac{0}{4}$$

$$\boxed{x^2 - 6x + 5 = 0}$$

2) Sumamos a los dos miembros el inverso aditivo del término independiente.

$$x^2 - 6x + 5 + (-5) = 0 + (-5)$$

$$x^2 - 6x = -5$$

3) Completamos el cuadrado en el primer miembro de la ecuación

$$x^2 - 6x + \ \ 9 \ = -5 + \ \ 9$$

$$x^2 - 6x + 9 = 4$$

4) Escribimos la ecuación en la forma $(x + d)^2 = r$

$$(x - 3)^2 = 4$$

5) Resolvamos la ecuación

$$\boxed{x_1 = 5}$$

$$\boxed{x_2 = 1}$$

Ejercicio 13. Resuelva las siguientes ecuaciones:

a) $3x^2 + x - 2 = 0$ $\quad x_1 = \quad x_2 =$

b) $2x^2 - 14x + 20 = 0$ $\quad x_1 = \quad x_2 =$

c) $2x^2 - 3x - 2 = 0$ $\quad x_1 = \quad x_2 =$

d) $6x^2 + x - 1 = 0$ $\quad x_1 = \quad x_2 =$

e) $2x^2 - 8x - 120 = 0$ $\quad x_1 = \quad x_2 =$

f) $4x^2 - 11x - 3 = 0$ $\quad x_1 = \quad x_2 =$

g) $x^2 + 7x + 12 = 0$ $\quad x_1 = \quad x_2 =$

h) $x^2 + 2x - 3 = 0$ $\quad x_1 = \quad x_2 =$

i) $-2x^2 + 3x - 1 = 0$ $\quad x_1 = \quad x_2 =$

j) $3x^2 - 2x - 5 = 0$ $\quad x_1 = \quad x_2 =$

k) $-15x^2 + 2x + 24 = 0$ $\quad x_1 = \quad x_2 =$

l) $4x^2 - 27.6x - 124 = 0$ $\quad x_1 = \quad x_2 =$

m) $3x^2 - 15x + 15.75 = 0$ $\quad x_1 = \quad x_2 =$

n) $5x^2 - 11x - 180 = 0$ $\quad x_1 = \quad x_2 =$

Todas las ecuaciones que se han resuelto en el ejercicio anterior son de la forma

$$(\text{un número})\ x^2 + (\text{un número})\ x + \text{un número} = 0$$

Si llamamos a al coeficiente de x^2, b al coeficiente de x y c al término independiente, podemos decir que esas ecuaciones están en la forma

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0}$$

A esta última expresión se le acostumbra dar el nombre de ecuación general de segundo grado.

En la resolución de problemas no siempre aparecen en esta forma las ecuaciones de segundo grado. En casos así es conveniente poner tal ecuación en su forma general, para conocer los valores específicos de a, b y c.

Ejemplo. La siguiente ecuación no está en su forma general.

$$5x^2 = 3x - 8$$

Para escribirla en su forma general tenemos que sumar a sus dos miembros el inverso aditivo de $3x$ y el inverso aditivo de -8.

$$5x^2 + (-3x) + 8 = 3x - 8 + (-3x) + 9$$

$$\boxed{5x^2 - 3x + 8 = 0}$$

Escrita en esta forma vemos que

$a = 5$ $\qquad$ $b = -3$ $\qquad$ $c = 8$

$$\underset{\underset{a}{\uparrow}}{5x^2} - \underset{\underset{b}{\uparrow}}{3x} + \underset{\underset{c}{\uparrow}}{8} = 0$$

Ejercicio 14. Escriba las siguientes ecuaciones en su forma general e indique cuáles son los valores a, b y c en cada una de ellas.

a) $4x^2 + 2x = -5$

$a =$ ___ $\qquad$ $b =$ ___ $\qquad$ $c =$ ___

b) $7x^2 - 14x = 15$

$a =$ ___ $\qquad$ $b =$ ___ $\qquad$ $c =$ ___

c) $3x^2 - 6 = -6x$

$a =$ ___ $\qquad$ $b =$ ___ $\qquad$ $c =$ ___

d) $\frac{3}{4}x^2 = \frac{1}{2}x - \frac{1}{5}$

$a =$ ___ $\qquad$ $b =$ ___ $\qquad$ $c =$ ___

e) $.8x = -2x^2 + .3$

$a =$ ___ $\qquad$ $b =$ ___ $\qquad$ $c =$ ___

f) $18 = 14x - 10x^2$

$a =$ ______ $b =$ ______ $c =$ ______

g) $6x^2 + 9x - 12 = 5$

$a =$ ______ $b =$ ______ $c =$ ______

h) $x^2 - x + 3 = 12$

$a =$ ______ $b =$ ______ $c =$ ______

Es importante distinguir los valores de a, b y c en la ecuación general de segundo grado pues, si aplicáramos a ella el procedimiento que hemos aprendido anteriormente, encontraríamos que sus soluciones son:

$$\boxed{x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

y

$$\boxed{x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Utilizando estas últimas fórmulas podemos resolver cualquier ecuación de segundo grado. Basta con que hagamos las sustituciones adecuadas. Observe usted los siguientes ejemplos:

Ejemplo. Resolvamos la ecuación

$$3x^2 + 15x + 18 = 0$$

Aquí vemos que $a = 3$, $b = 15$ y $c = 18$.

En virtud de que

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

tenemos que

$$x_1 = \frac{-15 + \sqrt{15^2 - 4(3)(18)}}{2(3)}$$

$$= \frac{-15 + \sqrt{225 - 216}}{6}$$

$$= \frac{-15 + \sqrt{9}}{6} = \frac{-15 + 3}{6}$$

$$= \frac{-12}{6} = \boxed{-2}$$

Para hallar x_2 hacemos las siguientes sustituciones:

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-15 - \sqrt{15^2 - 4(3)(18)}}{2(3)}$$

$$= \frac{-15 - \sqrt{9}}{6}$$

$$= \frac{-15 - 3}{6}$$

$$= \frac{-18}{6} = \boxed{-3}$$

Las soluciones de la ecuación $3x^2 + 15x + 18 = 0$ son:

$\boxed{x_1 = -2}$ y $\boxed{x_2 = -3.}$ (Compruébelas usted.)

Ejemplo. Resolvamos la ecuación

$$3x^2 = 6x + 9$$

Como la ecuación dada no está en su forma general, primero la escribimos en esa forma:

$$3x^2 - 6x - 9 = 0$$

Así vemos que, en este caso, $a = 3$, $b = -6$ y $c = -9$.

De manera que las soluciones son:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{6 + \sqrt{(-6)^2 - 4(3)(-9)}}{2(3)}$$

$$= \frac{6 + \sqrt{36 + 108}}{6}$$

$$= \frac{6 + \sqrt{144}}{6} = \frac{6 + 12}{6}$$

$$= \frac{18}{6} = \boxed{3}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{6 - \sqrt{(-6)^2 - 4(3)(-9)}}{2(3)}$$

$$= \frac{6 - \sqrt{144}}{6}$$

$$= \frac{6 - 12}{6} = \frac{-6}{6} = \boxed{-1}$$

Las soluciones son:

$\boxed{x_1 = 3}$ y $\boxed{x_2 = -1.}$ (Compruébelo.)

Ejercicio 15. Resuelva las siguientes ecuaciones:

a) $x^2 + 3x + 2 = 0$ b) $z^2 - 2z - 15 = 0$

c) $2x^2 + 9x = -10$ d) $-3y^2 + 6y + 9 = 0$

e) $16n^2 + 20n + 6 = 0$ f) $8x^2 - 1 = 2x$

g) $x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{8} = 0$ h) $y^2 - 121 = 0$

i) $t^2 - .81 = 0$ j) $r^2 + 7r = 0$

Algunas ecuaciones de segundo grado no tienen soluciones que sean números reales. Por ejemplo, las soluciones de la ecuación

$$x^2 = -1$$

no pueden ser números reales, pues ya sabemos que ningún número real elevado al cuadrado puede dar como resultado un número negativo. Sin embargo, existe un conjunto de números en el cual *todas* las ecuaciones de segundo grado tienen solución. A los elementos de ese conjunto se les denomina **números complejos** y serán motivo de estudio en un curso más avanzado.

Problemas. Encuentre una ecuación que describa a cada problema. Resuélvala y dé la respuesta correspondiente.

a) El producto del número x por su consecutivo, $x + 1$, es 156. ¿Cuál es el número x?

b) En un terreno rectangular, el largo es 4 metros mayor que el ancho. Si su área es de 285 metros cuadrados, ¿cuáles son las dimensiones de ese terreno?

c) El área de un triángulo es 250 m^2. Si la base (b) mide 5 metros menos que la altura (h), ¿cuánto miden b y h en ese triángulo?

d) El área de un triángulo rectángulo es 297 metros cuadrados. Si uno de los catetos tiene 5 metros más que el otro, ¿cuánto mide cada uno de esos catetos?

e) El movimiento de cierto proyectil está descrito por la fórmula $d = 2t + 3t^2$ (donde d es la distancia recorrida en metros y t el tiempo transcurrido en segundos). ¿Cuántos segundos han transcurrido al recorrer ese proyectil 56 m?

f) Un cierto tipo de bacterias en condiciones especiales se reproduce de acuerdo con la fórmula $n = 1 + 8t + t^2$, (n es el número de bacterias existentes al transcurrir un número t de segundos). ¿Qué tiempo se requiere para que haya 154 bacterias?

g) La evaporación de un líquido bajo ciertas condiciones se calcula con la fórmula $v = 6t + t^2$ (donde v es el número de mililitros de líquido evaporado al transcurrir un número t de horas). ¿Qué tiempo es necesario para que se evaporen 40 mililitros de ese líquido?

h) La diferencia entre dos números es 13 y su producto es 300. ¿Qué números son ésos?

i) La suma de dos números es 19 y su producto es 84. ¿Qué números son ésos?

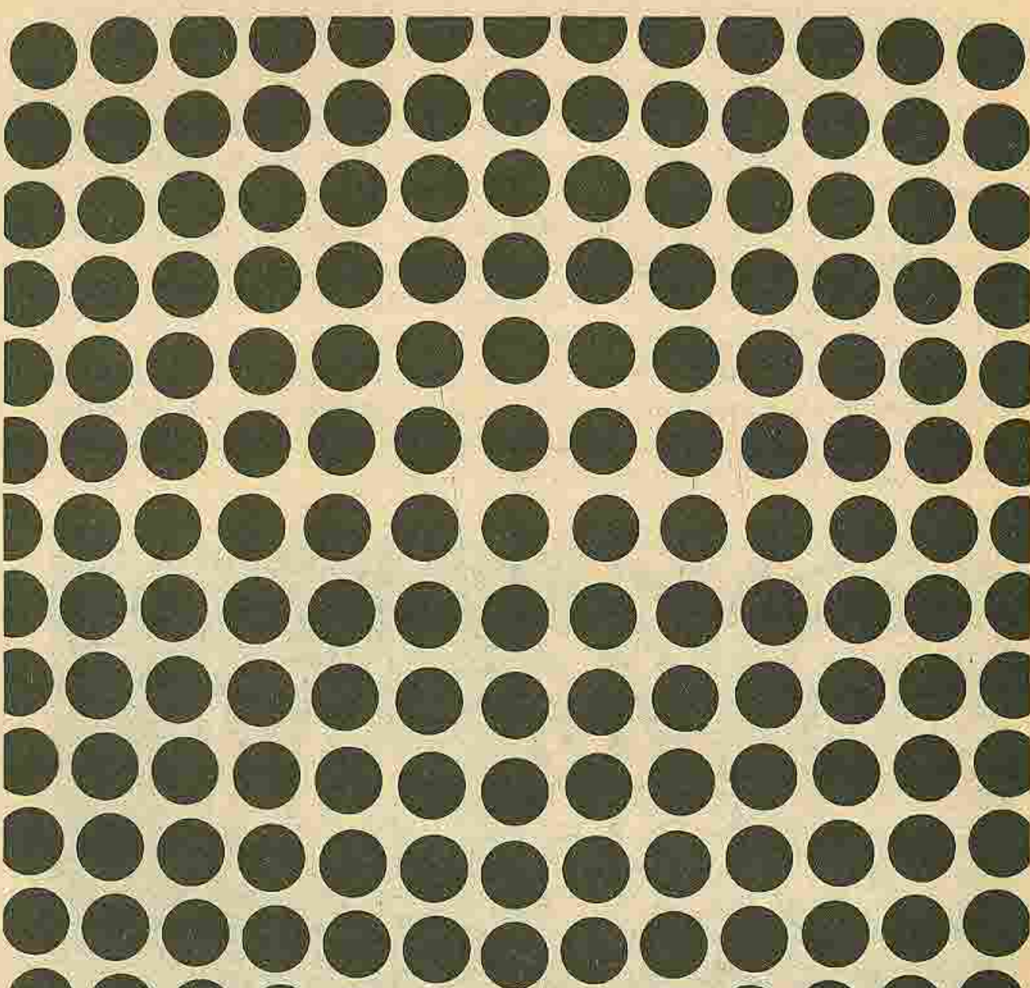
j) El perímetro de un rectángulo es 26 metros y su área es 40 metros cuadrados. ¿Cuáles son las dimensiones de ese rectángulo?

Capitulo cuarto

Probabilidad

En el siglo XVII el llamado "filósofo jugador" Chevalier de Meré, escribió al matemático Blas Pascal solicitando algunos informes sobre el juego de dados. A su vez, Pascal escribió al matemático Pierre Fermat. En la correspondencia que así se estableció tuvo sus inicios la teoría de la probabilidad.

En el siglo XVIII el interés por la probabilidad aumentó al estudiarse la densidad de población y sirvió también para que aumentara rápidamente el número de compañías de seguros. Desde entonces, el desarrollo de la teoría de la probabilidad ha sido enorme. Actualmente tiene múltiples aplicaciones, todas ellas de gran importancia, en campos como la economía, la genética, la física, la comunicación, la publicidad, etc.



1. Experimentos determinísticos y experimentos aleatorios

Un experimento determinístico es aquel en que podemos predecir el resultado porque sabemos que todas las veces que efectuemos tal experimento obtendremos el mismo resultado. Por ejemplo, si ponemos al fuego un recipiente con agua, después de cierto tiempo el agua hervirá.

Si en las mismas condiciones repetimos varias veces el experimento, el resultado será siempre el mismo: el agua hervirá.

Veamos otro ejemplo de experimento determinístico:

Cuando se disuelve bióxido de azufre en agua, en determinadas cantidades y bajo ciertas condiciones, se forma siempre ácido sulfuroso. Y siempre que se repite el experimento bajo las mismas condiciones el resultado es el mismo. (De no ser así, no habría muchos fabricantes de ese producto.)

Un fenómeno aleatorio, o al azar, es aquel en que no podemos predecir el resultado, pues al repetir el experimento el resultado puede ser diferente. Por ejemplo, al lanzar un dado de seis caras no podemos asegurar que el número que quede en la cara superior sea el 4. Puede ocurrir que sea así, o bien, puede ocurrir que sea alguno de los números 1, 2, 3, 5, o 6.

Otros ejemplos de situaciones al azar son:

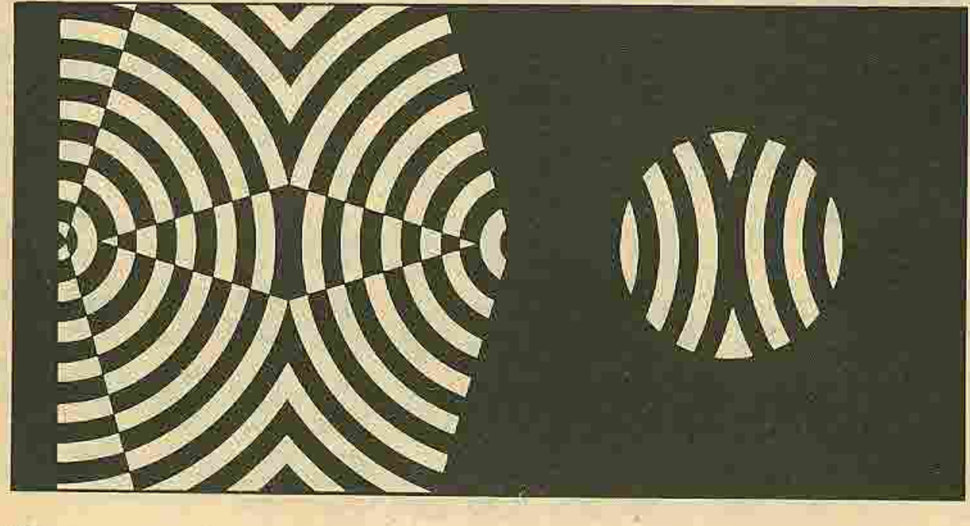
1. Barajar un mazo de cartas y después extraer una. No se puede asegurar que siempre que hagamos esto saldrá el as de espadas, por ejemplo.

2. En una clínica de maternidad pesar a los recién nacidos. No se puede predecir cuál será el peso de cada bebé.

3. Registrar las llamadas telefónicas durante un día, en cierto lugar. No se puede predecir cuántas llamadas habrá.

4. Anotar las marcas de 10 vehículos que pasen por una caseta de cobro. No se puede predecir de qué marca o marcas serán esos 10 vehículos.

5. Contar el número de personas que asisten a una función de cine. No se puede predecir cuántas personas serán.



2. El espacio muestra

Generalmente en un experimento al azar podemos señalar los resultados posibles. Así, por ejemplo, en el experimento de lanzar un dado, el conjunto de resultado posibles es {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

Al conjunto de resultados posibles en un experimento al azar lo llamaremos espacio muestra.

Si se trata del experimento de extraer una carta de un mazo de 52, entonces el espacio muestra son las 52 cartas, ya que cada carta es un resultado posible.

Con respecto al experimento de lanzar una moneda, resulta claro que el espacio muestra es {águila, sol}.

Ejercicio 1. En cada uno de los siguientes experimentos indique cuál es el espacio muestra.

a) Se le pregunta a una persona distinta cada vez, en qué mes del año nació.

b) Se extrae una carta de una baraja española (40 cartas).

c) Se rifa un radio entre 25 personas.

d) Se anota la primera letra de 100 palabras.

e) Se juega a la lotería. El premio es de \$5 000 000 y la emisión es de 40 000 billetes.

f) Se le pregunta en el D. F., a una persona diferente cada vez, qué estación de radio escucha.

g) Se lanzan dos monedas, una de \$1.00 y la otra de \$0.50, para ver si caen en águila o sol, una o ambas.

h) De 14 fichas de dominó usted extrae una.

i) Se extrae una carta de una baraja inglesa (52 cartas).

j) Se hace girar una perinola de 6 caras laterales.

En la teoría de la probabilidad, cuando hablamos de un experimento al azar, idealizamos un poco las cosas.

Por ejemplo, en el caso de lanzar una moneda al aire excluimos como resultado posible el que la moneda caiga de canto, ya que esto es "casi imposible" que suceda; pero, como sabemos, llega a darse el caso.

En el caso de lanzar un dado de seis caras suponemos que no está "cargado"; de manera que cada uno de los 6 números tiene exactamente la misma oportunidad de quedar en la parte superior. Suponemos también que la persona que lanza el dado no tiene ninguna habilidad que diera a algún número más oportunidad que a otros.

3. Probabilidad de un evento

Antes de explicar lo que es la probabilidad de un evento, es necesario que precisemos primero lo que es un evento.

Si consideramos un experimento al azar y su correspondiente espacio muestra, entonces un evento es subconjunto del espacio muestra. (Recuerde que un subconjunto puede no tener elementos, o tener uno, dos o más elementos.)

Para aclarar lo anterior veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 1. En el experimento al azar de extraer una carta de una baraja inglesa, un evento es "sacar un rey". (Observe que este evento tiene únicamente 4 elementos, pues en la baraja hay 4 reyes.) Otro evento es "sacar un trébol". (Este evento tiene 13 elementos, pues hay 13 cartas en la baraja que son de tréboles.)

Ejemplo 2. En el experimento de lanzar un dado de seis caras, un evento es "sacar un número impar". (Este evento tiene 3 elementos que son los números 1, 3, 5.) Otro evento es "tirar un seis". (Este evento tiene un solo elemento, pues en las caras del dado sólo hay un seis.)

Ejemplo 3. Al sacar una carta al azar de una baraja española, el evento "sacar un nueve", no tiene elementos, pues en la baraja española no hay nueves.

Si un evento no tiene elementos, lo llamaremos evento imposible.

Ejercicio 2. De acuerdo con el experimento, en cada inciso indique cuántos elementos tiene el evento.

Se tira un dado de seis caras.

a) "Sacar un número par".
b) "Sacar un número mayor que 5".
c) "Sacar un número menor que 3".
d) "Sacar un número mayor que 6".
e) "Sacar un 4".

En unan bolsa hay 20 canicas azules, 10 amarillas y 5 rojas. Sin ver, se saca una canica de la bolsa.

f) "Sacar una canica amarilla".
g) "Sacar una canica azul".
h) "Sacar una canica que no sea roja".
i) "Sacar una canica que no sea azul".
j) "Sacar una canica verde".

De una baraja inglesa se extrae al azar una carta.

k) "Sacar un corazón".
l) "Sacar una carta roja".
m) "Sacar una carta que no sea as".

n) "Sacar un diamante".

o) "No sacar un diamante".

Se lanzan dos monedas, una de $1.00 y otra de $0.50.

p) "Sacar dos águilas".

q) "Sacar dos soles".

r) "Sacar un águila y un sol".

s) "Sacar al menos un águila".

t) "Sacar al menos un sol".

Daremos ahora la siguiente definición:

Con respecto a un experimento al azar, la probabilidad de un evento es el cociente del número de elementos del evento entre el número de elementos del espacio muestra.

Si consideramos a los elementos de un evento como resultados favorables, entonces la definición anterior puede expresarse así:

Con respecto a un experimento al azar, la probabilidad de un evento es el cociente del número de resultados favorables entre el número de resultados posibles.

Ejercicio 3. En cada caso indique la probabilidad del evento.

a) Se extrae una carta al azar de una baraja inglesa. ¿Cuál es la probabilidad de sacar una reina?

b) De una urna con 10 canicas blancas y 5 negras se extrae una. ¿Cuál es la probabilidad de sacar una canica blanca?

c) Se lanza un dado de seis caras. ¿Cuál es la probabilidad de no sacar un 5?

d) ¿Cuál es la probabilidad de ganar en la rifa de un reloj? Si hay 30 números y se compran 3 números.

e) ¿Cuál es la probabilidad de sacarse la lotería con un billete, en un sorteo cuya emisión es de 100 000 billetes?

f) De una urna con 15 canicas verdes y 10 amarillas se extrae una. ¿Cuál es la probabilidad de no sacar una canica amarilla?

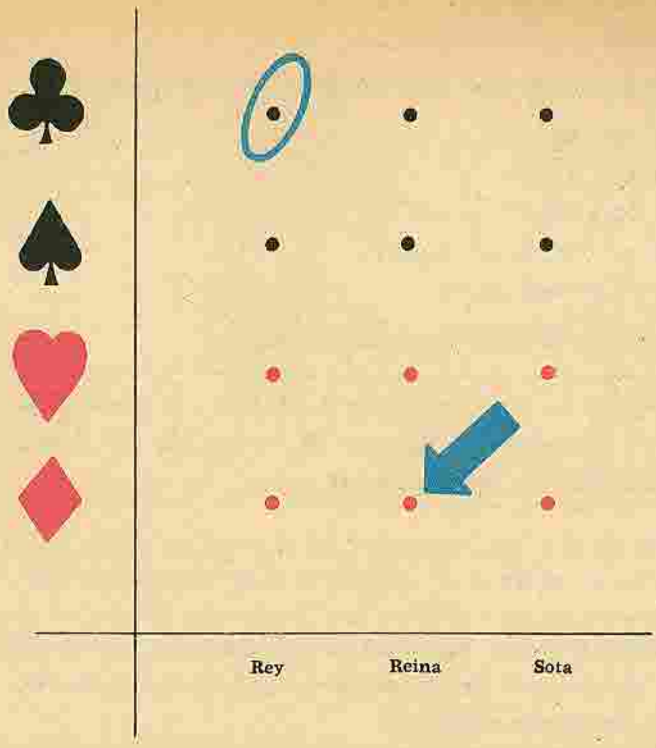
g) ¿Cuál es la probabilidad de sacar "copas" al extraer una carta de una baraja española?

h) Se lanza un dado de 6 caras. ¿Cuál es la probabilidad de sacar un número mayor o igual a 3?

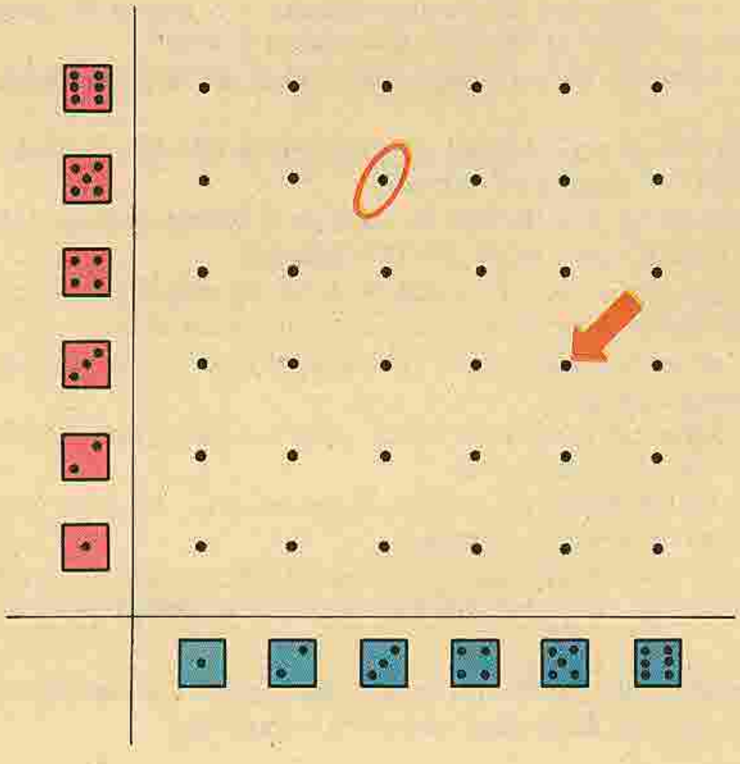
i) De las 28 fichas de dominó se extrae una. ¿Cuál es la probabilidad de obtener la doble de seises?

j) En un cuestionario una pregunta de opción tiene 3 posibles respuestas. ¿Cuál es la probabilidad de que acierte casualmente a la pregunta?

Para mayor claridad en los temas que tratemos a continuación emplearemos algunos diagramas como los siguientes:



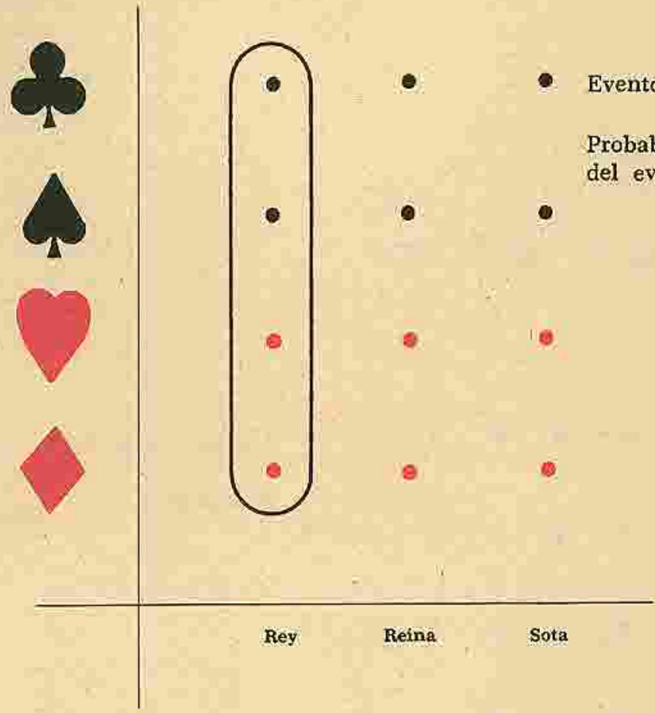
Este diagrama representa un espacio muestra de 12 cartas por medio de doce puntos. Así, por ejemplo, el punto que señala la flecha representa la carta reina de diamantes y el punto encerrado en un círculo representa la carta rey de tréboles.



En este diagrama cada uno de los 36 puntos representa un posible resultado al lanzar dos dados, uno rojo y otro azul. El punto indicado con la flecha representa el resultado en el cual el dado azul cae en 5 y el dado rojo cae en 3. El punto encerrado en un círculo representa el resultado en el cual el dado azul cae en 3 y el dado rojo cae en 5.

Ejercicio 4. En el diagrama de cada uno de los siguientes incisos encierre con una línea los elementos del evento e indique la probabilidad del mismo.

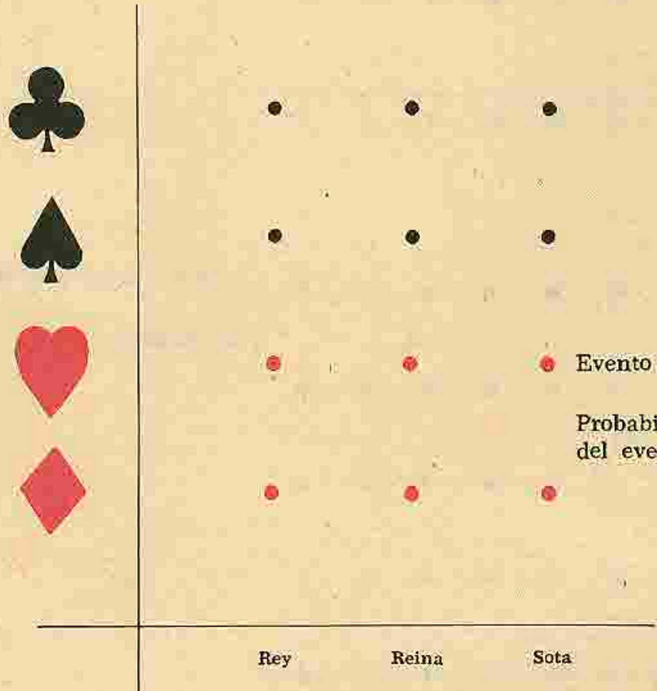
a)



Evento "sacar un rey".

Probabilidad del evento $\boxed{\frac{4}{12} = \frac{1}{3}}$

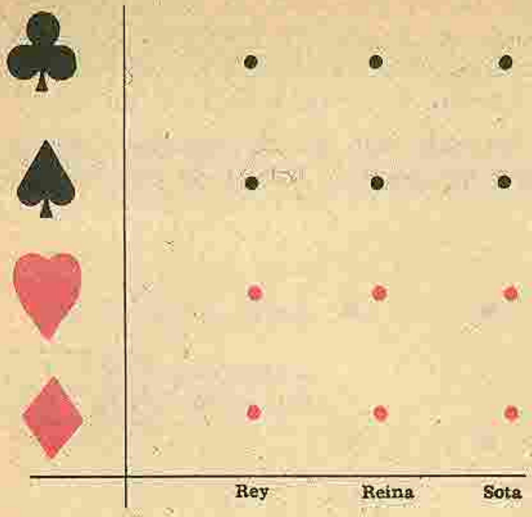
b)



Evento "sacar un corazón"

Probabilidad del evento

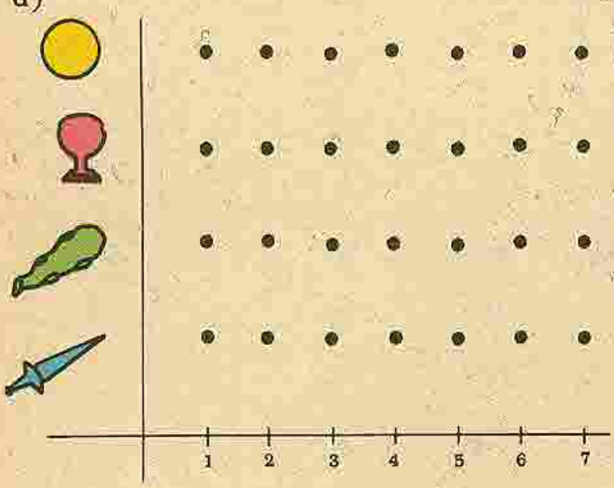
c)



Evento "sacar un rey"

Probabilidad
del evento

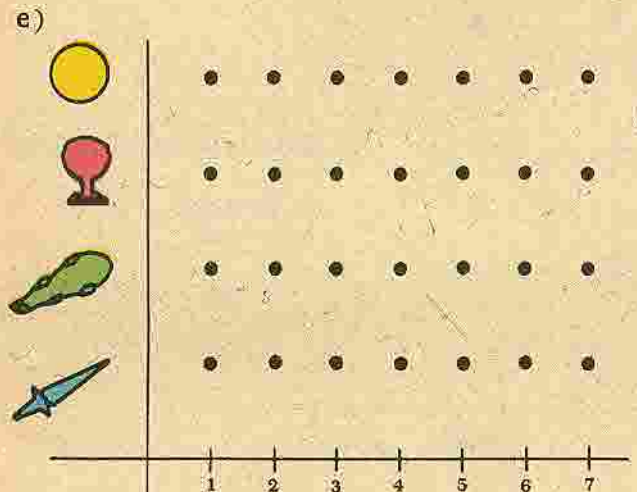
d)



Evento "sacar mayor que 4"

Probabilidad

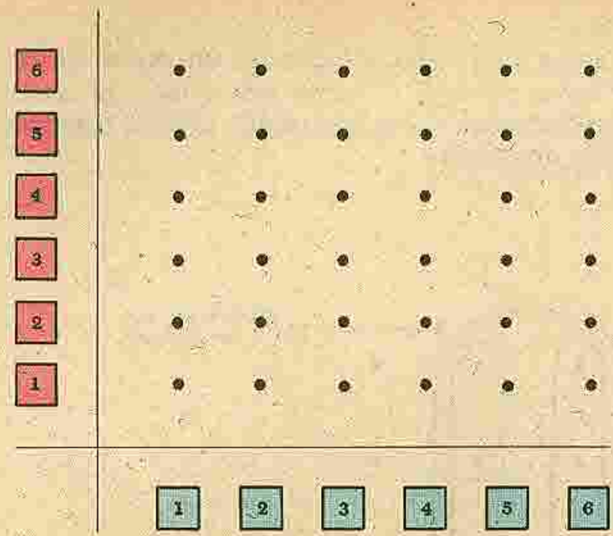
e)



Evento "sacar una espada"

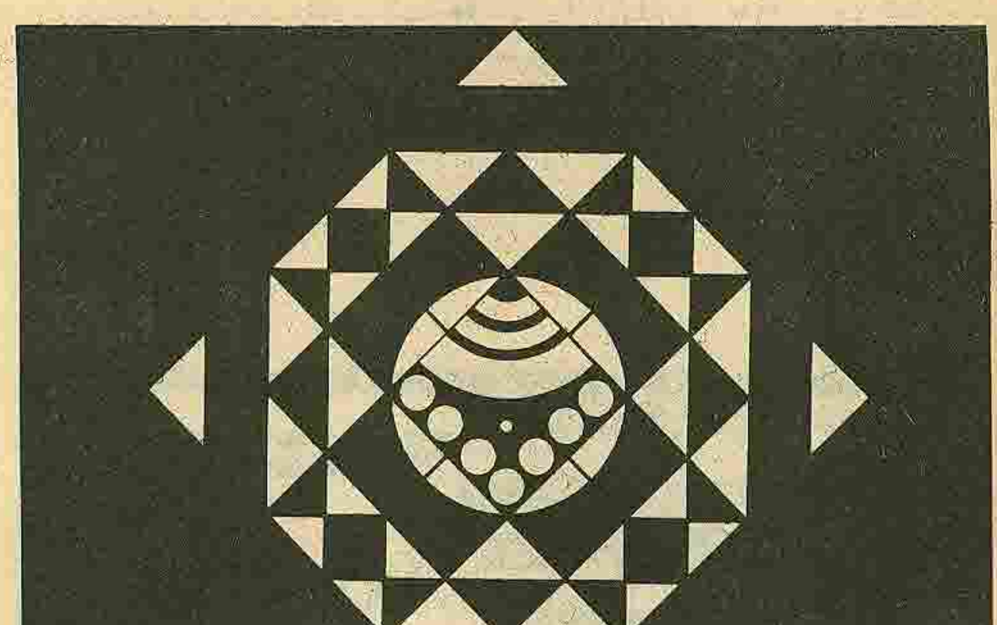
Probabilidad

f)



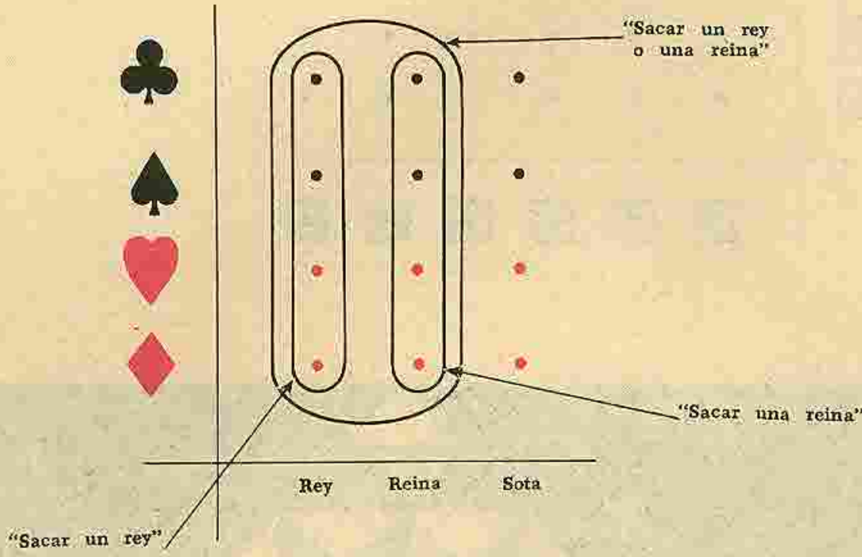
Evento "sacar menos de 7"

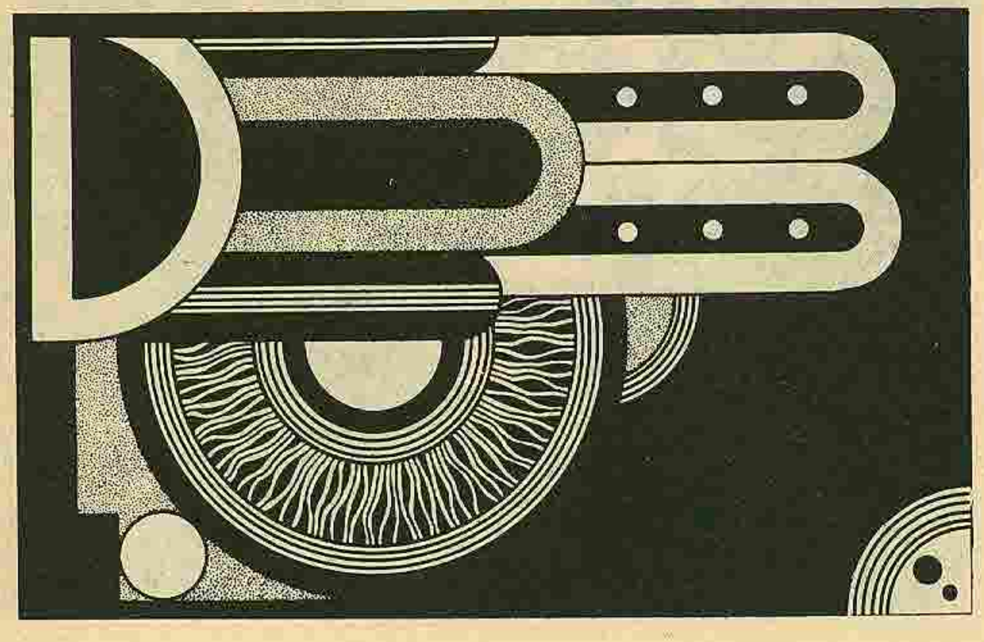
Probabilidad



4. Unión de eventos

En el experimento de sacar una carta al azar de un mazo de 12, consideremos los eventos "sacar un rey" y "sacar una reina", la unión de estos eventos es el evento "sacar un rey o una reina". Esto lo podemos apreciar mejor en el siguiente diagrama:



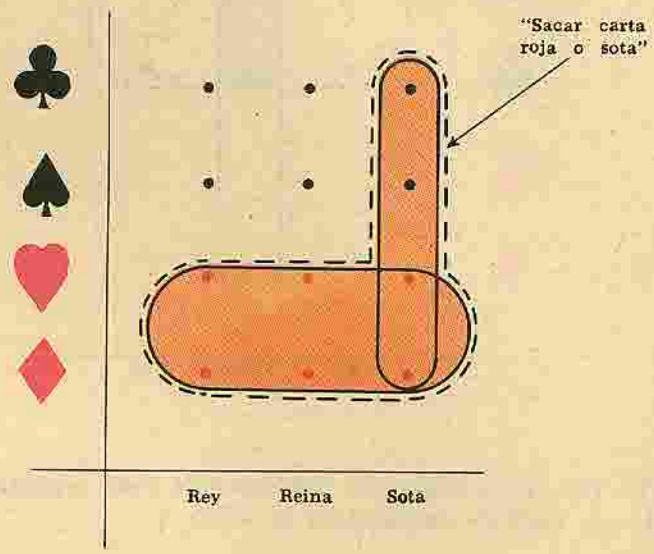


Observe que en la expresión que usamos para referirnos a la unión de los eventos usamos la "o".

La probabilidad del evento "sacar un rey o una reina" es $\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$ ya que los casos favorables son 8 y los casos posibles son 12.

En el caso anterior los eventos que unimos no tienen elementos comunes, estos eventos se llaman mutuamente exclusivos.

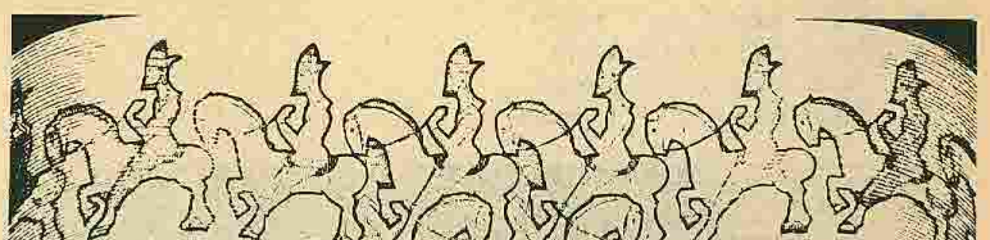
Algunas veces los eventos que unimos sí tienen elementos en común. Por ejemplo, consideremos los eventos "sacar carta roja" y "sacar sota", la unión de estos eventos es el evento "sacar carta roja o sota", en el diagrama apreciamos claramente los elementos comunes.



La probabilidad del evento "sacar carta roja o sota" es $\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$, ya que los casos favorables son 8 y los casos posibles son 12.

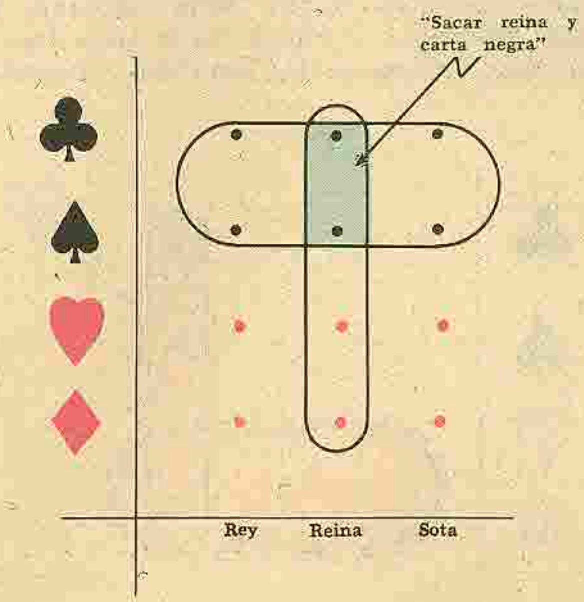
Ejercicio 5. En relación al experimento de extraer una carta al azar de una baraja inglesa (52 cartas), encuentre la probabilidad de cada uno de los siguientes eventos:

a) "Sacar un rey o sota".
b) "Sacar un 5 o un 6".
c) "Sacar carta negra o un 10".
d) "Sacar carta negra o roja".
e) "Sacar trébol o diamante".



5. Intersección de eventos

La intersección de dos eventos se forma con los elementos comunes a ambos eventos. Así, por ejemplo, la intersección de los eventos "sacar reina" y "sacar carta negra" es el evento "sacar reina y carta negra", que tiene 2 elementos, como podemos apreciar en el diagrama.



Observe que en la expresión que usamos para referirnos a la intersección de los eventos empleamos la letra "y".

La probabilidad del evento "sacar reina y carta negra" es $\frac{2}{12}$, ya que los casos favorables son 2 y los casos posibles 12.

¿Cuál es la probabilidad del evento "sacar trébol y diamante"? Cómo los eventos "sacar trébol" y "sacar diamante" no tienen elementos en común, entonces tenemos cero casos favorables por lo que la probabilidad del evento "sacar trébol y diamante" es cero, es decir se trata de un evento imposible. Esto es claro pues ninguna carta puede ser trébol y diamante.

Ejercicio 6. Considere el experimento de sacar una carta al azar de la baraja inglesa y encuentre la probabilidad en cada caso.

a) "Sacar rey y carta roja".
b) "Sacar siete y carta negra".
c) "Sacar sota y sacar reina".
d) "Sacar carta negra y roja".
e) "Sacar menos de 7 y trébol".

6. Probabilidad de la unión de dos eventos mutuamente exclusivos

En los ejercicios 5 y 6 podemos observar que la probabilidad de la unión de dos eventos mutuamente exclusivos también puede obtenerse sumando las probabilidades de cada uno de esos eventos.

Ejemplo. Al tirar un dado de seis caras la probabilidad de "sacar 4" es $\frac{1}{6}$, y la probabilidad de "sacar 1" es $\frac{1}{6}$. ¿Cuál es la probabilidad de "sacar 4 o 1"?

Respuesta. La probabilidad de "sacar 4 o 1" es $\frac{1}{6} + \frac{1}{6}$, o sea $\frac{1}{3}$.

Ejercicio 7. En cada inciso encuentre la probabilidad que se pide. Los eventos cuya probabilidad está dada, son mutuamente exclusivos.

a) Al extraer una carta de un mazo, la probabilidad de "sacar diamante" es $\frac{1}{4}$ y la probabilidad de "sacar trébol" es $\frac{1}{4}$. ¿Cuál es la probabilidad de "sacar diamante o trébol"?

b) Al extraer una canica de una urna, la probabilidad de "sacar canica roja" es $\frac{1}{3}$ y la probabilidad de "sacar canica azul" es $\frac{1}{7}$. ¿Cuál es la probabilidad de "sacar canica roja o azul"?

c) La probabilidad de que el Sr. Moreno sea presidente de su club es de $\frac{3}{5}$ y la probabilidad de que el Sr. Sánchez sea presidente del mismo club es $\frac{1}{6}$. ¿Cuál es la probabilidad de que el presidente del club sea el Sr. Moreno o el Sr. Sánchez?

d) ¿Cuál es la probabilidad de que un motor falle por falta de combustible o de corriente eléctrica? (Se sabe que la probabilidad de que el motor falle por falta de combustible es $\frac{1}{100}$ y la probabilidad de que falle por falta de corriente eléctrica es $\frac{1}{150}$).

e) La probabilidad de que una persona sufra un accidente en su trabajo es de $\frac{1}{1\,000}$ y la probabilidad de que sufra un accidente en su hogar es de $\frac{1}{10\,000}$. ¿Cuál es la probabilidad de que sufra un accidente en su trabajo o en su hogar?

7. Probabilidad de la unión de dos eventos no mutuamente exclusivos

En los ejercicios 5 y 6 observamos que para calcular la probabilidad de la unión de dos eventos no mutuamente exclusivos se puede sumar la probabilidad de cada uno de esos eventos y luego restar la probabilidad de su intersección.

Ejemplo. En una urna hay canicas de dos tamaños y de varios colores. Al extraer una canica al azar, la probabilidad de que sea amarilla es $\frac{2}{5}$, la probabilidad de que sea grande es $\frac{1}{3}$ y la probabilidad de que sea amarilla y grande es $\frac{2}{15}$. ¿Cuál es la probabilidad de que al extraer una canica salga grande o amarilla?

Respuesta. La probabilidad de que sea grande o amarilla es $\frac{9}{15}$ porque

$$\left(\frac{2}{5} + \frac{1}{3}\right) - \frac{2}{15} = \left(\frac{11}{15}\right) - \frac{2}{15} = \frac{9}{15}$$

Ejercicio 8. En cada inciso encuentre la probabilidad que se pide.

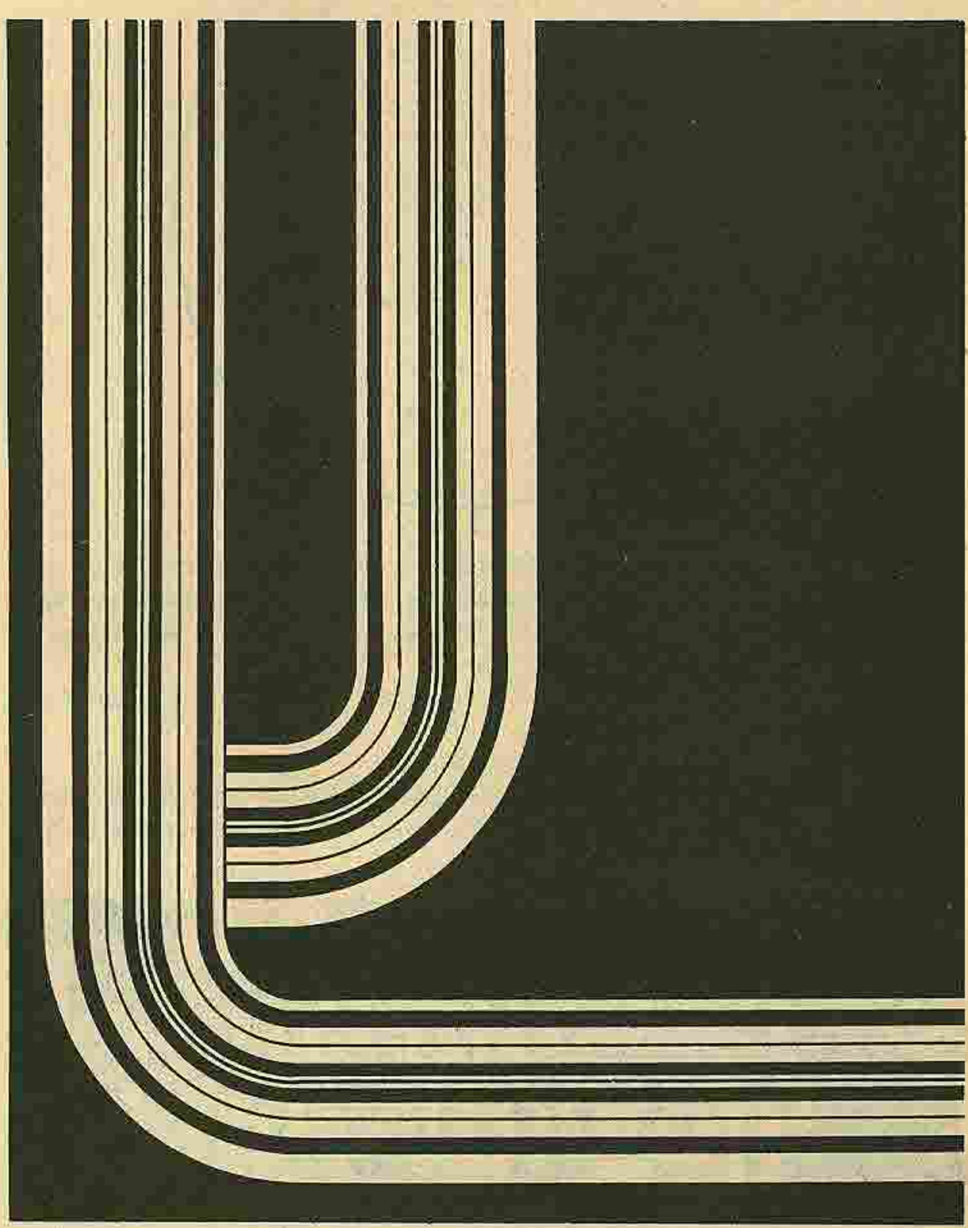
a) Al extraer al azar una carta de un mazo, la probabilidad de "sacar rey" es $\frac{1}{13}$. La probabilidad de "sacar diamante" es $\frac{1}{4}$ y la probabilidad de "sacar rey y diamante" es $\frac{1}{52}$. ¿Cuál es la probabilidad de "sacar rey o diamante"?

b) Cierto día en un determinado lugar, la probabilidad de que "llueva" es $\frac{2}{9}$, la probabilidad de que "la temperatura sea menor de 10° C" es $\frac{3}{9}$ y la probabilidad de que "llueva y la temperatura sea menor de 10° C" es de $\frac{1}{10}$. ¿Cuál es la probabilidad de que "llueva o que la temperatura sea menor de 10°C"?

c) Al extraer al azar una canica de una urna, la probabilidad de que sea pequeña y azul es $\frac{1}{20}$, la probabilidad de que sea pequeña es $\frac{1}{5}$ y la probabilidad de que sea azul es $\frac{1}{2}$. ¿Cuál es la probabilidad de que sea pequeña o azul?

d) En una población, al elegir una persona al azar, al probabilidad de que sea menor de 20 años es $\frac{2}{5}$, la probabilidad de que mida más de 1.70 m es $\frac{1}{3}$ y la probabilidad de que sea menor de 20 años y que mida más de 1.70 m es $\frac{1}{7}$. ¿Cuál es la probabilidad de que mida más de 1.70 m o que sea menor de 20 años?

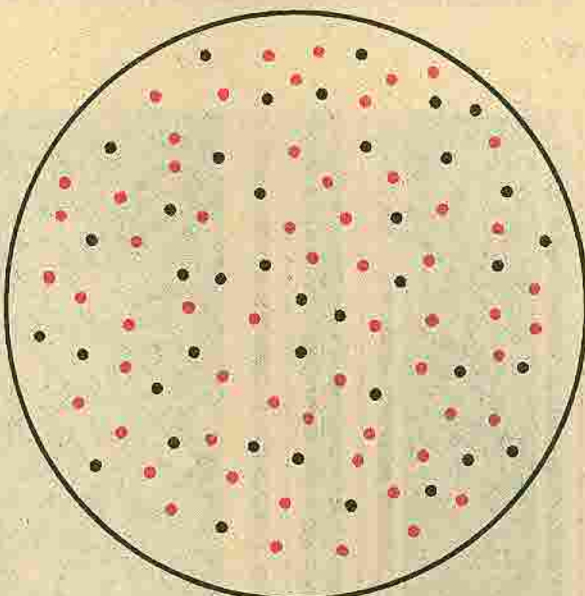
e) La probabilidad de que un árbol frutal en cierta región sea atacado por hongos es de $\frac{1}{4}$, la probabilidad de que sea atacado por virus es de $\frac{1}{5}$ y la probabilidad de que sea atacado por hongos y virus es de $\frac{1}{10}$. ¿Cuál es la probabilidad de que el árbol frutal sea atacado por hongos o por virus?



8. Probabilidad empírica

Hasta ahora hemos determinado la probabilidad de un evento en un experimento al azar, dividiendo el número de resultados favorables entre el número de resultados posibles. Sin embargo, en muchas situaciones reales puede uno darse una idea de la probabilidad de un evento considerando sólo algunos resultados; es decir, tomando una muestra de los resultados posibles.

Por ejemplo, consideremos un cultivo de bacterias rojas y negras como el de la ilustración.



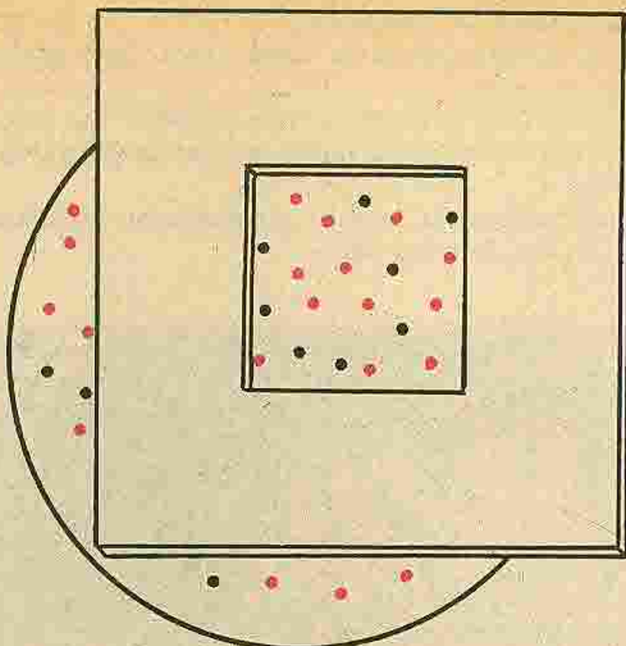
Si queremos determinar la probabilidad de que al tomar al azar una bacteria del cultivo sea roja, procedemos en la forma acostumbrada:

Contamos en el cultivo todas las bacterias rojas y obtenemos el número de casos favorables. Este es:

Contamos en el cultivo todas las bacterias y obtenemos el número de casos posibles. Este es:

Por lo tanto, la probabilidad pedida es

Ahora hagamos el siguiente experimento: Recortemos un cuadrado de 3 cm por 3 cm en un pedazo de cartón y coloquémoslo sobre la ilustración del cultivo de bacterias.

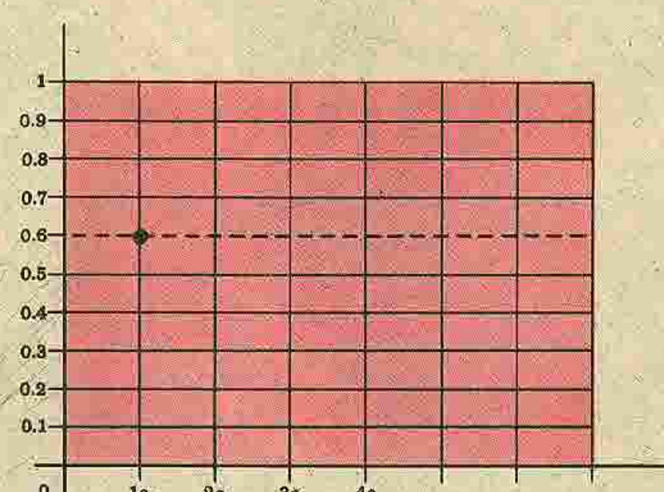


En esta región determinada por el cuadrado de 3 cm por 3 cm, contemos primero el número de bacterias rojas y después el número total de bacterias. Dividamos el primer número entre el segundo. ¿Cuál es el cociente?

Compare este cociente con la probabilidad obtenida anteriormente.

Repita este experimento varias veces colocando el cartón en diferentes posiciones y compare los cocientes obtenidos en cada caso.

El siguiente diagrama puede ayudarle a comparar sus resultados. Por ejemplo, si obtiene el cociente 0.60, éste se representa con el punto rojo.



En la gráfica anterior puede usted observar que las probabilidades obtenidas en las distintas muestras "están cerca" de la probabilidad real del evento.

El inferir resultados a partir de una muestra, así como el estudio de los métodos para determinar muestras, son problemas de los que se ocupa la estadística.

En el capítulo siguiente, que es precisamente Estadística, veremos un poco más acerca de estas ideas.

Capítulo quinto

Estadística

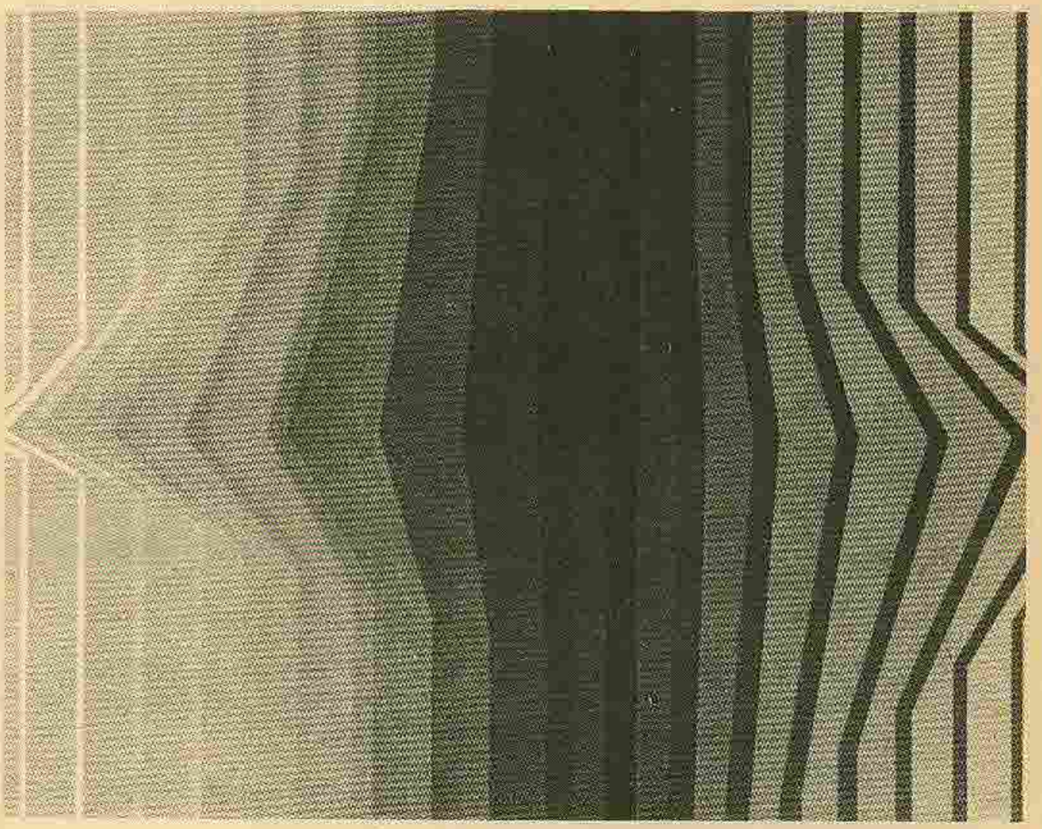
En los diferentes lugares del mundo donde se formaron grupos humanos que empezaron a adquirir fuetrza y que necesitaban consolidarse económicamente, fue necesario elaborar registros de datos numéricos.

Ya en China, durante el reinado de Yao, se realizaron registros estadísticos agrarios, industriales y comerciales. Lo mismo podemos decir de otras civilizaciones como la asiria, la egipcia, la romana, etc.

Desde entonces el concepto de estadística ha tenido diversas orientaciones y ha evolucionado constantemente.

En el siglo XIX H. G. Wells afirmó: "El pensamiento estadístico será un día tan necesario para el ciudadano eficiente como la capacidad de leer y escribir".

Hoy en día podemos decir que la estadística tiene que ver con la recolección, organización y análisis de datos numéricos, y que ha contribuido de manera definitiva en el desarrollo de la ciencia.



1. Recolección de datos

Con frecuencia oímos expresiones, en la televisión, en la radio, en conversaciones, etc., donde se mencionan datos; pero casi nunca se menciona la forma en que se obtuvieron esos datos.

Generalmente, al oír datos estadísticos, uno no piensa la forma en que se obtuvieron, y mucho menos piensa que tales datos puedan estar equivocados. A continuación veremos un ejemplo de cómo formas inadecuadas de recolectar datos pueden motivar serios errores.

Ejemplo.

Un médico escolar realiza un examen de la vista en un grupo de 50 alumnos. Para ello, examina alumno por alumno y encuentra que 19 alumnos tienen vista defectuosa. Otro médico, en el mismo grupo, pregunta quiénes son los alumnos que no ven bien y sólo examina a éstos. El resultado es: 14 alumnos con vista defectuosa. Claramente observamos que el segundo médico, por la forma equivocada en que obtuvo los datos, no llegó a un resultado correcto.

No precisaremos aquí los métodos para obtener informaciones correctas, sólo queremos que tome usted en cuenta cómo influye en los resultados la forma en que se obtiene la información.

Si alguna vez usted tiene necesidad de recolectar datos, debe elegir la forma que dé menos posibilidades de error. Y cuando a usted le presenten datos estadísticos es muy conveniente que piense en qué forma se obtuvieron éstos.

Ejercicio 1. En cada uno de los siguientes incisos aparecen 3 maneras diferentes de obtener ciertos datos. Indique cuál de ellas es más confiable.

1. Antes de cortar los uniformes para los jugadores de un equipo de béisbol, el sastre

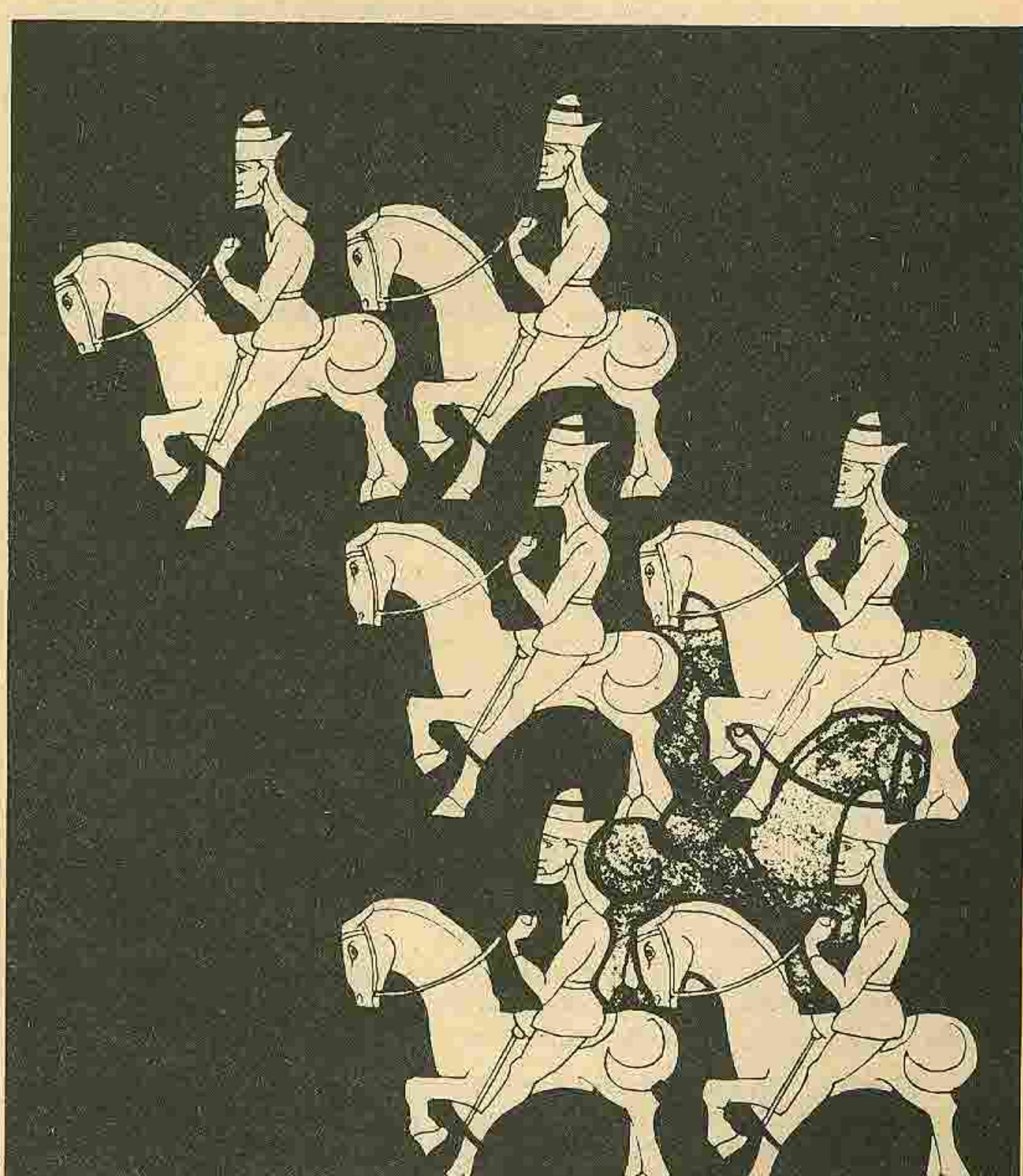
   a) pregunta al talla a cada jugador.
   b) observa a los jugadores para calcular su talla.
   c) toma medidas a cada jugador.

2. El fabricante de varillas de acero desea conocer la resistencia máxima de éstas. Para ello,
   a) examina una varilla en el laboratorio de resistencia de materiales.
   b) examina algunas varillas en el laboratorio de resistencia de materiales.
   c) toma como base datos de las producciones anteriores.

3. Antes de inyectar a una persona cierto antibiótico, la enfermera
   a) pregunta al paciente si no es alérgico a algún antibiótico.
   b) interroga a varios familiares del paciente.
   c) realiza la prueba correspondiente.

4. Un profesor desea conocer los resultados obtenidos por sus alumnos en un examen. Para ello,
   a) califica él mismo los cuestionarios.
   b) nombra una comisión para que califique los cuestionarios.
   c) intercambia los cuestionarios de manera que cada alumno califique uno que no sea el suyo.

5. Una trabajadora social desea saber de una persona: su sueldo, número de personas que dependen de ella, número de habitaciones en la casa, etc. Para ello,
   a) interroga a la persona en su trabajo.
   b) interroga a la persona por teléfono.
   c) visita a la persona en su domicilio para recabar los datos.



2. Necesidad del muestreo

En los ejemplos vistos anteriormente presentamos situaciones donde no es necesario tomar datos de grupos muy numerosos de personas o de objetos. Sin embargo, en muchas ocasiones es necesario obtener información de conjuntos muy numerosos, lo cual, como veremos a continuación, plantea serios inconvenientes.

Ejemplo. Antes de planear una campaña para la erradicación de la tuberculosis, necesitamos saber cuántas personas en el país padecen esta enfermedad. El examinar a cada uno de los habitantes del país presenta serias dificultades. Entre otras, que no contamos con el número suficiente de médicos, que el costo sería muy elevado y que se requeriría de mucho tiempo.

Ejemplo. Un fabricante de cierto tipo de válvulas electrónicas (bulbos) necesita saber cuántas resultaron defectuosas en la producción de la última semana, que resultó ser de 50 000 piezas. (Este dato es muy importante, ya que, si el número de piezas defectuosas es muy grande, se debe suspender el trabajo y revisar los sistemas de producción. O bien, si el número de piezas defectuosas es bajo, la producción puede continuar). En esta situación, el examinar 50 000 bulbos uno por uno es antieconómico y difícil, pues requeriría muchos aparatos probadores, muchos empleados y mucho tiempo.

Cuando no es posible, como en los ejemplos anteriores, tomar los datos de todos los elementos de un conjunto muy numeroso, lo que hacemos es tomar los datos de sólo algunos elementos del conjunto. A esa parte del conjunto en la cual tomamos la información le damos el nombre de muestra.

Ahora bien, no perdamos de vista que la información que podamos obtener de una muestra nos debe servir para inferir un resultado que sea válido en el conjunto de donde se extrajo esa muestra.

Así, por ejemplo, en el caso de las válvulas electrónicas, supongamos que se toma una muestra de 100 piezas y se examina. El objeto no es saber de esas 100 piezas cuántas están defectuosas; el objeto es saber, aunque sea aproximadamente, cuántas piezas pueden estar defectuosas entre las 500 000 que se han producido.

Un procedimiento para inferir un resultado a partir de una muestra consiste en formar dicha muestra tomando al azar algunos elementos del conjunto y aceptar, con base en la teoría de muestreo, que lo observado en esa muestra se presenta en la misma proporción en todo el conjunto que se estudia.

Aunque generalmente el resultado que se infiere a partir de la muestra y la situación real en el conjunto no son iguales, la aproximación que se obtiene es de mucha utilidad en la práctica.

Ejemplo. En una universidad de 9 000 alumnos, se tomó una muestra al azar de 300 alumnos y se encontró que, de ellos, 100 hablan inglés. ¿Aproximadamente cuántos alumnos de la universidad hablan inglés?

Para encontrar la respuesta a esta cuestión podemos establecer la siguiente proporción:

$$\frac{100}{300} = \frac{x}{9\,000}$$

$$x = \frac{9\,000 \times 100}{300} = 3\,000$$

Respuesta. Aproximadamente 3 000 alumnos de esa Universidad hablan inglés.

Ejercicio 2. Tal como se hizo en el ejemplo, use proporciones para resolver los siguientes problemas.

a) De una urna con 500 canicas, se extraen 50 al azar y se encuentra que 15 son negras y 35 son blancas. ¿Aproximadamente cuántas canicas blancas hay en la urna? ¿Y cuántas negras?

b) En una escuela secundaria de 700 alumnos se eligen 100 de ellos al azar, se les practica un examen coproparasitológico y se encuentra que todos ellos tienen parásitos intestinales. ¿Aproximadamente cuántos alumnos en esa escuela secundaria están parasitados?

c) En una población de 3 000 habitantes, se eligen 200 personas al azar y se encuentra que, de ellas, solamente 150 saben leer. ¿Aproximadamente cuántas personas saben leer en esa población?

d) De 7 500 lavadoras se toma una muestra al azar de 150. Se encuentra que en la muestra hay 80 defectuosas. ¿Aproximadamente cuántas de las 7 500 lavadoras son defectuosas?

e) De 100 000 accidentes automovilísticos, se considera una muestra de 800 al azar. Se encuentra que, de esa muestra, 750 ocasionan pérdidas de menos de \$500.00. ¿Aproximadamente cuántos de los 100 000 accidentes ocasionan pérdidas de menos de \$500.00.

En todos los problemas anteriores hemos insistido en que los elementos de la muestra se tomen al azar. Esto es de vital importancia, pues el procedimiento que seguimos para inferir un resultado sólo es válido en esas condiciones.

Analicemos las siguientes situaciones para aclarar un poco eso de elegir la muestra al azar.

1. En una ciudad de 5 000 habitantes se sabe que hay más de 1 000 personas menores de 20 años. Se desea saber con una mayor aproximación cuál es el número de habitantes que tienen menos de 20 años.

Elegimos una muestra de 100 habitantes entre los transeúntes de una calle en la mañana de cierto día. Como resultado encontramos que de esos 100 habitantes hay 7 que son menores de 20 años. Por lo tanto, establecemos la proporción

$$\frac{7}{100} = \frac{x}{5\,000}$$

en la que x es igual a 350, porque

$$x = \frac{7 \times 5\,000}{100} = 350$$

e inferimos que 350 habitantes de la ciudad son menores de 20 años.

¿Cómo está esto? Si sabemos que en esa ciudad hay más de 1 000 personas que son menores de 20 años, ¿por qué llegamos a este resultado incorrecto?

En una primera presentación del caso, podemos pensar que las 100 personas fueron elegidas al azar, pero, desde luego, esto no fue así, pues hay que considerar que la gente que transita por una calle a determinada hora es un grupo con características específicas. En este caso también hay que ver que a la hora en que se realizó el interrogatorio, la mayoría de los estudiantes (muchos de los cuales son menores de 20 años) estaban en sus escuelas y no tuvieron ninguna oportunidad de ser elegidos. Como vemos, la muestra no fue tomada al azar y ello dio lugar a inferencia incorrecta.

2. Es muy frecuente, sobre todo en la radio y en la televisión, oír expresiones como: "8 de cada 10 personas fuman cigarros de tal marca" o "3 de cada 5 dentistas recomiendan tal dentífrico", etc. Pero en esos anuncios comerciales nunca mencionan cómo fueron elegidas las 10 personas o los 5 dentistas.

En este tipo de propaganda, a los publicistas no les interesa presentar datos correctos, sino servir a los intereses de sus patrones.

Ejercicio 3. Diga en cada caso si el dato que se infiere es correcto o equivocado.

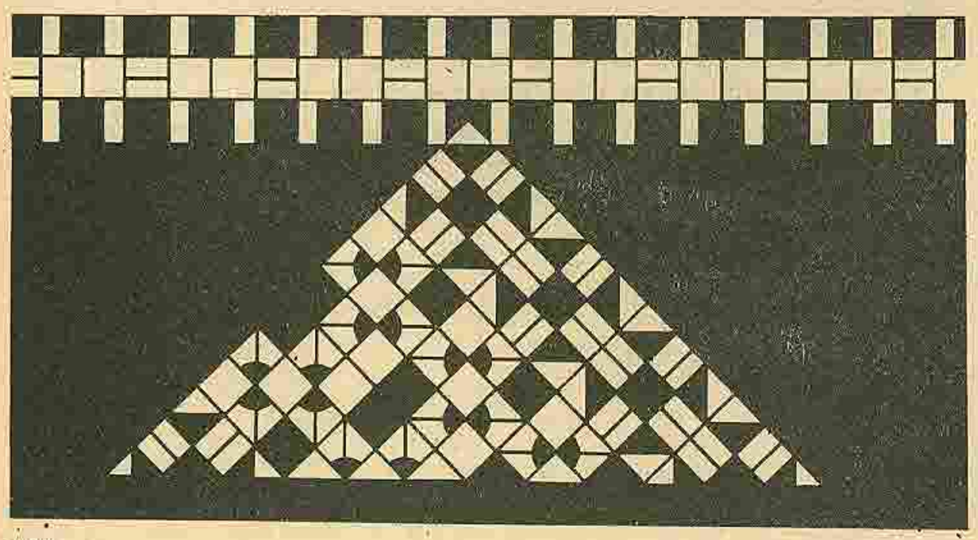
a) Al interrogar a 50 dentistas de una clínica se encuentra que 40 de ellos usan el dentífrico z. Se infiere que 4 de cada 5 dentistas en el país usan el dentífrico z.

b) Un trabajador falta dos lunes consecutivos. El patrón dice que tal trabajador falta todos los lunes.

c) Durante cierto concurso de popularidad, de 100 cartas que llegan a un canal de T.V., hay 75 que favorecen al locutor Pérez. Se declara que el 75% de los televidentes, en el país, votan por el locutor Pérez.

d) De 20 empleados de una oficina, hay 14 que usan camisas w. Se infiere que en el país 7 de cada 10 empleados usan camisas w.

e) En cierta colonia, se visitan 250 hogares y resulta que en 125 de esos hogares se escucha la estación radiodifusora k. Se infiere que en la mitad de los hogares del Distrito Federal se escucha la estación k.



3. Parámetros estadísticos

Media aritmética

En el campeonato mundial de fútbol de 1974, para escoger un equipo como favorito, algunas personas tomaron en cuenta, entre otros factores, la edad, considerando que en general los equipos con jugadores más jóvenes tienen mayores posibilidades de triunfo.

¿Cómo podemos comparar las edades de los jugadores de un equipo con las edades de los jugadores de otro equipo? Por ejemplo, si las edades (en años cumplidos) de los jugadores de Holanda fueron: 19, 18, 23, 21, 22, 17, 20, 19, 20, 20, 19, y las edades de los jugadores de Italia fueron: 26, 25, 24, 32, 23, 21, 17, 27, 27, 20 y 21. Una forma de hacer esto es obtener el promedio de las edades en cada equipo y comparar los resultados.

Usted seguramente recuerda que para obtener el promedio de n datos se suman éstos y el resultado se divide entre n.

Así, en el caso que nos ocupa tenemos que el promedio de edades en el equipo holandés era de 19.8, pues

$$19 + 18 + 23 + 21 + 22 + 17 + 20 + 19 + 20 + 20 + 19 = 218$$

$$11 \overline{)218} \quad 19.8$$

Y en el equipo italiano el promedio de edades era de 23.9

$$26 + 25 + 24 + 32 + 23 + 21 + 17 + 27 + 27 + 20 + 21 = 263$$

$$11 \overline{)263} \quad 23.9$$

En conclusión, el promedio de las edades de los jugadores de Italia es mayor que el promedio en edades de los jugadores del equipo de Holanda.

Como la palabra promedio se emplea de muchas maneras diferentes, para evitar confusiones y distinguir este promedio de otros, lo llamaremos media aritmética o, simplemente, media.

Ejercicio 4. Conteste las siguientes cuestiones:

a) En un examen semestral un alumno obtuvo las siguientes calificaciones: 8, 9, 6, 5, 4, 7, 5, 10 y 6. ¿Cuál es la media aritmética de ellas?

b) En una oficina el consumo diario de energía eléctrica, durante una semana, fue de 35, 20, 17, 42, 28, 70 y 19 kilovatios-hora. ¿Cuál fue en promedio el consumo diario durante esa semana?

c) Los pesos de los jugadores de un equipo de voleibol son 70, 65, 72, 76, 83, 62, 73, 69, 71, 64 y 63 kilogramos. ¿Cuál es la media aritmética de estos pesos?

d) Se sabe que 5 es la media aritmética de los siguientes datos: 3, 4, x, 7 y 3. ¿Cuál es el valor de x?

e) Si x es la media aritmética de los siguientes datos: 8, 5, 6, x, 8, 3, x. ¿Cuál es el valor de x?

El promedio o media aritmética es uno de los parámetros más usados en Estadística para comparar conjuntos de datos.

Mediana y moda

Es verdad que la media aritmética da una idea general acerca de un conjunto de datos y permite establecer comparaciones con otros conjuntos de datos. Pero, para ciertos fines, este parámetro resulta insuficiente.

Por ejemplo, Sutomo Koyama, entrenador del equipo japonés que compitió en el VII Campeonato Mundial de Voleibol, declaró que en su equipo el promedio de estatura es de 1.90 metros. Esto nos da una idea acerca de las estaturas de los jugadores; pero con ese sólo dato no es posible saber cuántos jugadores miden más de 1.90, cuántos miden menos de 1.90, cuántos hay con la misma estatura, etc.

Cuando es necesario proporcionar un poco más de información sobre un conjunto de datos se puede hacer uso de otros parámetros estadísticos como la mediana y la moda.

Estos parámetros son muy fáciles de obtener. Por ejemplo, veamos cómo se obtiene la mediana en el caso de los jugadores japoneses:

Se sabe que las estaturas de esos jugadores eran: 1.86, 1.83, 1.94, 1.91, 1.82, 1.91, 2.05, 1.80, 1.85, 1.91, 1.81, 1.80, 2.08. Para obtener la mediana lo primero que hacemos es ordenar los datos de menor a mayor:

1.80, 1.80, 1.81, 1.82, 1.83, 1.85, 1.86, 1.91, 1.91, 1.91, 1.94, 2.05, y 2.08. Si el número de datos es impar, el dato que queda justo a la mitad de la lista, es la mediana En este caso la mediana es 1.86.

Si el número de datos es par, la mediana es la media aritmética de los dos datos que quedan a la mitad de la lista.

Por lo que respecta a la moda, este parámetro es simplemente el dato que aparece con mayor frecuencia. Así, en el ejemplo que nos ocupa, la moda es 1.91.

Observaremos a continuación que cuando conocemos la media, la mediana y la moda de un conjunto de datos tenemos una mejor idea de ese conjunto.

Por ejemplo, con respecto a las edades de los 13 jugadores del equipo de voleibol que compitió por la U.R.S.S., se sabe lo siguiente:

Media: 22.8

Mediana: 23

Moda: 20

La media aritmética nos da una primera idea general; la mediana nos indica que hay 6 jugadores con menos de 23 años y 6 jugadores con más de 23 años y la moda nos indica que la edad que más se repite en los jugadores es 20 años.

Ejercicio 5.

a) En un equipo de basquetbol las estaturas de sus 9 jugadores son: 1.75, 1.80, 1.90, 1.95, 1.87, 1.90, 1.90, 1.75 y 1.92 m. ¿Cuántos jugadores miden más de 1.80?

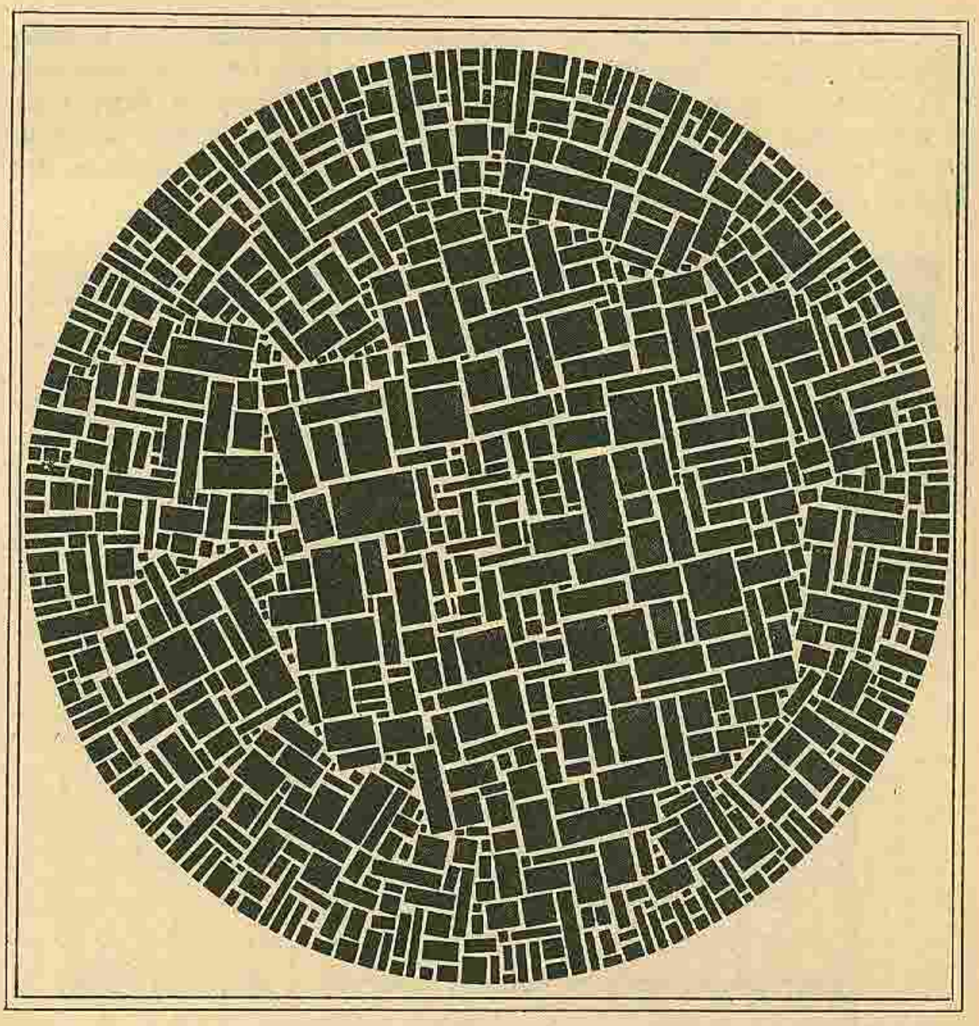
¿Cuál es la estatura promedio?

¿Cuál es la estatura que más se repite?

b) Las edades de los 8 empleados de una fábrica son: 23, 36, 35, 26, 24, 23, 26 y 26 años. Encuentre la media, la mediana y la moda de estos datos.

c) Los pesos (en kilogramos) de 8 jugadores de un equipo de 9 jugadores son: 81, 83, 70, 71, 79, 78, 83, 80. Si la moda tiene una frecuencia de 3. Encuentre la media y la mediana de los pesos de los 9 jugadores.

d) Las estaturas de 9 jugadores de un equipo de basquetbol son: 1.68, 1.70, x, x, x, 1.77, 1.77, 1.78 y 1.80 m. Si la media de estos datos es 1.75 encuentre la mediana y la moda.



4. Distribución de frecuencias

En el manejo de algunos conjuntos de datos numéricos, hay ocasiones en que se requiere una mayor información que la proporcionada por los parámetros estadísticos. Para darnos cuenta en qué consiste esa necesidad de información analicemos el siguiente ejemplo.

Los siguientes conjuntos de datos numéricos (pesos en kg de los jugadores de dos equipos de voleibol) tienen los mismos parámetros estadísticos:

$$\{67, 68, 68, 69, 69, 69, 70, 72, 72, 73, 74, 75, 75\}$$

$$\{60, 61, 61, 69, 69, 69, 70, 72, 72, 79, 79, 80, 80\}.$$

Estos dos conjuntos de datos tienen la misma media, la misma mediana y la misma moda. Ellas son:

Media: 70.8

Mediana: 70

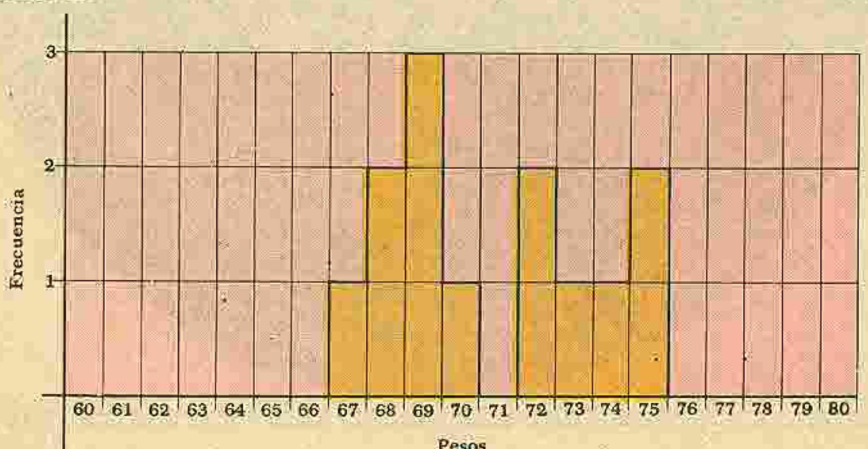
Moda: 69

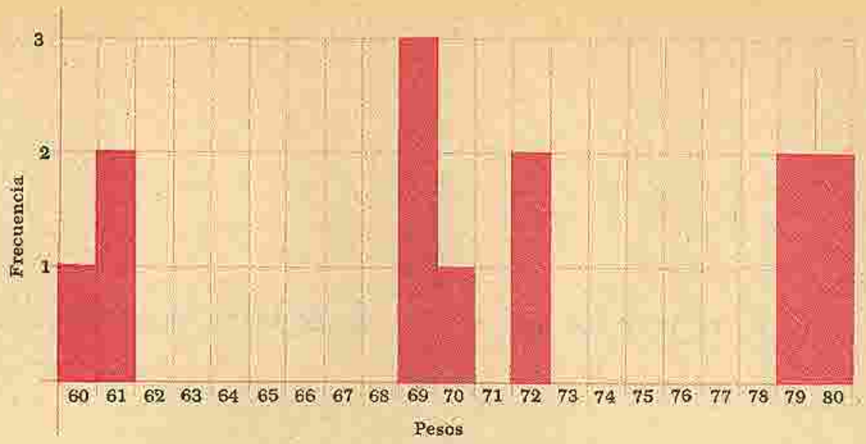
Para tener una mejor idea de lo que caracteriza a cada uno de estos conjuntos, haremos una gráfica de barras para cada uno. Haremos esto de la siguiente manera: en el eje horizontal anotaremos los datos y en el eje vertical su frecuencia. (Número de veces que aparece un dato en el conjunto.) Para facilitar el trabajo construiremos primero dos tablas, una para cada conjunto.

Pesos	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
Frecuencia								1	2	3	1		2	1	1	2					

Pesos	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
Frecuencia	1	2								3	1		2							2	2

Con estas tablas resulta más cómodo elaborar las gráficas correspondientes.





En estas gráficas podemos apreciar qué es lo que caracteriza a cada uno de esos conjuntos de números que tienen los mismos parámetros estadísticos: Lo que les caracteriza es su diferente distribución de frecuencias.

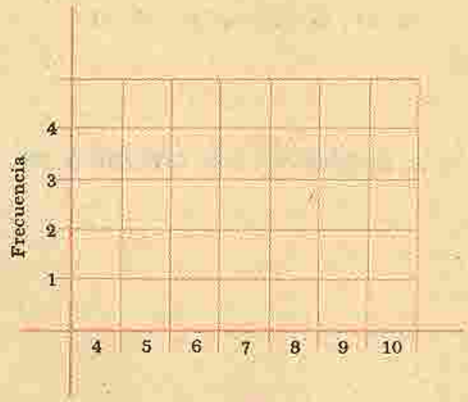
A gráficas como las anteriores se les da también el nombre de histogramas. Por medio de un histograma vemos rápidamente cuál es la distribución de frecuencias en un conjunto de datos numéricos.

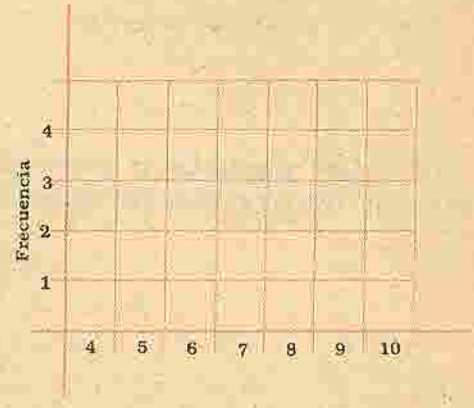
Ejercicio 6

a) Los siguientes conjuntos de datos tienen la misma media. Construya los histogramas correspondientes, para ver la distribución de frecuencias.

$$\{4, 5, 4, 4, 4, 10, 10, 9, 10, 10\}$$

$$\{6, 6, 7, 7, 8, 9, 6, 8, 7, 6\}$$

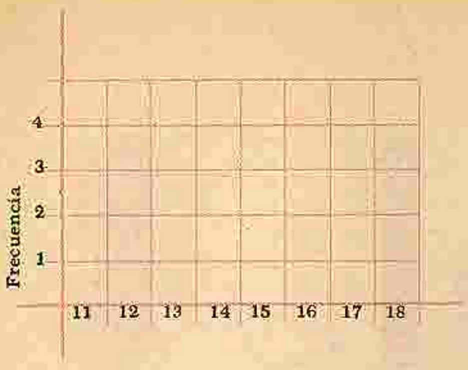


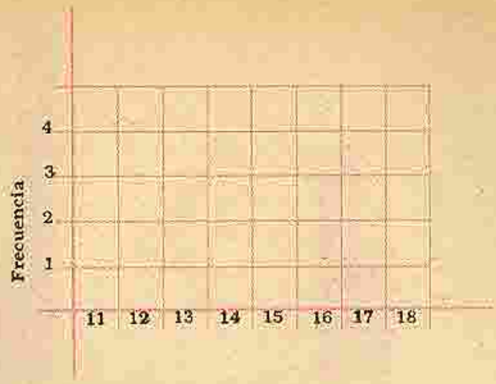


b) Los siguientes conjuntos de datos tienen la misma moda y la misma mediana. Construya los histogramas correspondientes y vea cuál es la distribución de frecuencias.

$$\{11, 14, 15, 16, 17, 14, 14, 17, 18, 18, 14\}$$

$$\{11, 14, 14, 15, 15, 16, 14, 14, 15, 17, 16\}.$$

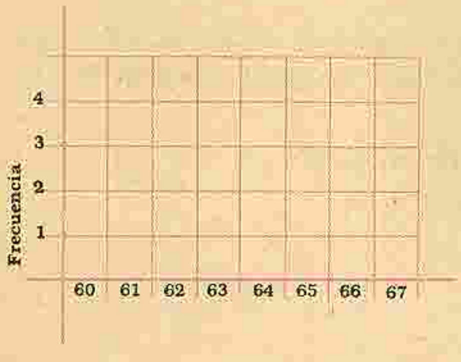


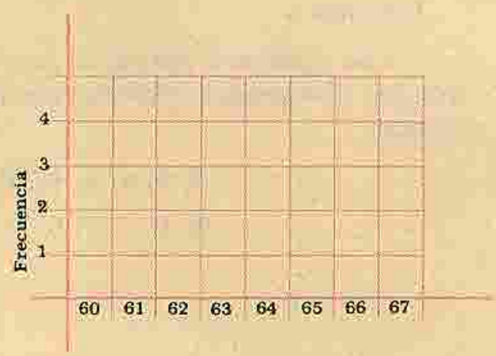


c) Los siguientes conjuntos de datos tienen la misma moda y la misma media. Construya los histogramas correspondientes.

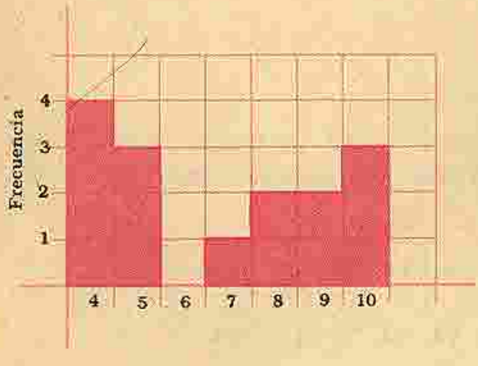
$$\{64,\ 65,\ 64,\ 64,\ 66,\ 60,\ 60,\ 64,\ 60\}$$

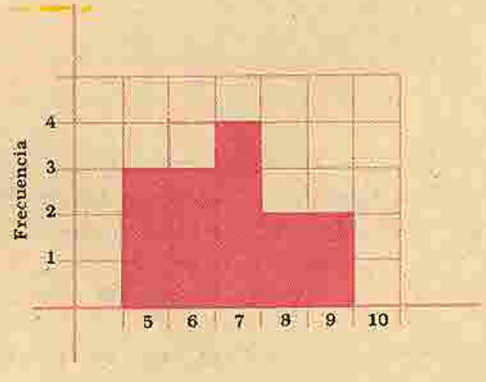
$$\{62,\ 62,\ 64,\ 63,\ 64,\ 61,\ 64,\ 63,\ 64\}.$$



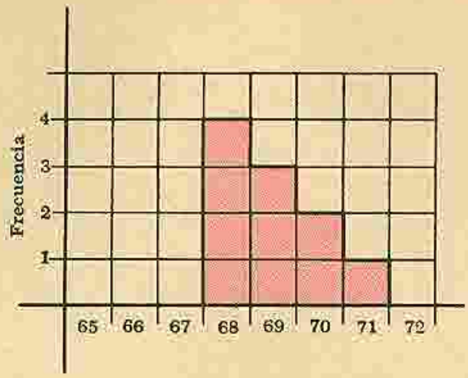


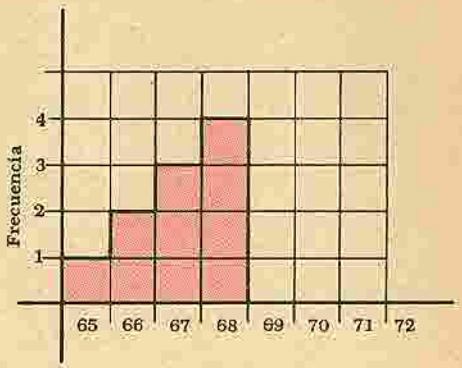
d) ¿Qué parámetro o parámetros son iguales en los conjuntos de datos de los siguientes histogramas?

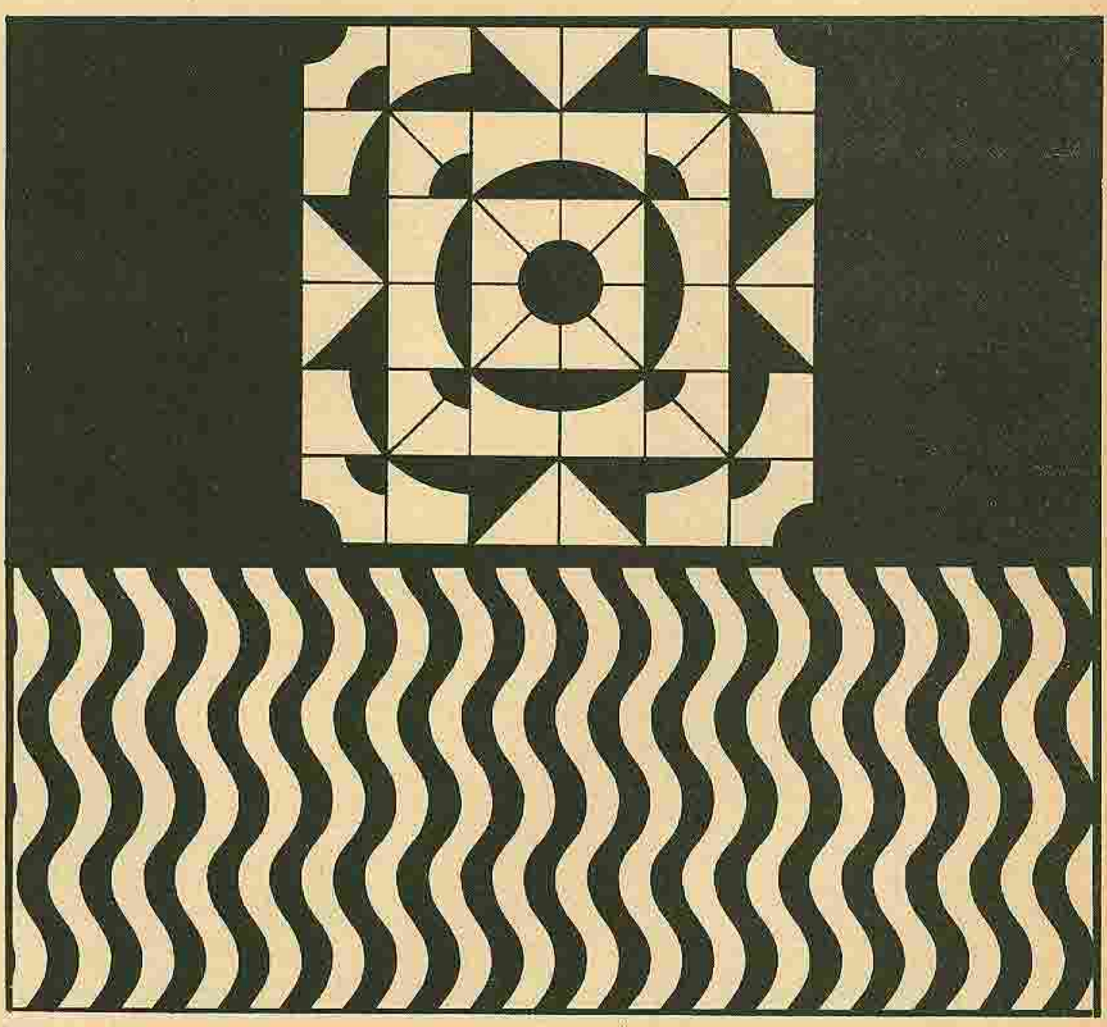




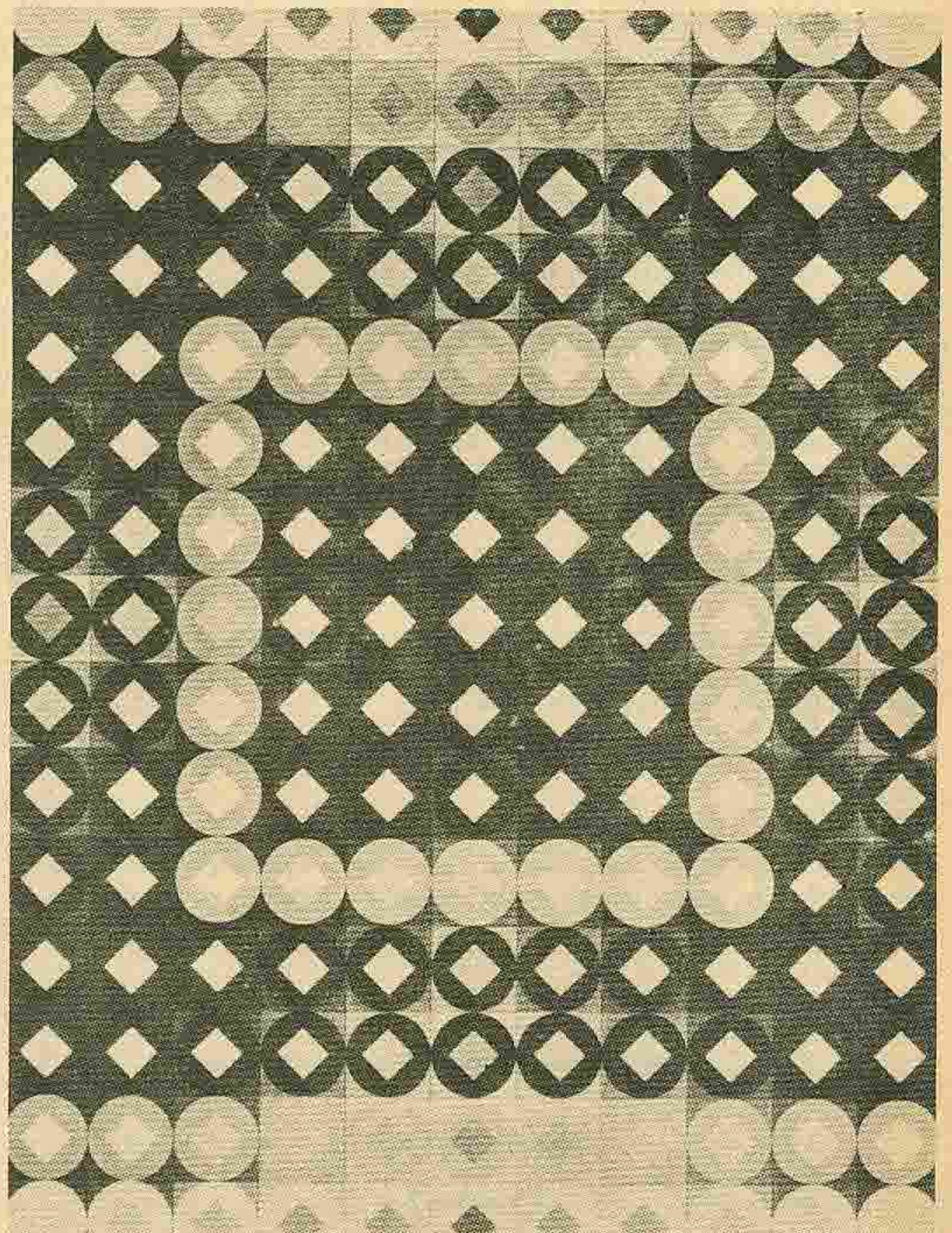
e) ¿Qué parámetro o parámetros son iguales en los conjuntos de datos de los siguientes histogramas?







Soluciones a los ejercicios



Capítulo Primero

Sistema de ecuaciones lineales

1. Ecuaciones lineales

Ejercicio 1.

c) no es solución porque $10 + 1 \neq 9$

d) sí es solución porque $.6 + 8.4 = 9$

e) no es solución porque $.4 + 9 \neq 9$

f) sí es solución porque $1 + 8 = 9$

g) sí es solución porque $\frac{3}{4} + 8\frac{1}{4} = 9$

h) sí es solución porque $6\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2} = 9$

i) sí es solución porque $1.45 + 7.55 = 9$

j) no es solución porque $5.68 + 4.32 \neq 9$

2. Gráfica de una ecuación lineal

Ejercicio 2.

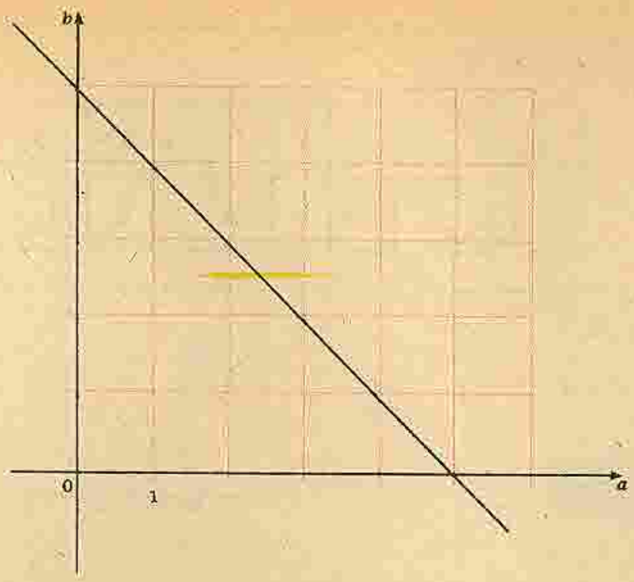
Al trazar una recta que pase por dos puntos cualesquiera de la gráfica, todos los demás puntos de ésta quedan contenidos en la recta.

Ejercicio 3.

a) Todas las parejas dadas son soluciones de la ecuación $a + b = 5$ porque

$1 + 4 = 5$	$2.5 + 2.5 = 5$	$4.2 + .8 = 5$
$3 + 2 = 5$	$1.6 + 3.4 = 5$	

b)



Ejercicio 4.

El punto azul tiene coordenadas $(-.5, 4.5)$ y el punto verde tiene coordenadas $(6, -2)$. Y son soluciones de la ecuación $x + y = 4$ porque

$$-.5 + 4.5 = 4$$

$$6 + (-2) = 4$$

Ejercicio 5.

a) $y = 6$	b) $y = 1.5$	c) $y = 9$
d) $y = -1.5$	e) $x = 6$	f) $x = 4$
g) $x = 8.5$	h) $x = 8$	

Ejercicio 6.

a) $x = 1,\ y = \boxed{6}$ b) $x = 5, y = \boxed{2}$

c) $x = .5,\ y = \boxed{6.5}$ d) $x = \frac{3}{4}, y = \boxed{6\frac{1}{4}}$

e) $x = -3,\ y = \boxed{10}$ f) $x = -\frac{1}{2}\ \ y = \boxed{7\frac{1}{2}}$

g) $x = \boxed{3,}\ y = 4$ h) $x = \boxed{0,}\ y = 7$

i) $x = \boxed{9,}\ y = -2$ j) $x = \boxed{6\frac{3}{5},}\ y = \frac{2}{5}$

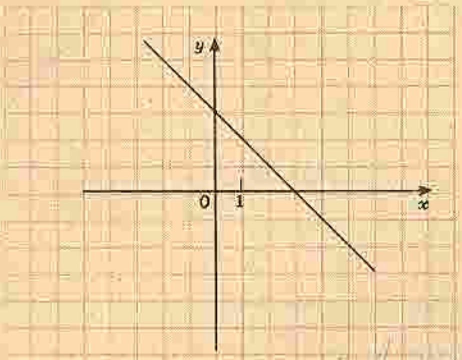
Ejercicio 7 y Ejercicio 8.

x	2	4	6	0	7	4.4	$4\frac{2}{3}$	-3
y	3	1	-1	5	-2	.6	$\frac{1}{3}$	8

Ejercicio 9.

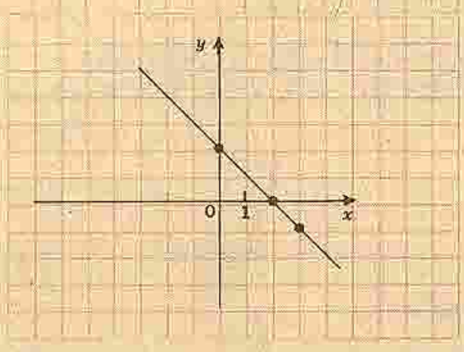
a) $x + y = 3$

x	y
0	3
-1	4
3	0



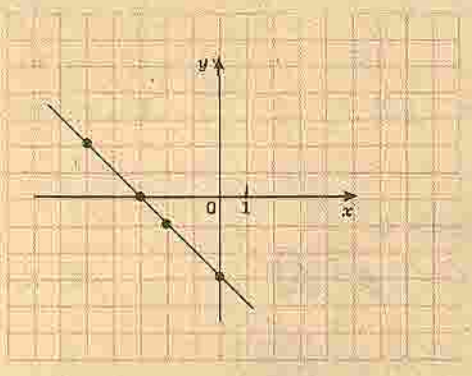
b) $x + y = 2$

x	y
2	0
3	-1
0	2



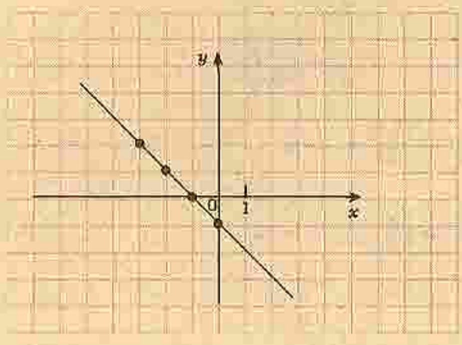
c) $x + y = -3$

x	y
-3	0
-2	-1
0	-3
-5	2



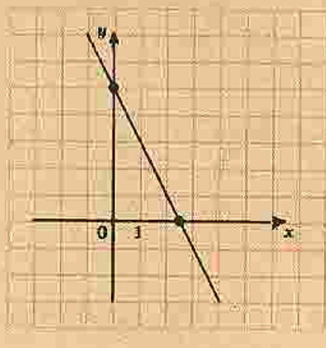
d) $x + y = -1$

x	y
0	-1
-1	0
-3	2
-2	1

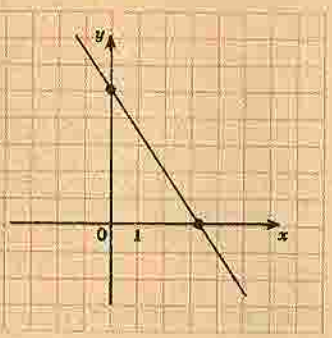


Ejercicio 10.

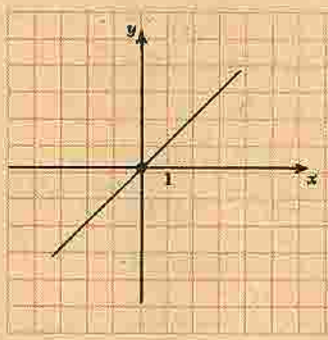
a) $2x + y = 5$



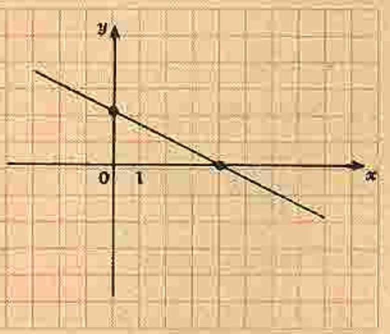
b) $3x + 2y = 10$



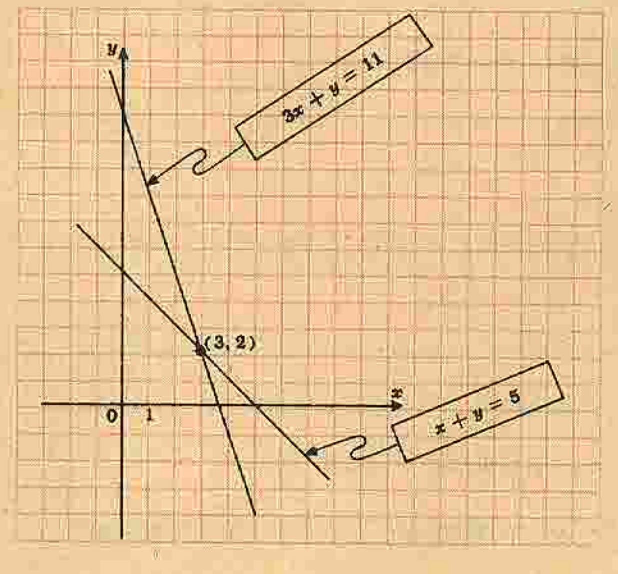
c) $x - y = 0$



d) $x + 2y = 4$



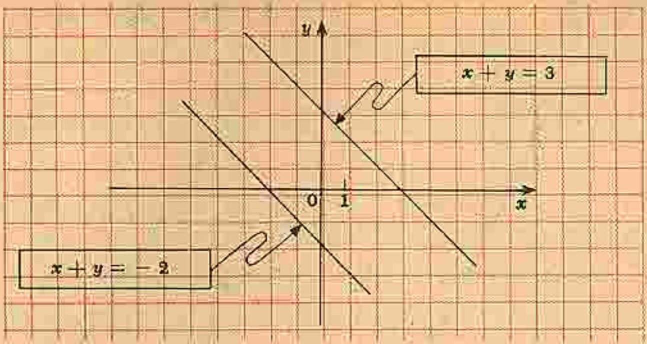
Ejercicio 11.



Las dos gráficas se intersecan en el punto $(3, 2)$.

La solución común a las dos ecuaciones es la pareja $x = 3$, $y = 2$.

Ejercicio 12.



No hay ninguna solución común a las dos ecuaciones.

Ejercicio 13.

a) $x + y = 13$ b) $x + 2y = 30$

c) $3x - 2y = 26$ d) $a - b = 5$

e) $\frac{5}{100}x + \frac{12}{100}y = 12.5$ f) $\frac{3}{100}a - \frac{12}{1\,000}b = 6.24$

g) $10x + 20y = 2\,000$ h) $2x + 3y = 84$

3. Sistemas de ecuaciones lineales. (No hay ejercicios)

4. Resolución gráfica de sistemas de ecuaciones

Ejercicio 14.

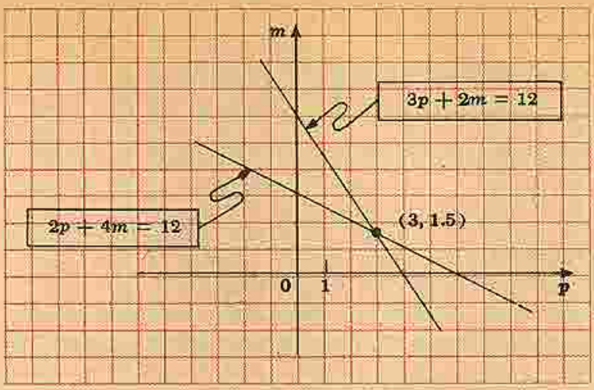
Problema 1.

Importe de 3 piñas y 2 melones $3p + 2m = 12$

Importe de 2 piñas y 4 melones $2p + 4m = 12$

El problema se describe con el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 3\,p + 2\,m = 12 \\ 2\,p + 4\,m = 12 \end{cases}$$



La solución al sistema es la pareja $p = 3$, $m = 1.5$.

Respuesta. Una piña cuesta \$3.00 y un melón cuesta \$1.50.

Problema 2.

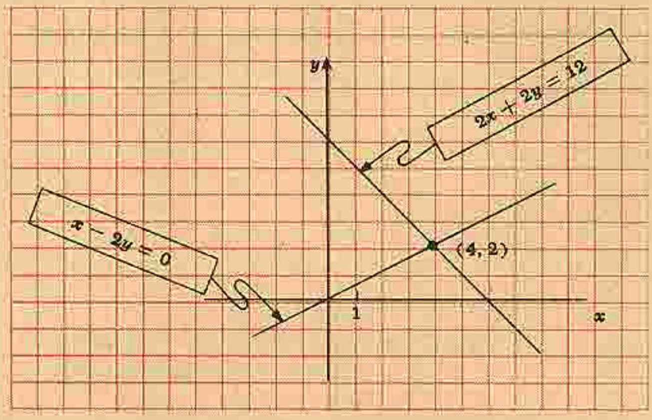
$$x = 2y$$

$$x - 2y = 0$$

$$2x + 2y = 12$$

Para saber cuánto es x y y debemos resolver el sistema

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ 2x + 2y = 12 \end{cases}$$



En la gráfica vemos que la solución del sistema es $x = 4$, $y = 2$.

Respuesta. El largo del rectángulo es 4 metros y el ancho es 2 metros.

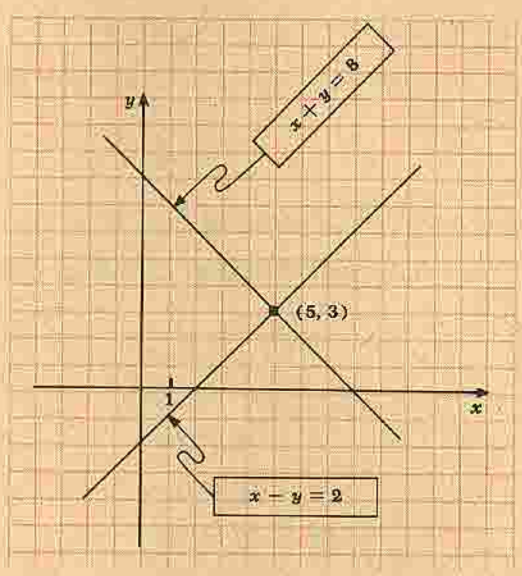
Problema 3.

$$x + y = 8$$

$$x - 2$$

$$x - 2 = y$$

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ x - y = 2 \end{cases}$$



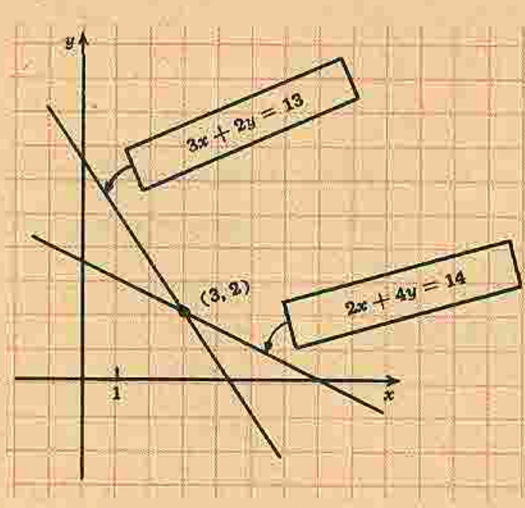
En la gráfica se ve que la solución del sistema es la pareja $x = 5$, $y = 3$.

Respuesta. El distribuidor tiene 5 tractores y 3 camiones.

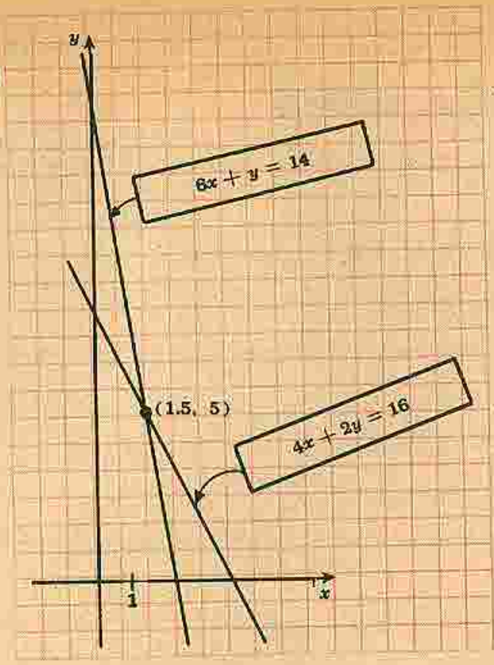
Ejercicio 15.

(1) $$\begin{cases} 3x + 2y = 13 \\ 2x + 4y = 14 \end{cases}$$

Respuesta. En esa papelería, un cuaderno cuesta \$3.00 y una pluma cuesta \$2.00.



(2)



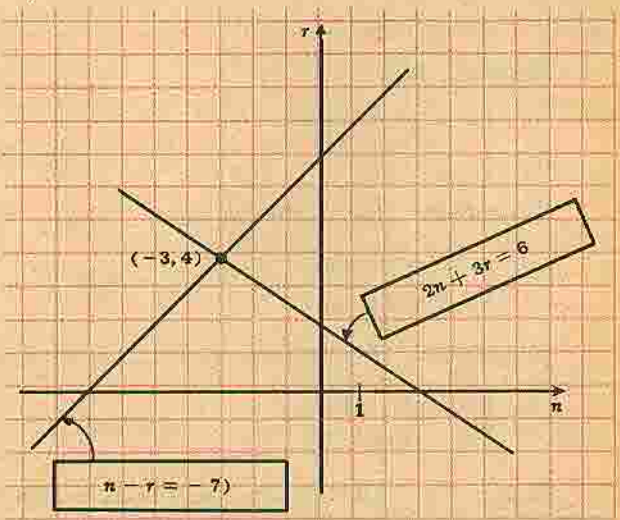
$$\begin{cases} 6x + y = 14 \\ 4x + 2y = 16 \end{cases}$$

Respuesta. En esa tienda, el kg de maíz cuesta \$1.50 y el kg de frijol cuesta \$5.00.

(3)

$$\begin{cases} 2n + 3r = 6 \\ n - r = -7 \end{cases}$$

Respuesta. n es el número -3 y r es el número 4.



Ejercicio 16.

1. $x = 1$
   $y = 1$
2. $x = 3$
   $y = 2$
3. $x = 3$
   $y = 4$
4. $x = 2$
   $y = 3$
5. $x = 3$
   $y = 5$
6. No tiene solución
7. Hay una infinidad de soluciones.

5. Resolución algebraica de sistemas de ecuaciones

Ejercicio 17.

a) $x = 5, \quad y = -9$ b) $x = -6, \quad y = -4$

c) $x = 5, \quad y = 2$ d) $a = 2, \quad b = 3$

Ejercicio 18.

a) $x = 21, \quad y = -20$ b) $x = 3, y = 4$

c) $x = 6, \quad y = -1$ d) $n = 3, t = 5$

Ejercicio 19.

a) $x = 2, y = 3$ b) $x = 7, y = 1.5$

c) $x = 10, y = 2.5$ d) $a = 1.5, b = 3.5$

e) $p = 1.2, q = 1$

Ejercicio 20.

1. $\begin{cases} x + y = -30 \\ x - y = 4 \end{cases}$ $\quad x = -13, y = -17$

Respuesta. Los números son -13 y -17.

2. $\begin{cases} x + y = 500 \\ x + 50 = y \end{cases}$ $\quad x = 225, y = 275$

Respuesta. El primero colocó 225 ladrillos y el segundo 275 ladrillos.

3. $\begin{cases} A + B = 112 \\ A - B = 15 \end{cases}$ $\quad A = 63.5, B = 48.5$

Respuesta. Un ángulo mide 63.5 grados, otro mide 48.5 grados y el tercero es el suplemento de la suma de estos dos, o sea, 68 grados.

4. $\begin{cases} A + B = 430 \\ A - B = 120 \end{cases}$ $\quad A = 275, B = 155$

Respuesta. A contiene 275 litros y B contiene 155 litros.

5. $\begin{cases} x + y = 40 \\ .8x + .4y = 22.8 \end{cases}$ $\quad x = 17, y = 23$

Respuesta. Se compran 17 timbres de \$.80 y 23 timbres de \$.40.

6. $\begin{cases} x + y = 29 \\ 50x + 20y = 1\,000 \end{cases}$ $\quad x = 14, y = 15$

Respuesta. Le dieron 14 billetes de 50 pesos y 15 billetes de 20 pesos.

7. $\begin{cases} x - y = 20 \\ 2x + y = 220 \end{cases}$ $\quad x = 80, y = 60$

Respuesta. En una dieta normal hay 80 gramos de proteína y 60 gramos de grasa.

8. $\begin{cases} x + y = 25 \\ 5x + 20y = 380 \end{cases}$ $\quad x = 8, y = 17$

Respuesta. Hay 8 billetes de 5 pesos y 17 billetes de 20 pesos.

9. $\begin{cases} x + y = 28 \\ 6x + 8y = 200 \end{cases}$ $\quad x = 12, y = 16$

Respuesta. Se cortaron el pelo 12 niños y 16 adultos.

10. $\begin{cases} x + y = 150 \\ 3.5\,x + 5y = 630 \end{cases}$ $\quad x = 80, y = 70$

Respuesta. Se vendieron 80 boletos para damas y 70 boletos para varones.

11. $\begin{cases} x + y = 50 \\ 4x + \frac{1}{2}y = 95 \end{cases}$ $\quad x = 20; y = 30$

Respuesta. El lado $\overline{AC}$ mide 20 metros, el lado $\overline{CD}$ mide 30 metros, el lado $\overline{EF}$ mide 80 metros y el lado $\overline{FH}$ mide 15 metros.

12. $\begin{cases} y - x = 5 \\ 3y + 3x = 75 \end{cases}$ $\quad x = 10, y = 15$

$$AC = \sqrt{10^2 + 15^2} = \sqrt{100 + 225} = \sqrt{325} = 18.03$$

Respuesta. Las medidas de los lados son:

$AB = 10$, $BC = 15$, $AC = 18.03$ (aproximadamente)

$A'B' = 30$, $B'C' = 45$, $A'C' = 54.08$ (aproximadamente)

13. $\begin{cases} .08x + .06y = 250 \\ .17x + .09y = 475 \end{cases}$ $\quad x = 2\,000, y = 1\,500$

Respuesta. Su sueldo sin descuentos es de 2 000 pesos en la secundaria y 1 500 pesos en la primaria.

14. $\begin{cases} 2x + 3y = 47.50 & \text{(porque son 5 litros de \$ 9.50)} \\ 3x + 2y = 52.50 & \text{(porque son 5 litros de \$10.50)} \end{cases}$

$$x = 12.50, \; y = 7.50$$

Respuesta. Una clase de alcohol es de \$ 12.50 el litro y la otra clase es de \$ 7.50 el litro.

15. $\begin{cases} x + y = 7465 \\ .052x + .095y = 467 \end{cases}$ $\quad x = 5632, \; y = 1833$

Respuesta. Esa corona tenía 5632 gramos de oro y 1833 gramos de plata.

$$16.\ \begin{cases} \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}y = 65 & x = 60 \\ \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}y = \ \ 0 & y = 40 \end{cases}$$

a) El automóvil A hizo sus recorridos a 60 kilómetros por hora.

b) El automóvil B hizo sus recorridos a 40 kilómetros por hora.

c) En el primer caso, el automóvil A recorrió 45 kilómetros y en el segundo, 30 kilómetros.

d) El automóvil B recorrió 20 kilómetros en el primer caso y 30 kilómetros en el segundo.

17. Si los dígitos de n son a y b, podemos plantar las ecuaciones

$$a + b = 11$$

y

$$10a + b + 45 = 10b + a$$

De aquí obtenemos el sistema

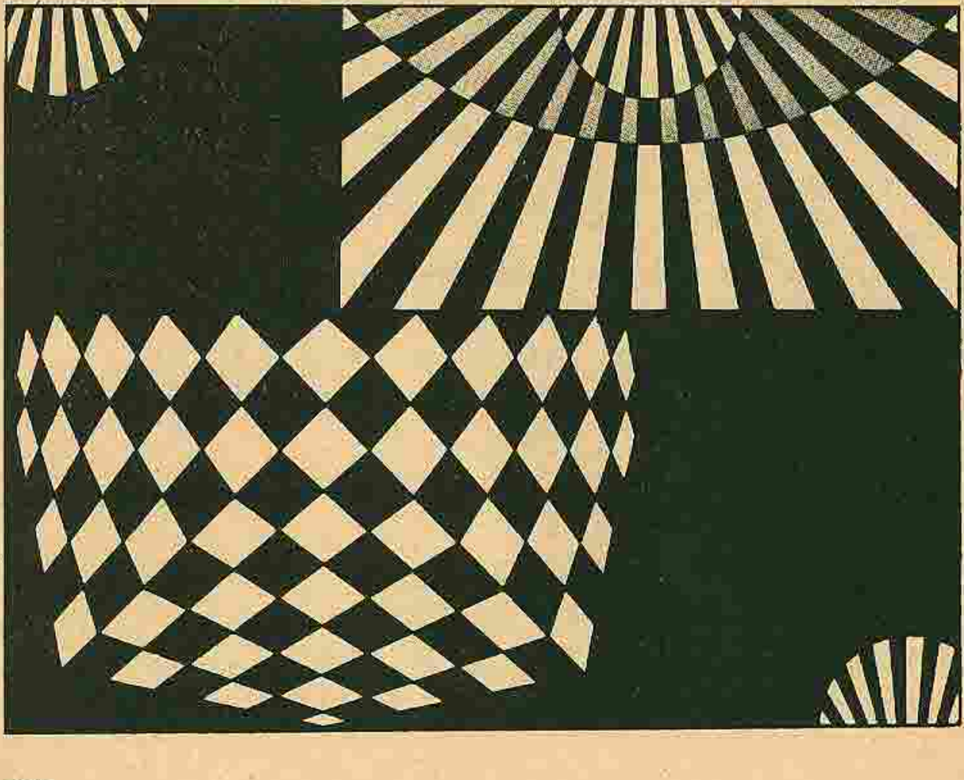
$$\begin{aligned} a + \ \ b &= 11 \\ 9a - 9b &= -45 \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema encontramos que

$$a = 3 \text{ y } b = 8$$

Por lo tanto, damos la siguiente respuesta:

Respuesta. El número n es 38. Y si se invierten sus dígitos será 83.



Capítulo Segundo

La notación exponencial y sus aplicaciones

1. Exponentes naturales

Ejercicio 1.

e) $5^4 = (5)\ (5)\ (5)\ (5) = 625$

f) $14^2 = (14)\ (14) = 196$

g) $50^1 = 50$

h) $(-4)^4 = (-4)\ (-4)\ (-4)\ (-4) = 256$

i) $(-5)^1 = -5$

j) $(3.4)^2 = (3.4)\ (3.4) = 11.56$

k) $(-2.5)^2 = (-2.5)\ (-2.5) = 6.25$

l) $(-1.2)^3 = (-1.2)\ (-1.2)\ (-1.2) = -1.728$

m) $(\sqrt{4})^2 = (\sqrt{4})\ (\sqrt{4}) = (2)\ (2) = 4$

n) $(\sqrt{7})^2 = (\sqrt{7})\ (\sqrt{7})$

o) $(4a)^2 = (4a)\ (4a) = (4)\ (4)\ (a)\ (a) = 16a^2$

p) $(7x)^1 = 7x$

q) $(2r)^3 = (2r)\ (2r)\ (2r) = (2)\ (2)\ (2)\ (r)\ (r)\ (r) = 8r^3$

r) $(-3a)^4 = (-3a)(-3a)(-3a)(-3a) = (-3)(-3)(-3)(-3)$
$= (a)(a)(a)(a) = 81a^4$

s) $(x+3)^2 = (x+3)\ (x+3)$

t) $(6+a)^2 = (6+a)\ (6+a)$

u) $(y-1)^3 = (y-1)\ (y-1)\ (y-1)$

2. Polinomios

(No hay ejercicios)

3. Multiplicación de polinomios

Ejercicio 2.

a) $4^4 \cdot 4^2 = \underbrace{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4}_{4 \text{ factores}} \cdot \underbrace{4 \cdot 4}_{2 \text{ factores}} = 4^{4+2} = 4^6$

b) $6^3 \cdot 6^2 = \underbrace{6 \cdot 6 \cdot 6}_{\text{3 factores}} \cdot \underbrace{6 \cdot 6}_{\text{2 factores}} = 6^{3+2} = 6^5$

c) $\left(\frac{3}{4}\right)^5 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \underbrace{\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4}}_{\text{5 factores}} \cdot \underbrace{\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4}}_{\text{3 factores}} = \left(\frac{3}{4}\right)^{5+3} = \left(\frac{3}{4}\right)^8$

d) $(2.9)^2 \cdot (2.9)^5 = \underbrace{(2.9)\ (2.9)}_{\text{2 factores}}\ \underbrace{(2.9)\ (2.9)\ (2.9)\ (2.9)\ (2.9)}_{\text{5 factores}} =$

$(2.9^{2+5} = (2.9)^7$

e) $(-2)^3 \cdot (-2)^4 = \underbrace{(-2)\ (-2)\ (-2)}_{\text{3 factores}}\ \underbrace{(-2)\ (-2)\ (-2)\ (-2)}_{\text{4 factores}} =$

$(-2)^{3+4} = (-2)^7$

f) $5^3 \cdot 5^2 = \underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5}_{\text{3 factores}} \cdot \underbrace{5 \cdot 5}_{\text{2 factores}} = 5^{3+2} = 5^5$

g) $a^6 \cdot a^4 = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}_{\text{6 factores}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a}_{\text{4 factores}} = a^{6+4} = a^{10}$

h) $x^5 \cdot x^8 = \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x}_{\text{5 factores}} \cdot \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x}_{\text{8 factores}} = x^{5+8} = x^{13}$

Ejercicio 3.

a) $7^2 \cdot 7^4 = 7^{2+4} = 7^6$

b) $6^3 \cdot 6^4 = 6^{3+4} = 6^7$

c) $(-4)^2(-4) = (-4)^{2+1} = (-4)^3$

d) $(-2)^6(-2)^3 = (-2)^{6+3} = (-2)^9$

e) $(.3)^2(.3)^3 = .3^{2+3} = .3^5$

f) $(1.3)^4(1.3)^2 = 1.3^{4+2} = 1.3^6$

g) $36^5 \cdot 36^m = 36^{5+m}$

h) $45^x \cdot 45^y = 45^{x+y}$

i) $x^r \cdot x^s = x^{r+s}$

j) $8^2 \cdot 8^3 \cdot 8^4 = 8^{2+3+4} = 8^9$

k) $(-6.2)^5(-6.2)^2(-6.2)^1 = (-6.2)^{5+2+1} = (-6.2)^8$

l) $a^p \cdot a^q \cdot a = a^{p+q+1}$

m) $(3x)^4\,(3x)^1 = (3x)^{4+1} = (3x)^5$

n) $(a + b)(a + b)^3 = (a + b)^{1+3} = (a + b)^4$

o) $(5)^3 \cdot (5)^0 = (5)^{3+0} = (5)^3$

p) $(2x)^0 \cdot (2x)^4 = (2x)^{0+4} = (2x)^4$

q) $m^0 \cdot m^1 = m^{0+1} = m^1 = m$

r) $r^0 \cdot r^0 = r^{0+0} = r^0 = 1$

Ejercicio 4.

a) $3a^2(2a^3) = 6a^5$

b) $-2m^3(-7m^4) = 14m^7$

c) $-1.8r^2(2.3r^2) = 4.14r^4$

d) $2a^2(3a^3)(2a^5) = 12a^{10}$

e) $-x^4 \cdot (-3x^3) \cdot x = 3x^8$

f) $2a^2b^3(3a^3b^2) = 6a^5b^5$

g) $-2mn^2(-1m^2n) = 2m^3n^3$

h) $-3axy(-2a^2xy^2) = 6a^3x^2y^3$

i) $2xy^2z^3(-3x^3y^2z) = -6x^4y^4z^4$

j) $-.3x^2yz(8xy^2z) = -2.4x^3y^3z^2$

k) $m^2(3m^3 + 2m^2) = 3m^5 + 2m^4$

l) $x^3(2x^2 + 5x + 2) = 2x^5 + 5x^4 + 2x^3$

m) $r(2xr + 2x^2r + .5) = 2xr^2 + 2x^2r^2 + .5r$

n) $a^2b(2ab^2 + 3a^2) = 2a^3b^3 + 3a^4b$

o) $-2b^2(-5b^3 + 2b^2 + 3b) = 10b^5 - 4b^4 - 6b^3$

p) $-3mn(-2m^2 + 3n^2 - 1) = 6m^3n - 9mn^3 + 3mn$

Ejercicio 5.

a) $(y + 3)(y + 2) = y^2 + 5y + 6$

b) $(x + 6)(x - 2) = x^2 + 4x - 12$

c) $(n + .4)(n - 1.3) = n^2 - .9n - .52$

d) $\left(x - \frac{3}{4}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right) = x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{3}{8}$

e) $(a + 5)^2 = a^2 + 10a + 25$

f) $(x - 5)^2 = x^2 - 10x + 25$

g) $(x - 1.5)^2 = x^2 - 3x + 2.25$

h) $(y + 4.9)^2 = y^2 + 9.8y + 24.01$

i) $(x + d)^2 = x^2 + 2xd + d^2$

j) $(x - d)^2 = x^2 - 2xd + d^2$

4. División de polinomios

Ejercicio 6.

a) $\dfrac{6^4}{6^2} = 6^2$ porque $6^2 \times 6^2 = 6^4$

b) $\dfrac{(-12)^5}{(-12)^2} = (-12)^3$ porque $(-12)^3 \times (-12)^2 = (-12)^5$

c) $\dfrac{(13.4)^7}{(13.4)^5} = (13.4)^2$ porque $(13.4)^2 \times (13.4)^5 = (13.4)^7$

d) $\dfrac{(-14.5)^8}{(-14.5)^6} = (-14.5)^2$ porque $(-14.5)^2 \times (-14.5)^6 = (-14.5)^8$

e) $\dfrac{n^{10}}{n^6} = n^4$ porque $n^4 \times n^6 = n^{10}$

f) $\dfrac{r^{30}}{r^{22}} = r^8$ porque $r^8 \times r^{22} = r^{30}$

g) $\dfrac{\pi^9}{\pi^3} = \pi^6$ porque $\pi^6 \times \pi^3 = \pi^9$

Ejercicio 7.

a) $\dfrac{4^5}{4^2} = 4^3$

b) $\dfrac{18^9}{18^7} = 18^2$

c) $\dfrac{(-10)^6}{(-10)} = (-10)^5$

d) $\dfrac{(-2.5)^4}{(-2.5)^3} = -2.5$

e) $\dfrac{n^8}{n^7} = n$

f) $\dfrac{(3x)^{10}}{(3x)^7} = (3x)^3$

g) $\dfrac{6^r}{6^s} = 6^{r-s}$

h) $\dfrac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$

i) $\dfrac{(n+8)^{10}}{(n+8)^9} = n + 8$

j) $\dfrac{(x+y)^4}{(y+x)^3} = \dfrac{(x+y)^4}{(x+y)^3} = x + y$

Ejercicio 8.

a) $\dfrac{20a^6}{4a^2} = 5a^4$

Comprobación: $(5a^4)(4a^2) = 20a^6$

b) $\dfrac{-14y^7}{2y^5} = -7y^2$

Comprobación: $(-7y^2)(2y^5) = -14y^7$

c) $\dfrac{8b^4}{-2b^3} = -4b$

Comprobación: $(-4b)(-2b^3) = 8b^4$

d) $\dfrac{-6x^5}{-5x^3} = 1.2x^2$

Comprobación: $(1.2x^2)(-5x^3) = -6x^5$

e) $\dfrac{12a^3b^6}{-3ab^3} = -4a^2b^3$

Comprobación: $(-4a^2b^3)(-3ab^3) = 12a^3b^6$

f) $\dfrac{-36t^{10}w^6}{9t^4w^6} = -4t^6$

Comprobación: $(-4t^6)(9t^4w^6) = -36\,t^{10}w^6$

g) $\dfrac{3.6h^2k^4}{-4hk^2} = -.9hk^2$

Comprobación: $(-.9\,hk^2)(-4\,hk^2) = 3.6\,h^2\,k^4$

h) $\dfrac{4.8x^7y^9}{1.2x^6y^4} = 4xy^5$

Comprobación: $(4xy^5)(1.2x^6y^4) = 4.8x^7y^9$

i) $\dfrac{18a^4 + 9a^3 - 27a^2}{9a^2} = 2a^2 + a - 3$

Comprobación: $(2a^2 + a - 3)(9a^2) = 18a^4 + 9a^3 - 27a^2$

j) $\dfrac{3.5x^7 - 3x^4 + .6x^3}{-5x^3} = -.7x^4 + .6x - .12$

Comprobación: $(-.7x^4 + .6x - .12)(-5x^3) = 3.5x^7 - 3x^4 + .6x^3$

k) $\dfrac{24a^5b^3 - 36a^4b^2 - 16a^3b^5}{4a^3b^2} = 6a^2b - 9a - 4b^3$

Comprobación: $(6a^2b - 9a - 4b^3)(4a^3b^2) =$
$= 24a^5b^3 - 36a^4b^2 - 16a^3b^5$

l) $\dfrac{-18r^7 + 5.4r^5 - 10.8r^4 + 12.6r^3}{-6r^2} = 3r^5 - .9r^3 + 1.8r^2 - 2.1r$

Comprobación: $(3r^5 - .9r^3 + 1.8r^2 - 2.1r)(-6r^2) =$
$= -18r^7 + 5.4r^5 - 10.8r^4 + 12.6r^3$

m) $\dfrac{-48x^7y^4 - 8.4x^5y^5 + 15.6x^4y^7 + 38.4x^3y^{10}}{12x^3y^4} =$

$-4x^4 - .7x^2y + 1.3xy^3 + 3.2y^6$

Comprobación: $(-4x^4 - .7x^2y + 1.3xy^3 + 3.2y^6)(12x^3y^4) =$
$= -48x^7y^4 - 8.4x^5y^5 + 15.6x^4y^7 + 38.4x^3y^{10}$

5. Exponentes enteros negativos

Ejercicio 9.

a) $2^{-3} = \dfrac{1}{2^3} = \dfrac{1}{8} = .125$

b) $5^{-3} = \dfrac{1}{5^3} = \dfrac{1}{125} = .008$

c) $10^{-2} = \dfrac{1}{10^2} = \dfrac{1}{100} = .01$

d) $\left(\dfrac{1}{4}\right)^{-3} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{4}\right)^3} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{64}} = 64$

e) $\left(\dfrac{2}{5}\right)^{-2} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{2}{5}\right)^2} = \dfrac{1}{\dfrac{4}{25}} = \dfrac{25}{4} = 6.25$

f) $(-3)^{-2} = \dfrac{1}{(-3)^2} = \dfrac{1}{9} = .111\ldots$

g) $(-4)^{-3} = \dfrac{1}{(-4)^3} = \dfrac{1}{64} = .015625$

h) $(\sqrt{6})^{-2} = \dfrac{1}{\sqrt{6^2}} = \dfrac{1}{6}$

i) $\left(-\dfrac{3}{4}\right)^2 = \dfrac{1}{\left(-\dfrac{3}{4}\right)^2} = \dfrac{1}{\dfrac{9}{16}} = \dfrac{16}{9}$

j) $(-.3)^{-4} = \dfrac{1}{(-.3)^4} = \dfrac{1}{.0081} = 123.45679$

Ejercicio 10.

d) $\frac{1}{4^2} = 4^{-2}$

e) $\frac{1}{5^3} = 5^{-3}$

f) $\frac{1}{9} = \frac{1}{3^2} = 3^{-2}$

g) $\frac{1}{27} = \frac{1}{3^2} = 3^{-3}$

h) $\frac{1}{10^2} = 10^{-2}$

i) $\frac{1}{10} = \frac{1}{10^1} = 10^{-1}$

j) $\frac{1}{100} = \frac{1}{10^2} = 10^{-2}$

k) $\frac{1}{1\,000} = \frac{1}{10^3} = 10^{-3}$

l) $\frac{1}{10\,000} = \frac{1}{10^4} = 10^{-4}$

m) $\frac{1}{1\,000\,000} = \frac{1}{10^6} = 10^{-6}$

Ejercicio 11.

a) $3^4 > 3^2$

b) $2^1 > 2^0$

c) $5^{-3} < 5^3$

d) $6^2 > 6^{-2}$

e) $3^{-4} < 3^2$

f) $7^{-1} < 7^0$

g) $8^{-2} > 8^{-3}$

h) $10^{-4} < 10^{-1}$

i) $9^{-2} < 9^0$

j) $1^0 = 1^1$

k) $1^{-1} = 1^0$

l) $1^1 = 1^{-1}$

m) $0^1 = 0^6$

n) $1^0 > 0^1$

o) $(-3)^2 > (-3)^{-2}$

p) $(-2)^3 < (-2)^{-3}$

q) $(-4)^0 > (-4)^{-2}$

r) $(-1)^{-1} < 1^{-1}$

Ejercicio 12.

a) $5^{-2} \cdot 5^5 = 5^3 = 125$

b) $10^4 \cdot 10^{-3} = 10^1 = 10$

c) $2^{-4} \cdot 2^{-1} = 2^{-5} = \dfrac{1}{2^5} = \dfrac{1}{32}$

d) $(6.4)^{-7} \cdot (6.4)^4 = (6.4)^{-3} = \dfrac{1}{(6.4)^3} = \dfrac{1}{262.144}$

e) $10^{-5} \cdot 10^{-2} = 10^{-7} = \dfrac{1}{10^7} = \dfrac{1}{10\,000\,000}$

f) $10^{-8} \cdot 10^5 = 10^{-3} = \dfrac{1}{10^3} = \dfrac{1}{1\,000}$

g) $10^7 \cdot 10^{-2} = 10^5 = 100\,000$

h) $10^6 \cdot 10^{-9} = 10^{-3} = \dfrac{1}{10^3} = \dfrac{1}{1\,000}$

i) $10^4 \cdot 10^{-9} \cdot 10^3 = 10^{-2} = \dfrac{1}{10^2} = \dfrac{1}{100}$

j) $r^{10} \cdot r^{-10} = r^0 = 1$

k) $\dfrac{4^{-3}}{4^2} = 4^{-5} = \dfrac{1}{4^5} = \dfrac{1}{1\,024}$

l) $\dfrac{5^2}{5^{-2}} = 5^4 = 625$

m) $\dfrac{10^{-8}}{10^{-10}} = 10^2 = 100$

n) $\dfrac{2^{-5}}{2^{-8}} = 2^3 = 8$

o) $\dfrac{3}{3^{-2}} = 3^3 = 27$

p) $\dfrac{10^5}{10^{-3}} = 10^8 = 100\,000\,000$

q) $\dfrac{10^{-7}}{10^{-7}} = 10^0 = 1$

r) $\dfrac{10^{-3}}{10} = 10^{-4} = \dfrac{1}{10^4} = \dfrac{1}{10\,000}$

s) $\dfrac{f}{f^{-4}} = f^5$

t) $\dfrac{15b^{-5}}{-3b^2} = -5b^{-7} = \dfrac{-5}{b^7}$

u) $\dfrac{x^{-4}y^6}{x^{-7}y^0} = x^3y^6$

v) $\dfrac{-20a^{-5}b^4}{-4a^3b^{-6}} = 5a^{-8}b^{10}$

w) $\dfrac{12ax^4 + 6ax^{-3} - 18ax^{-2}}{6ax^{-2}} = 2x^6 + \dfrac{1}{x} - 3$

6. Notación científica

Ejercicio 13.

a) $10 = 10^1$

c) $1\ 000 = 10^3$

d) $10\ 000 = 10^4$

e) $100\ 000 = 10^5$

f) $1\ 000\ 000 = 10^6$

g) $10\ 000\ 000 = 10^7$

h) $1\ 000\ 000\ 000 = 10^9$

i) $1 = 10^0$

Ejercicio 14.

b) $10^5 = 100\ 000$

c) $10^6 = 1\ 000\ 000$

d) $10^7 = 10\ 000\ 000$

e) $10^1 = 10$

f) $10^0 = 1$

g) $10^n = 1\underbrace{0\ldots0}_{n \text{ ceros}}$

Ejercicio 15.

b) $10^{-2} = \dfrac{1}{10^2} = \dfrac{1}{100}$

c) $10^{-1} = \dfrac{1}{10^1} = \dfrac{1}{10}$

d) $10^{-4} = \dfrac{1}{10^4} = \dfrac{1}{10\ 000}$

e) $10^{-6} = \dfrac{1}{10^6} = \dfrac{1}{1\ 000\ 000}$

f) $10^{-5} = \dfrac{1}{10^5} = \dfrac{1}{100\ 000}$

g) $10^{-9} = \dfrac{1}{10^9} = \dfrac{1}{1\ 000\ 000\ 000}$

h) $10^{-n} = \dfrac{1}{10^n} \quad \dfrac{1}{1\underbrace{0\ldots0}_{n \text{ ceros}}}$

Ejercicio 16.

b) $.001 = \frac{1}{1\,000} = \frac{1}{10^3} = 10^{-3}$

c) $.1 = \frac{1}{10} = \frac{1}{10^1} = 10^{-1}$

d) $.0001 = \frac{1}{10\,000} = \frac{1}{10^4} = 10^{-4}$

e) $.00001 = \frac{1}{100\,000} = \frac{1}{10^5} = 10^{-5}$

f) $.000001 = \frac{1}{1\,000\,000} = \frac{1}{10^6} = 10^{-6}$

g) $.000\,000\,001 = \frac{1}{1\,000\,000\,000} = \frac{1}{10^9} = 10^{-9}$

i) $10^{-1} = \frac{1}{10^1} = \frac{1}{10} = .1$

j) $10^{-4} = \frac{1}{10^4} = \frac{1}{10\,000} = .0001$

k) $10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100} = .01$

l) $10^{-7} = \frac{1}{10^7} = \frac{1}{10\,000\,000} = .0000001$

Ejercicio 17.

a) $3 \times 10^3 = 3\,000$

b) $8 \times 10^4 = 80\,000$

c) $5 \times 10^0 = 5$

d) $9 \times 10^2 = 900$

e) $95 \times 10^6 = 95\,000\,000$

f) $342 \times 10^2 = 34\,200$

g) $3\,874 \times 10^1 = 38\,740$

h) $86.7 \times 10^2 = 8\,670$

i) $3.42 \times 10^3 = 3\,420$

j) $3.05 \times 10^4 = 30\,500$

k) $1.2 \times 10^4 = 12\,000$

l) $21.478 \times 10^5 = 2\,147\,800$

m) $.0867 \times 10^4 = 867$

n) $.04 \times 10^3 = 40$

o) $.000367 \times 10^1 = .00367$

p) $.000367 \times 10^3 = .367$

Ejercicio 18.

a) $36 \times 10^{-1} = 36 \times \frac{1}{10^1} = \frac{36}{10} = 3.6$

b) $875 \times 10^{-2} = 875 \times \frac{1}{10^2} = \frac{875}{100} = 8.75$

c) $35 \times 10^{-3} = 35 \times \frac{1}{10^3} = \frac{35}{1\,000} = .035$

d) $398 \times 10^{-5} = 398 \times \frac{1}{10^5} = \frac{398}{100\,000} = .00398$

e) $6.3 \times 10^{-2} = 6.3 \times \frac{1}{10^2} = \frac{6.3}{100} = .063$

f) $7.6 \times 10^{-4} = 7.6 \times \frac{1}{10^4} = \frac{7.6}{10\,000} = .00076$

g) $3.875 \times 10^{-5} = 3.875 \times \frac{1}{10^5} = \frac{3.875}{100\,000} = .00003875$

h) $896.7 \times 10^{-1} = 896.7 \times \frac{1}{10^1} = \frac{896.7}{10} = 89.67$

i) $125.73 \times 10^{-4} = 125.73 \times \frac{1}{10^4} = \frac{125.73}{10\,000} = .012573$

j) $.086 \times 10^{-3} = .086 \times \frac{1}{10^3} = \frac{.086}{1\,000} = .000086$

Ejercicio 19.

a) $36\,000 = 3.6 \times 10^4$

b) $850\,000 = 8.5 \times 10^5$

c) $56\,000\,000 = 5.6 \times 10^7$

d) $8 = 8 \times 10^0$

e) $50\,000\,000\,000 = 5 \times 10^{10}$

f) $85\,300 = 8.53 \times 10^4$

g) $9.875 = 9.875 \times 10^0$

h) $8597.2 = 8.5972 \times 10^3$

i) $.025 = 2.5 \times 10^{-2}$

j) $.00397 = 3.97 \times 10^{-3}$

k) $.000000031 = 3.1 \times 10^{-8}$

l) $.000000003 = 3 \times 10^{-9}$

Ejercicio 20.

a) $5 \times 10^{3} = 5\,000$

b) $1.8 \times 10^{4} = 18\,000$

c) $6.36 \times 10^{7} = 63\,600\,000$

d) $1.501 \times 10^{3} = 1\,501$

e) $5.25 \times 10^{8} = 525\,000\,000$

f) $6.384 \times 10^{2} = 638.4$

g) $1.7 \times 10^{-3} = .0017$

h) $3.25 \times 10^{-4} = .000325$

i) $3.6 \times 10^{-1} = .36$

j) $9.9 \times 10^{-10} = .00000000099$

Ejercicio 21.

Distancia al Sol
(en kilómetros)

Mercurio	5.8×10^{7}
Venus	108 000 000
Tierra	1.5×10^{8}
Marte	230 000 000
Júpiter	7.8×10^{8}
Saturno	1.4×10^{9}
Urano	2 900 000 000
Neptuno	4.5×10^{9}
Plutón	5 900 000 000

Ejercicio 22.

Diámetro de un neutrón	$.\underbrace{000\ldots}_{12\text{ ceros}}15$
Masa de un neutrón	$.\underbrace{000\ldots}_{23\text{ ceros}}17$
Diámetro de un electrón	5.6×10^{-15}

Masa de un electrón	9.1×10^{-28}
Diámetro de un protón	$\underbrace{.000\ldots}_{\text{13 ceros}}18$
Masa de un protón	$\underbrace{.000\ldots}_{\text{23 ceros}}17$

Ejercicio 23.

a) $37\,000\,000 \times 1\,500\,000 = 3.7 \times 10^{7} \times 1.5 \times 10^{6} =$
$= 5.55 \times 10^{13} = 55\,500\,000\,000\,000$

b) $30\,000\,000 \times 3\,600\,000\,000 = 3 \times 10^{7} \times 3.6 \times 10^{9} =$
$= 10.8 \times 10^{16} = 1.08 \times 10^{17} = 108\underbrace{0\ldots0}_{\text{15 ceros}}$

c) $27\,000\,000 \times .05 = 2.7 \times 10^{7} \times 5 \times 10^{-2} =$
$= 13.5 \times 10^{5} = 1.35 \times 10^{6} = 1\,350\,000$

d) $.00011 \times 3\,000\,000 = 1.1 \times 10^{-4} \times 3 \times 10^{6} =$
$= 3.3 \times 10^{2} = 330$

e) $.000008 \times .00012 = 8 \times 10^{-6} \times 1.2 \times 10^{-4} = 9.6 \times 10^{-10} =$
$.00000000096$

f) $.000013 \times .0046 = 1.3 \times 10^{-5} \times 4.6 \times 10^{-3} = 5.98 \times 10^{-8} =$
$.0000000598$

g) $35\,000 \times 8\,000 \times 5\,000 = 3.5 \times 10^{3} \times 8 \times 10^{3} \times 5 \times 10^{3}$
$= 140 \times 10^{9} = 1.4 \times 10^{11} = 140\,000\,000\,000$

h) $80\,000\,000 \times 40\,000 \times .00003$
$= 8 \times 10^{7} \times 4 \times 10^{4} \times 3 \times 10^{-5} = 96 \times 10^{6}$
$= 9.6 \times 10^{7} = 96\,000\,000$

Ejercicio 24.

a) $\dfrac{36\,000\,000}{90\,000} = \dfrac{3.6 \times 10^{7}}{9 \times 10^{4}} = \dfrac{3.6}{9} \times \dfrac{10^{7}}{10^{4}}$
$= .4 \times 10^{3} = 4 \times 10^{2} = 400$

b) $\dfrac{48\,000}{120\,000} = \dfrac{4.8 \times 10^{4}}{1.2 \times 10^{5}} = \dfrac{4.8}{1.2} \times \dfrac{10^{4}}{10^{5}} = 4 \times 10^{-1} = .4$

c) $\dfrac{30\,000}{4\,000\,000} = \dfrac{3 \times 10^{4}}{4 \times 10^{6}} = \dfrac{3}{4} \times \dfrac{10^{4}}{10^{6}} = .75 \times 10^{-2} =$
$= 7.5 \times 10^{-3} = .0075$

d) $\dfrac{2\,000\,000}{5\,000\,000} = \dfrac{2 \times 10^{6}}{5 \times 10^{6}} = \dfrac{2}{5} = \dfrac{10^{6}}{10^{6}} = .4 \times 10^{0} = 4 \times 10^{-1} = .4$

e) $\dfrac{99\,000}{.03} = \dfrac{9.9 \times 10^{4}}{3 \times 10^{-2}} = \dfrac{9.9}{3} \times \dfrac{10^{4}}{10^{-2}} = 3.3 \times 10^{6} = 3\,300\,000$

f) $\dfrac{7\,200\,000}{.0012} = \dfrac{7.2 \times 10^{6}}{1.2 \times 10^{-3}} = \dfrac{7.2}{1.2} = \dfrac{10^{6}}{10^{-3}} = 6 \times 10^{9} = 6\,000\,000\,000$

g) $\dfrac{.0016}{.0004} = \dfrac{1.6 \times 10^{-3}}{4 \times 10^{-4}} = \dfrac{1.6}{4} \times \dfrac{10^{-3}}{10^{-4}} = .4 \times 10^{1} = 4 \times 10^{0} = 4$

h) $\dfrac{.03045}{.00015} = \dfrac{3.045 \times 10^{-2}}{1.5 \times 10^{-4}} = \dfrac{3.045}{1.5} \times \dfrac{10^{-2}}{10^{-4}} = 2.03 \times 10^{2} = 203$

i) $\dfrac{3.6 \times 200 \times .3}{600 \times 1800} = \dfrac{3.6 \times 2 \times 10^{2} \times 3 \times 10^{-1}}{6 \times 10^{2} \times 1.8 \times 10^{3}}$

$= \dfrac{3.6 \times 2 \times 3}{6 \times 1.8} \times \dfrac{10^{2} \times 10^{-1}}{10^{2} \times 10^{3}} = \dfrac{21.6}{10.8} \times \dfrac{10^{1}}{10^{5}} = 2 \times 10^{-4} = .0002$

j) $\dfrac{30\,000 \times 1\,800 \times .005}{5\,000 \times 20\,000} = \dfrac{3 \times 10^{4} \times 1.8 \times 10^{3} \times 5 \times 10^{-3}}{5 \times 10^{3} \times 2 \times 10^{4}} =$

$= \dfrac{3 \times 1.8 \times 5}{5 \times 2} \times \dfrac{10^{4} \times 10^{3} \times 10^{-3}}{10^{3} \times 10^{4}} = \dfrac{27}{10} \times \dfrac{10^{4}}{10^{7}} =$

$= 2.7 \times 10^{-3} = .0027$

Problemas.

1. a) $\dfrac{5.9 \times 10^{9}}{5.8 \times 10^{7}} = 1.02 \times 10^{2} = 102$

b) La distancia, en unidades astronómicas, del Sol a

Plutón es	39.3
Urano es	19.3
Júpiter es	5.2
Mercurio es	.386

2. a) $9.1 \times 10^{-28} \times 270 = 9.1 \times 10^{-28} \times 2.7 \times 10^{2}$
$= 24.57 \times 10^{-26} = 2.457 \times 10^{-25}$

La masa de un mesón pesado es de 2.457×10^{-25} gramos

b) $9.1 \times 10^{-28} \times 2\,200 = 9.1 \times 10^{-28} \times 2.2 \times 10^{3}$
$= 20.02 \times 10^{-25} = 2.002 \times 10^{-24}$

La masa de un hiperón es de 2.002×10^{-24} gramos

c) $9.1 \times 10^{-28} \times \dfrac{1}{2\,000} = 9.1 \times 10^{-28} \times \dfrac{1}{2 \times 10^{3}}$

$= 9.1 \times 10^{-28} \times \dfrac{1}{2} \times 10^{-3} = 4.55 \times 10^{-31}$

La masa de un neutrino es de 4.55×10^{-31}

d) $\dfrac{1.8 \times 10^{-14}}{5.6 \times 10^{-15}} = .321 \times 10^{1} = 3.21$

El diámetro del protón es 3.21 veces el diámetro del electrón.

e) $\dfrac{9.1 \times 10^{-28}}{1.7 \times 10^{-24}} = 5.35 \times 10^{-4}$

Capítulo Tercero
Ecuaciones de segundo grado

1. Ecuaciones de la forma $x^2 = r$

Ejercicio 1.

a) $x_1 = \sqrt{4} = 2$

$x_2 = -\sqrt{4} = -2$

b) $x_1 = \sqrt{36} = 6$

$x_2 = -\sqrt{36} = -6$

c) $y_1 = \sqrt{64} = 8$

$y_2 = -\sqrt{64} = -8$

d) $a_1 = \sqrt{121} = 11$

$a_2 = -\sqrt{121} = -11$

e) $n_1 = \sqrt{6.25} = 2.5$

$n_2 = -\sqrt{6.25} = -2.5$

f) $x_1 = \sqrt{10.24} = 3.2$

$x_2 = -\sqrt{10.24} = -3.2$

Ejercicio 2.

a) $x_1 = 53.99$

$x_2 = -53.99$

b) $y_1 = 35$

$y_2 = -35$

c) $n_1 = 6.782$

$n_2 = -6.782$

d) $r_1 = 11.18$

$r_2 = -11.18$

e) $s_1 = 1.3$

$s_2 = -1.3$

f) $k_1 = 1.8$

$k_2 = -1.8$

g) $b_1 = 2.236$

$b_2 = -2.236$

h) $c_1 = 4.359$

$c_2 = -4.359$

i) $x_1 = 0$

$x_2 = -0$

Ejercicio 3.

a) $x_1 = 4$

$x_2 = -4$

b) $y_1 = 6$

$y_2 = -6$

c) $n_1 = 1.8$

$n_2 = -1.8$

d) $r_1 = 1.3$

$r_2 = -1.3$

Ejercicio 4.

a) Ecuación: $x^2 = 81$
Medida del lado: 9

b) Ecuación: $m^2 = 144$
Medida del lado: 12

c) Ecuación: $y^2 = 73.96$
Medida del lado: 8.601

d) Ecuación: $x^2 = 9.61$
Medida del lado: 3.1

e) Ecuación: $a^2 = 3.61$
Medida del lado: 1.9

2. Ecuaciones de la forma $(x + d)^2 = r$

Ejercicio 5.

a) Ecuación: $(x + 2)^2 = 196$; $x = 12$

b) Ecuación: $(x + 6)^2 = 225$; $x = 9$

c) Ecuación: $(x + 8.1)^2 = 420.2$; $x = 12.4$

d) Ecuación: $(x - 8)^2 = 484$; $x = 30$

e) Ecuación: $(x - 13.5)^2 = 210.2$; $x = 28$

f) Ecuación: $(x - 3.7)^2 = 18.49$; $x = 8.001$

Ejercicio 6.

a) $x_1 = 11$
$x_2 = -17$

b) $y_1 = 7.5$
$y_2 = -9.5$

c) $n_1 = 15$
$n_2 = -33$

d) $x_1 = 18$
$x_2 = -6$

e) $x_1 = 14.5$
$x_2 = -7.5$

f) $r_1 = 7.4$
$r_2 = -7.2$

g) $y_1 = 6.3$
$y_2 = -2.3$

3. Ecuaciones de la forma $x^2 + 2dx + d^2 = r$

Ejercicio 7.

1) 5
2) 4
3) 6
4) 10
5) 1
6) $\frac{1}{2}$
7) .7

Ejercicio 8.

a) $x^2 + 10x + 25 = 49$

$(x + 5)^2 = 49$, por lo tanto, $x_1 = 2$, $x_2 = -12$

Comprobación:

1) $(2)^2 + 10(2) + 25 = 4 + 20 + 25 = 49$

2) $(-12)^2 + 10(-12) + 25 = 144 - 120 + 25 = 49$

b) $y^2 + 8y + 16 = 9$

$(y + 4)^2 = 9$, por lo tanto, $y_1 = -1$, $y_2 = -7$

Comprobación:

1) $(-1)^2 + 8(-1) + 16 = 1 - 8 + 16 = 9$

2) $(-7)^2 + 8(-7) + 16 = 49 - 56 + 16 = 9$

c) $n^2 - 12n + 36 = 81$

$(n - 6)^2 = 81$, por lo tanto, $n_1 = -3$, $n_2 = 15$

Comprobación:

1) $(-3)^2 - 12(-3) + 36 = 9 + 36 + 36 = 81$

2) $(15)^2 - 12(15) + 36 = 225 - 180 + 36 = 81$

d) $x^2 - 20x + 100 = 64$

$(x - 10)^2 = 64$, por lo tanto, $x_1 = 18$, $x_2 = 2$

Comprobación:

1) $(18)^2 - 20(18) + 100 = 324 - 360 + 100 = 64$

2) $(2)^2 - 20(2) + 100 = 4 - 40 + 100 = 64$

e) $x^2 + 1.4x + .49 = 1.44$

$(x + .7)^2 = 1.44$, por lo tanto, $x_1 = .5$, $x_2 = -1.9$

Comprobación:

1) $(.5)^2 + 1.4(.5) + .49 = .25 + .70 + .49 = 1.44$

2) $(-1.9)^2 + 1.4(-1.9) + .49 = 3.61 - 2.66 + .49 = 1.44$

f) $y^2 - y + \frac{1}{4} = \frac{9}{16}$

$\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{16}$, por lo tanto, $y_1 = \frac{5}{4}$, $y_2 = -\frac{1}{4}$

Comprobación:

1) $\left(\frac{5}{4}\right)^2 - \frac{5}{4} + \frac{1}{4} = \frac{25}{16} - \frac{20}{16} + \frac{4}{16} = \frac{9}{16}$

2) $\left(-\frac{1}{4}\right)^2 - \left(-\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4} = \frac{1}{16} + \frac{4}{16} + \frac{4}{16} = \frac{9}{16}$

Ejercicio 9.

Se encierran en rectángulos los trinomios de los incisos a, b, c, e, f y h

Ejercicio 10.

a) $x^2 + 22x + 121 = (x + 11)^2$

b) $n^2 - 4n + 4 = (n - 2)^2$

c) $y^2 + .8x + .16 = (y + .4)^2$

e) $x^2 + .6x + .09 = (x + .3)^2$

f) $y^2 - y + \frac{1}{4} = \left(y - \frac{1}{2}\right)^2$

h) $r^2 + \frac{2}{3}r + \left(\frac{2}{6}\right)^2 = \left(r + \frac{2}{3}\right)^2$

Ejercicio 11.

a) $x^2 - 10x + 25 = 289$

$(x - 5)^2 = 289$, por lo tanto, $x_1 = -12$, $x_2 = 22$

b) $x^2 + 14x + 49 = 529$

$(x + 7)^2 = 529$, por lo tanto, $x_1 = 16$, $x_2 = -30$

c) $x^2 + 3.4x + 2.89 = 196$

$(x + 1.7)^2 = 196$, por lo tanto, $x_1 = 12.3$, $x_2 = -15.7$

d) $y^2 - 12y + 36 = 13.69$

$(y - 6)^2 = 13.69$, por lo tanto, $y_1 = 9.7$, $y_2 = 2.3$

e) $a^2 - 10.4a + 27.04 = 14.44$

$(a - 5.2)^2 = 14.44$, por lo tanto, $a_1 = 9$, $a_2 = 1.4$

f) $r^2 + 10.6r + 28.09 = 75.69$

$(r + 5.3)^2 = 75.69$, por lo tanto, $r_1 = -14$, $r_2 = 3.4$

g) $z^2 + 1.6z + .64 = .36$

$(z + .8)^2 = .36$, por lo tanto, $z_1 = -.2$, $z_2 = -1.4$

h) $t^2 - \frac{8}{3}t + \frac{16}{9} = \frac{25}{9}$

$\left(t - \frac{4}{3}\right)^2 = \frac{25}{9}$, por lo tanto, $t_1 = 3$, $t_2 = -\frac{1}{3}$

Ejercicio 12.

a) $x^2 + 6x + 9$

b) $y^2 + 16x + 64$

c) $x^2 - 10x + 25$

d) $x^2 - 12x + 36$

e) $p^2 + 3p + 2.25$

f) $z^2 - 5z + 6.25$

g) $y^2 - 26y + 169$

h) $x^2 + 30x + 225$

i) $x^2 + 1.2x + .36$

j) $x^2 - .2x + .01$

4. La ecuación general de segundo grado

Ejercicio 13.

a) $x_1 = -1,\ x_2 = \frac{2}{3}$

b) $x_1 = 5,\ x_2 = 2$

c) $x_1 = -\frac{1}{2},\ x_2 = 2$

d) $x_1 = \frac{1}{3},\ x_2 = -\frac{1}{2}$

e) $x_1 = 10,\ x_2 = -6$

f) $x_1 = 3,\ x_2 = -\frac{1}{4}$

g) $x_1 = -3,\ x_2 = -4$

h) $x_1 = -3,\ x_2 = 1$

i) $x_1 = 1,\ x_2 = \frac{1}{2}$

j) $x_1 = \frac{5}{3},\ x_2 = -1$

k) $x_1 = \frac{4}{3},\ x_2 = -\frac{6}{5}$

l) $x_1 = 10,\ x_2 = -3.1$

m) $x_1 = 3.5,\ x_2 = 1.5$

n) $x_1 = -5,\ x_2 = 7.2$

Ejercicio 14.

a) $4x^2 + 2x + 5 = 0$

$a = 4,\ b = 2,\ c = 5$

b) $7x^2 - 14x - 15 = 0$

$a = 7,\ b = -14,\ c = -15$

c) $3x^2 + 6x - 6 = 0$

$a = 3,\ b = 6,\ c = 6$

d) $\frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{5} = 0$

$a = \frac{3}{4},\ b = -\frac{1}{2},\ c = \frac{1}{5}$

e) $2x^2 + .8x - .3 = 0$

$a = 2,\ b = .8,\ c = -.3$

f) $10x^2 - 14x + 18 = 0$

$a = 10,\ b = -14,\ c = 18$

g) $6x^2 + 9x - 17 = 0$

$a = 6,\ b = 9,\ c = -17$

h) $x^2 - x - 9 = 0$

$a = 1,\ b = -1,\ c = -9$

Ejercicio 15.

a) $x_1 = -2,\ x_2 = -1$

b) $z_1 = 5,\ z_2 = -3$

c) $x_1 = -2.5,\ x_2 = -2$

d) $y_1 = -1,\ y_2 = 3$

e) $n_1 = -\frac{1}{2},\ n_2 = -\frac{3}{4}$

f) $x_1 = \frac{1}{2},\ x_2 = -\frac{1}{4}$

g) $x_1 = \frac{1}{2},\ x_2 = -\frac{1}{4}$

h) La ecuación $y^2 - 121 = 0$ se puede presentar como $y^2 + 0x - 121 = 0$ y entonces tenemos que aquí $a = 1$, $b = 0$ y $c = -121$. Las soluciones son $y_1 = 11$ y $y_2 = -11$.

i) La ecuación $t^2 - .81 = 0$ se puede expresar así: $t^2 + 0x - .81 = 0$, en la que $a = 1$, $b = 0$ y $c = -.81$. Las soluciones son $t_1 = .9$ y $t_2 = -.9$.

j) La ecuación $r^2 + 7r = 0$ se puede expresar como $r^2 + 7r + 0 = 0$ y los valores de a, b y c en este caso son $a = 1$, $b = 7$ y $c = 0$. Las soluciones de la ecuación son $r_1 = 0$ y $r_2 = -7$.

Problemas.

a) Ecuación: $x(x + 1) = 156$

$$x^2 + x - 156 = 0$$

Soluciones de la ecuación: $x_1 = 12,\ x_2 = -13$

Primera respuesta: El consecutivo de 12 es 13, por consiguiente, los dos números buscados son 12 y 13.

Segunda respuesta: El consecutivo de -13 es -12, por consiguiente, los números buscados también pueden ser -13 y -12.

b) Ecuación: $x(x + 4) = 285$

$$x^2 + 4x - 285 = 0$$

Soluciones de la ecuación: $x_1 = 15,\ x_2 = -19$

Respuesta: El terreno mide 15 metros de ancho y 19 de largo.

c) Ecuación: $\frac{x(x-5)}{2} = 250$ o bien, $x^2 - 5x - 500 = 0$.

Respuesta al problema: $b = 20,\ h = 25$.

d) Un cateto mide 22 metros; el otro 27 metros.

e) Ecuación: $3t^2 + 2t - 56 = 0$

Soluciones de la ecuación: $t_1 = 4,\ t_2 = -\dfrac{28}{6}$

Respuesta: A los 4 segundos el proyectil recorre 56 metros.

f) Ecuación: $t^2 + 8t + 1 = 154$

$$t^2 + 8t - 153 = 0$$

Soluciones de la ecuación: $t_1 = 9,\ t_2 = -17$

Respuesta: Se requiere un tiempo de 9 segundos para que haya 154 bacterias.

g) Ecuación: $t^2 + 6t = 40$

$$t^2 + 6t - 40 = 0$$

Soluciones de la ecuación: $t_1 = 4,\ t_2 = -10$

Respuesta: Se necesitan 4 horas para que se evaporen 40 mililitros de ese líquido.

h) El problema se puede plantear con el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} y - x = 13 \\ y \cdot x = 300 \end{cases}$$

Despejando y en la primera ecuación tendremos:

$$y = 13 + x$$

Si sustituimos y en la segunda ecuación tendremos:

$$(13 + x)x = 300$$

Esta ecuación se puede expresar así:

$$x^2 + 13x - 300 = 0$$

Las soluciones de la ecuación son $x_1 = 12$ y $x_2 = -25$.

Sustituyendo x_1 en $y = 13 + x$ tendremos:

$$y = 13 + 12 = 25$$

1a. Respuesta: Los números son: 25 y 12.

Sustituyendo x_2 en $y = 13 + x$ tendremos:

$$y = 13 + (-25) = -12$$

2a. Respuesta: Los números son: -25 y -12.

i) Ecuación: $\begin{cases} x + y = 19 \\ xy = 84 \end{cases}$

Procediendo como en el problema anterior tendremos:

$$x_1 = 7 \qquad y_1 = 12$$

$$x_2 = 12 \qquad y_2 = 7$$

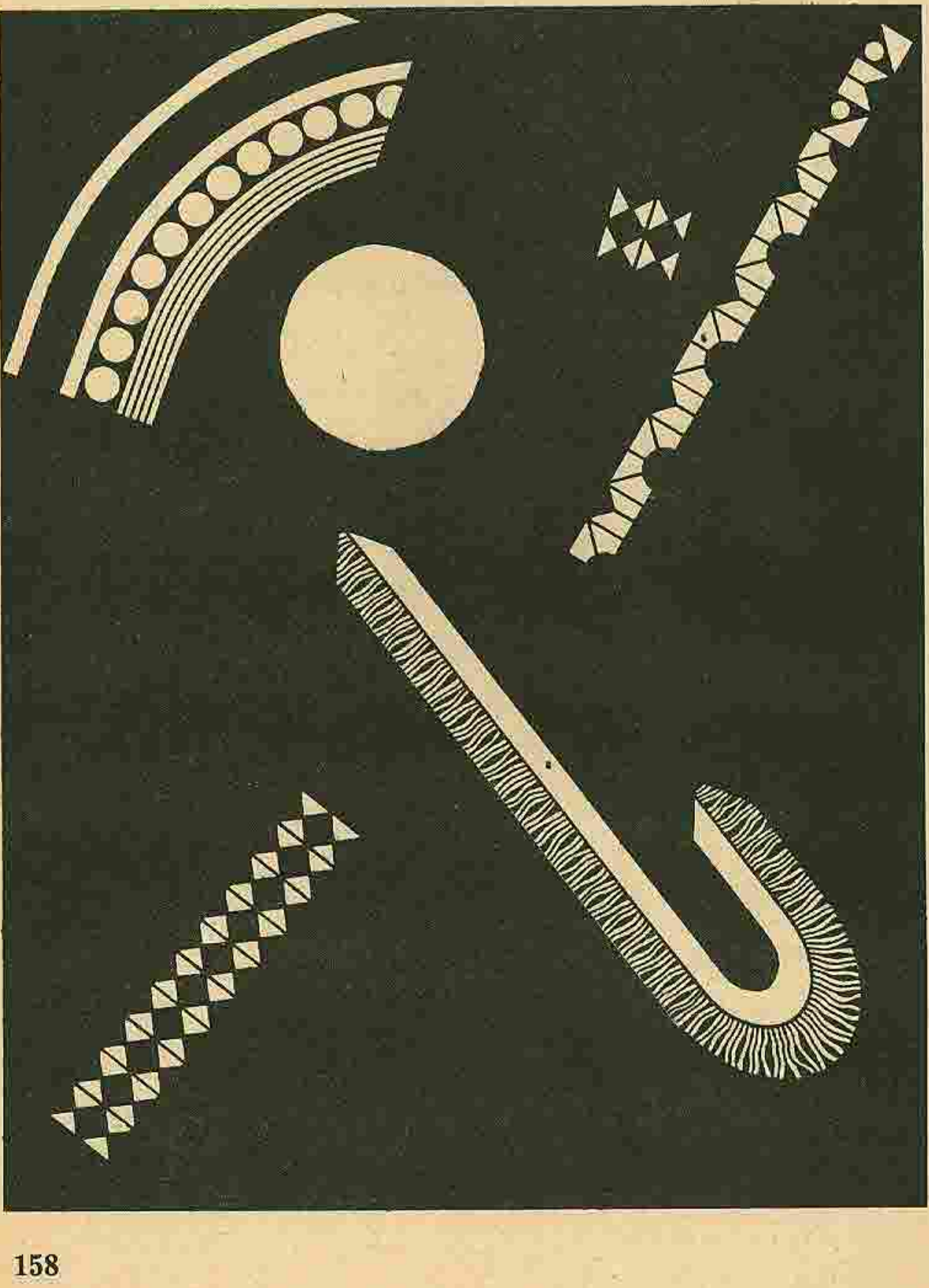
Respuesta: Los números son 7 y 12

j) Si el perímetro mide 26 metros, entonces la base y la altura del rectángulo suman 13 metros. Si llamamos x a uno de los lados, el otro medirá $13 - x$. Como el área es 40 metros, tendremos que:

$$x(13 - x) = 40 \text{ o bien } -x^2 + 13x - 40 = 0$$

La ecuación $-x^2 + 13x - 40 = 0$ tiene las soluciones $x_1 = 8$, $x_2 = -5$.

Respuesta: Las dimensiones del rectángulo son 8 metros y 5 metros.



Capítulo cuarto

Probabilidad

1. Experimentos determinísticos y experimentos aleatorios

2. El espacio muestra

Ejercicio 1.

a) El conjunto de los 12 meses del año.

b) Las 40 cartas.

c) Las 25 personas.

d) Las 28 letras del alfabeto español.

e) Los 40 000 billetes.

f) Las estaciones de radio que se escuchan en el D. F.

g)

{ Aguila Aguila, Sol Sol, Aguila Sol, Sol Aguila }

h) Las 14 fichas de dominó.

i) Las 52 cartas.

j) Las 6 caras laterales de la perinola.

3. Probabilidad de un evento

Ejercicio 2.

a) 3	b) 1	c) 2	d) 0	e) 1
f) 10	g) 20	h) 30	i) 15	j) 0
k) 13	l) 26	m) 48	n) 13	o) 39
p) 1	q) 1	r) 2	s) 3	t) 3

Nota. Vea el inciso g de las respuestas al Ejercicio 1.

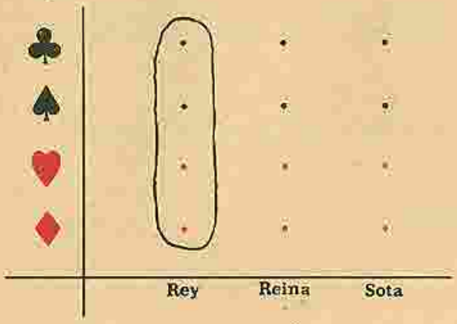
Ejercicio 3.

a) $\frac{4}{52}$ b) $\frac{10}{15} = \frac{2}{3}$ c) $\frac{5}{6}$ d) $\frac{3}{30} = \frac{1}{10}$ e) $\frac{1}{100\,000}$

f) $\frac{15}{25} = \frac{3}{5}$ g) $\frac{10}{40} = \frac{1}{4}$ h) $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ i) $\frac{1}{28}$ j) $\frac{1}{3}$

Ejercicio 4.

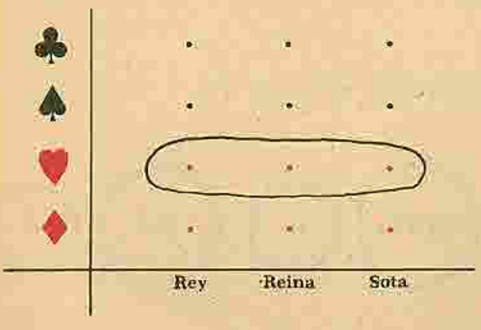
a)



Evento "sacar un rey"

Probabilidad del evento $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

b)

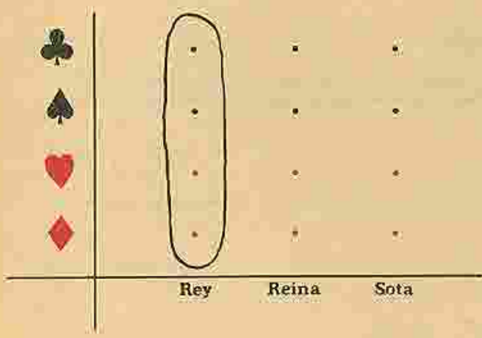


Evento "sacar un corazón"

Probabilidad del evento $\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

Nota. En la baraja inglesa la figura ♠ se denomina espada.

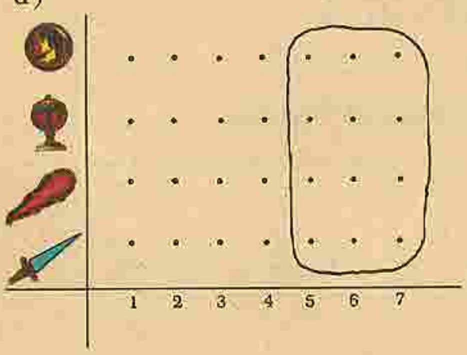
c)



Evento "sacar un rey"

Probabilidad del evento $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

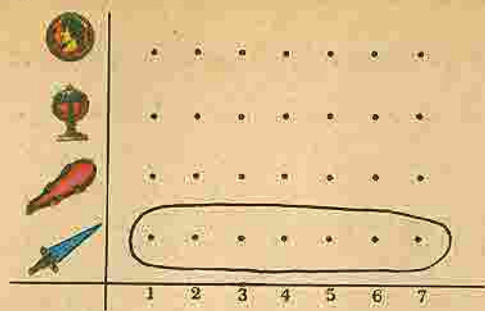
d)



Evento "sacar mayor que 4"

Probabilidad $\frac{12}{28} = \frac{3}{7}$

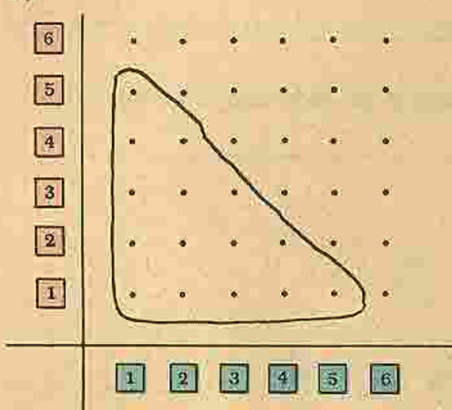
e)



Evento "sacar una espada"

Probabilidad $\frac{7}{28} = \frac{1}{4}$

f)



Evento "sacar menos de 7"

Probabilidad $\frac{15}{36} = \frac{5}{12}$

Nota. El evento "sacar menos de 7" sucede si al tirar los dos dados, la suma de los números de las caras superiores es menor que 7.

4. Unión de eventos

Ejercicio 5.

a) $\frac{8}{52} = \frac{2}{13}$ b) $\frac{8}{52} = \frac{2}{13}$ c) $\frac{28}{52} = \frac{7}{13}$ d) $\frac{52}{52} = 1$ e) $\frac{26}{52} = \frac{1}{2}$

5. Intersección de eventos

Ejercicio 6.

a) $\frac{1}{52}$ b) $\frac{2}{52} = \frac{1}{26}$ c) $\frac{0}{52} = 0$ d) $\frac{0}{52} = 0$ e) $\frac{6}{52} = \frac{3}{26}$

Nota. Las cartas sota, caballo y rey no se consideran menores que 7.

6. Probabilidad de la unión de dos eventos mutuamente exclusivos

Ejercicio 7.

a) $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{3} + \frac{1}{7} = \frac{10}{21}$ c) $\frac{3}{5} + \frac{1}{6} = \frac{23}{30}$

d) $\frac{1}{100} + \frac{1}{150} = \frac{5}{300} = \frac{1}{60}$ e) $\frac{1}{1\,000} + \frac{1}{10\,000} = \frac{11}{10\,000}$

7. Probabilidad de la unión de dos eventos no mutuamente exclusivos

Ejercicio 8.

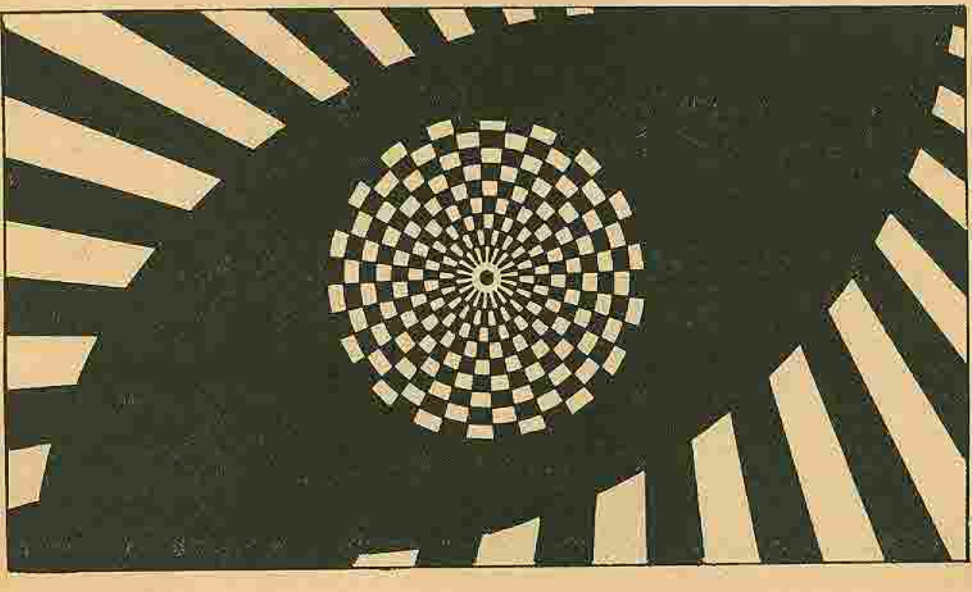
a) $\left(\frac{1}{13} + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{52} = \left(\frac{17}{52}\right) - \frac{1}{52} = \frac{16}{52}$

b) $\left(\frac{2}{9} + \frac{3}{9}\right) - \frac{1}{10} = \left(\frac{5}{9}\right) - \frac{1}{10} = \frac{50}{90} - \frac{9}{90} = \frac{41}{90}$

c) $\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{20} = \left(\frac{7}{10}\right) - \frac{1}{20} = \frac{14}{20} - \frac{1}{20} = \frac{13}{20}$

d) $\left(\frac{2}{5} + \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{7} = \left(\frac{11}{15}\right) - \frac{1}{7} = \frac{62}{105}$

e) $\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) - \frac{1}{10} = \left(\frac{9}{20}\right) - \frac{1}{10} = \frac{9}{20} - \frac{2}{20} = \frac{7}{20}$



Capítulo Quinto

Estadística

1. Recolección de datos

Ejercicio 1.

1. c), 2. b), 3. c), 4. a), 5. c),

2. Necesidad del muestreo

Ejercicio 2.

a) $\dfrac{35}{50} = \dfrac{x}{500}$; $\qquad x = \dfrac{35 \times 500}{50} = 350$

Aproximadamente 350 canicas son blancas y 150 son negras.

b) $\dfrac{100}{100} = \dfrac{x}{700}$; $\qquad x = 700$

Aproximadamente 700 alumnos están parasitados en esa escuela secundaria.

c) $\dfrac{150}{200} = \dfrac{x}{3\,000}$, $\qquad x = \dfrac{150 \times 3\,000}{200} = 2\,250$

Aproximadamente 2 250 personas saben leer en esa población.

d) $\dfrac{80}{150} = \dfrac{x}{7\,500}$; $\qquad x = \dfrac{80 \times 7\,500}{150} = 4\,000$

Aproximadamente 4 000 lavadoras están defectuosas,

e) $\dfrac{750}{800} = \dfrac{x}{100\,000}$; $\qquad x = \dfrac{750 \times 100\,000}{800} = 93\,750$

Aproximadamente 93 750 ocasionan pérdidas de menos de $500.00

Ejercicio 3.

a) equivocado, b) equivocado, c) equivocado, d) equivocado, e) equivocado.

3. Parámetros estadísticos

Ejercicio 4. a) 6.66, b) 33 kilovatios-hora, c) 69.81 kg

d) $\dfrac{3 + 4 + x + 7 + 3}{5} = 5$

$$3 + 4 + x + 7 + 3 = 25$$
$$17 + x = 25$$
$$x = 8$$

e) $\dfrac{8 + 5 + 6 + x + 8 + 3 + x}{7} = x$

$$\frac{2x + 30}{7} = x$$
$$2x + 30 = 7x$$
$$30 = 5x$$
$$x = 6$$

Ejercicio 5. a) 6 jugadores miden más de 1.80. La estatura promedio es 1.86. La estatura que más se repite es 1.90. b) La media es 27.375 años, la mediana es 26 y la moda es 26. c) Como la moda tiene frecuencia 3, el dato que falta es 83. La mediana es 80 y la media es 78.66.

d) $$\frac{1.68 + 1.70 + x + x + x + 1.77 + 1.77 + 1.78 + 1.80}{9} = 1.75$$

$$\frac{10.5 + 3x}{9} = 1.75$$
$$10.5 + 3x = 15.75$$
$$3x = 15.75 - 10.5$$
$$3x = 5.25$$
$$x = 1.75$$

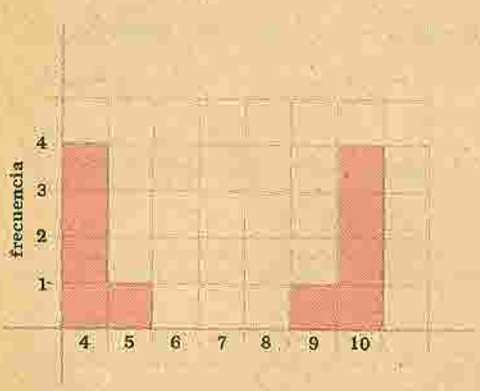
La mediana es 1.75, la moda es 1.75.

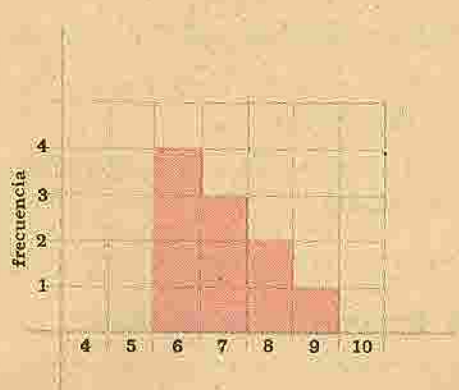
---

4. Distribución de frecuencias

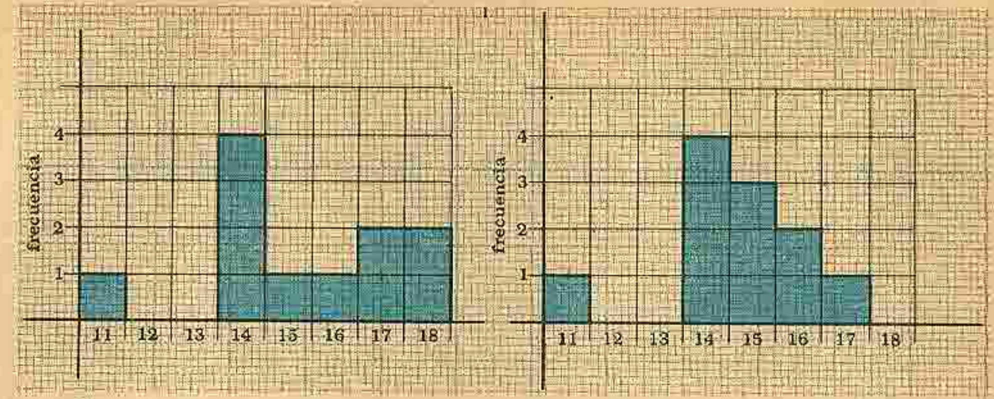
Ejercicio 6.

a)

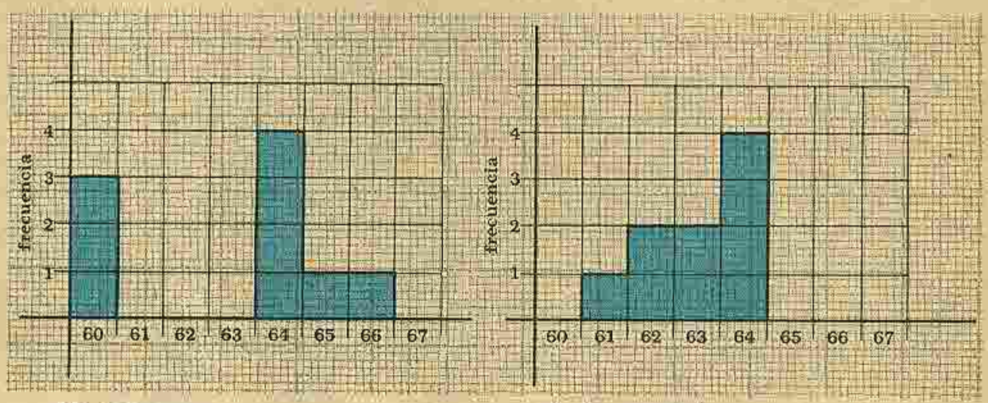




b)



c)

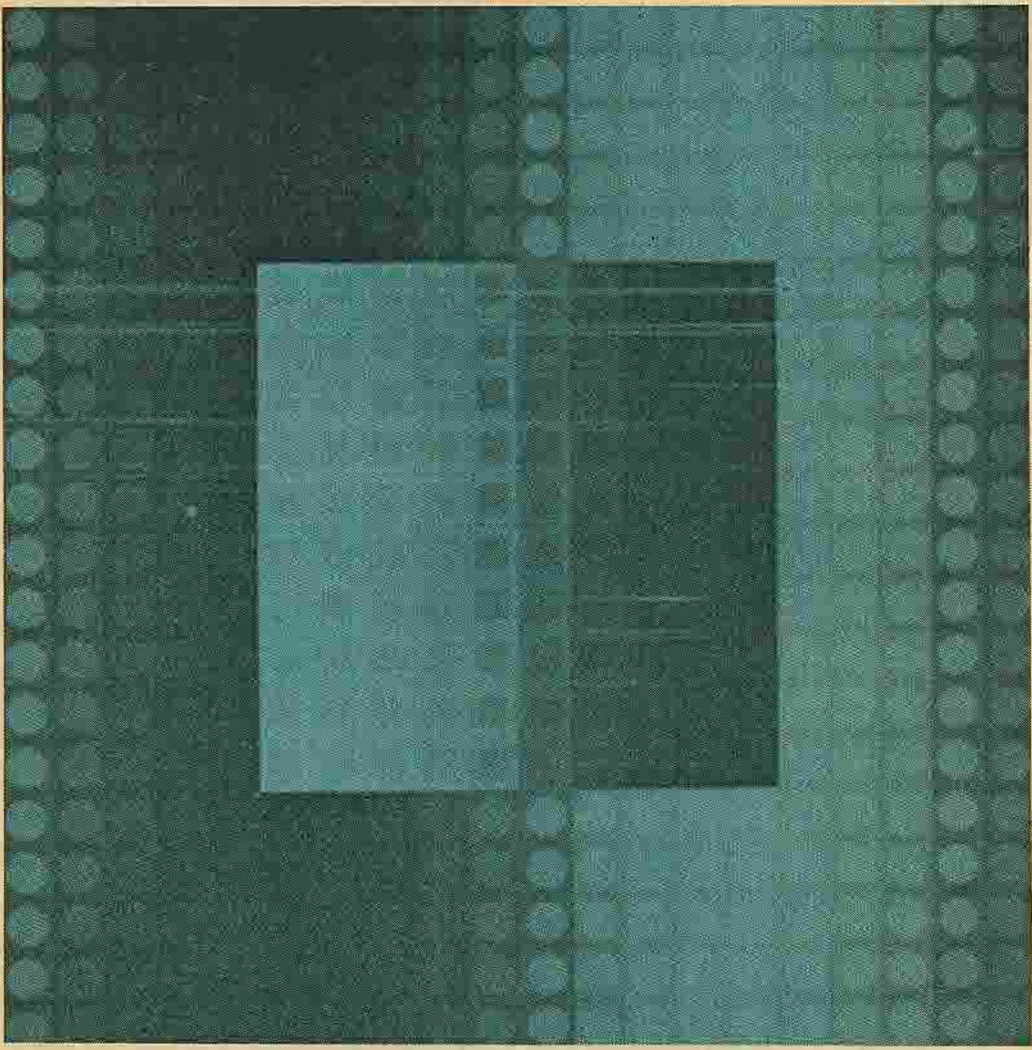


d) Ninguno.

e) La moda.

Apéndice

Tablas de raíces cuadradas



A veces resulta difícil hallar "mentalmente" la raíz cuadrada de un número racional. En casos así podemos efectuar el cálculo necesario utilizando el mecanismo que aprendimos en la escuela primaria. O bien, podemos ahorrarnos bastante esfuerzo consultando una tabla de raíces cuadradas.

Las tablas que damos en este apéndice pueden utilizarse para obtener, en forma aproximada*, la raíz cuadrada de números racionales expresados en notación decimal con un máximo de 4 cifras significativas.

Para darnos una idea de lo que son cifras significativas y cifras no significativas en un número, a continuación mostramos en algunos ejemplos las cifras significativas en rojo y las no significativas en negro.

82	74000	708100
.00436	.00001	.013005
3.050	728.70	6.0001

Ahora ilustraremos el uso de las tablas por medio de algunos ejemplos.

Ejemplo. ¿Cuál es la raíz cuadrada de 823?

$$\sqrt{823} = \quad$$

En las tablas, en la columna marcada con x, localizamos el número 82 y en la misma fila, en la columna marcada con 3, encontramos dos conjuntos de cifras.

x	0	1 2 3	4 5 6	7 8 9	1 2 3	4 5 6	7 8 9
					SUMAR		
82		2 869 9 072					

Elegiremos uno de estos conjuntos de cifras de acuerdo con la siguiente regla:

Si el número tiene un número impar de cifras, se elige el primer conjunto (contando de arriba hacia abajo). Si el número tiene un número par de cifras, se elige el segundo conjunto.

En este caso, como 823 tiene tres cifras, elegimos el primer conjunto, 2869. Estas son las cuatro primeras cifras significativas de la raíz cuadrada de 823.

La raíz cuadrada de 823 estará formada con una parte entera y una parte decimal. Para determinar la parte entera dividimos nuestro número en periodos de dos cifras, de derecha a izquierda, en la siguiente forma:

$$\underbrace{8}\ \underbrace{23}$$

* Las raíces cuadradas que se encuentran en las tablas son en su mayoría, aproximaciones racionales.

Sólo se forman dos periodos. La raíz cuadrada de 823 tendrá entonces dos cifras enteras. Así es que

$$\sqrt{823} = 28.69$$

Ejemplo. ¿Cuál es la raíz cuadrada de 8 230 000 000?

$$\sqrt{8\,230\,000\,000} = $$

En las tablas se manejan únicamente las cifras significativas, que en este caso son 823. Buscamos en la columna x el número 82 y, como 8 230 000 000 tiene un número par de cifras (10 en total), tomamos en cuenta el segundo conjunto de cifras, o sea, 9072.

Determinemos ahora el número de cifras enteras de la raíz:

82 30 00 00 00

Son 5 periodos. Por lo tanto, la raíz cuadrada debe tener 5 cifras enteras.

Como la tabla sólo nos proporciona 4 cifras de esta raíz, completamos con un cero y tenemos resuelto el problema.

$$\sqrt{8\,230\,000\,000} = 90\,720$$

Ejemplo.

$$\sqrt{2\,938\,000} = $$

El número 2 938 000 tiene cuatro cifras significativas que son 2 938.

Buscamos en la columna x el número 29 y en la misma fila, en la columna marcada con 3, encontramos 2 conjuntos de cifras.

					1 2 3	4 5 6	7 $\boxed{8}$ 9
x	0	1 2 3	4 5 6	7 8 9	SUMAR		
29		$\boxed{\begin{matrix}1\,712\\5\,413\end{matrix}}$					2 7

Como el número considerado tiene un número impar de cifras, elegimos el primer conjunto (1 712). Como la cuarta cifra significativa del número 2 938 000 es 8, buscamos el número que esté en la columna marcada con 8 (en rojo en la ilustración) y en el mismo renglón que 1 712. Este número es 2. Sumamos ahora 1 712 y 2.

$$1\,712 + 2 = 1\,714.$$

1 714 son las 4 cifras significativas de la raíz cuadrada que se busca.

La parte entera de la raíz se calcula como antes:

2 93 80 00

Hay cuatro períodos en el número. Así es que su raíz cuadrada tendrá cuatro cifras enteras:

$$\sqrt{2\,938\,000} = 1714.$$

Con las tablas podemos calcular también las raíces cuadradas de números racionales menores que uno. Observe los siguientes ejemplos:

Ejemplo.

$$\sqrt{.000386} =$$

Las cifras significativas de este número son 386. En las tablas, tenemos, para estas cifras, lo siguiente:

					SUMAR		
x	0	1 2 3	4 5 6	7 8 9	1 2 3	4 5 6	7 8 9
38 →			1 965 6 213				

Para saber cual de estos conjuntos de cifras debemos escoger procederemos con el número .000386 en la siguiente forma:

$$.00 \quad 03 \quad 86$$

Al dividir el número en períodos de dos cifras, partiendo del punto decimal, observamos que en uno de los períodos la primera cifra significativa del número (el 3) queda junto con una cifra no significativa. En casos como éste se escoge el conjunto de cifras del primer renglón (1 965).

(Supongamos que deseamos encontrar la raíz cuadrada del número .00386, que tiene las mismas cifras significativas que el número considerado en el ejemplo anterior.)

Al dividir en períodos de dos cifras este número encontramos que

$$.00 \quad 38 \quad 6$$

la primera cifra significativa queda junto con otra cifra significativa. En este caso se debe escoger el segundo conjunto de cifras (6 213).

Volvamos a nuestro ejemplo.

Una vez elegido correctamente el conjunto de cifras, y considerando que la raíz cuadrada de un número racional menor que 1 es menor que 1, procedemos a colocar el punto decimal, como se ilustra en el siguiente esquema:

Número	.00	03	86	
	↓	↓	↓	
Raíz del número	.0	1	9	6 5

A cada pareja de ceros corresponderá un cero después del punto decimal. A la primera pareja en que haya al menos una cifra significativa corresponderá la primera cifra significativa del conjunto obtenido en las tablas. De esta manera tenemos que

$$\sqrt{.000386} = .01965$$

Ejemplo.

$$\sqrt{.002743} =$$

Las cifras significativas de este número son cuatro: 2743.

Dividimos el número en períodos de dos cifras:

$$.00 \quad 27 \quad 43$$

Como la primera cifra significativa forma pareja en otra cifra significativa, en las tablas tendremos que usar el segundo conjunto de cifras de los que se encuentran en el renglón correspondiente al número 27.

x	0	1 2 3	4 5 6	7 8 9	SUMAR 1 2 3	4 5 6	7 8 9
27			1 655 5 235		1 3		

Por consiguiente, las cifras significativas de la raíz serán:

$$5\,235 + 3 = 5\,238$$

Ahora anotamos el punto decimal en la raíz:

Número	.00	27	43	
Raíz cuadrada	.0	5	2	38

Por lo tanto,

$$\sqrt{.002743} = .05238$$

Con las tablas también podemos encontrar la raíz cuadrada de un racional como 467.5. Observe el procedimiento en el siguiente ejemplo:

Ejemplo.

$$\sqrt{467.5} =$$

Las cifras significativas son 4 675.

					1 2 3	4 5 6	7 8 9
x	0	1 2 3	4 5 6	7 8 9	SUMAR		
46				2 161 6 834		1 4	

En este caso utilizamos el primer renglón porque el número de cifras antes del punto decimal es impar.

Por consiguiente, las cifras significativas de la raíz son

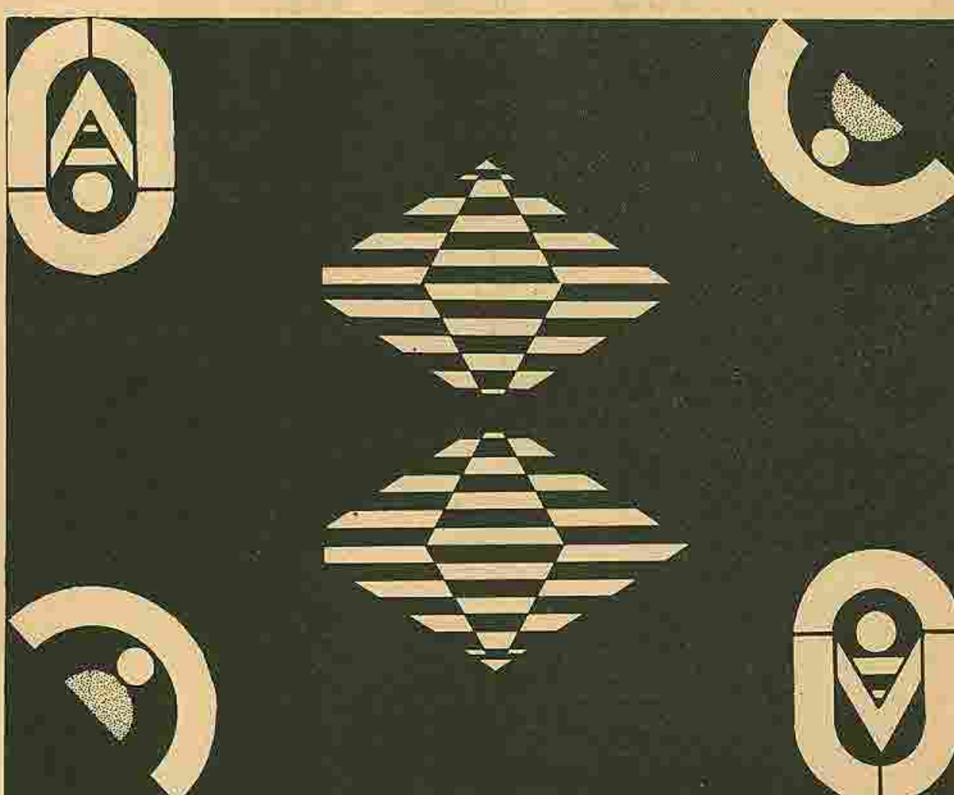
$$2\,161 + 1 = 2\,162$$

Se determina la parte entera de la raíz usando la parte entera del número 467.5.

$$4 \quad 67 \quad .5$$
$$2 \quad 1$$

La raíz constará de 2 cifras enteras, por lo tanto,

$$\sqrt{467.5} = 21.62$$



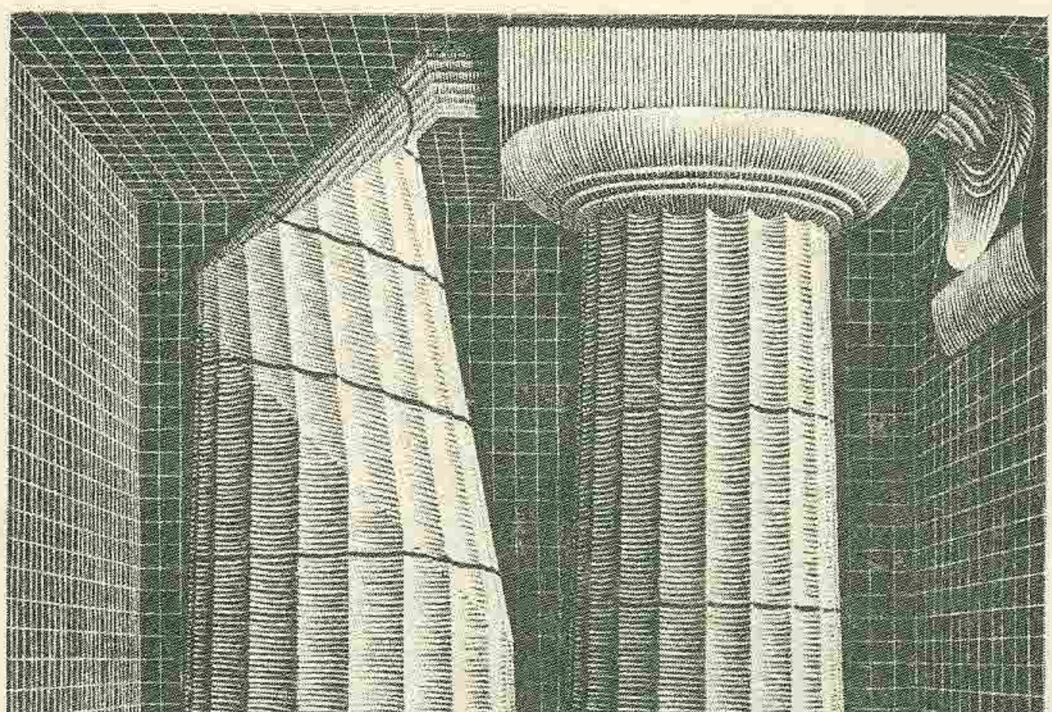
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
											SUMAR								
10	1000	1005	1010	1015	1020	1025	1030	1034	1039	1044	0	1	1	2	2	3	3	4	4
	3162	3178	3194	3209	3225	3240	3256	3271	3286	3302	2	3	5	6	8	10	11	13	14
11	1049	1054	1058	1063	1068	1072	1077	1082	1086	1091	0	1	1	2	2	3	3	4	4
	3317	3332	3347	3362	3376	3391	3406	3421	3435	3450	1	3	4	6	7	9	10	12	13
12	1095	1100	1105	1109	1114	1118	1122	1127	1131	1136	0	1	1	2	2	2	3	3	4
	3464	3479	3493	3507	3521	3536	3550	3564	3578	3592	1	3	4	6	7	8	10	11	13
13	1140	1145	1149	1153	1158	1162	1166	1170	1175	1179	0	1	1	2	2	2	3	3	4
	3606	3619	3633	3647	3661	3674	3688	3701	3715	3728	1	3	4	6	7	8	10	11	13
14	1183	1187	1192	1196	1200	1204	1208	1212	1217	1221	0	1	1	2	2	2	3	3	4
	3742	3755	3768	3782	3795	3808	3821	3834	3847	3860	1	3	4	5	7	8	9	10	12
15	1225	1229	1233	1237	1241	1245	1249	1253	1257	1261	0	1	1	2	2	2	3	3	4
	3873	3886	3899	3912	3924	3937	3950	3962	3975	3987	1	3	4	5	6	8	9	10	12
16	1265	1269	1273	1277	1281	1285	1288	1292	1296	1300	0	1	1	2	2	2	3	3	4
	4000	4012	4025	4037	4050	4062	4074	4087	4099	4111	1	2	4	5	6	7	8	10	11
17	1304	1308	1311	1315	1319	1323	1327	1330	1334	1338	0	1	1	2	2	2	3	3	4
	4123	4135	4147	4159	4171	4183	4195	4207	4219	4231	1	2	4	5	6	7	8	10	11
18	1342	1345	1349	1353	1356	1360	1364	1367	1371	1375	0	1	1	2	2	2	3	3	4
	4243	4254	4266	4278	4290	4301	4313	4324	4336	4347	1	2	4	5	6	7	8	10	11
19	1378	1382	1386	1389	1393	1396	1400	1404	1407	1411	0	1	1	2	2	2	3	3	4
	4359	4370	4382	4393	4405	4416	4427	4438	4450	4461	1	2	3	4	6	7	8	9	10
20	1414	1418	1421	1425	1428	1432	1435	1439	1442	1446	0	1	1	2	2	2	3	3	4
	4472	4483	4494	4506	4517	4528	4539	4550	4561	4572	1	2	3	4	6	7	8	9	10
21	1449	1453	1456	1459	1463	1466	1470	1473	1476	1480	0	1	1	1	2	2	2	2	3
	4583	4593	4604	4615	4626	4637	4648	4658	4669	4680	1	2	3	4	5	7	8	9	10
22	1483	1487	1490	1493	1497	1500	1503	1507	1510	1513	0	1	1	1	2	2	2	2	3
	4690	4701	4712	4722	4733	4743	4754	4764	4775	4785	1	2	3	4	5	7	8	9	10
23	1517	1520	1523	1526	1530	1533	1536	1539	1543	1546	0	1	1	1	2	2	2	2	3
	4796	4806	4817	4827	4837	4848	4858	4868	4879	4889	1	2	3	4	5	6	7	8	9
24	1549	1552	1556	1559	1562	1565	1568	1572	1575	1578	0	1	1	1	2	2	2	2	3
	4899	4909	4919	4930	4940	4950	4960	4970	4980	4990	1	2	3	4	5	6	7	8	9
25	1581	1584	1587	1591	1594	1597	1600	1603	1606	1609	0	1	1	1	2	2	2	2	3
	5000	5010	5020	5030	5040	5050	5060	5070	5079	5089	1	2	3	4	5	6	7	8	9
26	1612	1616	1619	1622	1625	1628	1631	1634	1637	1640	0	1	1	1	2	2	2	2	3
	5099	5109	5119	5128	5138	5148	5158	5167	5177	5187	1	2	3	4	5	6	7	8	9
27	1643	1646	1649	1652	1655	1658	1661	1664	1667	1670	0	1	1	1	2	2	2	2	3
	5196	5206	5215	5225	5235	5244	5254	5263	5273	5282	1	2	3	4	5	6	7	8	9
28	1673	1676	1679	1682	1685	1688	1691	1694	1697	1700	0	1	1	1	2	2	2	2	3
	5292	5301	5310	5320	5329	5339	5348	5357	5367	5376	1	2	3	4	5	5	6	7	8
29	1703	1706	1709	1712	1715	1718	1720	1723	1726	1729	0	1	1	1	1	2	2	2	3
	5385	5394	5404	5413	5422	5431	5441	5450	5459	5468	1	2	3	4	5	5	6	7	8
30	1732	1735	1738	1741	1744	1746	1749	1752	1755	1758	0	1	1	1	1	2	2	2	3
	5477	5486	5495	5505	5514	5523	5532	5541	5550	5559	1	2	3	4	5	5	6	7	8

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	SUMAR								
											1	2	3	4	5	6	7	8	9
31	1761	1764	1766	1769	1772	1775	1778	1780	1783	1786	0	1	1	1	1	2	2	2	3
	5568	5577	5586	5595	5604	5612	5621	5630	5639	5648	1	2	3	4	4	5	6	7	8
32	1789	1792	1794	1797	1800	1803	1806	1808	1811	1814	0	1	1	1	1	2	2	2	3
	5657	5666	5675	5683	5692	5701	5710	5718	5727	5736	1	2	3	4	4	5	6	7	8
33	1817	1819	1822	1825	1828	1830	1833	1836	1838	1841	0	1	1	1	1	2	2	2	3
	5745	5753	5762	5771	5779	5788	5797	5805	5814	5822	1	2	3	4	4	5	6	7	8
34	1844	1847	1849	1852	1855	1857	1860	1863	1865	1868	0	1	1	1	1	2	2	2	3
	5831	5840	5848	5857	5865	5874	5882	5891	5899	5908	1	2	3	4	4	5	6	7	8
35	1871	1873	1876	1879	1881	1884	1887	1889	1892	1895	0	1	1	1	1	2	2	2	3
	5916	5925	5933	5941	5950	5958	5967	5975	5983	5992	1	2	2	3	4	5	6	6	7
36	1897	1900	1903	1905	1908	1910	1913	1916	1918	1921	0	1	1	1	1	2	2	2	3
	6000	6008	6017	6025	6033	6042	6050	6058	6066	6075	1	2	2	3	4	5	6	6	7
37	1924	1926	1929	1931	1934	1936	1939	1942	1944	1947	0	1	1	1	1	2	2	2	3
	6083	6091	6099	6107	6116	6124	6132	6140	6148	6156	1	2	2	3	4	5	6	6	7
38	1949	1952	1954	1957	1960	1962	1965	1967	1970	1972	0	1	1	1	1	2	2	2	3
	6164	6173	6181	6189	6197	6205	6213	6221	6229	6237	1	2	2	3	4	5	6	6	7
39	1975	1977	1980	1982	1985	1987	1990	1992	1995	1997	0	0	1	1	1	1	1	2	2
	6245	6253	6261	6269	6277	6285	6293	6301	6309	6317	1	2	2	3	4	5	6	6	7
40	2000	2002	2005	2007	2010	2012	2015	2017	2020	2022	0	0	1	1	1	1	1	2	2
	6325	6332	6340	6348	6356	6364	6372	6380	6387	6395	1	2	2	3	4	5	6	6	7
41	2025	2027	2030	2032	2035	2037	2040	2042	2045	2047	0	0	1	1	1	1	1	2	2
	6403	6411	6419	6427	6434	6442	6450	6458	6465	6473	1	2	2	3	4	5	6	6	7
42	2049	2052	2054	2057	2059	2062	2064	2066	2069	2071	0	0	1	1	1	1	1	2	2
	6481	6488	6496	6504	6512	6519	6527	6535	6542	6550	1	2	2	3	4	5	6	6	7
43	2074	2076	2078	2081	2083	2086	2088	2090	2093	2095	0	0	1	1	1	1	1	2	2
	6557	6565	6573	6580	6588	6595	6603	6611	6618	6626	1	2	2	3	4	5	6	6	7
44	2098	2100	2102	2105	2107	2110	2112	2114	2117	2119	0	0	1	1	1	1	1	2	2
	6633	6641	6648	6656	6663	6671	6678	6686	6693	6701	1	2	2	3	4	5	6	6	7
45	2121	2124	2126	2128	2131	2133	2135	2138	2140	2142	0	0	1	1	1	1	1	2	2
	6708	6716	6723	6731	6738	6745	6753	6760	6768	6775	1	1	2	3	4	4	5	6	6
46	2145	2147	2149	2152	2154	2156	2159	2161	2163	2166	0	0	1	1	1	1	1	2	2
	6782	6790	6797	6804	6812	6819	6826	6834	6841	6848	1	1	2	3	4	4	5	6	6
47	2168	2170	2173	2175	2177	2179	2182	2184	2186	2189	0	0	1	1	1	1	1	2	2
	6856	6863	6870	6877	6885	6892	6899	6907	6914	6921	1	1	2	3	4	4	5	6	6
48	2191	2193	2195	2198	2200	2202	2205	2207	2209	2211	0	0	1	1	1	1	1	2	2
	6928	6935	6943	6950	6957	6964	6971	6979	6986	6993	1	1	2	3	4	4	5	6	6
49	2214	2216	2218	2220	2223	2225	2227	2229	2232	2234	0	0	1	1	1	1	1	2	2
	7000	7007	7014	7021	7029	7036	7043	7050	7057	7064	1	1	2	3	4	4	5	6	6
50	2236	2238	2241	2243	2245	2247	2249	2252	2254	2256	0	0	1	1	1	1	1	2	2
	7071	7078	7085	7092	7099	7106	7113	7120	7127	7134	1	1	2	3	4	4	5	6	6
51	2258	2261	2263	2265	2267	2269	2272	2274	2276	2278	0	0	1	1	1	1	1	2	2
	7141	7148	7155	7162	7169	7176	7183	7190	7197	7204	1	1	2	3	4	4	5	6	6
52	2280	2283	2285	2287	2289	2291	2293	2296	2298	2300	0	0	1	1	1	1	1	2	2
	7211	7218	7225	7232	7239	7246	7253	7259	7266	7273	1	1	2	3	3	4	5	6	6
53	2302	2304	2307	2309	2311	2313	2315	2317	2319	2322	0	0	1	1	1	1	1	2	2
	7280	7287	7294	7301	7308	7314	7321	7328	7335	7342	1	1	2	3	3	4	5	6	6

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
											SUMAR								
54	2324	2326	2328	2330	2332	2335	2337	2339	2341	2343	0	0	1	1	1	1	1	2	2
	7348	7355	7362	7369	7376	7382	7389	7396	7403	7409	1	1	2	3	3	4	5	6	6
55	2345	2347	2349	2352	2354	2356	2358	2360	2362	2364	0	0	1	1	1	1	1	2	2
	7416	7423	7430	7436	7443	7450	7457	7463	7470	7477	1	1	2	3	3	4	5	6	6
56	2366	2369	2371	2373	2375	2377	2379	2381	2383	2385	0	0	1	1	1	1	1	2	2
	7483	7490	7497	7503	7510	7517	7523	7530	7537	7543	1	1	2	3	3	4	5	6	6
57	2387	2390	2392	2394	2396	2398	2400	2402	2404	2406	0	0	1	1	1	1	1	2	2
	7550	7556	7563	7570	7576	7583	7589	7596	7603	7609	1	1	2	3	3	4	5	6	6
58	2408	2410	2412	2415	2417	2419	2421	2423	2425	2427	0	0	1	1	1	1	1	2	2
	7616	7622	7629	7635	7642	7649	7655	7662	7668	7675	1	1	2	2	3	4	4	5	5
59	2429	2431	2433	2435	2437	2439	2441	2443	2445	2447	0	0	1	1	1	1	1	2	2
	7681	7688	7694	7701	7707	7714	7720	7727	7733	7740	1	1	2	2	3	4	4	5	5
60	2449	2452	2454	2456	2458	2460	2462	2464	2466	2468	0	0	1	1	1	1	1	2	2
	7746	7752	7759	7765	7772	7778	7785	7791	7797	7804	1	1	2	2	3	4	4	5	5
61	2470	2472	2474	2476	2478	2480	2482	2484	2486	2488	0	0	1	1	1	1	1	2	2
	7810	7817	7823	7829	7836	7842	7849	7855	7861	7868	1	1	2	2	3	4	4	5	5
62	2490	2492	2494	2496	2498	2500	2502	2504	2506	2508	0	0	1	1	1	1	1	2	2
	7874	7880	7887	7893	7899	7906	7912	7918	7925	7931	1	1	2	2	3	4	4	5	5
63	2510	2512	2514	2516	2518	2520	2522	2524	2526	2528	0	0	1	1	1	1	1	2	2
	7937	7944	7950	7956	7962	7969	7975	7981	7987	7994	1	1	2	2	3	4	4	5	5
64	2530	2532	2534	2536	2538	2540	2542	2544	2546	2548	0	0	1	1	1	1	1	2	2
	8000	8006	8012	8019	8025	8031	8037	8044	8050	8056	1	1	2	2	3	4	4	5	5
65	2550	2551	2553	2555	2557	2559	2561	2563	2565	2567	0	0	1	1	1	1	1	2	2
	8062	8068	8075	8081	8087	8093	8099	8106	8112	8118	1	1	2	2	3	4	4	5	5
66	2569	2571	2573	2575	2577	2579	2581	2583	2585	2587	0	0	1	1	1	1	1	2	2
	8124	8130	8136	8142	8149	8155	8161	8167	8173	8179	1	1	2	2	3	4	4	5	5
67	2588	2590	2592	2594	2596	2598	2600	2602	2604	2606	0	0	1	1	1	1	1	2	2
	8185	8191	8198	8204	8210	8216	8222	8228	8234	8240	1	1	2	2	3	4	4	5	5
68	2608	2610	2612	2613	2615	2617	2619	2621	2623	2625	0	0	1	1	1	1	1	2	2
	8246	8252	8258	8264	8270	8276	8283	8289	8295	8301	1	1	2	2	3	4	4	5	5
69	2627	2629	2631	2632	2634	2636	2638	2640	2642	2644	0	0	1	1	1	1	1	2	2
	8307	8313	8319	8325	8331	8337	8343	8349	8355	8361	1	1	2	2	3	4	4	5	5
70	2646	2648	2650	2651	2653	2655	2657	2659	2661	2663	0	0	1	1	1	1	1	2	2
	8367	8373	8379	8385	8390	8396	8402	8408	8414	8420	1	1	2	2	3	4	4	5	5
71	2665	2666	2668	2670	2672	2674	2676	2678	2680	2681	0	0	1	1	1	1	1	2	2
	8426	8432	8438	8444	8450	8456	8462	8468	8473	8479	1	1	2	2	3	4	4	5	5
72	2683	2685	2687	2689	2691	2693	2694	2696	2698	2700	0	0	1	1	1	1	1	2	2
	8485	8491	8497	8503	8509	8515	8521	8526	8532	8538	1	1	2	2	3	4	4	5	5
73	2702	2704	2706	2707	2709	2711	2713	2715	2717	2718	0	0	1	1	1	1	1	2	2
	8544	8550	8556	8562	8567	8573	8579	8585	8591	8597	1	1	2	2	3	4	4	5	5
74	2720	2722	2724	2726	2728	2729	2731	2733	2735	2737	0	0	1	1	1	1	1	2	2
	8602	8608	8614	8620	8626	8631	8637	8643	8649	8654	1	1	2	2	3	4	4	5	5
75	2739	2740	2742	2744	2746	2748	2750	2751	2753	2755	0	0	1	1	1	1	1	2	2
	8660	8666	8672	8678	8683	8689	8695	8701	8706	8712	1	1	2	2	3	4	4	5	5
76	2757	2759	2760	2762	2764	2766	2768	2769	2771	2773	0	0	1	1	1	1	1	2	2
	8718	8724	8729	8735	8741	8746	8752	8758	8764	8769	1	1	2	2	3	4	4	5	5

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
											SUMAR								
77	2775	2777	2778	2780	2782	2784	2786	2787	2789	2791	0	0	1	1	1	1	1	2	2
	8775	8781	8786	8792	8798	8803	8809	8815	8820	8826	1	1	2	2	3	4	4	5	5
78	2793	2795	2796	2798	2800	2802	2804	2805	2807	2809	0	0	1	1	1	1	1	2	2
	8832	8837	8843	8849	8854	8860	8866	8871	8877	8883	1	1	2	2	3	4	4	5	5
79	2811	2812	2814	2816	2818	2820	2821	2823	2825	2827	0	0	1	1	1	1	1	2	2
	8888	8894	8899	8905	8911	8916	8922	8927	8933	8939	1	1	2	2	3	4	4	5	5
80	2828	2830	2832	2834	2835	2837	2839	2841	2843	2844	0	0	1	1	1	1	1	2	2
	8944	8950	8955	8961	8967	8972	8978	8983	8989	8994	1	1	2	2	3	4	4	5	5
81	2846	2848	2850	2851	2853	2855	2857	2858	2860	2862	0	0	1	1	1	1	1	2	2
	9000	9006	9011	9017	9022	9028	9033	9039	9044	9050	1	1	2	2	3	4	4	5	5
82	2864	2865	2867	2869	2871	2872	2874	2876	2877	2879	0	0	1	1	1	1	1	2	2
	9055	9061	9066	9072	9077	9083	9088	9094	9099	9105	1	1	2	2	3	4	4	5	5
83	2881	2883	2884	2886	2888	2890	2891	2893	2895	2897	0	0	1	1	1	1	1	2	2
	9110	9116	9121	9127	9132	9138	9143	9149	9154	9160	1	1	2	2	3	3	4	4	5
84	2898	2900	2902	2903	2905	2907	2909	2910	2912	2914	0	0	1	1	1	1	1	2	2
	9165	9171	9176	9182	9187	9192	9198	9203	9209	9214	1	1	2	2	3	3	4	4	5
85	2915	2917	2919	2921	2922	2924	2926	2927	2929	2931	0	0	1	1	1	1	1	2	2
	9220	9225	9230	9236	9241	9247	9252	9257	9263	9268	1	1	2	2	3	3	4	4	5
86	2933	2934	2936	2938	2939	2941	2943	2944	2946	2948	0	0	1	1	1	1	1	2	2
	9274	9279	9284	9290	9295	9301	9306	9311	9317	9322	1	1	2	2	3	3	4	4	5
87	2950	2951	2953	2955	2956	2958	2960	2961	2963	2965	0	0	1	1	1	1	1	2	2
	9327	9333	9338	9343	9349	9354	9359	9365	9370	9375	1	1	2	2	3	3	4	4	5
88	2966	2968	2970	2972	2973	2975	2977	2978	2980	2982	0	0	1	1	1	1	1	2	2
	9381	9386	9391	9397	9402	9407	9413	9418	9423	9429	1	1	2	2	3	3	4	4	5
89	2983	2985	2987	2988	2990	2992	2993	2995	2997	2998	0	0	1	1	1	1	1	2	2
	9434	9439	9445	9450	9455	9460	9466	9471	9476	9482	1	1	2	2	3	3	4	4	5
90	3000	3002	3003	3005	3007	3008	3010	3012	3013	3015	0	0	1	1	1	1	1	2	2
	9487	9492	9497	9503	9508	9513	9518	9524	9529	9534	1	1	2	2	3	3	4	4	5
91	3017	3018	3020	3022	3023	3025	3027	3028	3030	3032	0	0	1	1	1	1	1	2	2
	9539	9545	9550	9555	9560	9566	9571	9576	9581	9586	1	1	2	2	3	3	4	4	5
92	3033	3035	3036	3038	3040	3041	3043	3045	3046	3048	0	0	1	1	1	1	1	2	2
	9592	9597	9602	9607	9612	9618	9623	9628	9633	9638	1	1	2	2	3	3	4	4	5
93	3050	3051	3053	3055	3056	3058	3059	3061	3063	3064	0	0	1	1	1	1	1	2	2
	9644	9649	9654	9659	9664	9670	9675	9680	9685	9690	1	1	2	2	3	3	4	4	5
94	3066	3068	3069	3071	3072	3074	3076	3077	3079	3081	0	0	1	1	1	1	1	2	2
	9695	9701	9706	9711	9716	9721	9726	9731	9737	9742	1	1	2	2	3	3	4	4	5
95	3082	3084	3085	3087	3089	3090	3092	3094	3095	3097	0	0	1	1	1	1	1	2	2
	9747	9752	9757	9762	9767	9772	9778	9783	9788	9793	1	1	2	2	3	3	4	4	5
96	3098	3100	3102	3103	3105	3106	3108	3110	3111	3113	0	0	1	1	1	1	1	2	2
	9798	9803	9808	9813	9818	9823	9829	9834	9839	9844	1	1	2	2	3	3	4	4	5
97	3114	3116	3118	3119	3121	3122	3124	3126	3127	3129	0	0	1	1	1	1	1	2	2
	9849	9854	9859	9864	9869	9874	9879	9884	9889	9894	1	1	2	2	3	3	4	4	5
98	3130	3132	3134	3135	3137	3138	3140	3142	3143	3145	0	0	1	1	1	1	1	2	2
	9899	9905	9910	9915	9920	9925	9930	9935	9940	9945	1	1	2	2	3	3	4	4	5
99	3146	3148	3150	3151	3153	3154	3156	3158	3159	3161	0	0	1	1	1	1	1	2	2
	9950	9955	9960	9965	9970	9975	9980	9985	9990	9995	1	1	2	2	3	3	4	4	5

ESTA EDICION DE
50,000 EJEMPLARES SE
TERMI-
NO DE
IMPRI-
MIR EL
MES DE JU-
NIO DE 1976, EN
LOS TA-
LLERES
DE OFF-
SET MUL
TICOLOR,
S. A. CALZ. DE
LA VI- GA No.
1332, COLONIA
EL TRIUNFO. MEXICO
8, D. F.

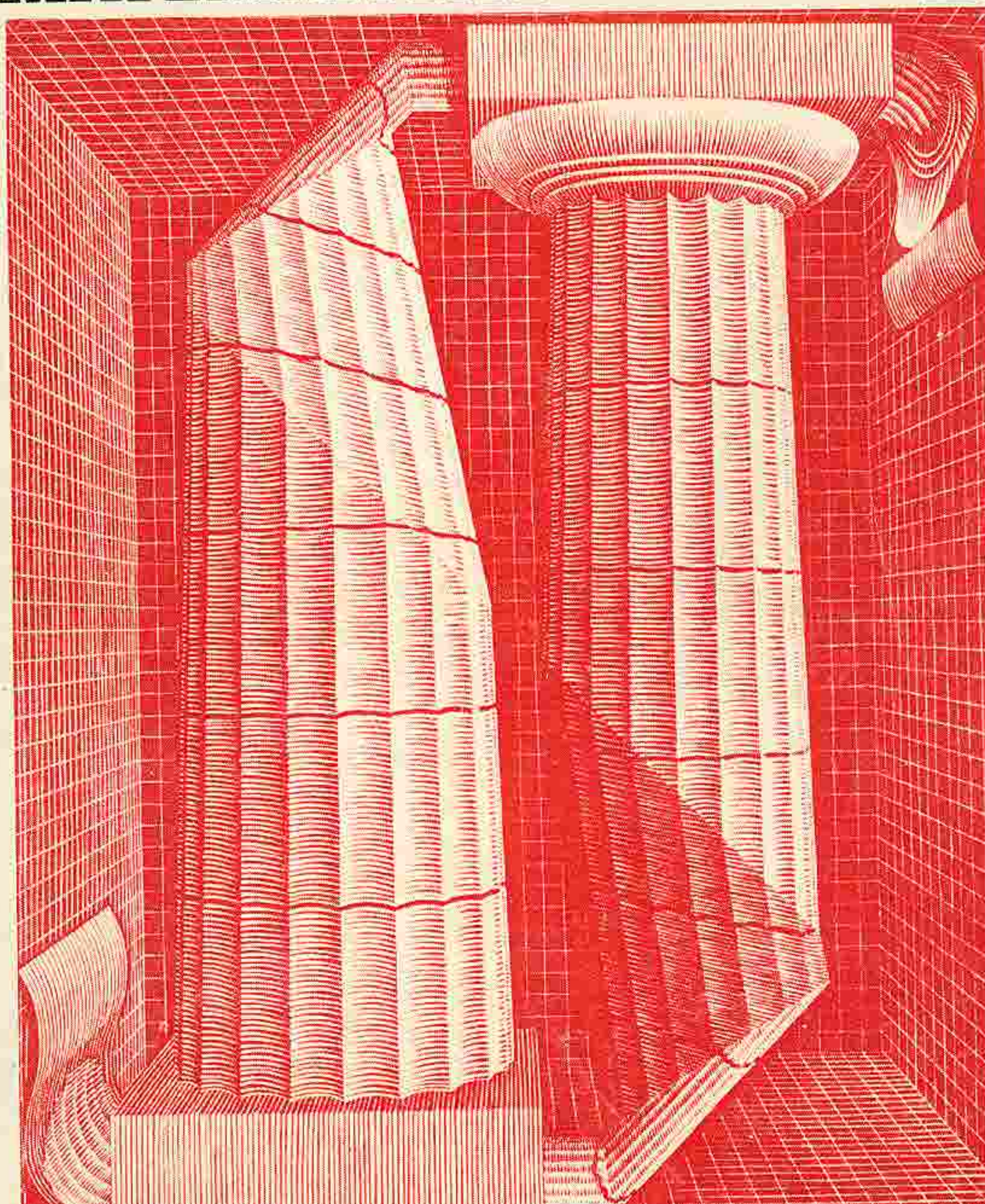


tercer grado

MATEMATICAS

secundaria abierta

SEP



C.E.C.S.A.

Segunda parte

Este libro es parte del plan de secundaria abierta, que tiene por objeto acreditar la enseñanza media a sectores de la población que no han tenido oportunidad de ir a la escuela. Se publica dentro de un convenio establecido entre la Secretaría de Educación Pública y la Cámara Nacional de la Industria Editorial, para hacer llegar libros de calidad y a precios económicos, a dichos sectores.

COMPAÑIA EDITORIAL CONTINENTAL, S. A.

MEXICO-ESPAÑA-ARGENTINA-CHILE-VENEZUELA-COLOMBIA

MIEMBRO DE LA CAMARA NACIONAL DE LA INDUSTRIA EDITORIAL
Registro Núm. 43

IMPRESO EN MEXICO PRINTED IN MEXICO

tercer grado

MATEMATICAS

Segunda parte

SEP CONAFE CNIE CECSA

Autores: Dr. Humberto Cárdenas Trigos
Instituto de Matemáticas, UNAM

Profr. Miguel Angel Curiel Ariza
Secretaría de Educación Pública

Dr. Emilio Lluis Riera
Instituto de Matemáticas, UNAM

Profr. Fidel Peralta Corona
Secretaría de Educación Pública

Profr. Cuauhtémoc Tavera Guerrero
Secretaría de Educación Pública

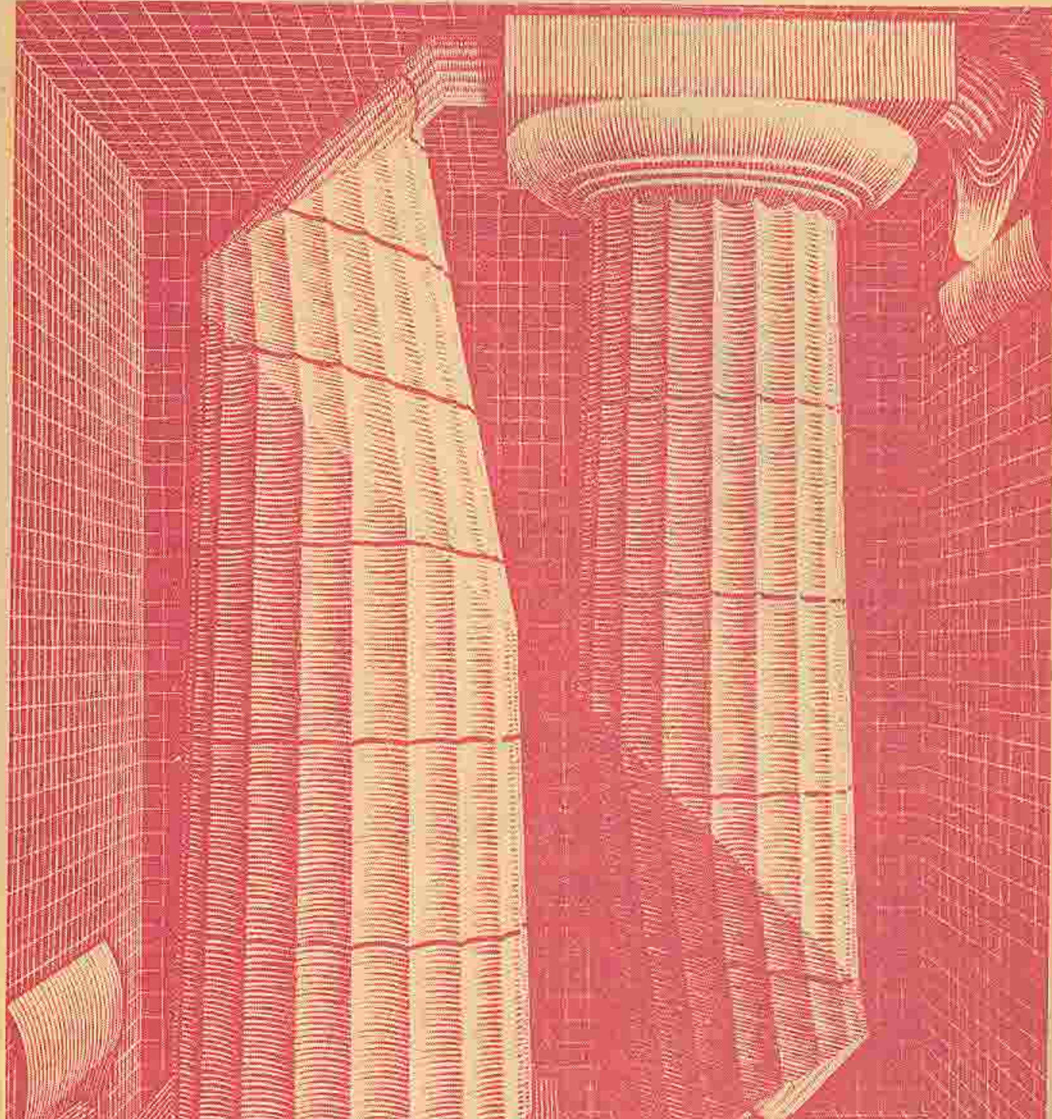
Profr. Elías V. Villar Quijano
Secretaría de Educación Pública

tercer grado

MATEMATICAS

secundaria abierta

SEP



C.E.C.S.A.

Segunda parte

Indice

CAPITULO SEXTO

CAPITULO SEPTIMO

CAPITULO OCTAVO

SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS

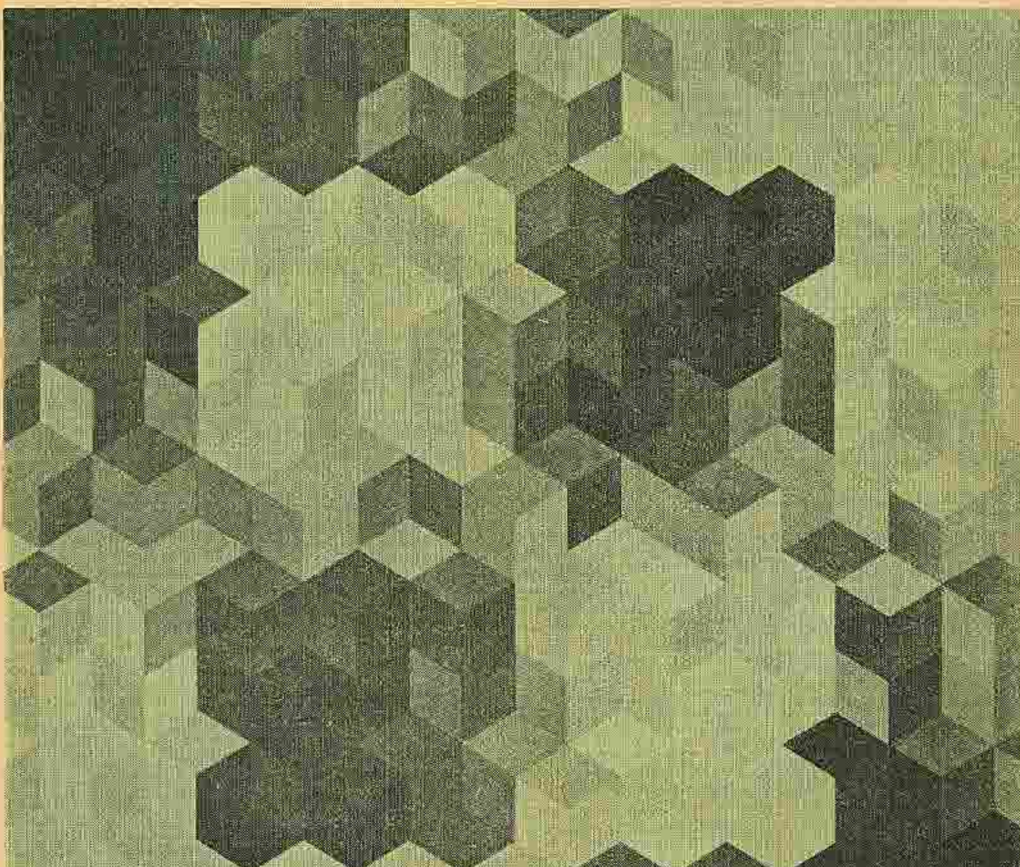
CAPITULO SEXTO

CAPITULO SEPTIMO

CAPITULO OCTAVO

Capítulo sexto

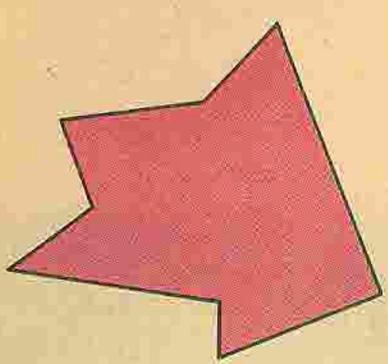
Semejanza y congruencia



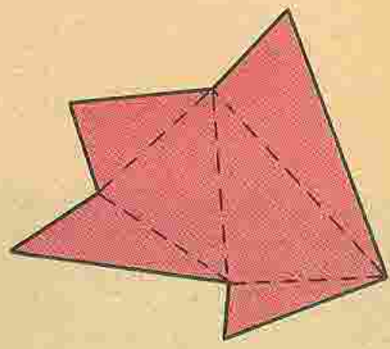
1. Figuras semejantes

En el curso anterior de Geometría hablamos de **figuras semejantes**. Es decir, de aquellas figuras que tienen la "misma forma".

En aquel curso le dimos mucha importancia al estudio de triángulos semejantes porque, según vimos, la semejanza entre figuras poligonales puede estudiarse a través de la semejanza entre triángulos. (Basta para ello que los polígonos se triangulen convenientemente.)



Polígono

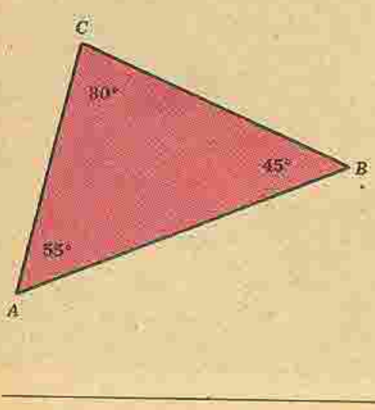


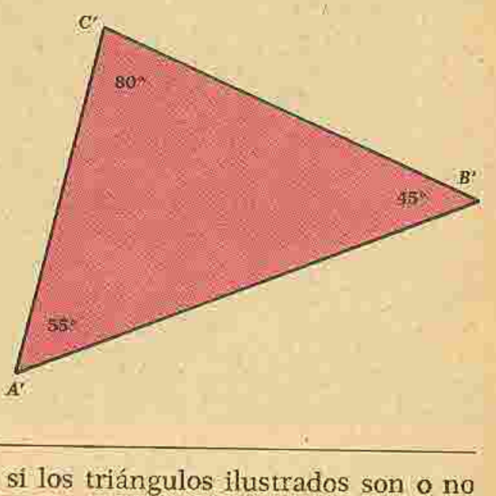
Polígono triangulado

Ahora, en este curso de geometría, vamos a utilizar algunas ideas acerca de los triángulos semejantes, que ya hemos estudiado. Una de ellas es la siguiente definición:

> **Dos triángulos son semejantes, si los tres ángulos de uno de ellos son repectivamente congruentes a los tres ángulos del otro.**

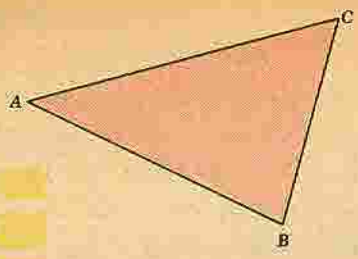
Ejemplo. Los triángulos ilustrados a continuación son semejantes pues $\angle A \cong \angle A'$, $\angle B \cong \angle B'$ y $\angle C \cong \angle C'$.

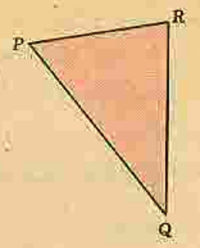




Ejercicio 1. En cada inciso diga si los triángulos ilustrados son o no semejantes. (Para ello, mida con un transportador los ángulos de cada uno.)

a)





$\measuredangle A =$

$\measuredangle B =$

$\measuredangle C =$

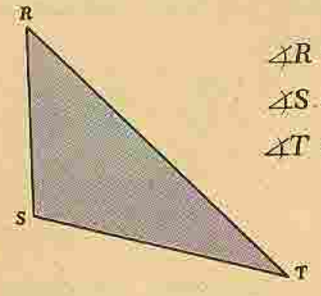
$\measuredangle P =$

$\measuredangle Q =$

$\measuredangle R =$

El $\triangle ABC$ y el $\triangle PQR$ ____________ semejantes.
son; no son

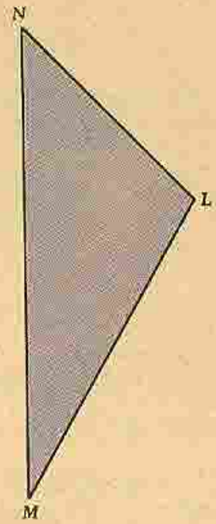
b)



$\measuredangle R =$

$\measuredangle S =$

$\measuredangle T =$



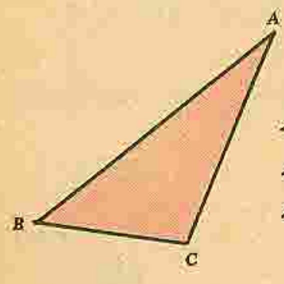
$\measuredangle L =$

$\measuredangle M =$

$\measuredangle N =$

Los triángulos RST y LMN ____________ semejantes.
son; no son

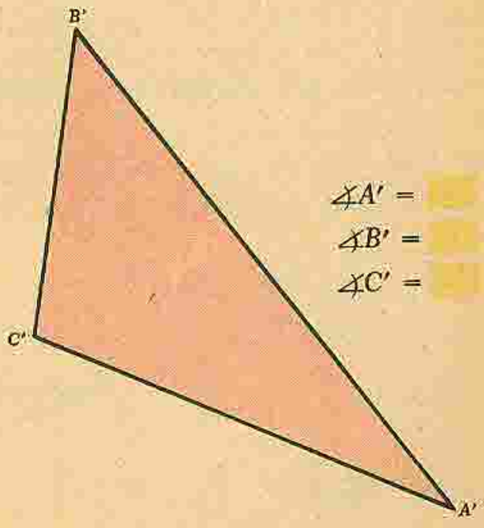
c)



$\measuredangle A =$

$\measuredangle B =$

$\measuredangle C =$



$\measuredangle A' =$

$\measuredangle B' =$

$\measuredangle C' =$

El triángulo ABC y el triángulo $A'B'C'$ ______________ semejantes.
son; no son

Otra de las ideas que vamos a manejar en este curso se refiere a la relación que hay entre las medidas de los lados de dos triángulos semejantes. Hemos enunciado esa relación de la siguiente manera:

Si dos triángulos son semejantes, entonces los lados respectivos son proporcionales.

Ejemplo. Los triángulos ABC y $A'B'C'$, vistos en el inciso c) del ejercicio anterior, son semejantes. Si medimos en centímetros los lados de esos triángulos, encontramos que las medidas son:

$AB = 4,$ $\quad BC = 2 \quad$ y $\quad CA = 3$

$A'B' = 8,$ $\quad B'C' = 4 \quad$ y $\quad C'A' = 6$

Si dividimos los lados del triángulo ABC entre los lados respectivos del triángulo $A'B'C'$, obtenemos un mismo cociente.

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \qquad \frac{BC}{B'C'} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \qquad \frac{CA}{C'A'} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Esto es,

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$$

Por lo tanto, los lados respectivos de los dos triángulos *son proporcionales*. Y su razón de proporcionalidad, en este caso, es $\frac{1}{2}$, o sea, 1:2.

También podríamos efectuar la división de los lados del $\triangle A'B'C'$ entre los lados del $\triangle ABC$. En tal caso, hallaríamos que la razón de proporcionalidad es 2, o sea, 2:1.

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{8}{4} = 2, \qquad \frac{B'C'}{BC} = \frac{4}{2} = 2 \qquad \text{y} \qquad \frac{C'A'}{CA} = \frac{6}{3} = 2$$

Cuando dos figuras son semejantes, a la razón de proporcionalidad entre sus lados se le acostumbra llamar **razón de semejanza** entre esas figuras. Por ejemplo, en el último caso que acabamos de ver, decimos que la razón de semejanza del triángulo $A'B'C'$ al triángulo ABC es 2.

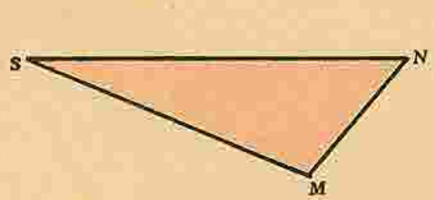
Ejercicio 2. Los triángulos ilustrados en cada inciso son semejantes. Mida usted sus lados y complete las expresiones.

a)

$MN =$

$NS =$

$SM =$



$AB =$

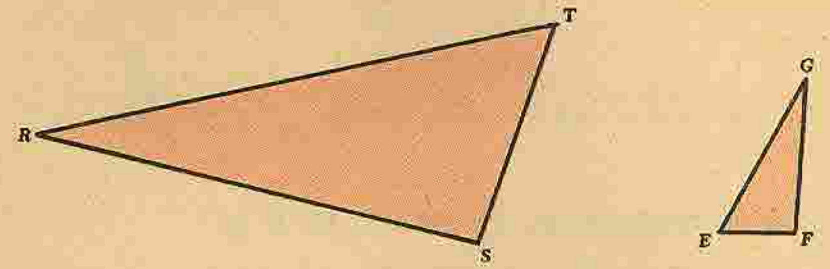
$BC =$

$CA =$ $\boxed{2.5}$

La razón de semejanza del $\triangle$ *ABC* al $\triangle$ *MNS* es , o sea, : .

La razón de semejanza del $\triangle$ *MNS* al $\triangle$ *ABC* es , o sea, : .

b)



$RT =$

$TS =$

$SR =$

$EF =$

$FG =$

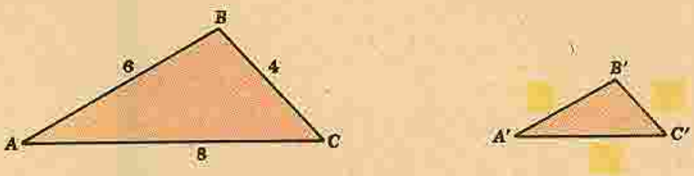
$GE =$

La razón de semejanza del $\triangle$ *RST* al $\triangle$ *GEF* es , o sea, : .

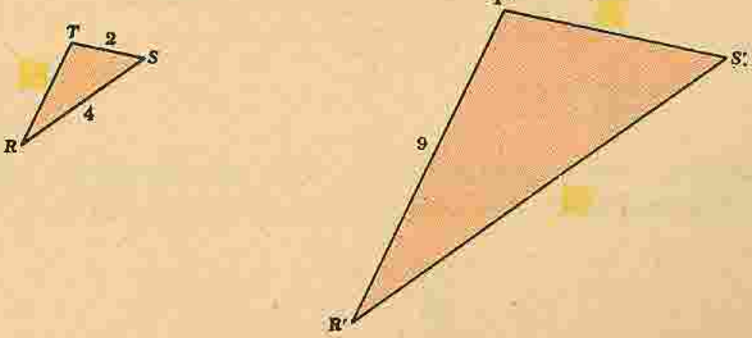
La razón de semejanza del $\triangle$ *GEF* al $\triangle$ *RST* es , o sea, : .

Ejercicio 3. Los triángulos que se ilustran en cada inciso son semejantes. Complete usted lo que falta en cada caso, sin medir directamente los lados de los triángulos.

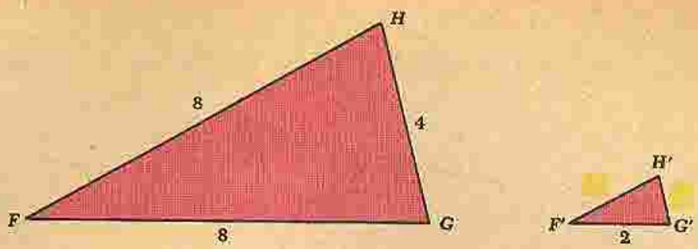
a) La razón de semejanza del $\triangle$ *ABC* al $\triangle$ *A'B'C'* es 2:1.



b) La razón de semejanza del $\triangle$ *RST* al $\triangle$ *R'S'T'* es 1:3.



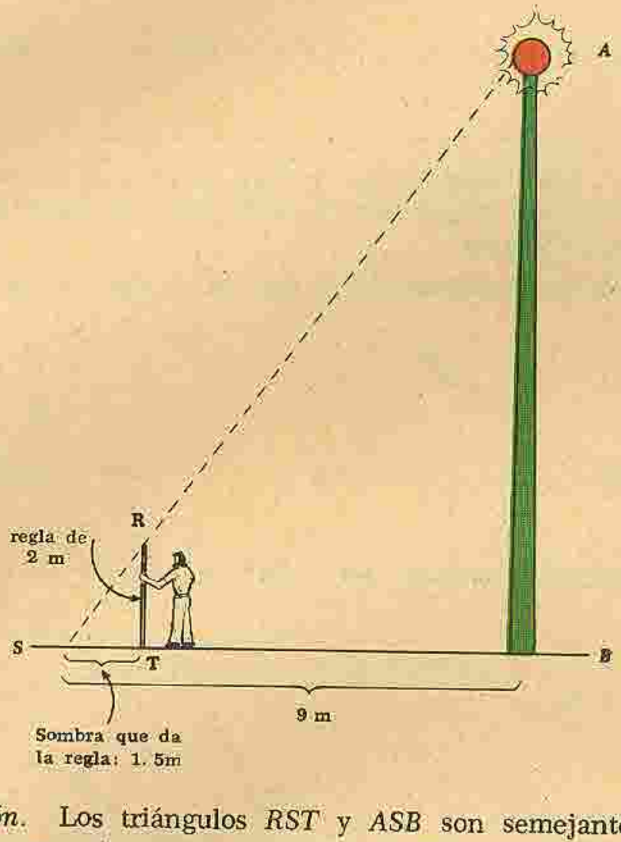
c)



La razón de semejanza del $\triangle\ FGH$ al $\triangle\ F'G'H'$ es ___ : ___ .

Ejercicio 4. Complete usted lo que falta en la resolución de los siguientes problemas, aplicando lo que sabe sobre semejanza de triángulos.

a) Un hombre desea conocer la altura de un poste que tiene un farol en su extremo. Para ello utiliza el procedimiento que ilustramos en el dibujo. ¿Cuál es la altura de ese poste?



Resolución. Los triángulos *RST* y *ASB* son semejantes (pues sus tres ángulos respectivos son congruentes). Por consiguiente,

$$\frac{AB}{SB} = \frac{RT}{\quad}$$

Esto es,

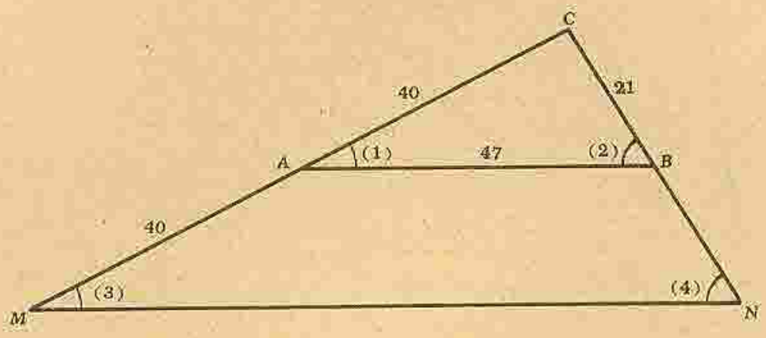
$$\frac{AB}{9} = \frac{\quad}{\quad}$$

En la expresión anterior tenemos que AB = ____ . Así pues, la respuesta al problema será como sigue:

Respuesta. La altura de ese poste es ____

b) Calcule las longitudes de los segmentos MN y BN de la figura que se ilustra abajo. (La unidad de medida es el metro.)

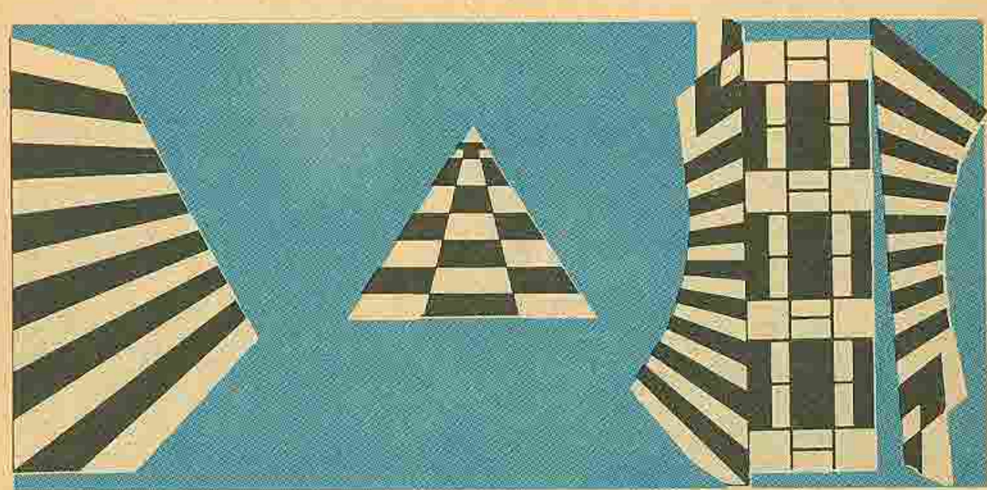
$$\boxed{\begin{array}{c} \measuredangle(1) \cong \measuredangle 3 \\ \measuredangle(2) = \measuredangle(4) \end{array}}$$



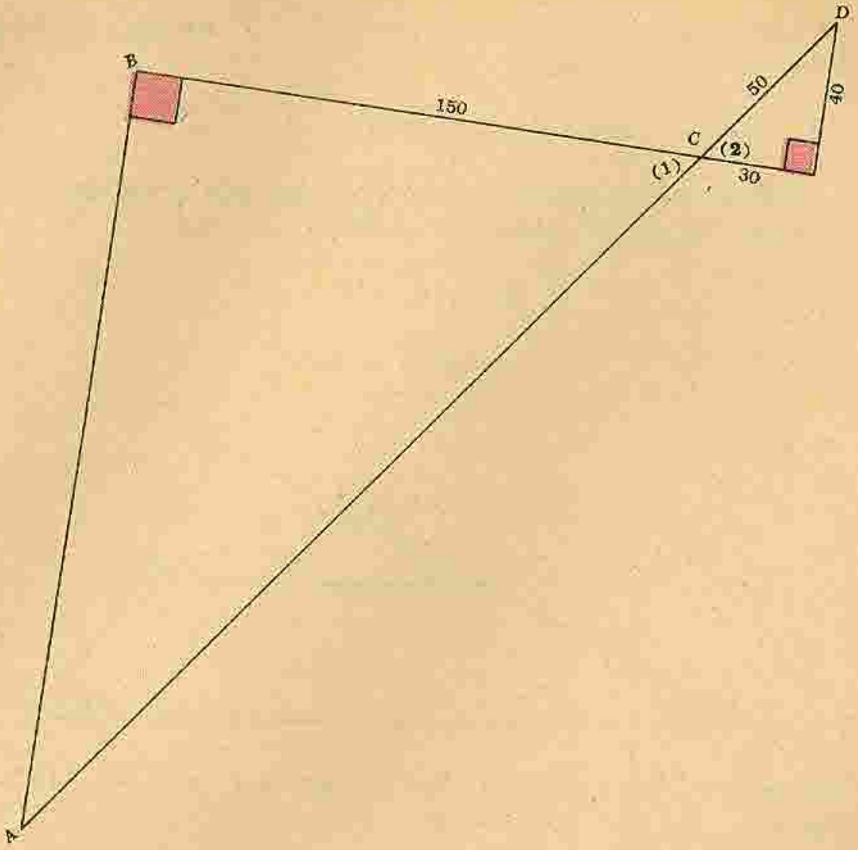
Resolución. Los triángulos CAB y CMN son ____________ por tener sus ángulos congruentes.

La razón de semejanza del $\triangle CMN$ al $\triangle CAB$ es $\frac{CM}{CA}$ = ____ y, por consiguiente,

MN = ____ BN = ____

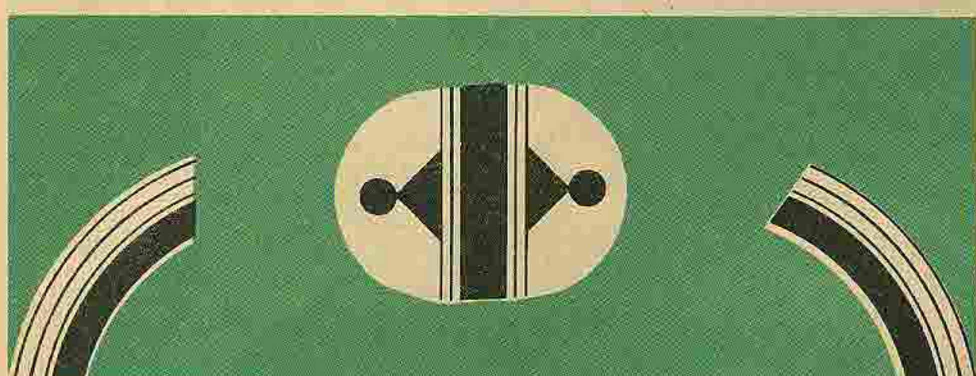


c) ¿Cuál es la medida de los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ del triángulo ABC que se ilustra abajo?



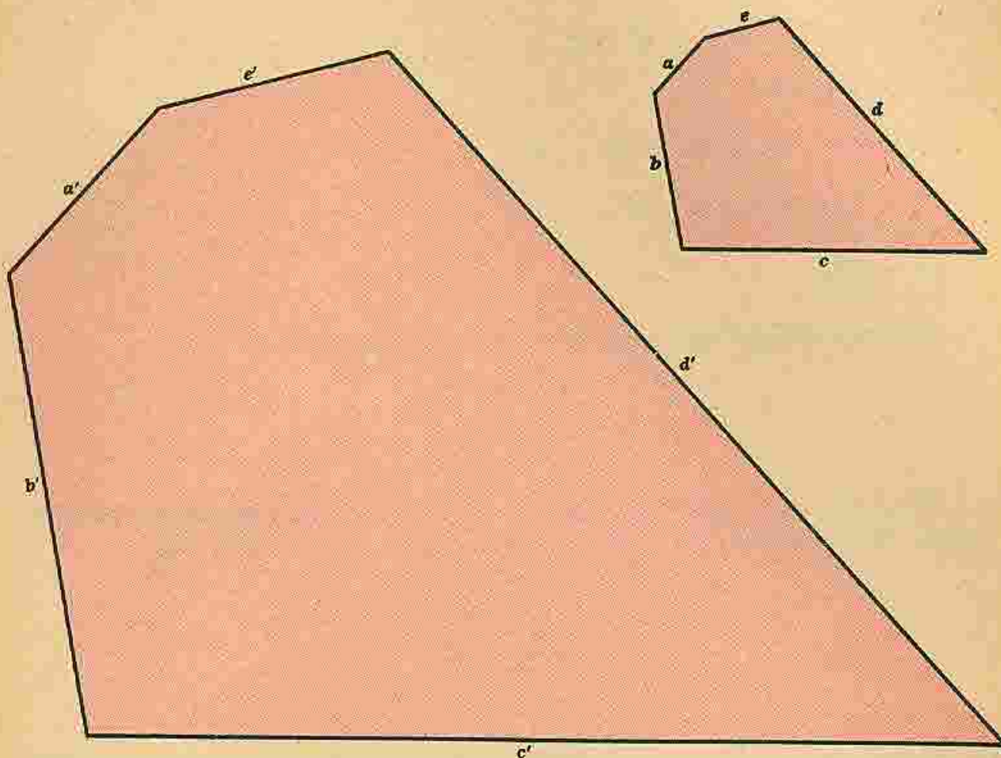
Resolución. Como los triángulos ABC y CDE son rectángulos y $\angle(1)$ ____ $\angle(2)$, entonces los dos triángulos son ____________. La razón de semejanza del triángulo ABC al triángulo CDE es ____

El lado AB mide ____________ y el AC mide ____________



2. Perímetros de polígonos semejantes

En este párrafo estudiaremos la relación que hay entre los perímetros de dos polígonos semejantes. Usted ya tiene alguna idea intuitiva sobre esto. Por ejemplo, si le dicen que las dos figuras ilustradas abajo representan polígonos semejantes cuya razón de semejanza es $\frac{1}{3}$, y sabe que el perímetro de la primera figura es 12 cm, ¿podría decir cuál es el perímetro de la segunda figura sin efectuar ninguna medición directa?



$P = a + b + c + d + e$ $\qquad$ $P' = a' + b' + c' + d' + e'$

$P = 12$ cm $\qquad$ $P' =$

Seguramente su respuesta ha sido correcta: $P' =$ $\boxed{36 \text{ cm.}}$

Analicemos con detalle las dos figuras del ejemplo y observemos la relación que hay entre sus perímetros.

En virtud de que las dos figuras son semejantes, sus lados respectivos son proporcionales. Por eso, considerando la razón de semejanza, tenemos que,

$\frac{a}{a'} = \frac{1}{3}$ y, por lo tanto, $a' = 3a$,

$$\frac{b}{b'} = \frac{1}{3} \text{ y, por lo tanto, } b' = 3b,$$

$$\frac{c}{c'} = \frac{1}{3} \text{ y, por lo tanto, } c' = 3c,$$

$$\frac{d}{d'} = \frac{1}{3} \text{ y, por lo tanto, } d' = 3d,$$

$$\frac{e}{e'} = \frac{1}{3} \text{ y, por lo tanto, } e' = 3e.$$

Como el perímetro de la segunda figura es

$$P' = a' + b' + c' + d' + e'.$$

podemos escribir

$$P' = 3a + 3b + 3c + 3d + 3e,$$

$$P' = 3\,(a + b + c + d + e),$$

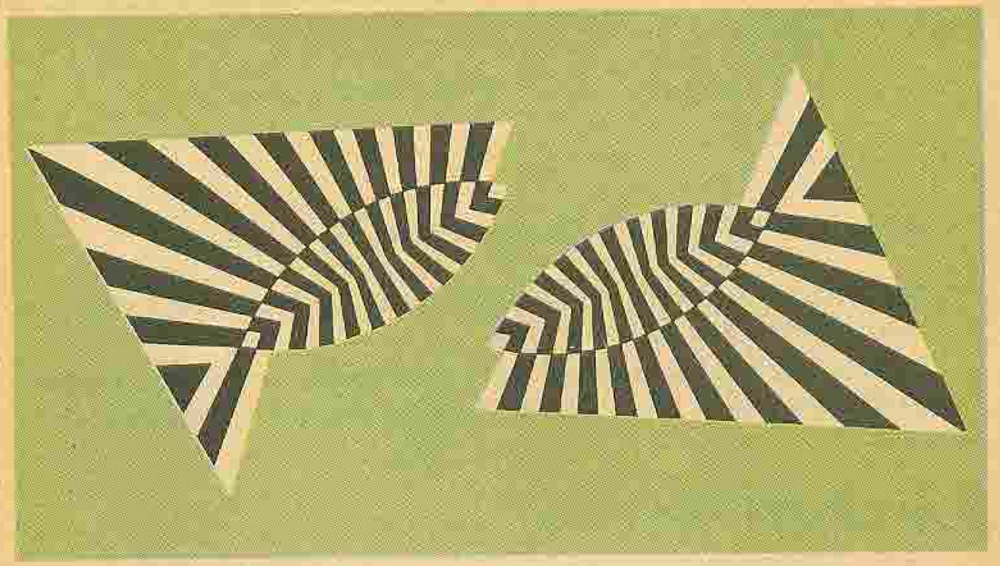
$$\boxed{P' = 3P.}$$

De esta última expresión obtenemos la siguiente:

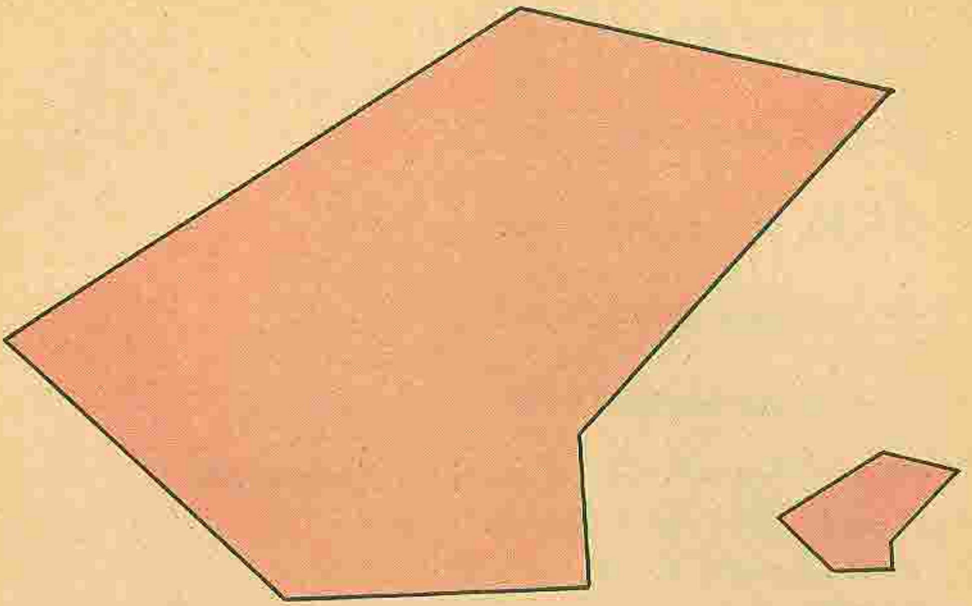
$$\boxed{\frac{P}{P'} = \frac{1}{3}}$$

Esta expresión nos indica que la razón de los perímetros de los polígonos dados es igual a la razón de semejanza de esos polígonos.

$$\boxed{\frac{36}{12} = \frac{1}{3}}$$

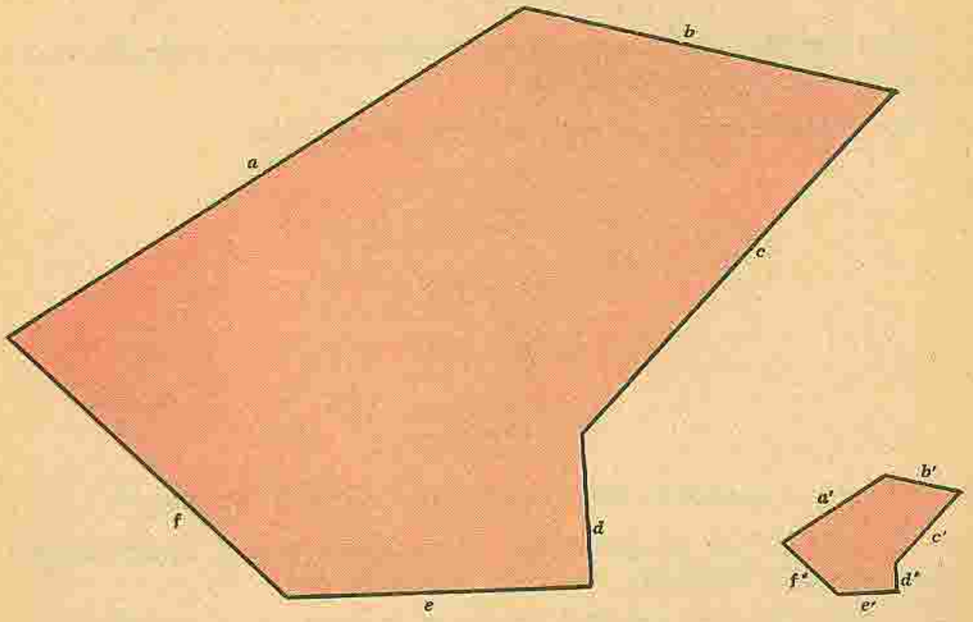


Ejemplo. Sabemos que la razón de semejanza entre los polígonos que se ilustran a continuación es 5 (esto es, 5:1) y el perímetro del primero es 30 cm. Con esos datos, y sin medir, vamos a calcular el perímetro del segundo polígono.



$P = 30$ cm. $\qquad P' = \boxed{?}$

Supongamos que las medidas de los lados del primer polígono son a, b, c, d, e y f y las medidas de los lados respectivos en el otro polígono son a', b', c', d', e' y f'.



$$P = a + b + c + d + e + f \qquad P' = a' + b' + c' + d' + e' + f'$$

Como los polígonos son semejantes podemos afirmar que

$$\frac{a}{a'} = 5 \text{ y, por lo tanto, } a = 5a'$$

$$\frac{c}{c'} = 5 \text{ y, por lo tanto, } c = 5c'$$

$$\frac{e}{e'} = 5 \text{ y, por lo tanto, } e = 5e'$$

$$\frac{d}{d'} = 5 \text{ y, por lo tanto, } d = 5d',$$

$$\frac{e}{e'} = 5 \text{ y, por lo tanto, } e = 5e'$$

$$\frac{f}{f'} = 5 \text{ y, por lo tanto, } f = 5f'.$$

Ya que $P = a + b + c + d + e + f$, podemos escribir

$$P = 5a' + 5b' + 5c' + 5d' + 5e' + 5f'$$

$$P = 5\,(a' + b' + c' + d' + e' + f')$$

$$\boxed{P = 5P'}$$

De esta última expresión obtenemos la siguiente:

$$\boxed{\frac{P}{P'} = 5}$$

Esto significa que la razón de los perímetros de los polígonos dados es igual a su razón de semejanza.

Por lo tanto, como P es igual a 30 cm, tenemos que

$$\frac{30}{\boxed{P'}} = 5$$

$$30 = 5P'$$

$$\frac{30}{5} = P'$$

$$\boxed{6 = P'}$$

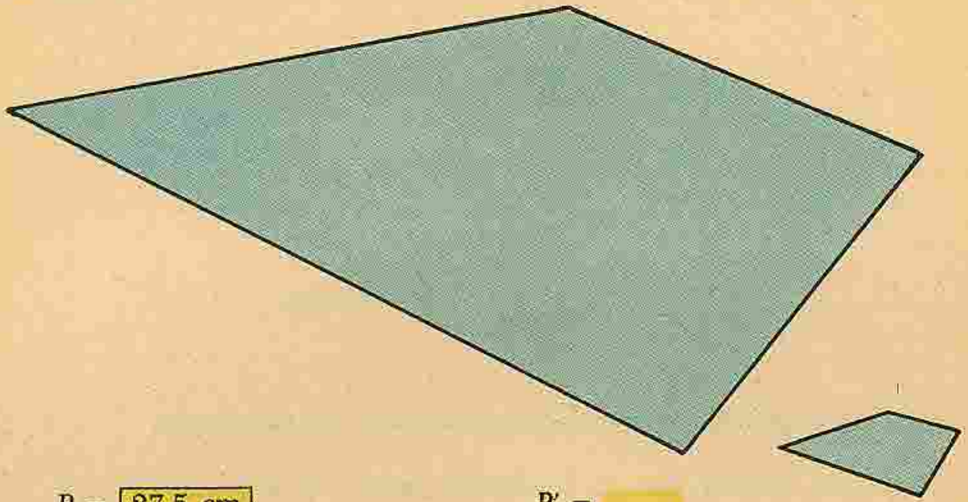
Esto es, el perímetro del segundo polígono es 6 centímetros.

En general, con un procedimiento semejante al que hemos seguido en los ejemplos anteriores, se puede demostrar que

En dos polígonos semejantes cualesquiera, la razón de sus perímetros es igual a su razón de semejanza.

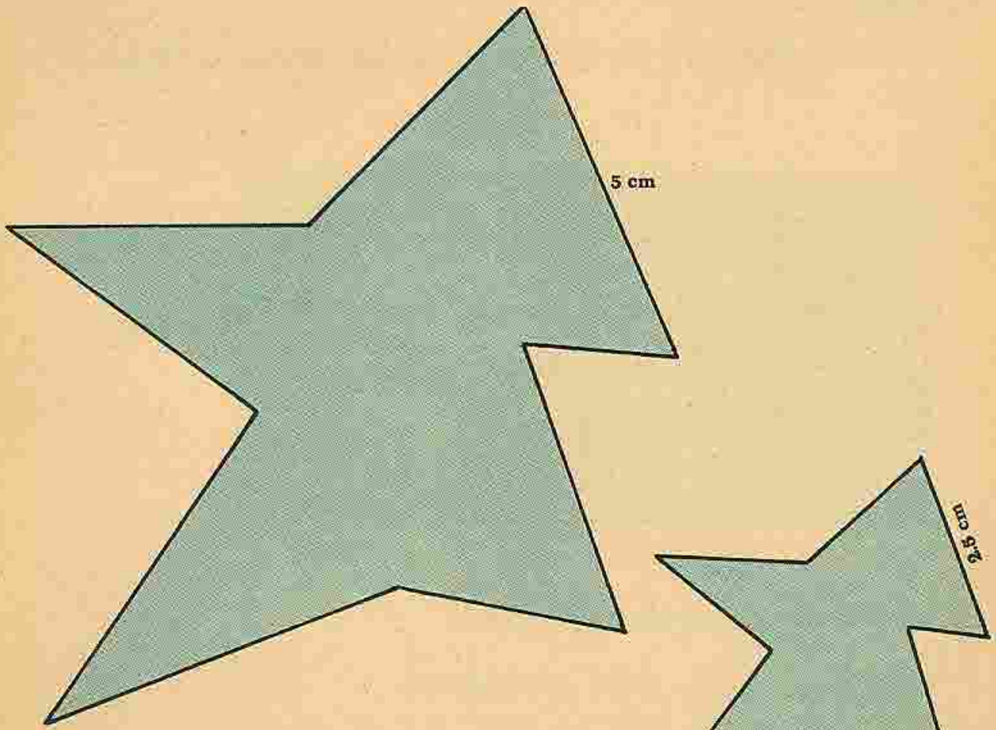
Ejercicio 5. Considerando los datos que se dan, y sin efectuar ninguna medición, complete usted las expresiones en cada inciso.

a) Las dos figuras ilustradas son semejantes. Su razón de semejanza es 5:1.



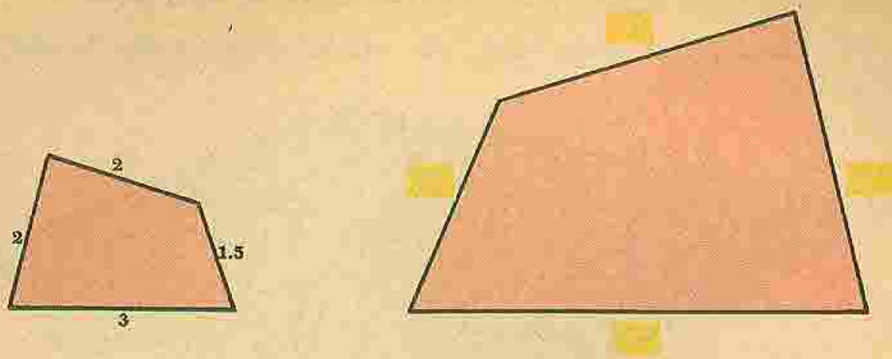
$P = \boxed{27.5\text{ cm}}$ $\qquad$ $P' =$

b) Las dos figuras son semejantes.



$P = 36$ $\qquad$ $P' =$

c) Las dos figuras son semejantes.



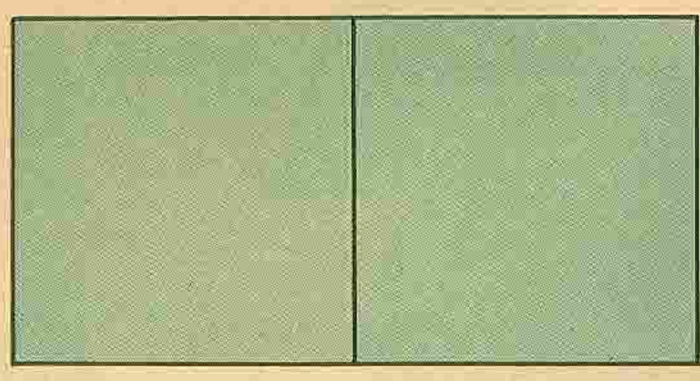
$P =$ ____ $\qquad\qquad P' = 17$ cm.

La razón de semejanza de la primera figura a la segunda es ____

La razón de semejanza de la segunda figura a la primera es ____

Problemas. En los siguientes problemas se utilizan figuras a escala. Para resolverlos es necesario aplicar lo que sabemos acerca de figuras semejantes.

a) El siguiente es un dibujo a escala de una cancha de voleibol.

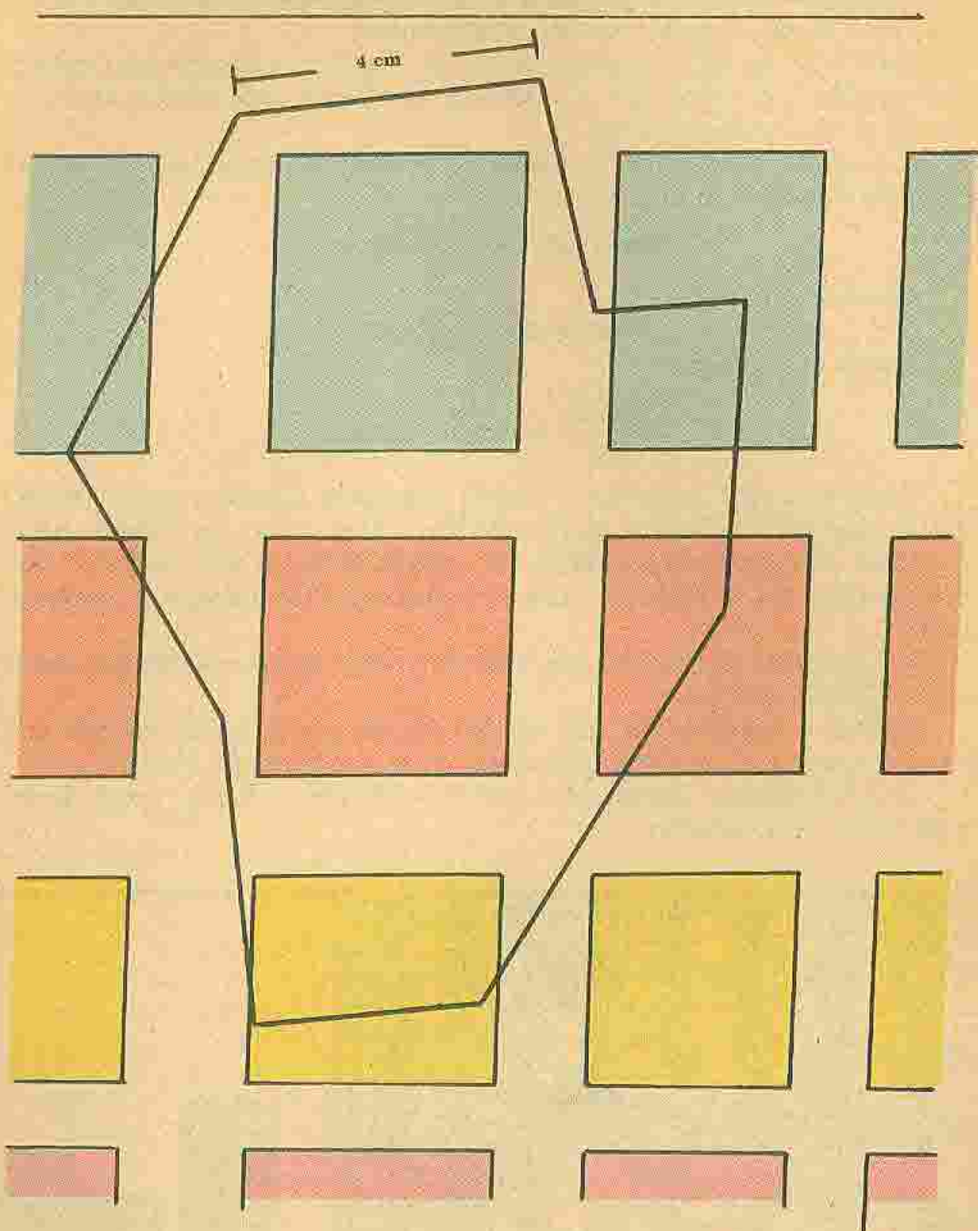


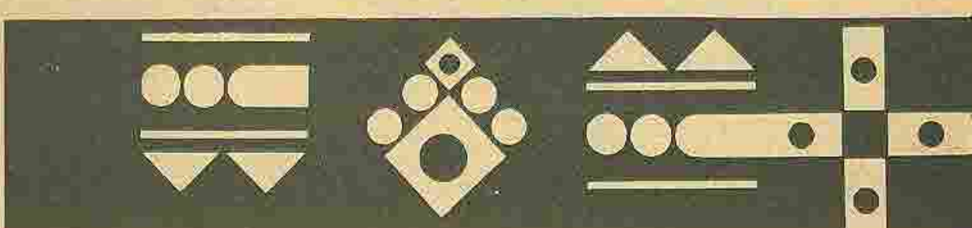
Escala 1:200

El perímetro del dibujo a escala es ____

El perímetro de la cancha de voleibol es ____

b) A continuación tenemos un mapa a escala de una ciudad en el que se ha marcado una parte de la red de drenaje. Si el tramo señalado con 4 centímetros mide en la realidad 400 metros y el perímetro de la figura dibujada es 35 centímetros, ¿cuántos kilómetros de tubería se ocupan en esa parte del drenaje?





3. Areas de polígonos semejantes

Cuando se comparan las áreas de dos polígonos es fácil cometer errores como el que cometió Daniel, el mosaiquero.

Daniel era un hábil mosaiquero que un día fue contratado para cubrir con azulejos una pared de 4 × 3 metros. Daniel vio unos bonitos azulejos de 10 × 10 cm y razonó así:

"Como la pared mide 4 metros (400 cm) de largo por 3 metros (300 cm) de alto, su área será

$$400 \times 300 = 120\,000 \text{ cm}^2$$

Cada azulejo mide

$$10 \times 10 = 100 \text{ cm}^2$$

Entonces necesito

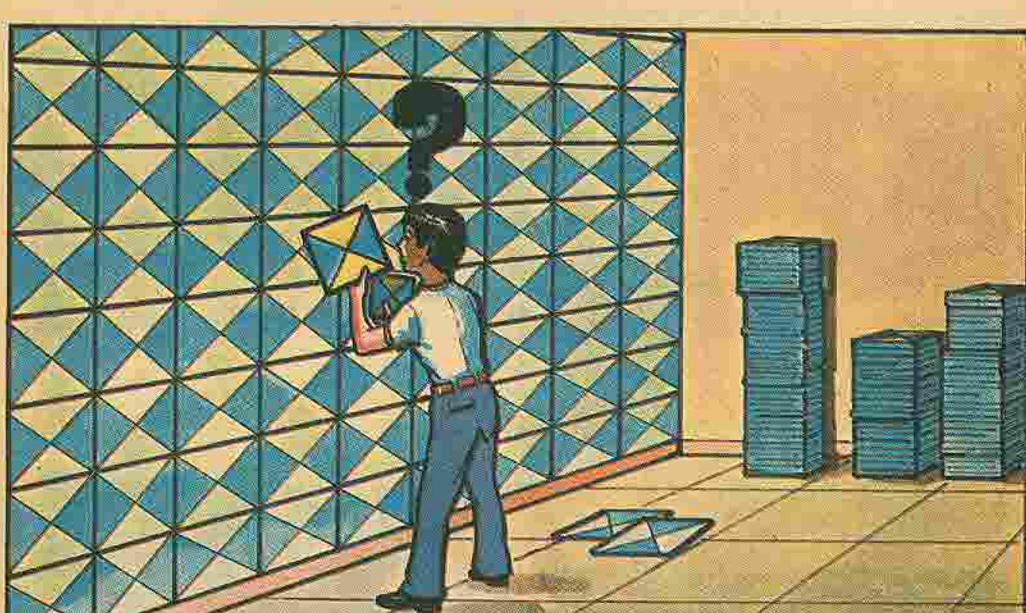
$$\frac{120\,000}{100} = 1\,200 \text{ azulejos".}$$

"Todo esto está muy bien —siguió pensando Daniel— pero colocar 1 200 azulejos me llevará mucho tiempo. ¿Qué tal si los compro más grandes? ¡Eso es! Usaré azulejos de tamaño doble, o sea, de 20 × 20 centímetros. Así tendré que colocar solamente 600 azulejos y acabaré pronto".

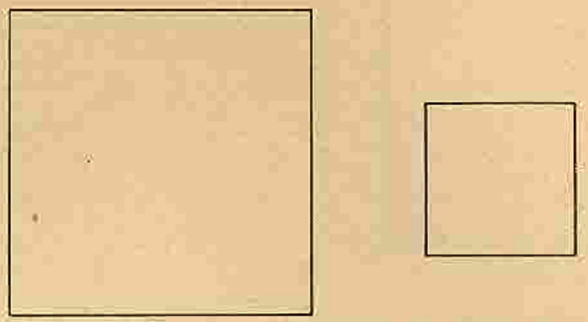
Con esta idea, Daniel encargó 600 azulejos y empezó a trabajar temprano al día siguiente.

Cuando terminó su trabajo vio con horror que le había sobrado un enorme montón de azulejos. ¿En dónde estuvo el error de Daniel?

Indudablemente, Daniel hizo mal sus cálculos. ¿Puede usted decir cuál fue su equivocación?

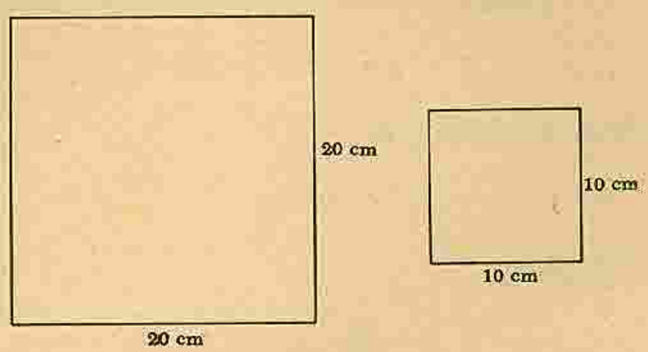


El error del mosaiquero consistió en que comparó dos figuras semejantes, los dos azulejos, pensando que la razón de las áreas era igual a la razón de semejanza entre ellos.



El creyó que, como el lado de un azulejo es el doble del lado del otro, (razón 2:1) también el área era el doble.

Veamos cómo están relacionadas esas áreas:



$A = 20 \times 20 = \boxed{400\ \text{cm}^2}$ $A = 10 \times 10 = \boxed{100\ \text{cm}^2}$

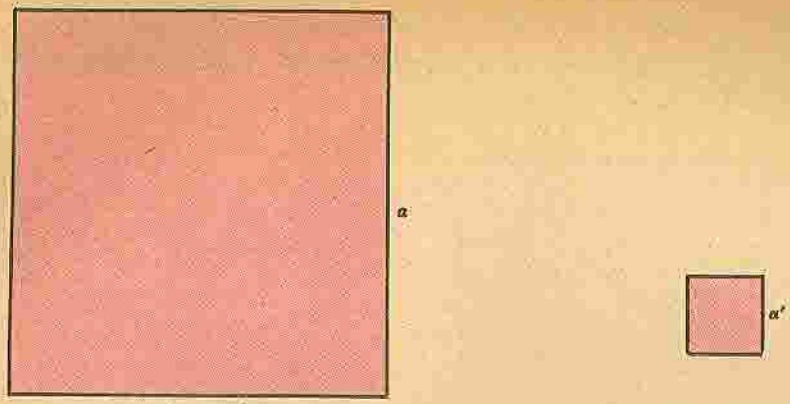
Como vemos, el área del azulejo más grande es el cuádruple del área del otro azulejo. $\left(\dfrac{400}{100} = 4\right)$ Es decir, la razón de estas áreas es 4.

Por eso es que para cubrir la pared sólo ocupó 300 azulejos, pues,

$$\frac{120\,000}{400} = 300$$

Lo que observamos aquí nos hace sospechar que, en general, la razón de las áreas de dos polígonos semejantes no es igual a su razón de semejanza. En lo que sigue veremos cómo se relacionan las áreas de dos polígonos semejantes.

Empecemos con los siguientes cuadrados, cuya razón de semejanza es 5. Es decir, 5:1.



$A = a^2$ $\qquad\qquad$ $A' = (a')^2$

Puesto que la razón de semejanza es 5, podemos escribir

$$\frac{a}{a'} = 5$$

o bien,

$$a = 5a'$$

Como $A = a^2$, y según acabamos de ver, $a = 5a'$, podemos escribir

$$A = (5a')^2 = 5^2\,(a')^2$$

Como $(a')^2$ es A', tenemos que

$$A = 5^2A'$$

Y, por consiguiente

$$\frac{A}{A'} = 5^2$$

Esto es, la razón de las áreas de esos dos polígonos semejantes es igual al cuadrado de su razón de semejanza.

Lo que ocurre en este ejemplo ocurre en general con cualquier par de cuadrados, y se puede demostrar siguiendo un procedimiento análogo al que acabamos de emplear.

Consideremos dos cuadrados cualesquiera cuyos lados midan l y l', respectivamente, y cuya razón de semejanza sea $\frac{l}{l'} = k$.

Las áreas de estos cuadrados serán:

$$A = l^2 \qquad \text{y} \qquad A' = (l')^2$$

Como $\frac{l}{l'} = k$, tenemos que

$$l = kl'$$

Ya que $A = l^2$, y $l = kl'$, podemos escribir

$$A = (kl')^2 = k^2\,(l')^2$$

En vista de que $(l')^2$ es igual a A', tenemos que

$$A = k^2 A'$$

Y, por lo tanto,

$$\frac{A}{A'} = k^2$$

Esto es,

La razón de las áreas de dos cuadrados cualesquiera es igual al cuadrado de su razón de semejanza.

Ahora podemos ver, sin necesidad de calcular las áreas, lo que ocurrió en el problema del mosaiquero:

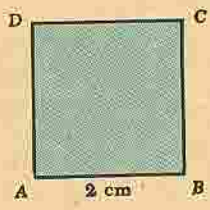
Un azulejo mide 20 cm por lado y el otro mide 10 cm por lado. La razón de semejanza de esas figuras es $\frac{20}{10} = 2$. Por consiguiente, la razón de sus áreas es

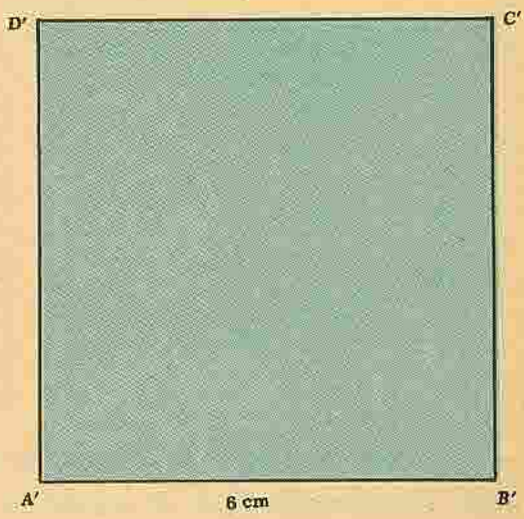
$$\frac{A}{A'} = 2^2 = 4$$

Eso significa que el área del azulejo mayor es 4 veces el área del menor, y no el doble como pensó Daniel.

Ejercicio 6. Considere los datos que se dan en cada inciso y complete las expresiones.

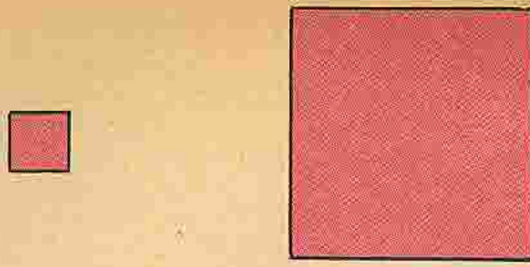
a) La razón del área del cuadrado $ABCD$ al área del cuadrado $A'B'C'D'$ es



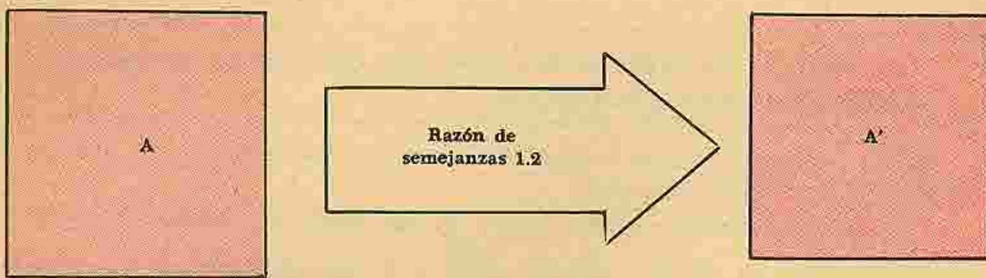


b) La razón de semejanza del primer cuadrado al segundo es $\frac{1}{4}$

Si el área del primer cuadrado es .64 cm², el área del segundo es



c)

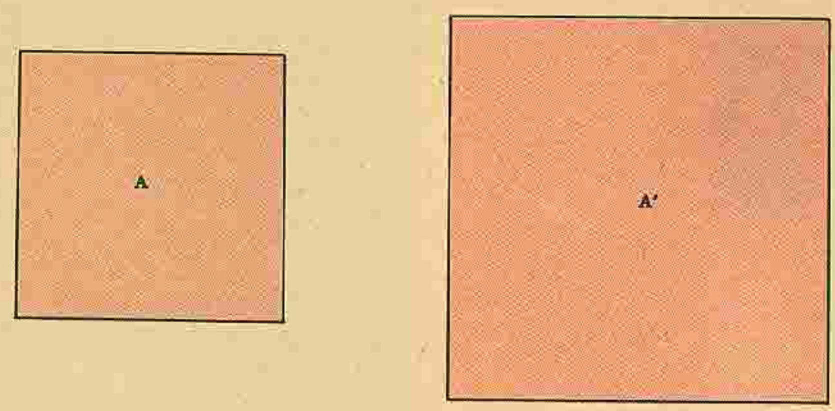


$A =$ ______ $A' = 10\ \text{cm}^2$

d)

$A = 64\ \text{m}^2$ $A' = 100\ \text{m}^2$

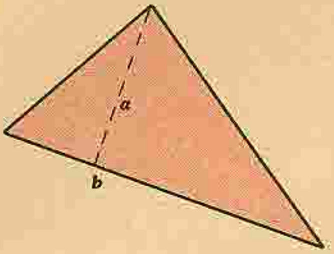
e)

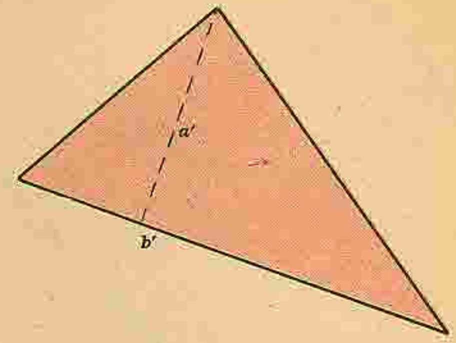


Al dividir A entre A' se obtiene .49 como cociente. La razón de semejanza del primer cuadrado al segundo es ______

De igual manera que hemos analizado la relación que hay entre las áreas de cuadrados, podemos comparar las áreas de triángulos y polígonos semejantes en general.

Consideremos que los triángulos ilustrados a continuación son semejantes y su razón de semejanza es $\frac{b}{b'} = \frac{a}{a'} = k$.





$$\boxed{A = \frac{1}{2}\, b \cdot a}$$

$$\boxed{A' = \frac{1}{2}\, b' \cdot a'}$$

Como $\frac{b}{b'} = k$ y $\frac{a}{a'} = k$, podemos escribir

$$b = kb' \qquad \text{y} \qquad a = ka'$$

Así, puesto que $A = \frac{1}{2}\, b \cdot a$, tenemos que

$$A = \frac{1}{2}\, kb' \cdot ka'$$

$$A = k^2 \cdot \frac{1}{2}\, b'a'$$

$$A = k^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\, b'a'\right)$$

O sea,

$$\boxed{A = k^2 A'}$$

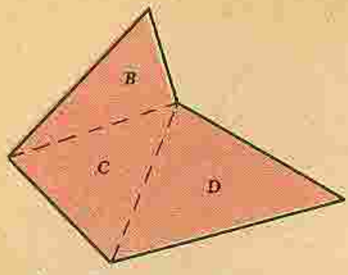
Y, por consiguiente,

$$\boxed{\frac{A}{A'} = k^2}$$

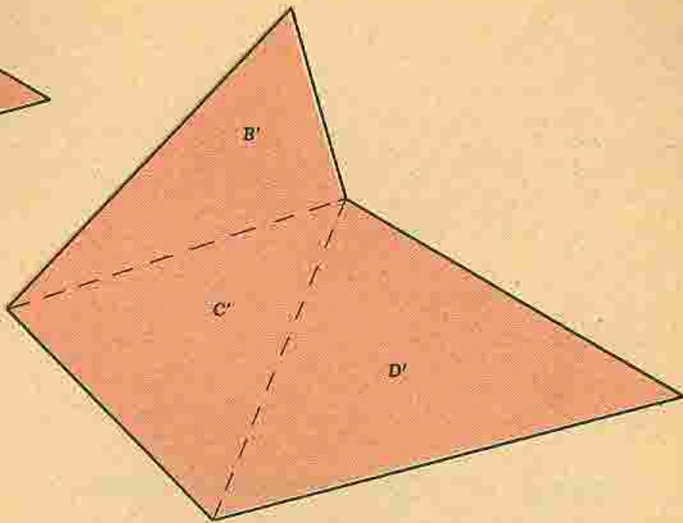
Con este resultado podemos encontrar fácilmente la relación que hay entre las áreas de dos polígonos semejantes cualesquiera.

Recuerde usted que si dos polígonos son semejantes y su razón de semejanza es k, dichos polígonos se pueden triangular de tal modo que los triángulos respectivos sean semejantes y con razón de semejanza igual a k.

Consideremos, por ejemplo, los polígonos semejantes ilustrados a continuación. Digamos que su razón de semejanza es k.



$A = B + C + D$



$A' = B' + C' + D'$

Si comparamos las áreas de los triángulos correspondientes, hallamos que

$$\frac{B}{B'} = k^2 \text{ y, por lo tanto, } B = k^2B'$$

$$\frac{C}{C'} = k^2 \text{ y, por lo tanto, } C = k^2C'$$

$$\frac{D}{D'} = k^2 \text{ y, por lo tanto, } D = k^2D'$$

Con esto, podemos escribir

$$A = B + C + D$$

$$A = k^2B' + k^2C' + k^2D'$$

$$A = k^2 (B' + C' + D')$$

$$A = k^2A'$$

Y, por consiguiente,

$$\boxed{\frac{A}{A'} = k^2}$$

El mismo resultado se obtiene al comparar las áreas de dos polígonos semejantes cualesquiera. Esto es,

La razón de las áreas de dos polígonos semejantes, cualesquiera, es igual al cuadrado de su razón de semejanza.

Ejercicio 7. En cada inciso las figuras que se mencionan son semejantes; considere los datos y complete las expresiones, escribiendo en cada cuadrito lo que falta.

a)

$A = 18\ m^2$ $A' =$

b)

$A =$ $A' = 12\ cm^2$

c)

$A' =$

$$\frac{A}{A'} = \frac{1}{9}$$

$A =$

d)

La razón de las áreas es $\frac{A}{A'} =$

e)

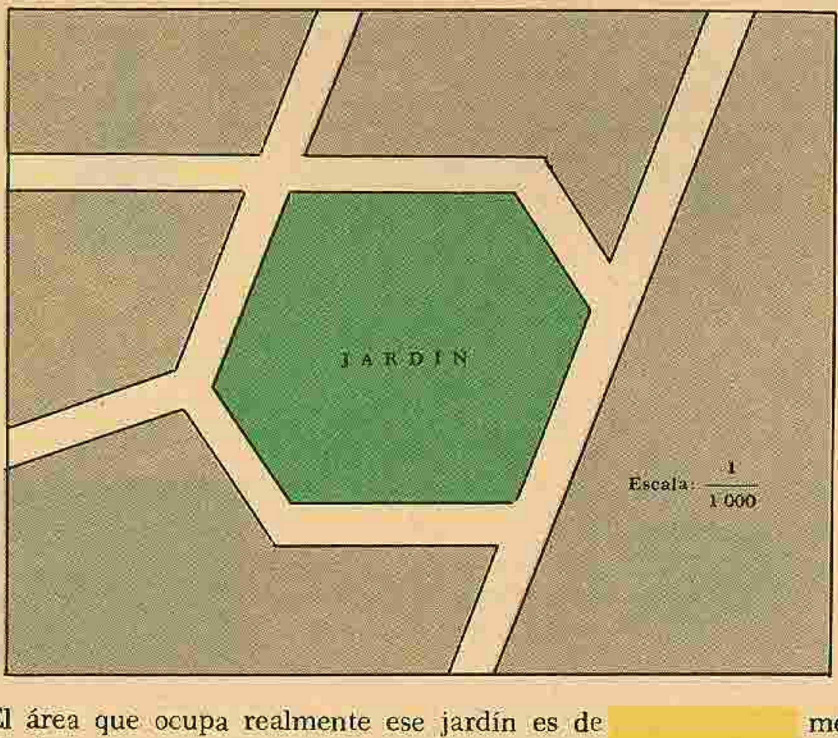
La razón $\frac{A}{A'}$ es igual a $\boxed{1.44}$

f)

$A =$

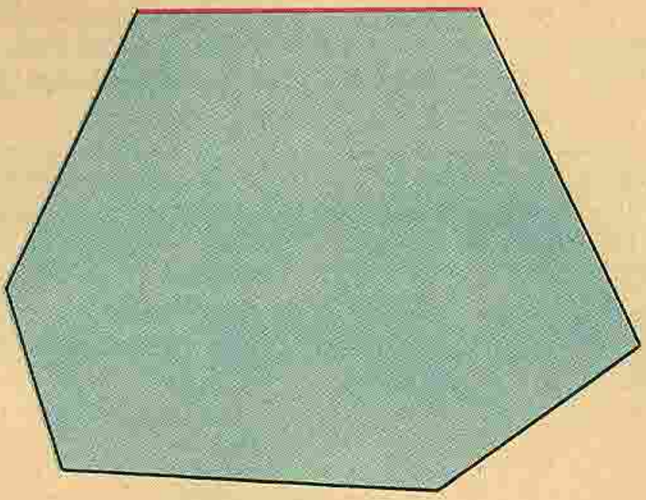
$A' = \boxed{7.8}$ cm²

g) En el plano que se ilustra abajo, el dibujo del jardín ocupa una superficie de 16 cm².



El área que ocupa realmente ese jardín es de metros cuadrados.

h) El mapa dibujado a continuación corresponde a un terreno.

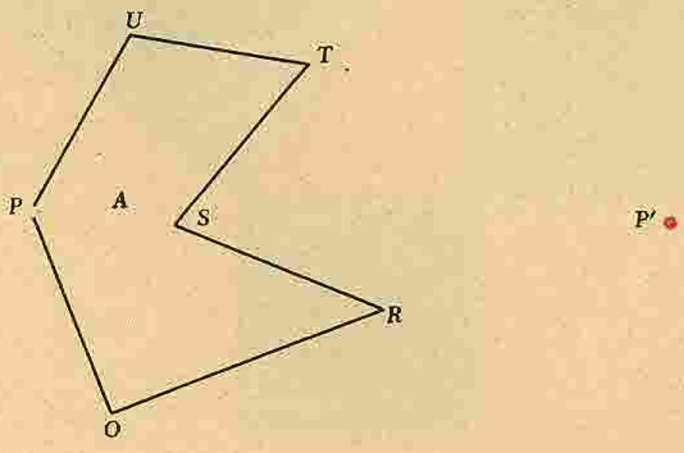


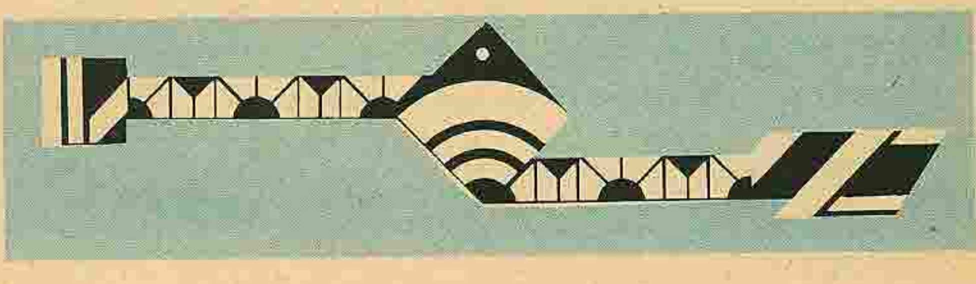
Escala: $\frac{1}{\quad}$

El segmento marcado en rojo, representa 90 metros.

Si el área de la figura dibujada es 40 cm², entonces el área del terreno en la realidad es ______ metros cuadrados.

Problema. Construya usted un polígono semejante al que se da, de tal modo que la razón de las áreas sea $\frac{A}{A'} = \frac{1}{4}$



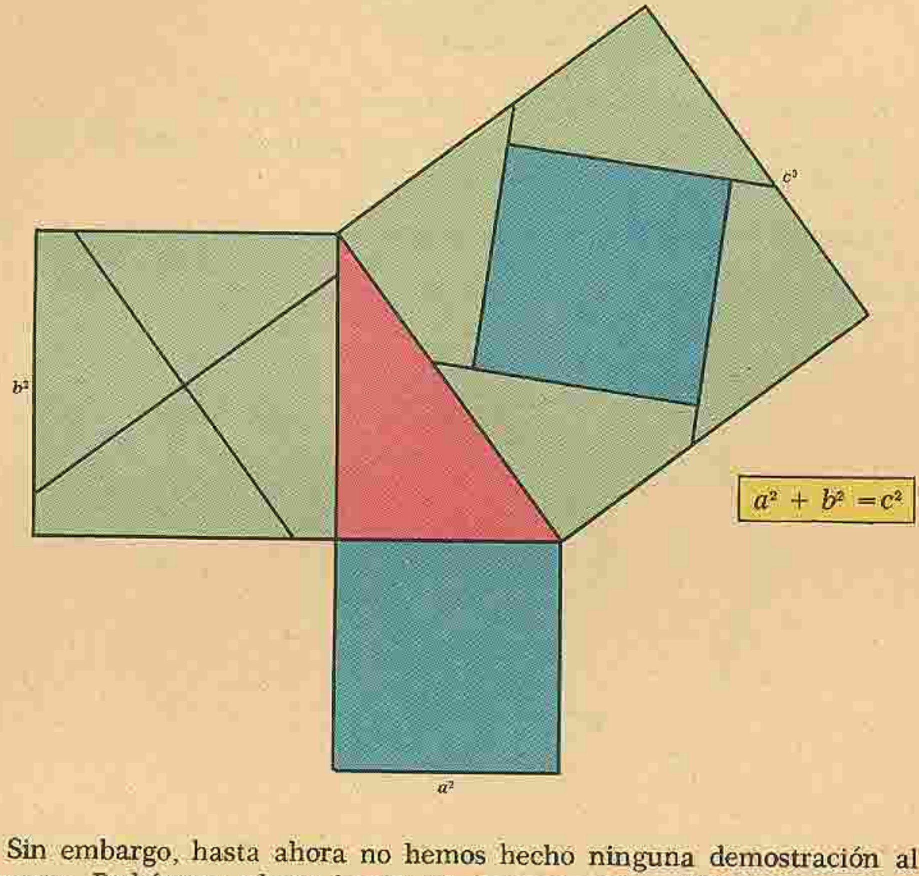


4. El teorema de Pitágoras

En el estudio de semejanza y congruencia que estamos realizando en este capítulo utilizaremos con mucha frecuencia el teorema de Pitágoras. Este teorema fue visto ya en el curso anterior. Lo enunciamos de la siguiente manera:

En todo triángulo rectángulo, el cuadrado construido sobre la hipotenusa tiene una área que es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos.

Seguramente usted recuerda que en aquella ocasión, para convencernos de la validez de dicho teorema, realizamos algunas actividades de recorte y pegado.

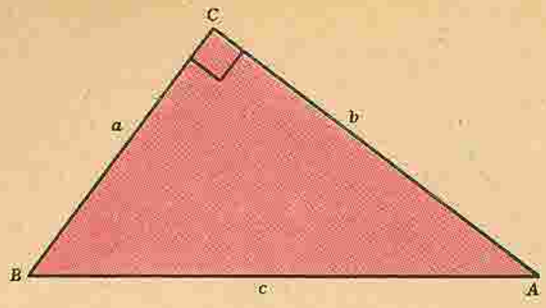


Sin embargo, hasta ahora no hemos hecho ninguna demostración al respecto. Podríamos ahora hacer tal demostración utilizando nuestros conocimientos sobre semejanza.

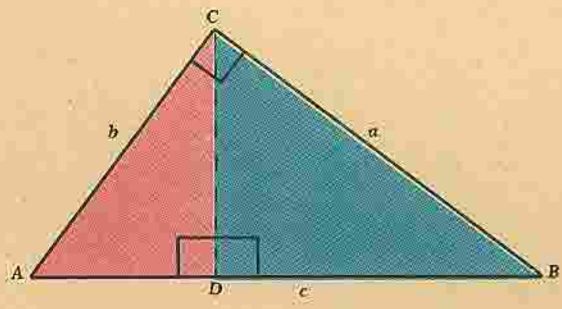
Empezaremos primero por demostrar lo siguiente:

"En todo triángulo rectángulo, la altura que va de la hipotenusa al vértice del ángulo recto determina dos triángulos que son semejantes al triángulo dado y semejantes entre sí".

Demostración. Consideremos el triángulo rectángulo ilustrado a continuación.



Tracemos la altura que parte del vértice del ángulo recto y señalemos con rojo y azul, respectivamente, los dos triángulos que se forman.



El $\triangle$ *ADC* (rojo) y el $\triangle$ *ABC* (inicial) son semejantes, pues los dos son triángulos rectángulos y tienen en común el ángulo *A*.

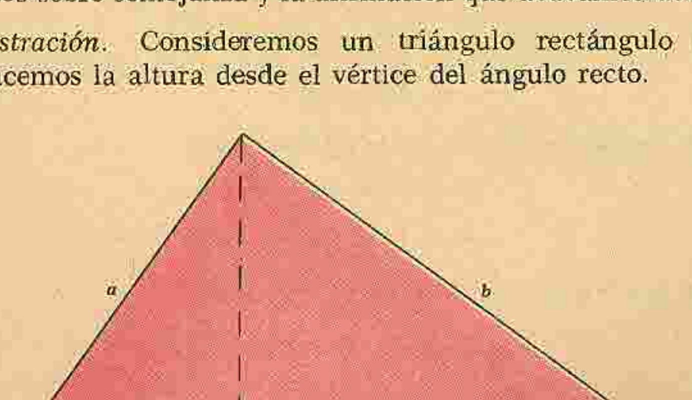
El $\triangle$ *DBC* (azul) y el $\triangle$ *ABC* (inicial) son semejantes, pues los dos son triángulos rectángulos y tienen en común el ángulo *B*.

Como el $\triangle$ *ADC* es semejante al $\triangle$ *ABC*, y el $\triangle$ *DBC* es semejante al $\triangle$ *ABC*, entonces concluimos que el $\triangle$ *ADC* es semejante al $\triangle$ *DBC*.

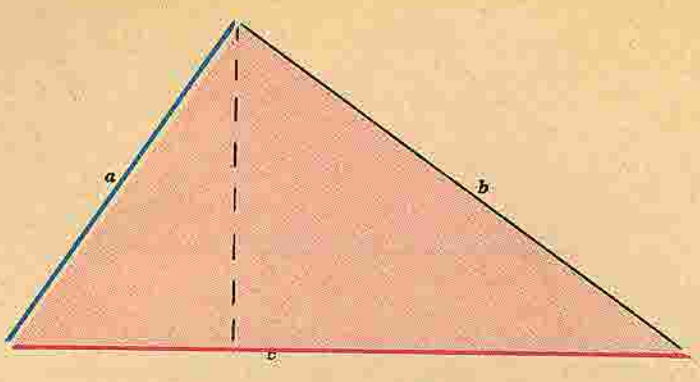
Con esto queda demostrada nuestra afirmación.

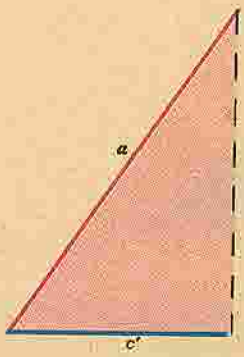
Ahora demostraremos el teorema de Pitágoras, usando nuestros conocimientos sobre semejanza y la afirmación que acabamos de demostrar.

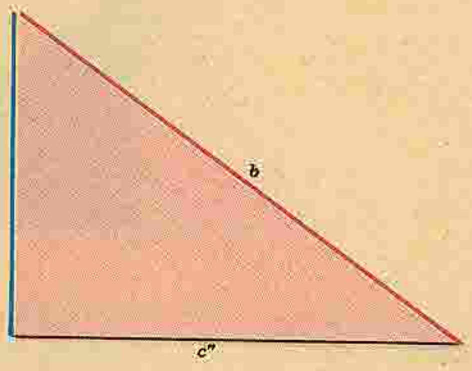
Demostración. Consideremos un triángulo rectángulo cualquiera *ABC* y tracemos la altura desde el vértice del ángulo recto.



Ya sabemos que los triángulos que se forman son semejantes entre sí. Para mayor claridad, dibujamos estos triángulos por separado e indicamos con un mismo color los lados correspondientes.







Como los triángulos son semejantes, sus lados respectivos son proporcionales. Por lo tanto, tenemos que

$$\frac{c}{a} = \frac{a}{c'} \qquad \text{y} \qquad \frac{c}{b} = \frac{b}{c''}$$

De estas dos expresiones podemos obtener las siguientes:

$$a^2 = cc'$$

$$b^2 = cc''$$

Si ahora sumamos a^2 más b^2, tendremos que

$$a^2 + b^2 = cc' + cc''$$

$$a^2 + b^2 = c\,(c' + c'')$$

Como $c' + c'' = c$ (ver la figura), entonces,

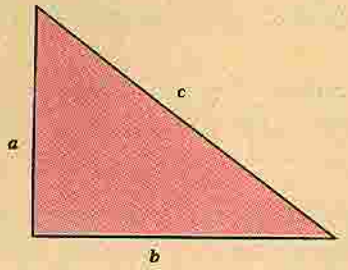
$$a^2 + b^2 = cc$$

O sea,

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Ejercicio 8. Analice cada problema y resuélvalo aplicando el teorema que acabamos de demostrar. (La ilustración no da las medidas reales.)

a) ¿Cuánto mide la hipotenusa en el siguiente triángulo?

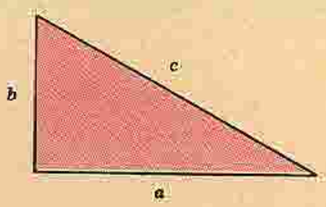


$a = 12$ m

$b = 16$ m

$c =$

b) ¿Cuánto mide el cateto b en el siguiente triángulo?

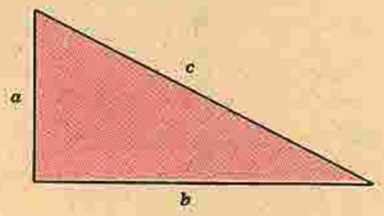


$c = 17$ m

$a = 15$ m

$b =$

c) ¿Cuánto mide el cateto a en el siguiente triángulo?

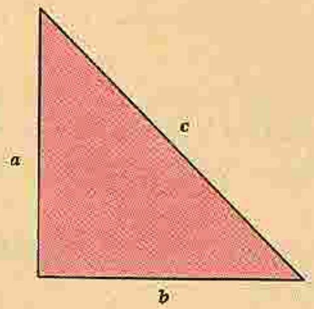


$c = 20$ m

$b = 18$ m

$a =$

d) ¿Cuál es la medida c en el siguiente triángulo rectángulo?

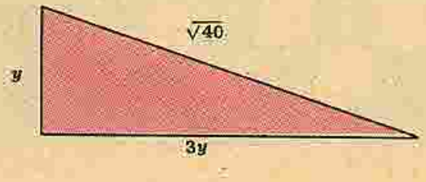


$a = 7$ m

$b = 7$ m

$c =$

e) ¿Cuál es el valor de y en el siguiente triángulo rectángulo?

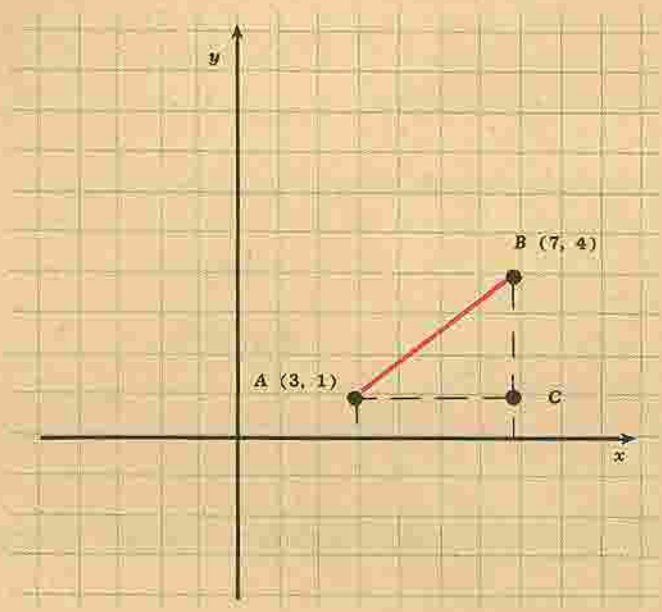


Con el teorema de Pitágoras se pueden atacar y resolver una gran diversidad de problemas que surgen a medida que se avanza en el estudio de la geometría.

A continuación vamos a utilizar dicho teorema, (además de otros conocimientos que hemos adquirido con anterioridad) para resolver el siguiente problema:

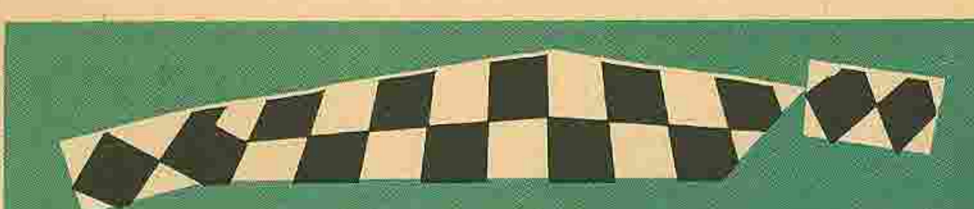
Problema. En un plano cartesiano se tienen dos puntos A y B tales que $A = (3, 1)$ y $B = (7, 4)$: Utilizando sus coordenadas calcúlese la distancia entre esos dos puntos.

Resolución. Para ayudarnos a resolver el problema vamos a usar la siguiente ilustración.

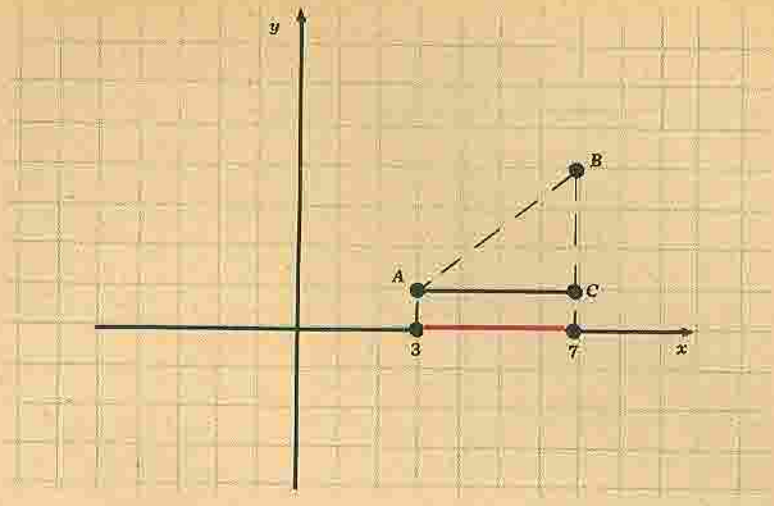


Como se observa en esta ilustración, los puntos A, B y C determinan un triángulo rectángulo del cual nos interesa conocer la medida del segmento $\overline{AB}$. (Recuerde usted que la distancia entre dos puntos es la medida del segmento que los une.)

Como $\overline{AB}$ es la hipotenusa del triángulo, podemos encontrar su medida conociendo las medidas de los catetos.

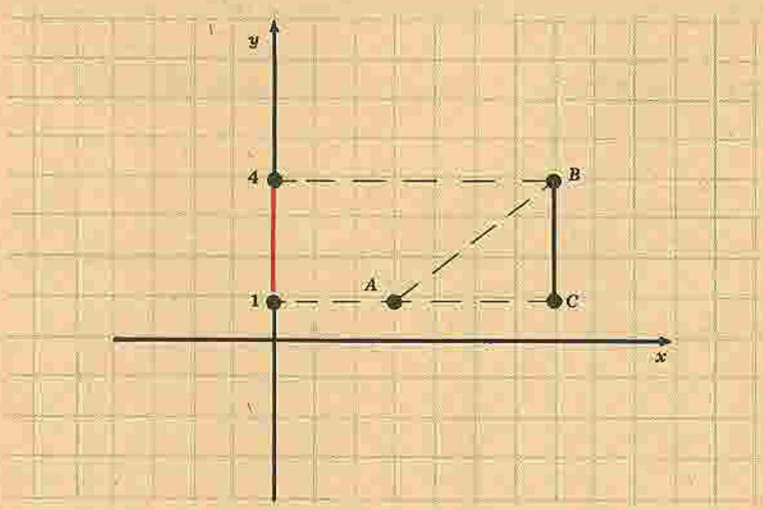


El cateto $\overline{AC}$ mide



(Obsérvese que la medida AC puede calcularse restando ___ − ___, que son las abscisas de A y B.)

El cateto $\overline{BC}$ mide



(Obsérvese que esta medida puede calcularse restando ___ − ___,

que son las ordenadas de A y B.)

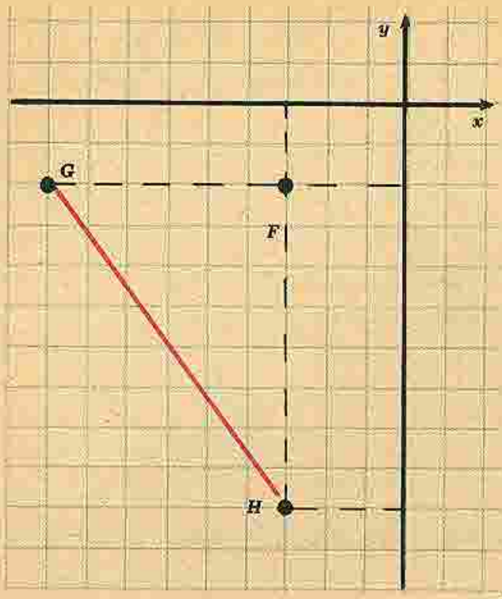
Aplicando el teorema de Pitágoras tenemos que

$$AB = \sqrt{(AC)^2 + (BC)^2} = \sqrt{4^2 + 3^2}$$

$$= \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

Respuesta. La distancia entre A y B es de 5 unidades.

Problema. Calcúlese la distancia entre los puntos G y H, ilustrados abajo.



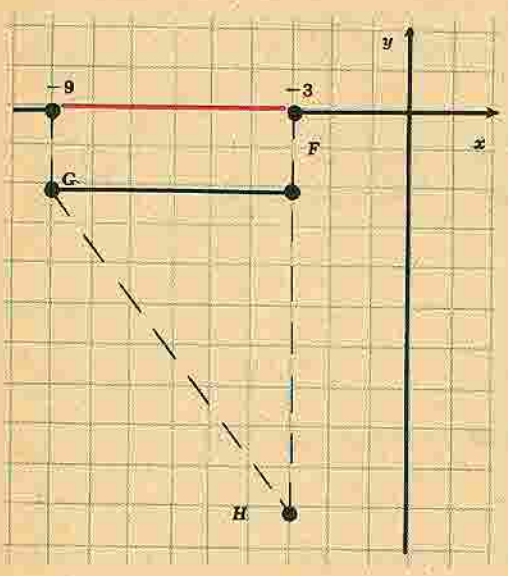
$G = (-9, -2)$

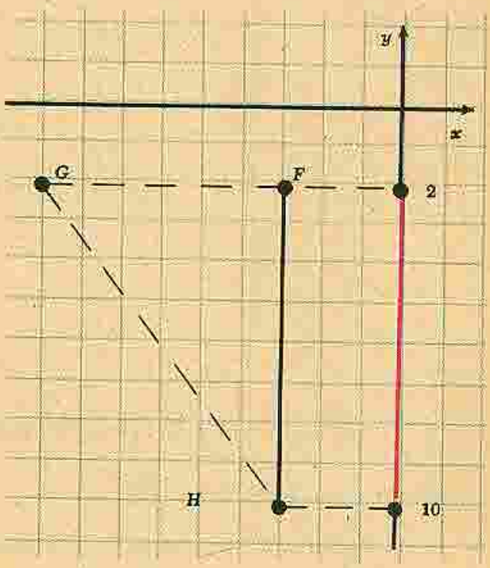
$H = (-3, -10)$

Resolución. Conociendo las medidas de $\overline{GF}$ y $\overline{HF}$, podemos usar el teorema de Pitágoras para hallar la distancia GH.

El cateto $\overline{GF}$ mide ___

El cateto $\overline{HF}$ mide ___





Esta medida se obtiene restando las abscisas de G y F:

___ − ___ = ___

Esta medida se obtiene restando las ordenadas de H y F:

___ − ___ = ___

(Como la medida de un segmento es siempre un número positivo, en caso de obtenerse algún número negativo en las restas anteriores, tomaremos su inverso aditivo como medida del segmento.)

Ahora calculamos la distancia GH y encontramos que

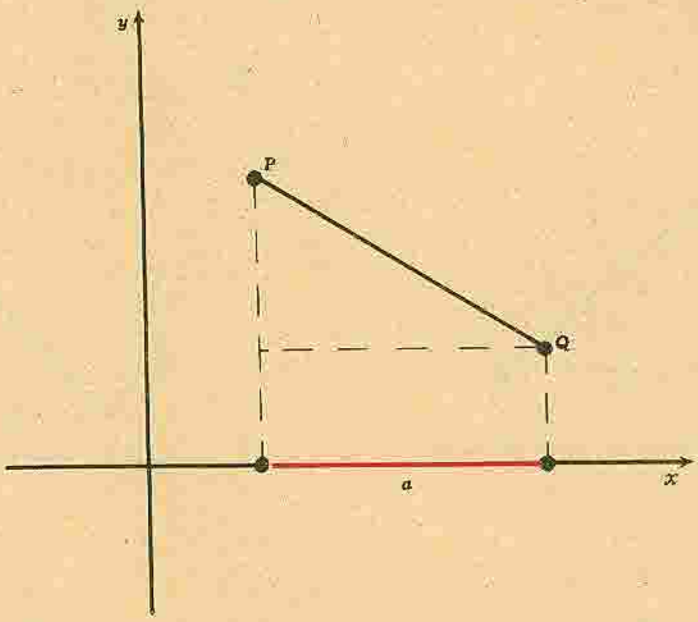
$$GH = \sqrt{(HF)^2 + (GF)^2} = \sqrt{\square^2 + \square^2}$$

$$= \sqrt{\square + \square} = \sqrt{\square} = \square .$$

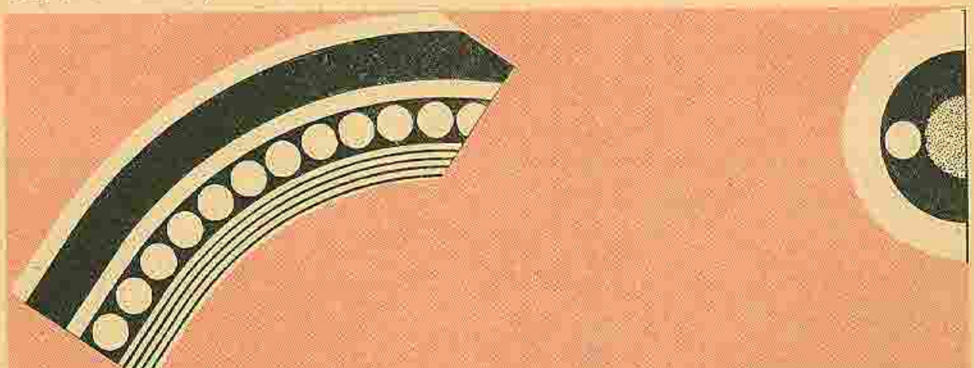
Respuesta. La distancia entre G y H es $\square$ unidades.

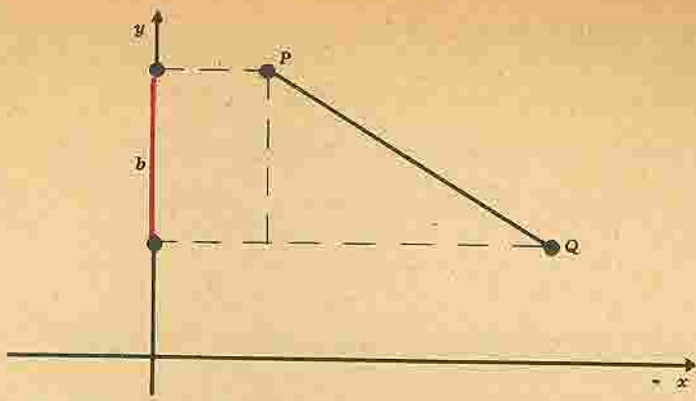
Según puede observarse en la resolución de los problemas anteriores, cuando se conocen las coordenadas de dos puntos P y Q, se puede calcular la distancia PQ en la siguiente forma:

1. Se restan las abscisas de P y Q. (Esto permite hallar la medida de un cateto del triángulo rectángulo cuya hipotenusa es $\overline{PQ}$.)



2. Se restan las ordenadas de P y Q. (Esto permite hallar la medida del otro cateto.)





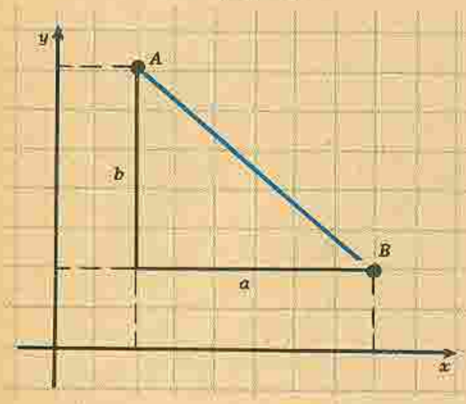
3. Se aplica el teorema de Pitágoras para hallar la distancia PQ.

$$PQ = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Ejercicio 9. Encuentre la distancia entre cada par de puntos.

a) $A = (2, 7)$

$B = (8, 2)$



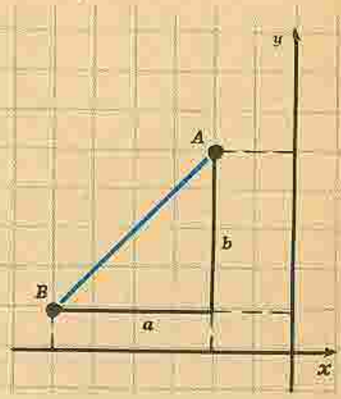
$a =$

$b =$

$AB =$

b) $A = (-2, 5)$

$B = (-6, 1)$



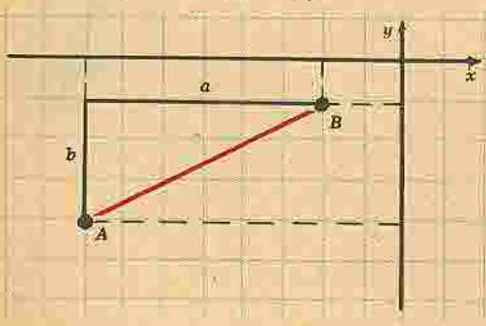
$a =$

$b =$

$AB =$

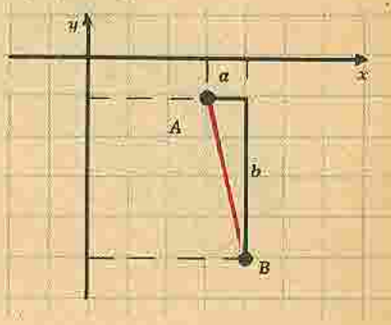
c) $A = (-8, -4)$

$B = (-2, -1)$



d) $A = (3, -1)$

$B = (4, -5)$



$a =$

$b =$

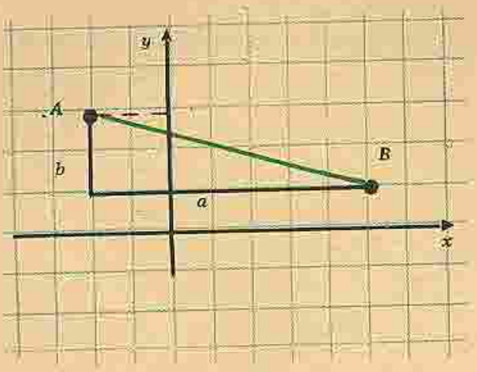
$AB =$

$a =$

$b =$

$AB =$

e) $B = (5, 1)$
$A = (-2, 3)$

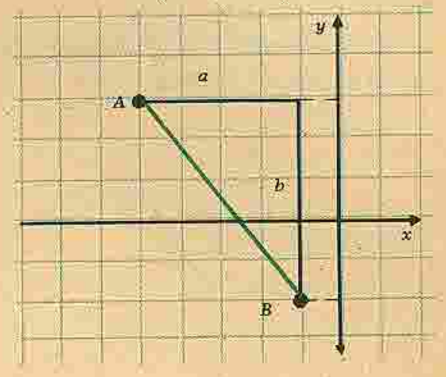


$a =$

$b =$

$AB =$

f) $A = (-5, 3)$
$B = (-1, -2)$



$a =$

$b =$

$AB =$

Ejercicio 10. Encuentre la distancia entre los dos puntos que se mencionan en cada inciso.

a) $A = (7, 12)$
$B = (2, 3)$

$AB =$

b) $C = (-4, 6)$
$D = (-9, 2)$

$CD =$

c) $E = (3, -7)$
$F = (1, -8)$

$EF =$

d) $G = (-10, -4)$
$H = (-2, -15)$

$GH =$

e) $J = (-5, 3)$
$K = (4, 7)$

$JK =$

f) $L = (14, 7)$
$M = (9, -2)$

$LM =$

g) $S = (-3, 5)$
$P = (6, 5)$

$SP =$

h) $Q = (-4, 7)$
$R = (-4, -9)$

$QR =$

i) $T = (5, 7)$
$O = (0, 0)$

$TO =$

j) $W = (-8, 3)$
$O = (0, 0)$

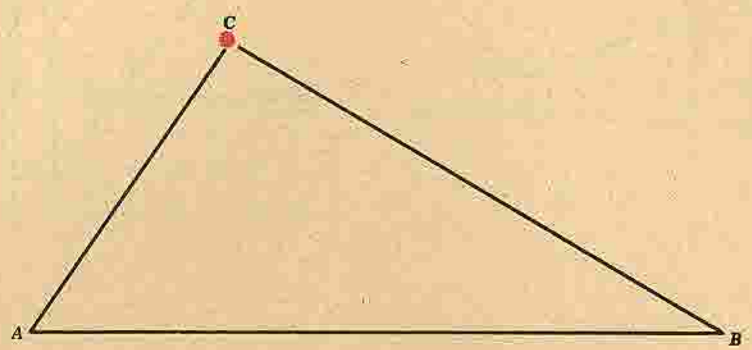
$WO =$

5. Triángulos isósceles

Como ya hemos dicho, el teorema de Pitágoras tiene muchas aplicaciones. En este párrafo y en el siguiente utilizaremos ese teorema para demostrar algunas propiedades de los triángulos isósceles y de los rombos.

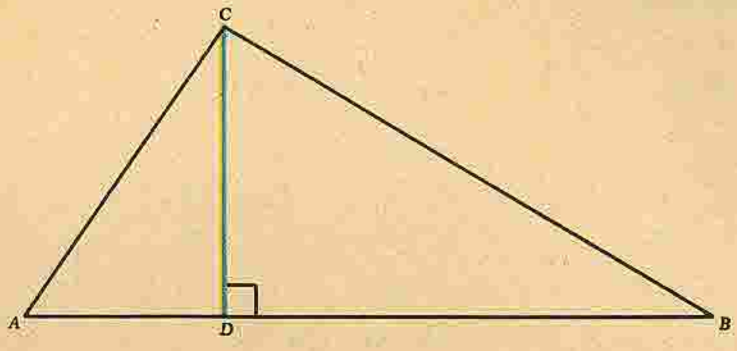
Empezaremos por definir algunos segmentos que se consideran en el estudio de los triángulos.

Consideremos un triángulo ABC y fijémonos en uno de sus vértices; por ejemplo, el vértice C.



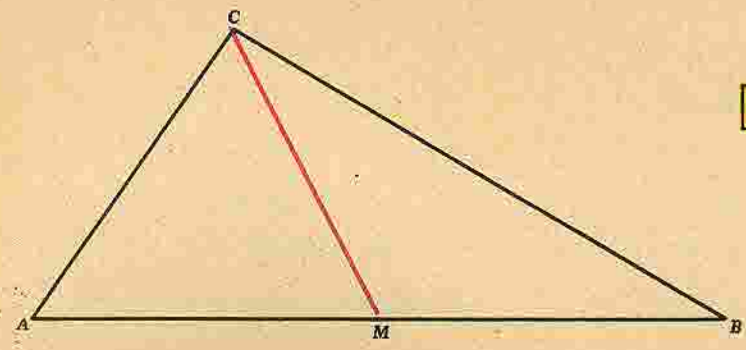
Entre los segmentos que tienen un extremo en C y el otro extremo en la recta AB mencionaremos los siguientes tres:

1. **La altura.** Es el segmento $\overline{CD}$ tal que CD es perpendicular a $\overline{AB}$.



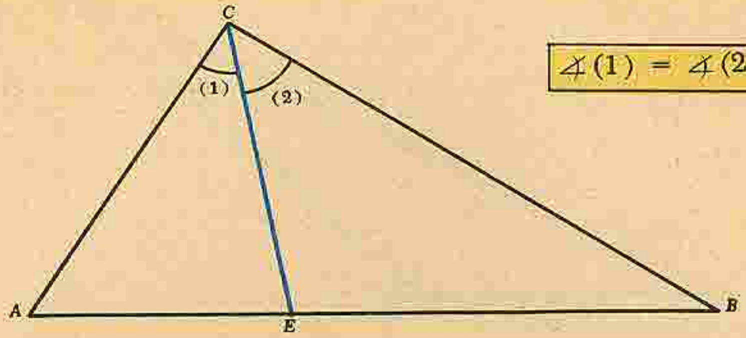
$\boxed{\overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{AB}}$

2. **La mediana.** Es el segmento $\overline{CM}$ tal que M es el punto medio de $\overline{AB}$.



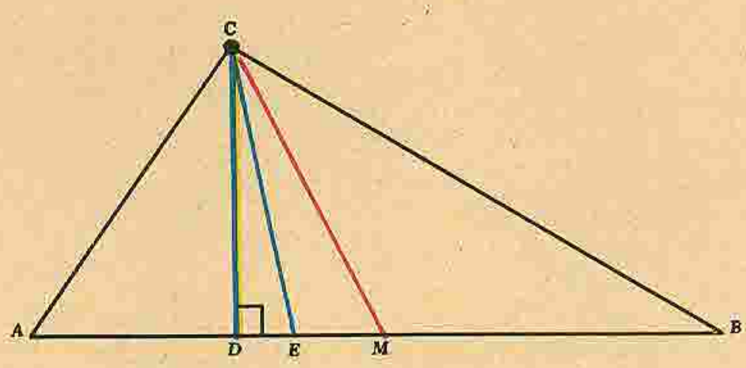
$\boxed{AM = MB}$

3. **La bisectriz.** Es el segmento $\overline{CE}$ tal que los ángulos (1) y (2) que determina son congruentes.

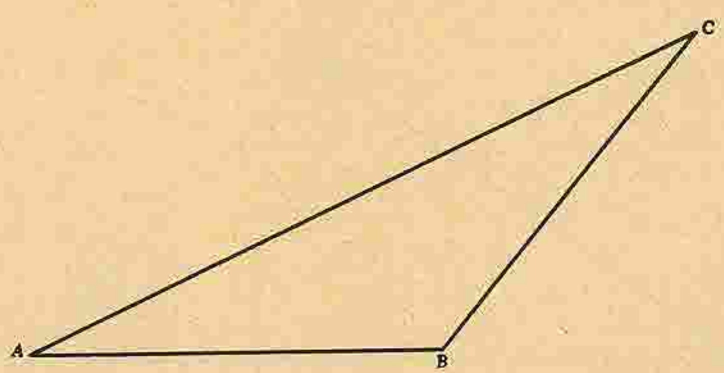


$\boxed{\measuredangle(1) = \measuredangle(2)}$

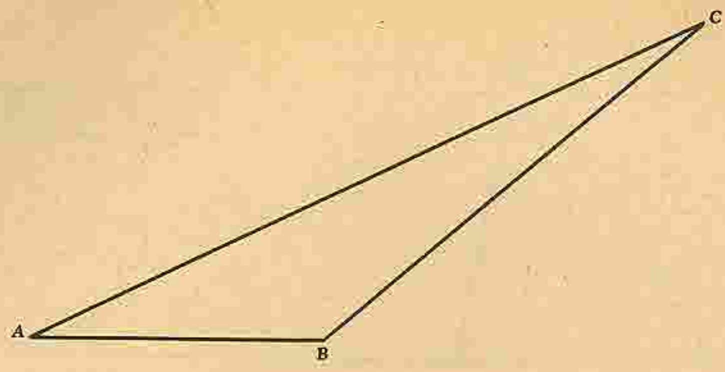
Estos segmentos son, en general, distintos entre sí.



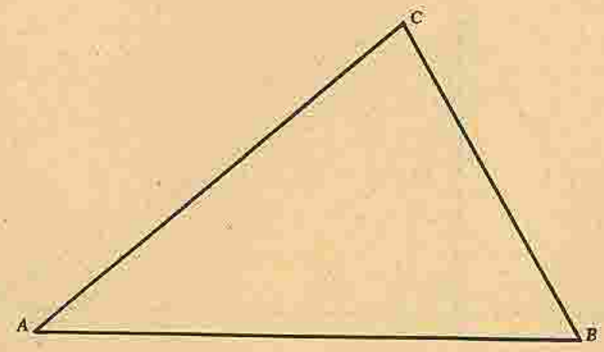
Ejercicio 11. Trace las tres alturas del siguiente triángulo.



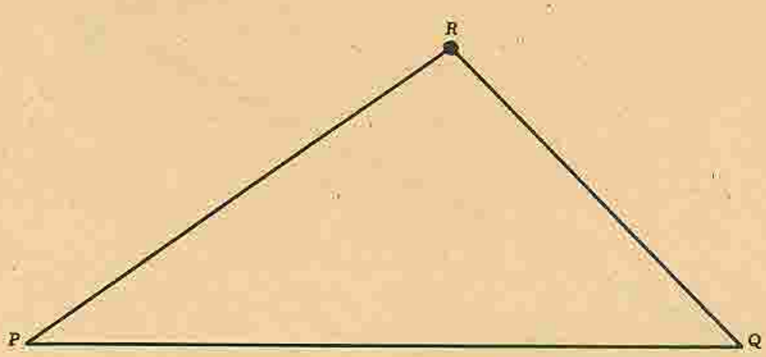
Ejercicio 12. Trace las tres medianas del siguiente triángulo.



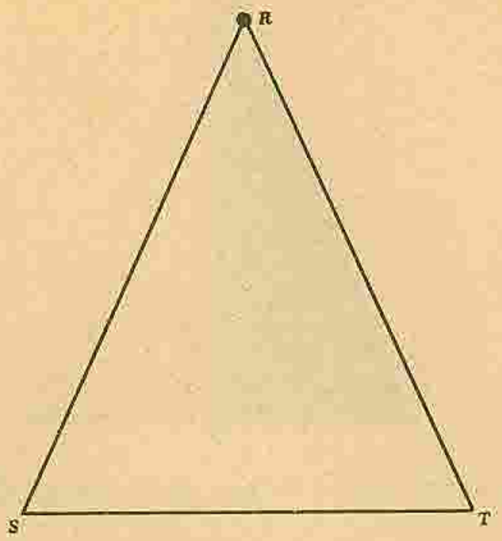
Ejercicio 13. Trace las tres bisectrices del siguiente triángulo.



Ejercicio 14. En el siguiente triángulo trace la altura, la mediana y la bisectriz que parten del punto R.



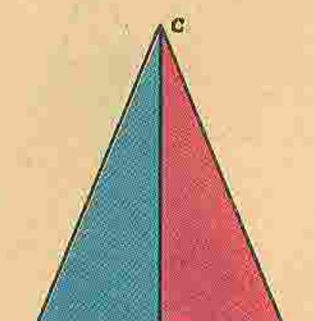
Ejercicio 15. En el siguiente triángulo isósceles trace usted la altura, la mediana y la bisectriz que parten del vértice R.



Habrá usted observado que en el triángulo RST de este último ejercicio la altura, la mediana y la bisectriz, trazadas desde el vértice R, coinciden. Es decir, un mismo segmento es, a la vez, altura mediana y bisectriz.

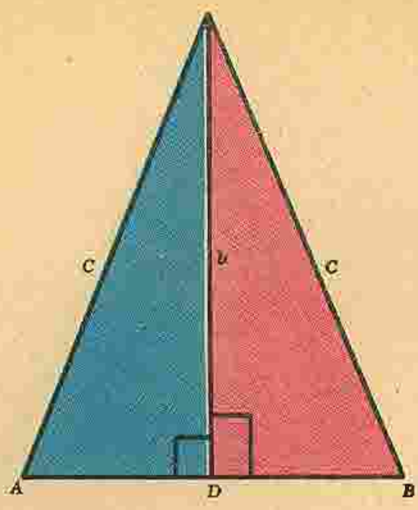
Esto que observamos en el triángulo RST ocurre en todos los triángulos isósceles. Es decir,

Si ABC es un triángulo isósceles cualquiera en el que los lados congruentes son $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$, entonces en ese triángulo la altura que parte de C es también mediana y bisectriz.



Demostración. Como $\overline{CD}$ es la altura, $\overline{CD}$ es perpendicular a $\overline{AB}$ y, por consiguiente, los triángulos ADC y BDC son triángulos rectángulos.

Las hipotenusas de esos dos triángulos miden lo mismo. Llamemos c a esa medida y llamemos b a la medida de la altura $\overline{CD}$, que es cateto de los dos triángulos.



Ahora podemos calcular la medida de los catetos $\overline{AD}$ y $\overline{DB}$:

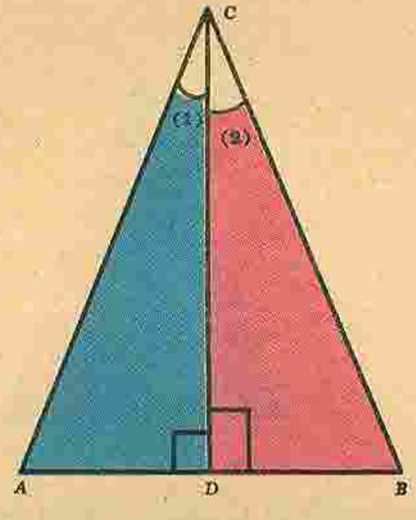
$$AD = \sqrt{c^2 - b^2}$$

$$BD = \sqrt{c^2 - b^2}$$

Como se ve, $\overline{AD}$ y $\overline{DB}$ miden lo mismo. Es decir, D es el punto medio del lado $\overline{AB}$. Por consiguiente, la altura $\overline{CD}$ es también mediana.

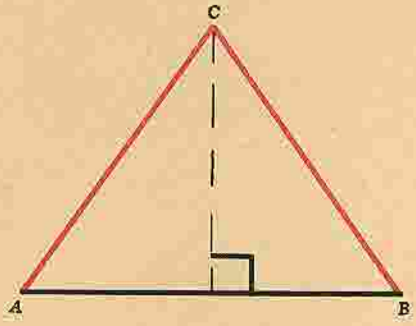
Por otra parte, los dos triángulos ADC y BDC son congruentes. (Pues, por lo que acabamos de ver, los tres lados del triángulo ADC son respectivamente congruentes a los tres lados del triángulo BDC.)

Por lo tanto, sus ángulos respectivos son congruentes. En particular, el ángulo (1) es congruente con el ángulo (2).



Esto significa que la altura $\overline{CD}$ es también bisectriz.

Ejercicio 16. El siguiente triángulo *ABC* es isósceles. Calcule usted la medida de los lados $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$.



$\overline{AC} \cong \overline{BC}$

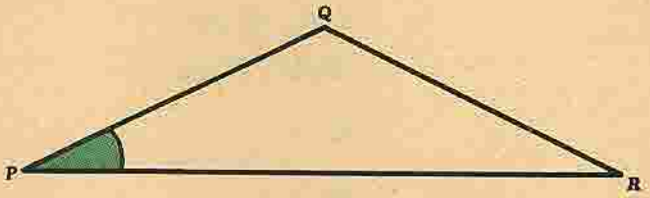
Altura: 35 mm

Base: 50 mm

$AC =$

$BC =$

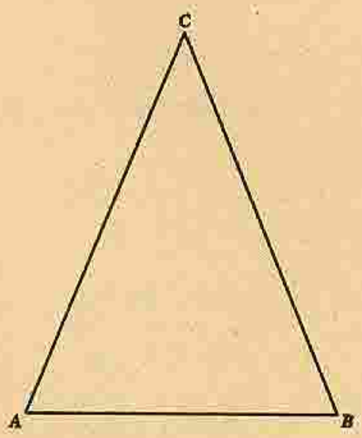
Ejercicio 17. El siguiente es un triángulo isósceles cuyos lados congruentes son $\overline{PQ}$ y $\overline{RQ}$. Calcule la medida de cada uno de sus ángulos.



$\measuredangle PRQ =$

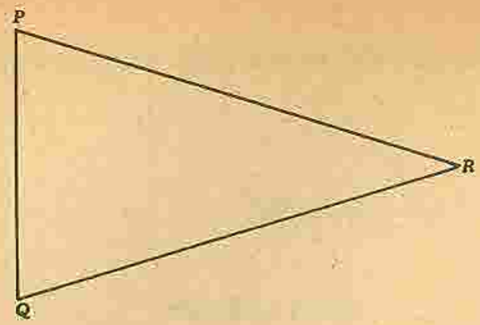
$\measuredangle PQR =$

Ejercicio 18. Usando solamente una regla graduada, trácese la altura que parte de *C* en el siguiente triángulo isósceles.



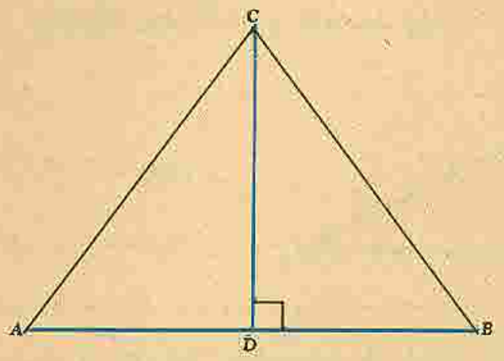
$\overline{AC} \cong \overline{BC}$

Ejercicio 19. Trace usted la altura que parte de *R* en el siguiente triángulo isósceles. (Emplee solamente regla graduada.)



$\overline{PR} \cong \overline{QR}$

Ejercicio 20. Con los datos que se dan, calcule usted el perímetro del siguiente triángulo isósceles.



Base: 12 cm

Altura: 8 cm

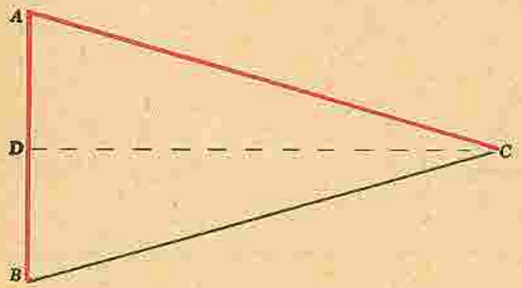
$AC =$

$BC =$

Perímetro =

$\overline{AC} \cong \overline{BC}$

Ejercicio 21. Con los datos que se dan, calcule el área del siguiente triángulo isósceles.



$AC = 13$ cm

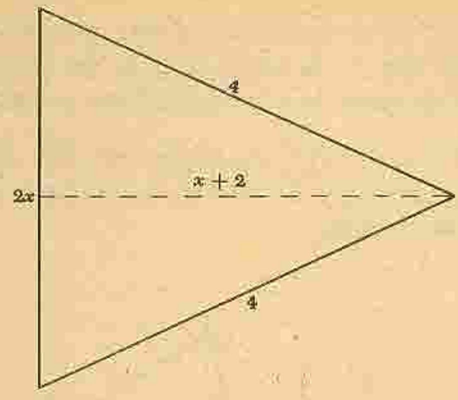
$AB = 7$ cm

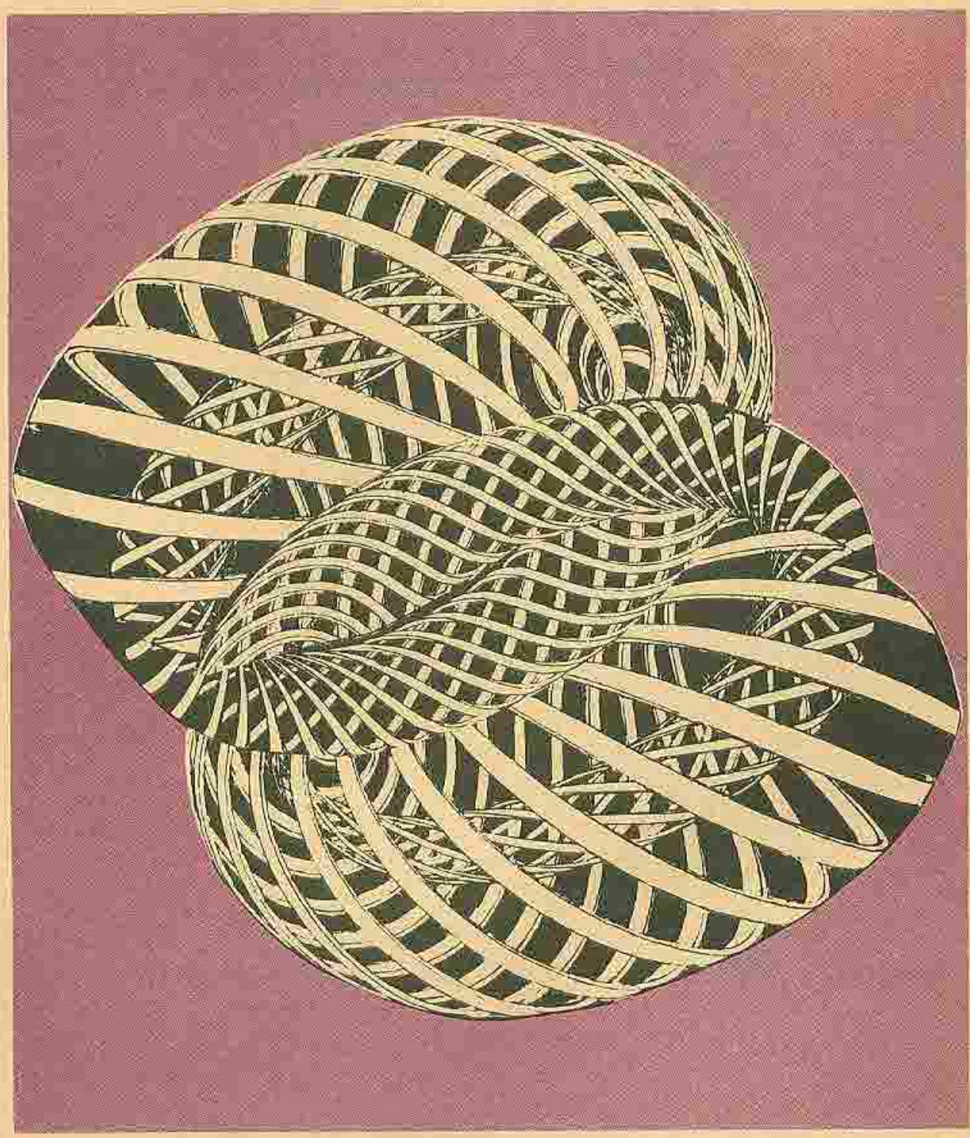
Altura $CD =$

Area =

$\overline{AC} \cong \overline{BC}$

Ejercicio 22. Calcule el valor de x en el siguiente triángulo isósceles.

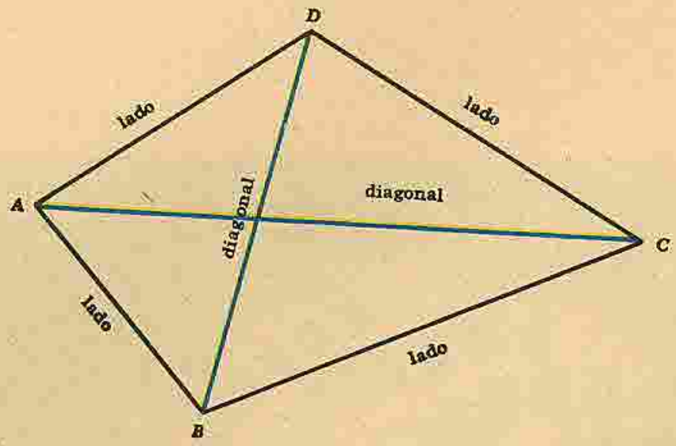




6. Rombos

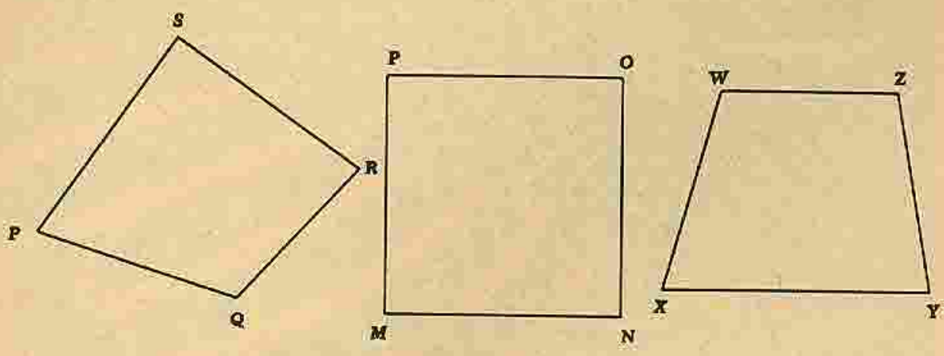
En este párrafo estudiaremos algunas propiedades de las diagonales de los paralelogramos y, en particular, de los rombos. Empezaremos hablando de las diagonales de un cuadrilátero en general.

En un cuadrilátero $ABCD$ los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{DA}$ se llaman los **lados** y los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$, marcados en color, se llaman las **diagonales** del cuadrilátero.



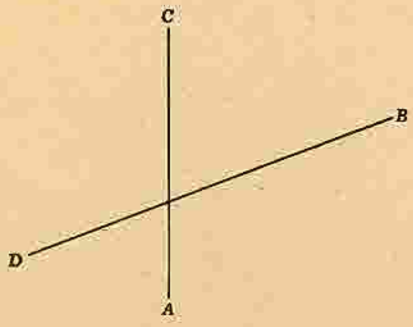
Ejercicio 23.

a) Trace las diagonales de los siguientes cuadriláteros y nómbrelas.



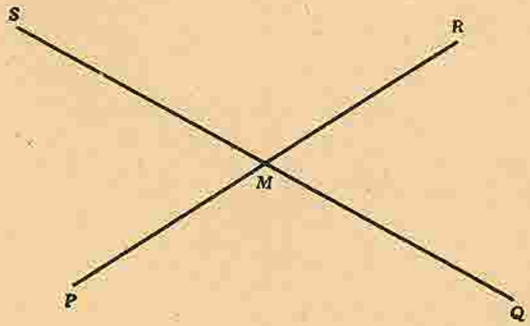
Diagonales $\boxed{\overline{PR}}$

b) $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ son las diagonales de un cuadrilátero. Trace sus lados y nómbrelos.



Lados: $\boxed{\overline{DA}}$

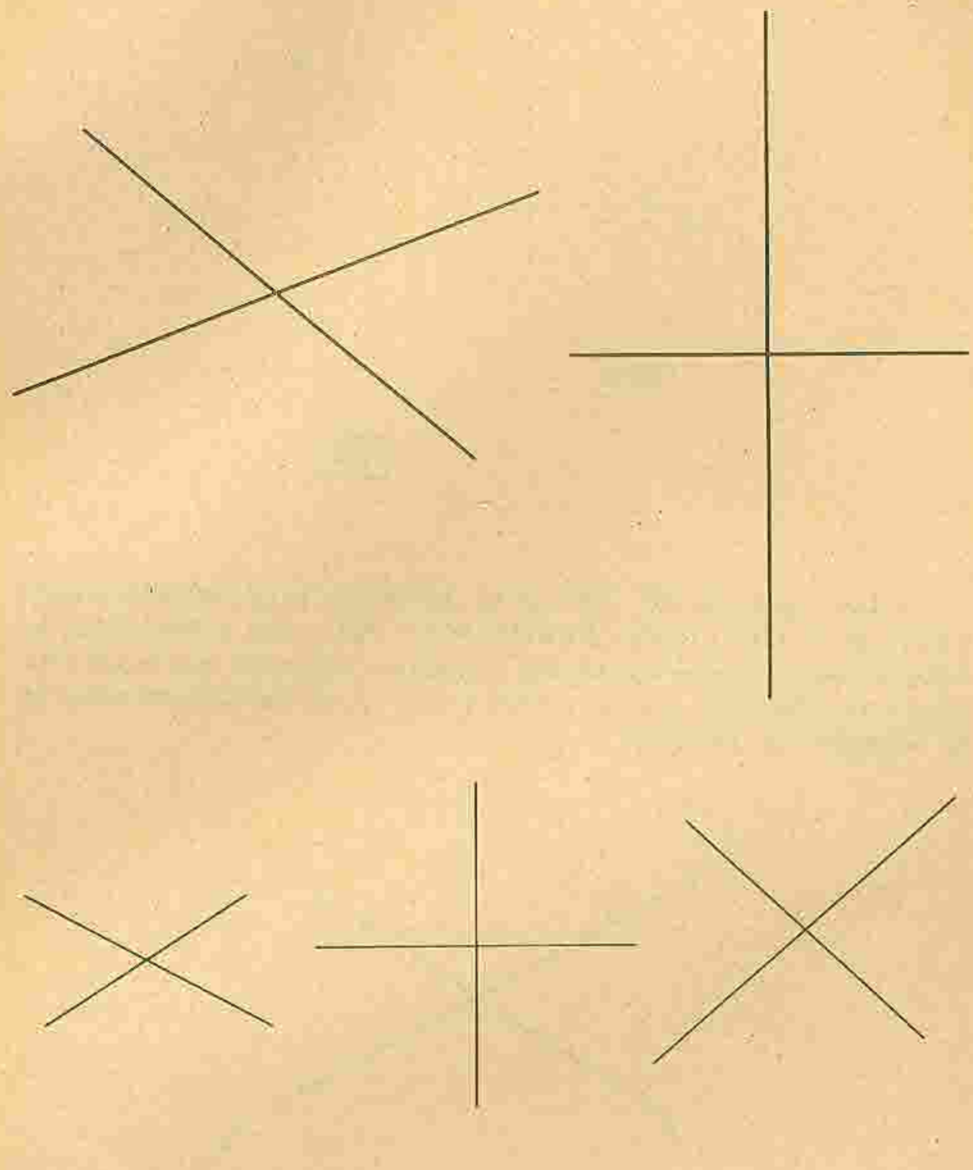
c) Los segmentos $\overline{PR}$ y $\overline{QS}$ son las diagonales de un cuadrilátero y se cortan en su punto medio. Es decir, $PM = MR$ y $QM = MS$. Trace los lados de ese cuadrilátero y, usando escuadras compruebe que es un paralelogramo. (Recuerde que un paralelogramo es un cuadrilátero cuyos lados opuestos son paralelos.)



Lo que acabamos de observar en el inciso c) del ejercicio anterior, no es un hecho fortuito que solamente valga para este caso. Ese resultado es general y podemos enunciarlo en la siguiente forma:

Si las diagonales de un cuadrilátero se cortan en su punto medio entonces el cuadrilátero es un paralelogramo.

Ejercicio 24. Compruebe la validez de la afirmación anterior para los siguientes pares de diagonales. (Todas ellas se cortan en sus puntos medios.)

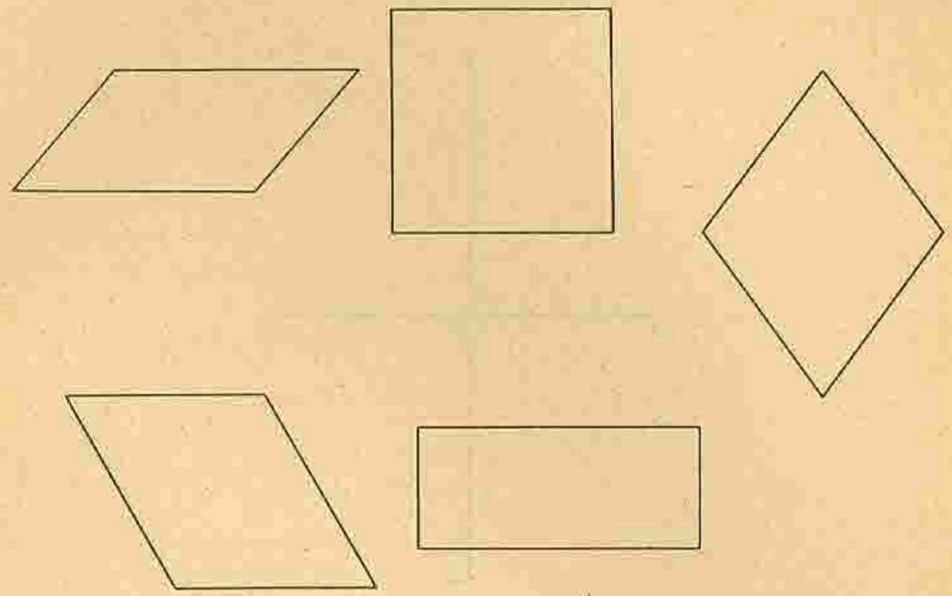


La propiedad inversa de la que acabamos de mencionar es cierta también.

Las diagonales de un paralelogramo se cortan en su punto medio.

Tampoco demostraremos esta propiedad pero podemos ver algunos ejemplos de ella.

Ejercicio 25. Los siguientes cuadriláteros son paralelogramos. Trace las diagonales y compruebe que se cortan en su punto medio.



Acabamos de mencionar dos propiedades sin demostrarlas. Ahora enunciaremos una propiedad que sí vamos a demostrar. Tal propiedad es la siguiente:

> **Si las diagonales de un cuadrilátero se cortan en su punto medio y, además, son perpendiculares entre sí, entonces el cuadrilátero es un rombo.**

(Recordemos que se llama rombo a un cuadrilátero que tiene sus cuatro lados congruentes entre sí.)

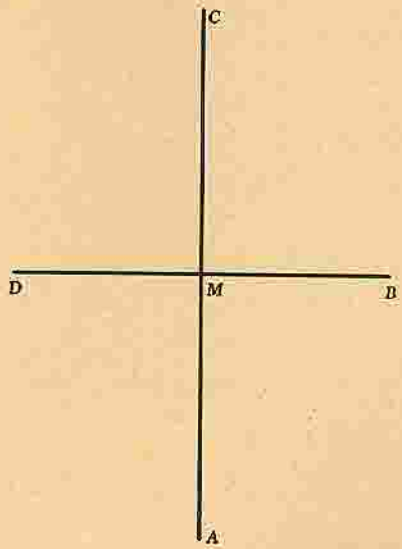
Antes de demostrar esta propiedad efectuemos los siguientes ejercicios.

Ejercicio 26.

a) Las longitudes de dos segmentos perpendiculares entre sí $\overline{PR}$ y $\overline{QS}$ son, respectivamente, 16 y 12 cm. Sabemos además que se cortan en su punto medio (haga un dibujo). ¿Cuánto mide cada uno de los lados del cuadrilátero $PQRS$? ¿Es un rombo?

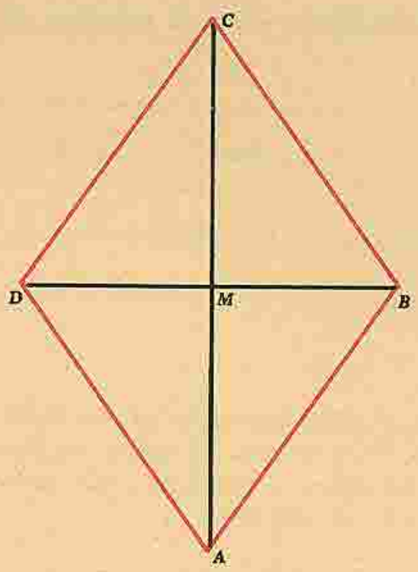
b) Los segmentos $\overline{EG}$ y $\overline{FH}$ son perpendiculares entre sí y se cortan en su punto medio (haga una figura). Si $EG = 10$ mm y $FH = 26$ mm, ¿cuánto miden los lados del cuadrilátero $EFGH$? ¿Puede encontrar EF utilizando el teorema de Pitágoras? ¿Y los demás lados?

Ejercicio 27. Los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ siguientes son perpendiculares entre sí y se cortan en su punto medio (es decir, $AM = MC$ y $BM = MD$). Trace el cuadrilátero $ABCD$ y, usando un compás compruebe que es un rombo.

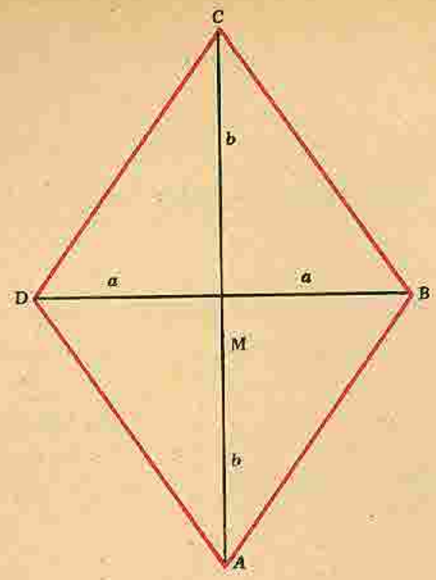


Hagamos ahora la demostración de la propiedad enunciada.

Demostración. Puesto que las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ son perpendiculares entre sí, ellas determinan cuatro triángulos rectángulos.



Además sabemos que esas diagonales se cortan en su punto medio. Esto es, $BM = MD$ (llamemos a a esta medida) y $AM = MC$ (llamemos b a esta medida).



Usando el teorema de Pitágoras podemos ahora calcular la medida de las hipotenusas.

$AB = \sqrt{a^2 + b^2}$

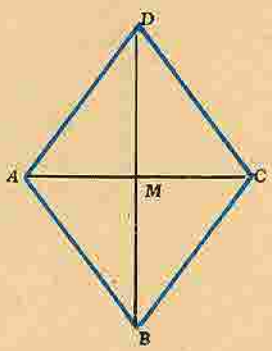
$BC = \sqrt{a^2 + b^2}$

$CD = \sqrt{a^2 + b^2}$

$DA = \sqrt{a^2 + b^2}$

Como vemos, los cuatro lados del cuadrilátero $ABCD$ miden lo mismo. Por lo tanto, ese cuadrilátero es un rombo.

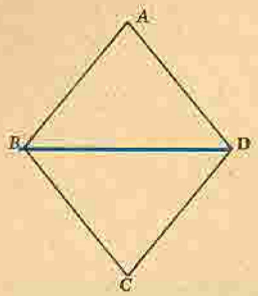
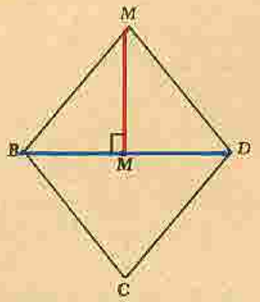
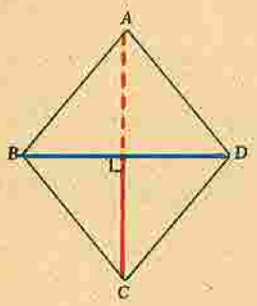
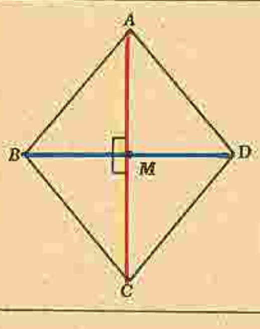
Ejercicio 28. En la siguiente figura, $\overline{AC}$ es perpendicular a $\overline{BD}$, AM es igual a MC y BM es igual a MD. Si el perímetro del rombo $ABCD$ es 100 mm y la diagonal $\overline{AC}$ mide 30 mm, ¿cuánto mide la diagonal $\overline{BD}$? (Utilice el teorema de Pitágoras.)



¿Será también cierta la proposición inversa de la que acabamos de demostrar? Veamos qué dice la propiedad demostrada: "Si las diagonales son perpendiculares entre sí y se cortan en su punto medio, entonces el cuadrilátero es un rombo". La proposición inversa será:

Si un cuadrilátero es rombo, entonces sus diagonales son perpendiculares entre sí y se cortan en su punto medio.

Demostración.

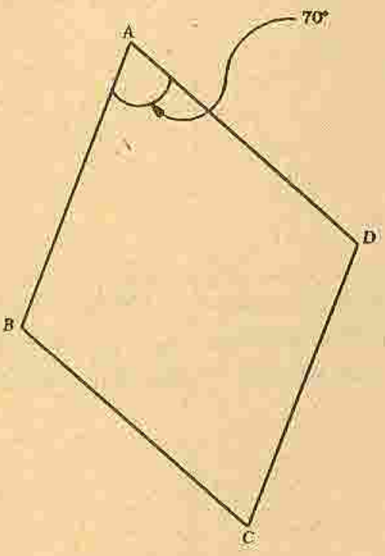
 $\overline{AB} \cong \overline{AD}$ $\overline{CB} \cong \overline{CD}$	Consideremos un rombo cualquiera $ABCD$ y su diagonal $\overline{BD}$. Esta diagonal determina dos triángulos isósceles: el $\triangle ABD$ y el $\triangle BCD$.
	Si en el triángulo ABD trazamos la mediana $\overline{AM}$, encontramos que $\overline{AM}$ es perpendicular a $\overline{BD}$. (Porque esa mediana es también altura.)
	Si en el triángulo BCD trazamos la mediana $\overline{MC}$, ésta resulta perpendicular a $\overline{BD}$. (Porque esa mediana es también altura).
	La unión del segmento $\overline{AM}$ y el segmento $\overline{MC}$ es un segmento y éste es la diagonal AC. (Porque la suma de $\measuredangle BMA$ más $\measuredangle BMC$ es $90° + 90° = 180°$.)

En lo anterior hemos demostrado que las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ son perpendiculares entre sí y que la diagonal $\overline{AC}$ corta $\overline{BD}$ en su punto medio M. En forma análoga se puede demostrar que M es el punto medio de $\overline{AC}$ y, por consiguiente, *las dos diagonales se cortan en su punto medio*. (Que es lo que se quería demostrar.)

Ejercicio 29. Los lados de un rombo miden 50 mm y una de las diagonales mide 40 mm. ¿Cuánto mide la otra diagonal?

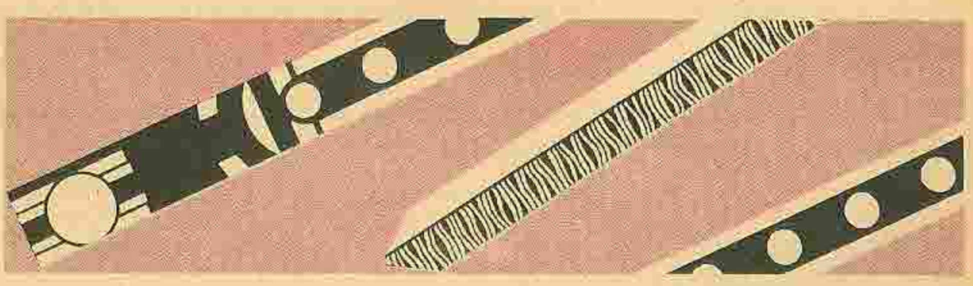
Ejercicio 30. El perímetro de un rombo mide 180 mm y una de las diagonales mide 70 mm. ¿Cuánto mide la otra diagonal?

Ejercicio 31. En el rombo $ABCD$, $\measuredangle A = 70°$. ¿Cuánto miden los demás ángulos?



Ejercicio 32. Si la diagonal de un rombo mide lo mismo que cada uno de los lados, ¿Cuánto mide la otra diagonal?

Ejercicio 33. En un rombo como el anterior, ¿cuánto miden los ángulos del rombo? (Recuerde que en un triángulo equilátero, los tres ángulos son congruentes entre sí.)

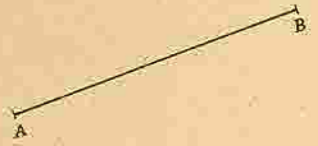


7. Construcciones geométricas

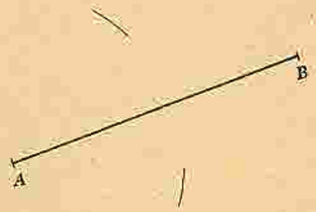
Las propiedades que acabamos de demostrar acerca de los triángulos isósceles y de las diagonales de un rombo nos servirán para justificar las siguientes construcciones geométricas en las que se utiliza solamente una regla no graduada y un compás.

1. *Encontrar el punto medio de un segmento.*

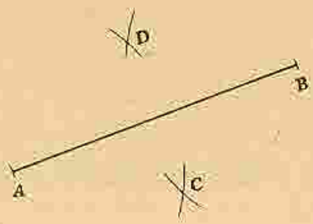
Consideremos el segmento $\overline{AB}$.



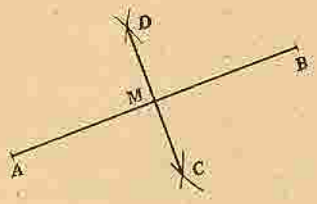
Con una abertura conveniente del compás, y apoyándolo en A, trazamos dos arcos.



Con la misma abertura del compás, y apoyándolo en B, trazamos otros dos arcos que intersequen a los anteriores.



Unimos los puntos C y D obtenidos. La intersección de $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ nos da el punto M.



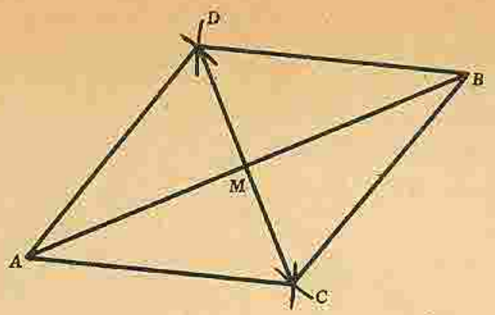
Afirmamos que

El punto M, obtenido con ese procedimiento, es el punto medio del segmento $\overline{AB}$.

Demostración. Puesto que los cuatro arcos los hemos marcado con una misma abertura del compás, resulta que

$$AD = DB = BC = CA.$$

Por lo tanto, al unir los puntos A, B, C y D, se forma un rombo.



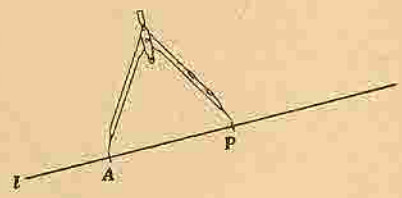
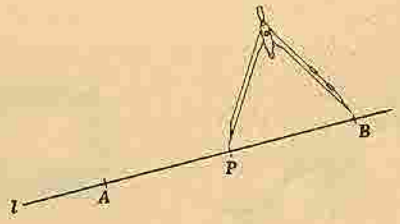
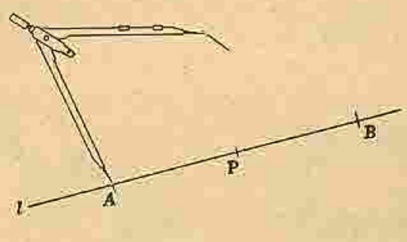
Puesto que las diagonales de un rombo se cortan en su punto medio *M es el punto medio de* $\overline{AB}$. (Que es lo que queríamos demostrar.)

2. *Trazar una perpendicular que pase por el punto medio de un segmento.*

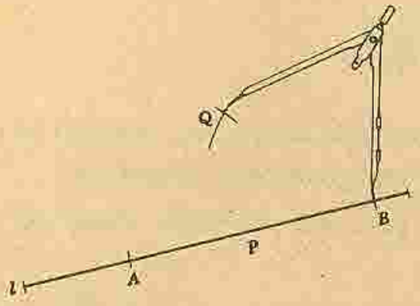
Repetimos exactamente la construcción anterior y la recta $\overleftrightarrow{CD}$ resulta perpendicular al segmento $\overline{AB}$. (Esto es así porque las diagonales de un rombo son perpendiculares entre sí.)

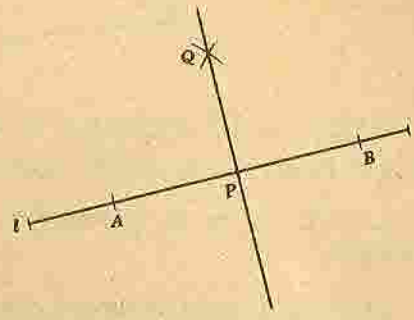
3. *Trazar una perpendicular que pase por un punto dado de una recta.*

<table>
<tr>
<td>Consideremos la recta l y el punto P, siguientes.

</td>
<td>Apoyando el compás en P trazamos un arco que corte a l. Obtenemos un punto A.

</td>
</tr>
<tr>
<td>Apoyando nuevamente el compás en P, y con la misma abertura de antes, trazamos otro arco que corte a l. Obtenemos el punto B.

</td>
<td>Apoyamos ahora el compás en A y, con una abertura conveniente, trazamos un arco.

</td>
</tr>
</table>

Ahora apoyamos el compás en B y, con la misma abertura del paso anterior, marcamos un arco que interseque al ya trazado. Obtenemos el punto Q.	Trazamos la recta $\overleftrightarrow{PQ}$.



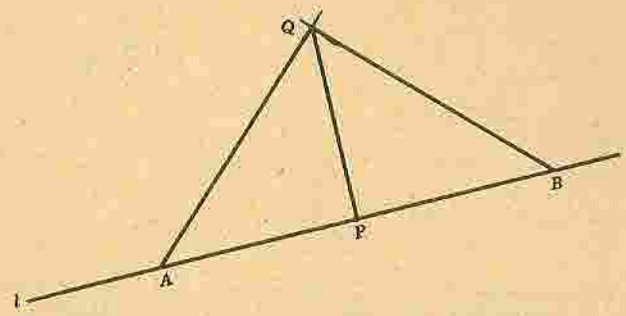


Afirmamos que

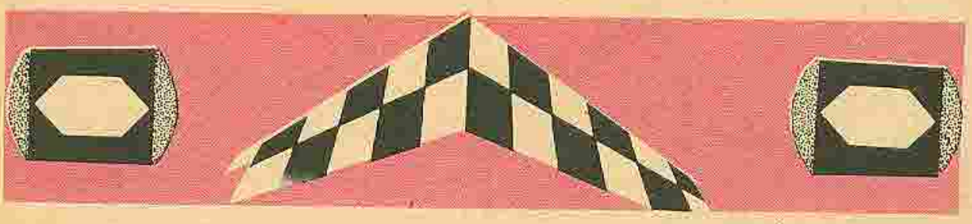
La recta $\overleftrightarrow{PQ}$ *es perpendicular a* l *en* P.

Demostración. La distancia AQ es igual a la distancia BQ. (Pues en los pasos 4 y 5 hemos usado la misma abertura del compás.) Por consiguiente, el triángulo ABQ es isósceles.

El punto P es el punto medio del lado $\overline{AB}$. (Porque en los pasos 2 y 3 hemos usado una misma abertura del compás.)

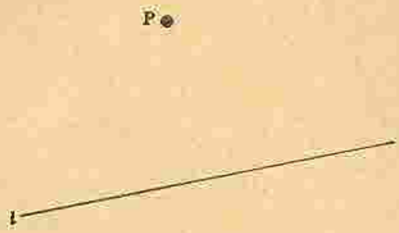


Por lo tanto, $\overline{QP}$ es la mediana. Y como en un triángulo isósceles la mediana y la altura son iguales, resulta que $\overline{QP}$ es también la altura. Es decir, *la recta* $\overleftrightarrow{PQ}$ *es perpendicular a* l. (Que es lo que se quería demostrar.)

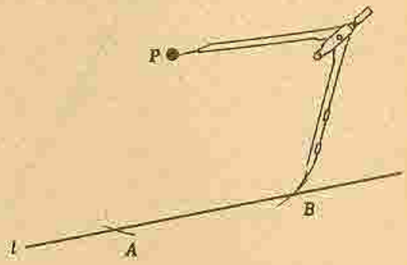


4. *Por un punto P, que no esté en una recta l, trazar una perpendicular a l.*

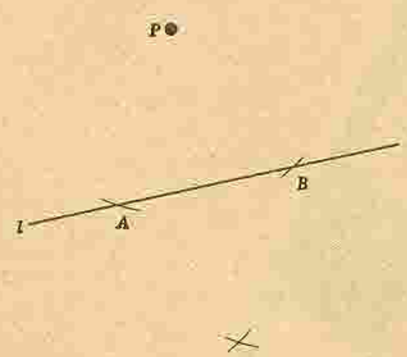
Consideremos el punto P y la recta l.



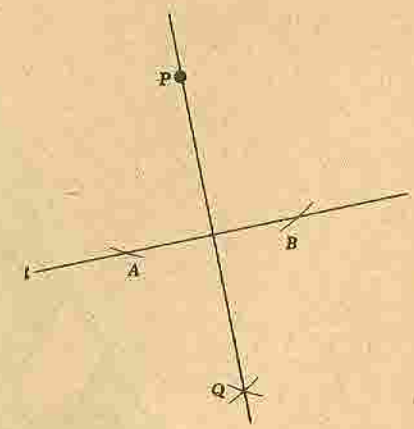
Apoyando el compás en P, y con una misma abertura, trazamos dos arcos que intersequen a l. Obtenemos dos puntos A y B.



Apoyando el compás primero en A y después en B, y con la misma abertura que antes, trazamos dos arcos que se intersequen. Obtenemos el punto Q.



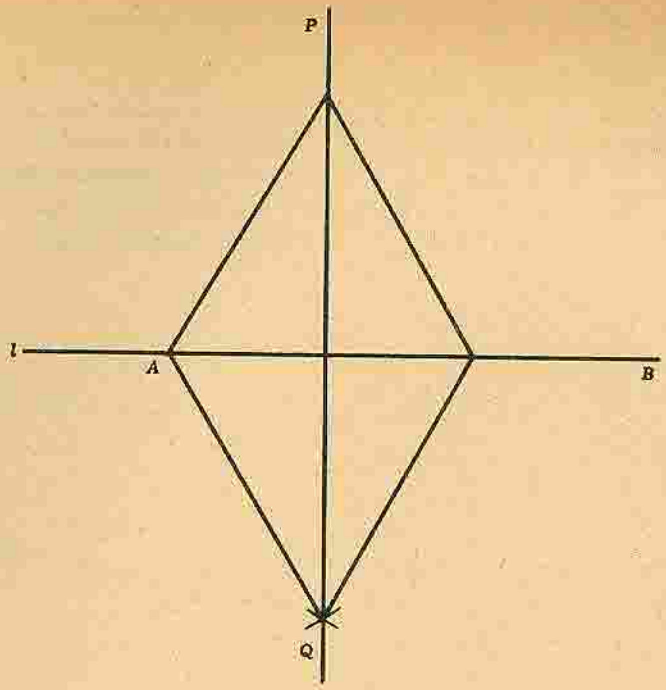
Trazamos la recta $\overleftrightarrow{PQ}$.



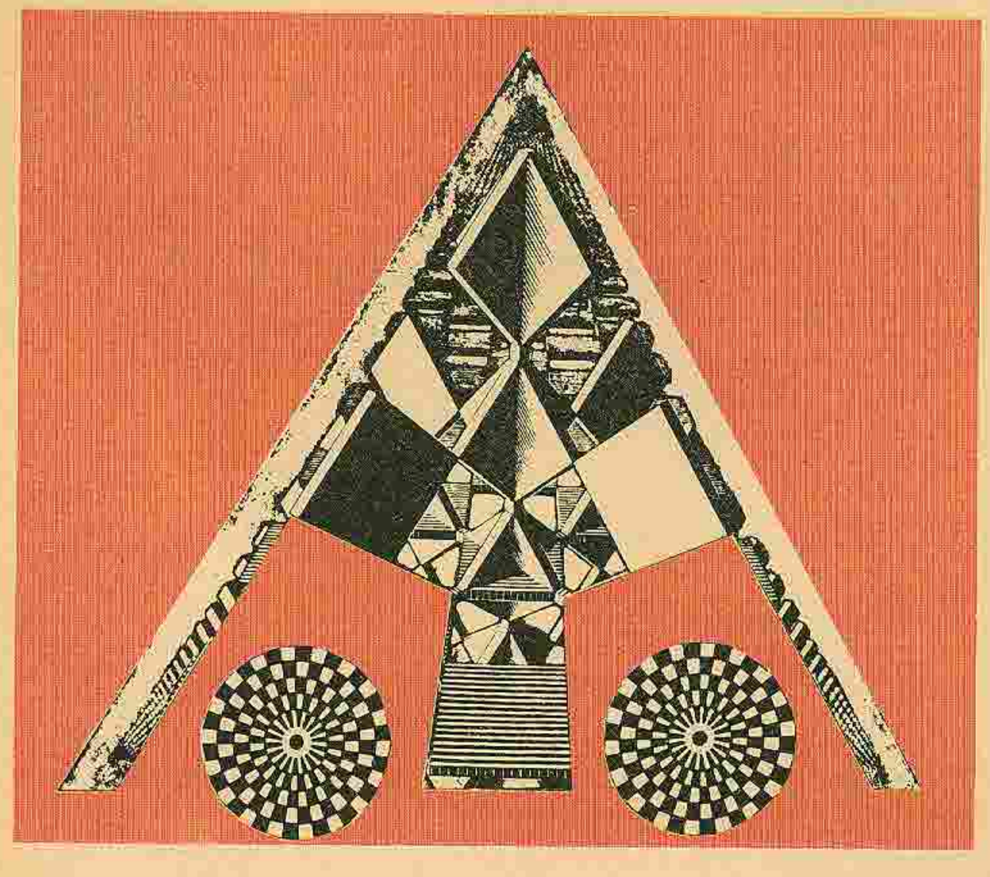
Afirmamos que

La recta $\overleftrightarrow{PQ}$ *trazada es perpendicular a 1.*

Demostración. El cuadrilátero $AQBP$ obtenido al trazar los segmentos $\overline{AQ}$, $\overline{QB}$, $\overline{BP}$ y $\overline{PA}$ es un rombo. (Pues en los pasos 2 y 3 hemos usado la misma abertura del compás.)



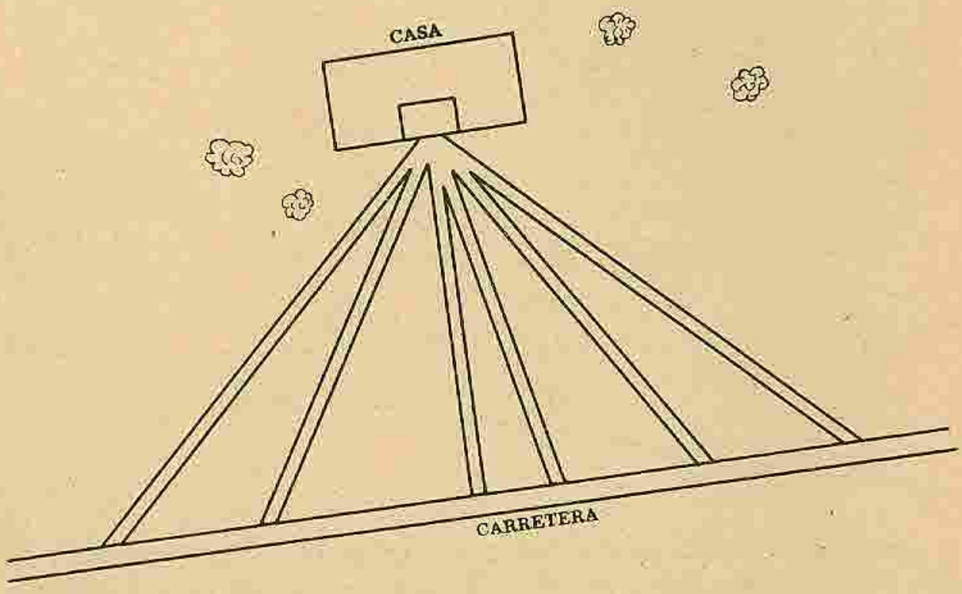
Puesto que las diagonales de un rombo son perpendiculares entre sí, $\overline{PQ}$ es perpendicular a l. (Que es lo que queríamos demostrar.)



8. Distancia de un punto a una recta

Se quiere trazar un camino recto que conecte una casa con la carretera que pasa cerca de ella. Si la carretera es recta en este tramo, ¿cómo trazaría usted dicho camino de modo que fuera lo más corto posible? (Suponemos que el terreno en esta región es plano.)

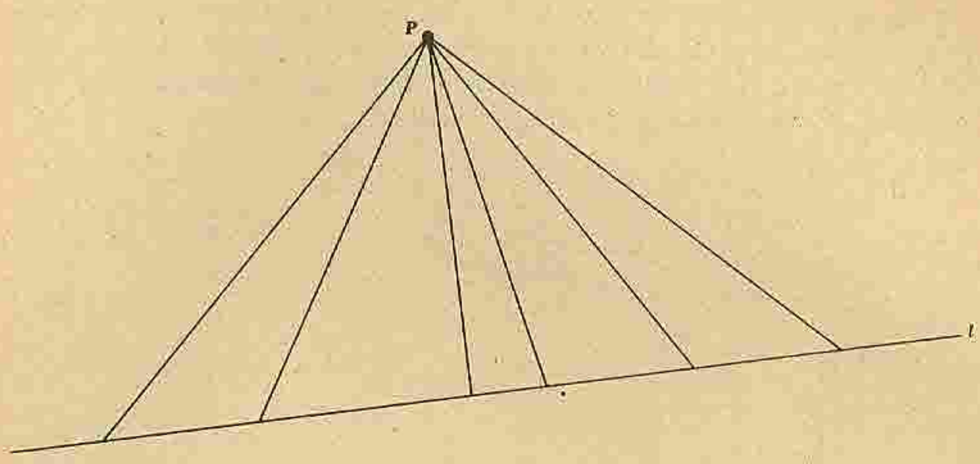
Desde luego, hay muchas posibilidades de comunicar la casa con la carretera mediante un camino recto:



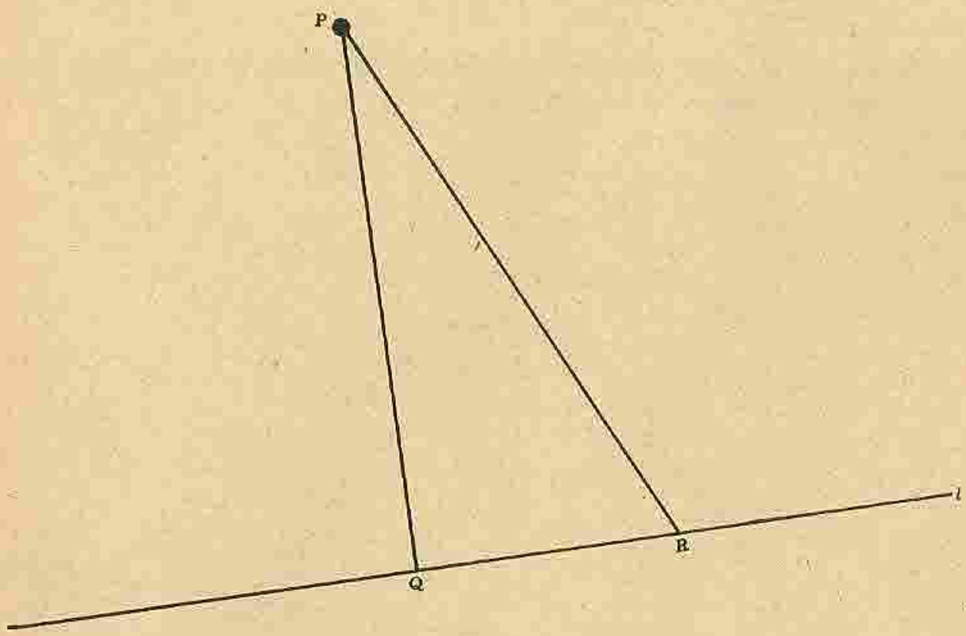
Observe que hay unos más cortos que otros. ¿Cuál será el más corto?

Para resolver este problema podemos plantearlo en la siguiente forma:

Consideremos un punto P y una recta l que no contenga al punto. De todos los segmentos que tienen un extremo en P y el otro en l, ¿habrá alguno que mida menos que todos los demás? ¿Cuál será este segmento?



De todos los segmentos que se puedan trazar, tomemos el segmento $\overline{PQ}$, perpendicular a l y otro segmento cualquiera, por ejemplo, $\overline{PR}$. De esta manera, los puntos P, Q, R determinarán un triángulo rectángulo cuya hipotenusa será el segmento $\overline{PR}$.



Ahora bien, como en todo triángulo rectángulo la longitud de la hipotenusa es mayor que la longitud de cualquiera de los catetos, tenemos que

$$PR > PQ$$

Por lo tanto, podemos afirmar que

El segmento más corto que va de P a la recta l es el segmento perpendicular a l.

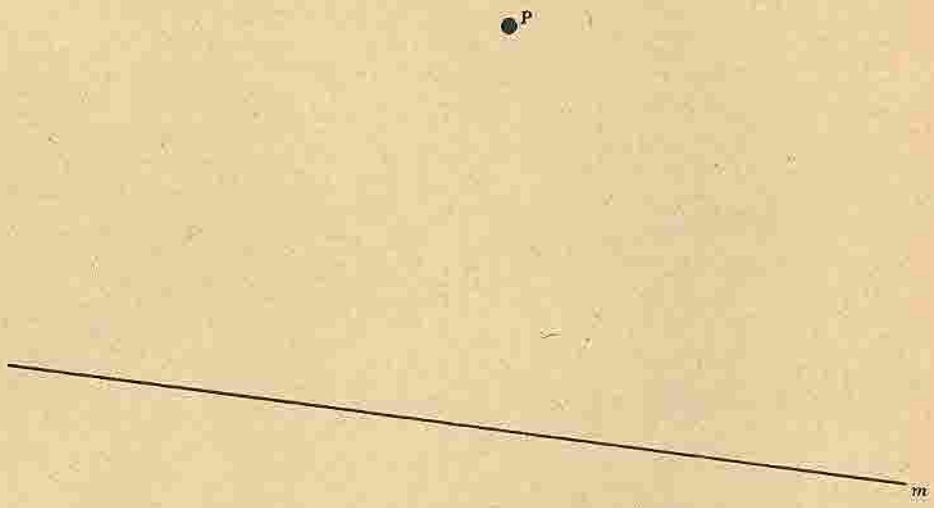
Así entonces, el camino más corto que comunicará la casa con la carretera será el camino que es perpendicular a dicha carretera.

En general.

El segmento más corto que va de un punto a una recta es el segmento perpendicular a ella.

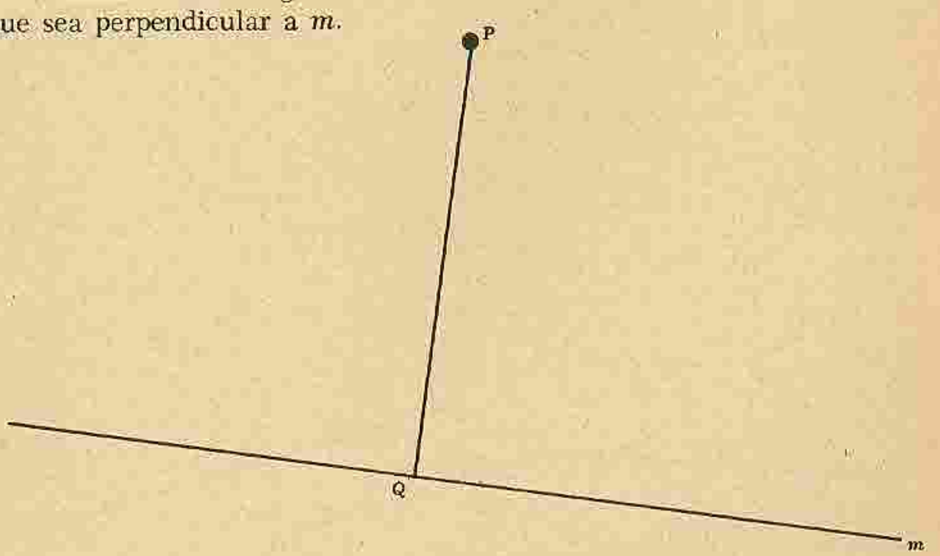
A la longitud de este segmento se le llama la *distancia del punto a la recta*.

Ejemplo. Tomemos el punto P y la recta m, siguientes:

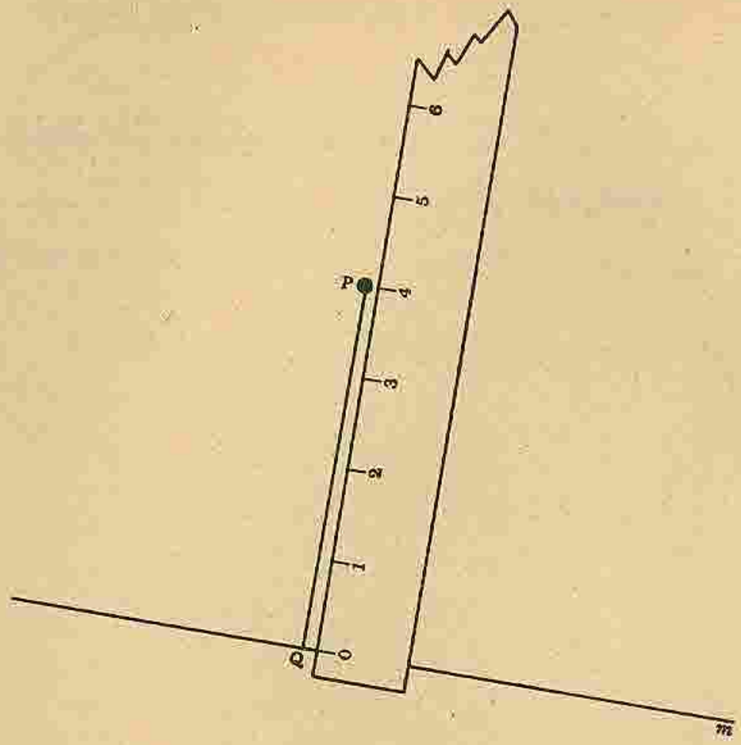


La distancia de P a m se encuentra de la siguiente manera:

1. Trazamos un segmento $\overline{PQ}$ que sea perpendicular a m.



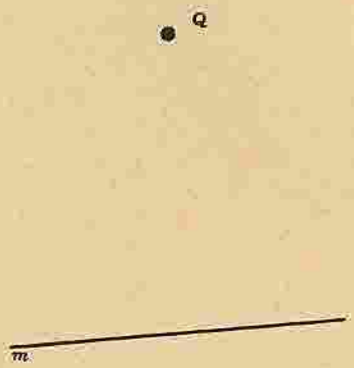
2. Medimos el segmento $\overline{PQ}$. Su medida es la distancia del punto P a la recta m.



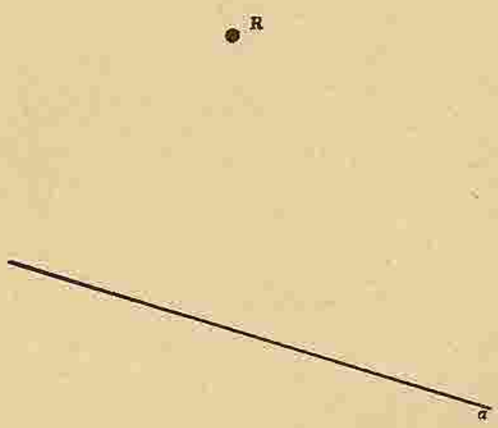
(La distancia de P a m es 4 centímetros.)

Ejercicio 34. En cada inciso, encuentre la distancia del punto a la recta.

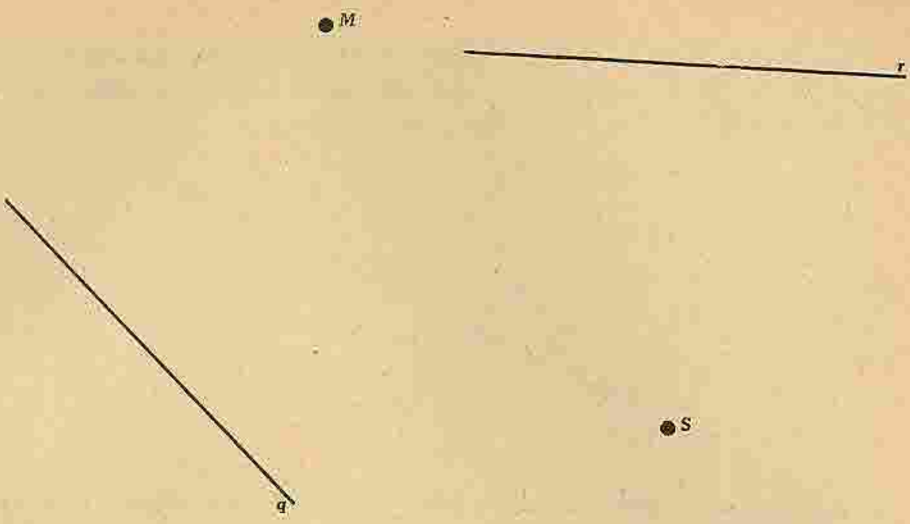
a)

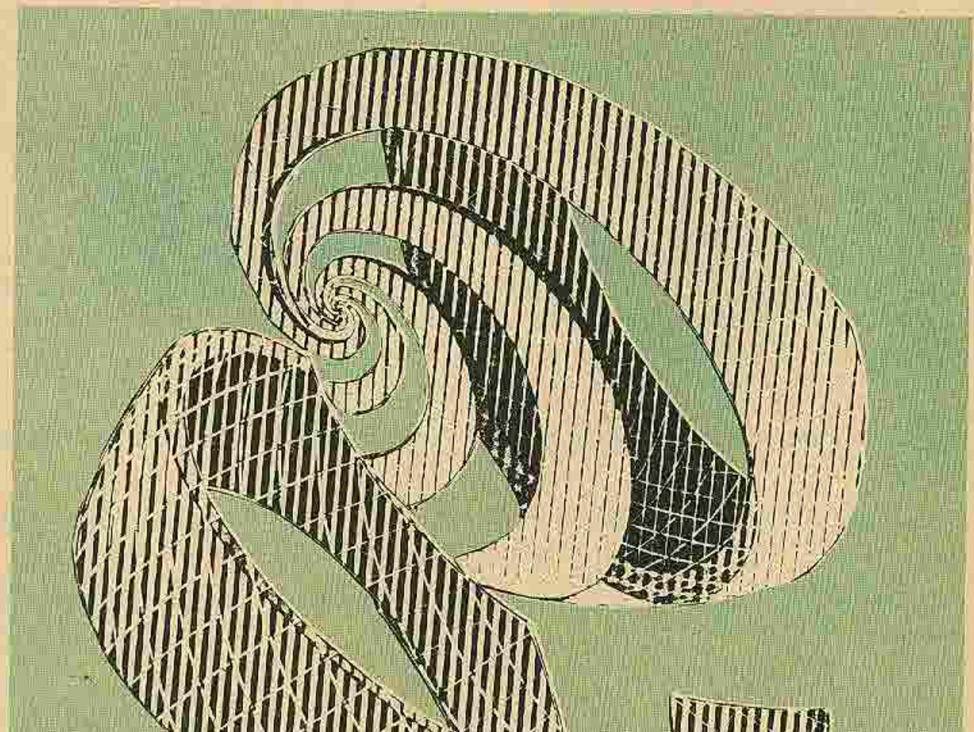


b)



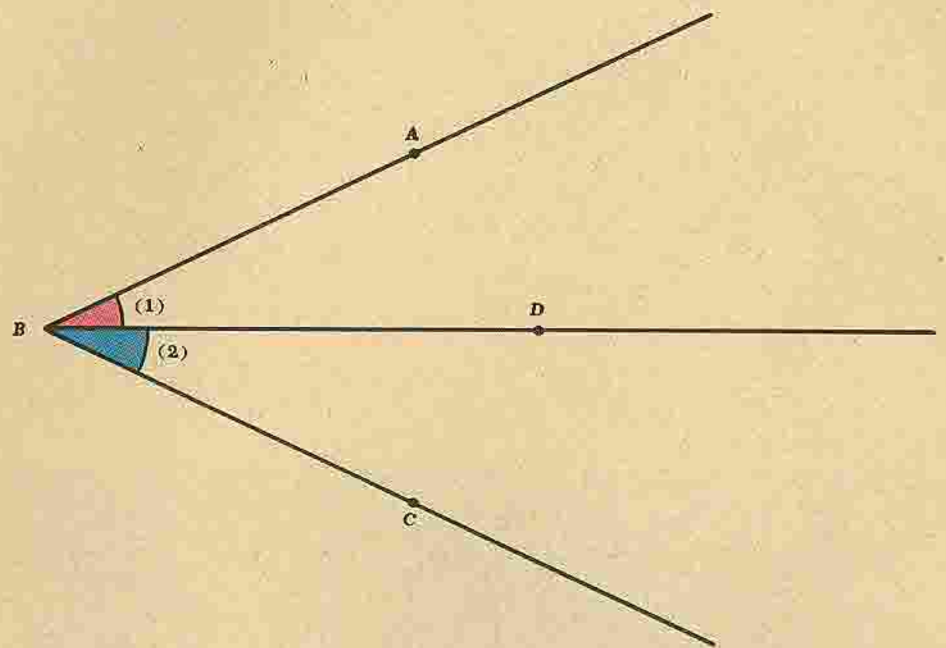
c) d)





9. Bisectrices

Ya en párrafos anteriores hemos hablado de las bisectrices de un triángulo. Además usted ya está familiarizado con el concepto de bisectriz de un ángulo. Observe la siguiente figura:



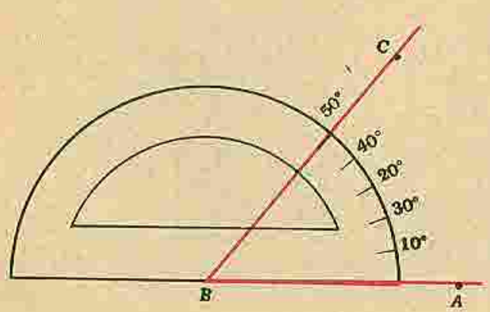
La bisectriz $\overrightarrow{BD}$ del ángulo $< ABC$ es la semirrecta que determina dos ángulos congruentes: el ángulo (1) y el ángulo (2). La medida de cada uno de estos ángulos es la mitad de la medida del ángulo ABC dado. Esto es,

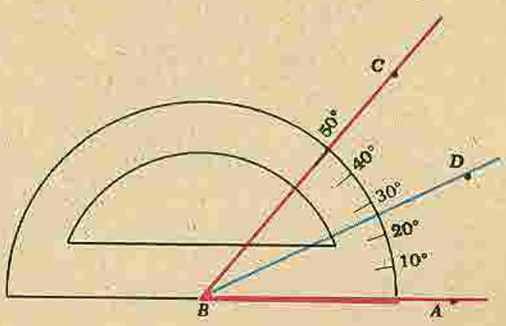
$$\measuredangle(1) = \measuredangle(2) = \tfrac{1}{2} \measuredangle ABC$$

A continuación veremos algunos procedimientos para trazar la bisectriz de un ángulo.

Procedimiento 1. Podemos trazar la bisectriz de un ángulo ABC usando el transportador de la siguiente manera:

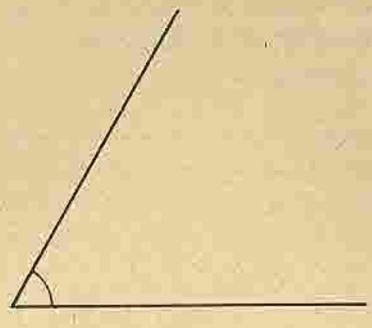
Medimos el ángulo dado y después trazamos un ángulo que mida la mitad.



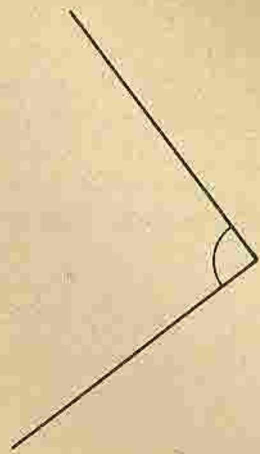


Ejercicio 35. Utilizando el transportador, trace las bisectrices de los siguientes ángulos.

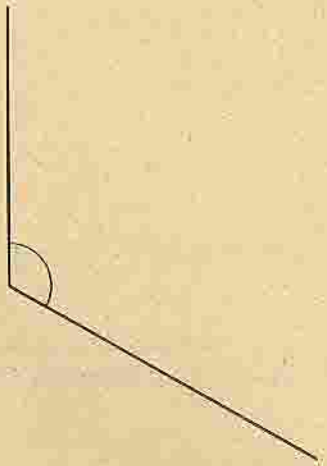
a)



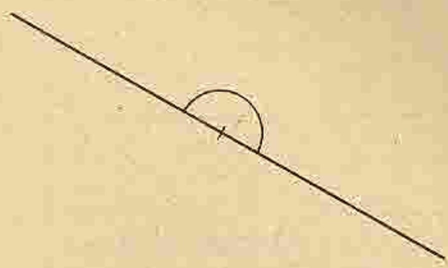
b)



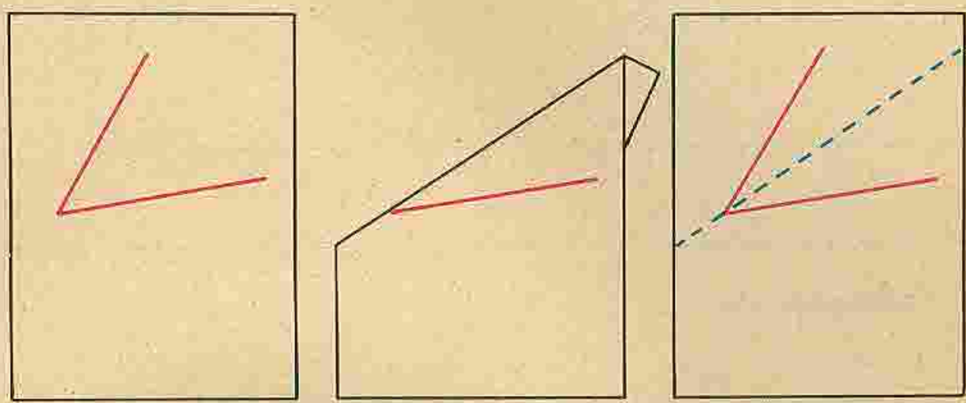
c)



d)



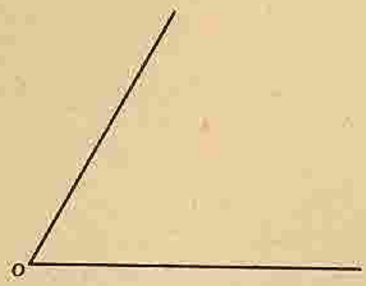
Procedimiento 2. Otro método consiste en doblar el papel de tal modo que el doblez pase por el vértice del ángulo y que, una vez doblado el papel, los dos rayos que forman el ángulo se encimen. El doblez determina la semirrecta bisectriz.



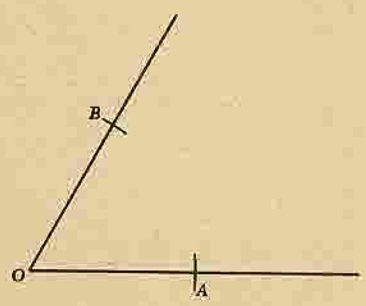
Ejercicio 36. Copie los ángulos del ejercicio anterior en un papel transparente y doblándolo encuentre las bisectrices. Compare los resultados obtenidos aquí y en el ejercicio anterior.

Procedimiento 3. También se puede trazar la bisectriz de un ángulo usando compás y regla no graduada. Este procedimiento está basado en las propiedades del rombo, que ya estudiamos antes.

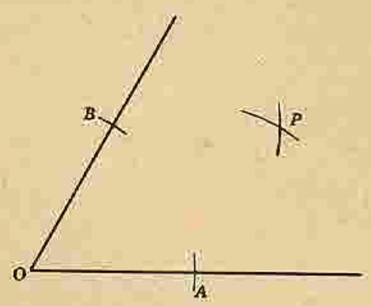
Consideremos el siguiente ángulo O.



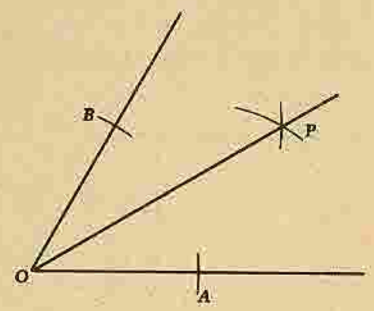
Apoyando el compás en el vértice O, trazamos dos arcos con una misma abertura. Obtenemos los puntos *A* y *B*.



Con la misma abertura usada en el paso anterior, y apoyando el compás primero en *A* y después en *B*, trazamos dos arcos que se intersequen. Obtenemos un punto P.



Trazamos la semirrecta *OP*.

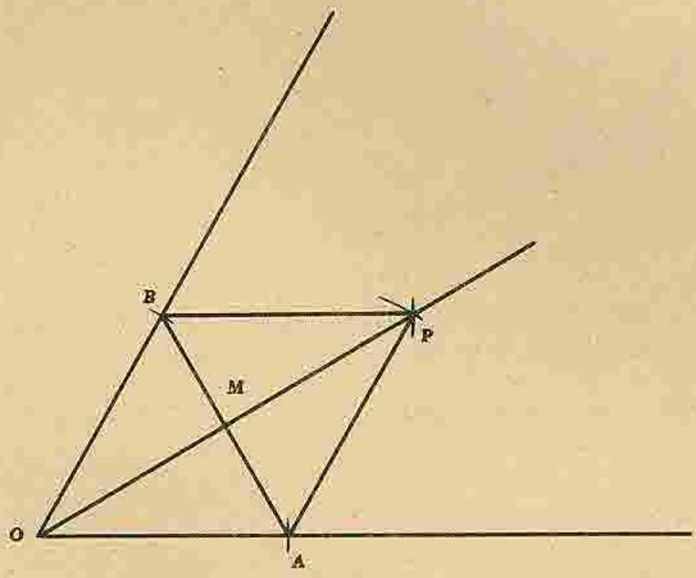


Afirmamos que:

La semirrecta $\overrightarrow{OP}$, así obtenida, es la bisectriz del ángulo $< AOB$.

Demostración. Si trazamos los segmentos $\overline{AP}$ y $\overline{BP}$, obtenemos un rombo $AOBP$. (Porque los cuatro lados se han marcado con una misma abertura del compás.)

Si trazamos la diagonal $\overline{AB}$, tenemos entonces que $\overline{OP}$ es perpendicular a $\overline{AB}$. (Pues las diagonales de un rombo son perpendiculares entre sí.)



Si observamos ahora el triángulo $\triangle AOB$, notamos que es isósceles. (¿Por qué?)

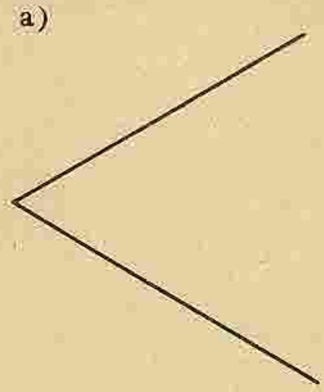
En ese triángulo el segmento $\overline{OM}$ es altura. (Porque $\overline{OM}$ es perpendicular a $\overline{AB}$.)

Esa altura $\overline{OM}$ también es bisectriz del triángulo $\triangle AOB$. (¿Por qué?)

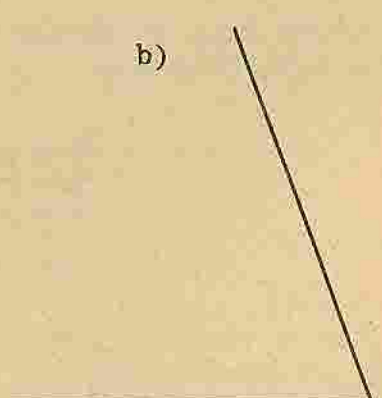
Por todo lo anterior, concluimos que $\overrightarrow{OP}$ es bisectriz del ángulo $< AOB$. (Que es lo que se quería demostrar.)

Ejercicio 37. Utilizando compás y regla, trace la bisectriz de cada ángulo.

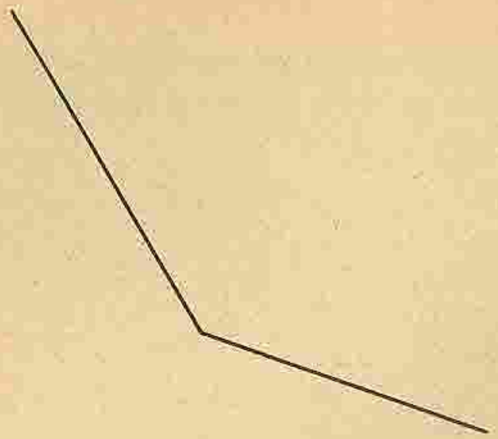
a)

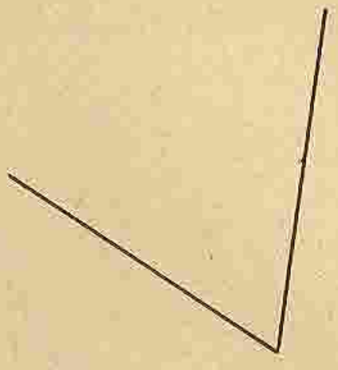


b)



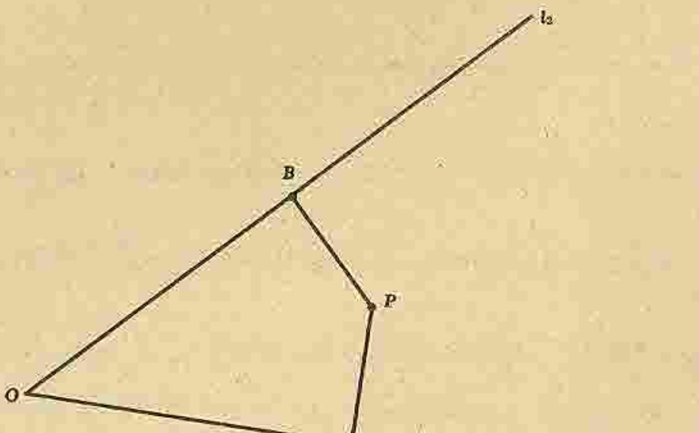
c) d)





Veremos ahora cómo caracterizar la bisectriz de un ángulo utilizando el concepto de distancia de un punto a una recta.

Observemos la siguiente figura:



En esta figura se tiene que la distancia de P a l_1 es igual que la distancia de P a l_2. Es decir,

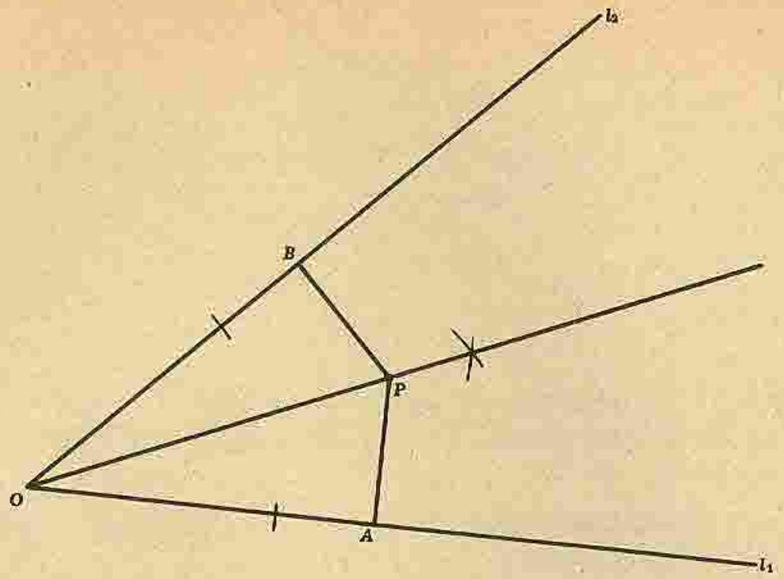
$\overline{PA}$ es perpendicular a l_1

$\overline{PB}$ es perpendicular a l_2

y $AP = BP$

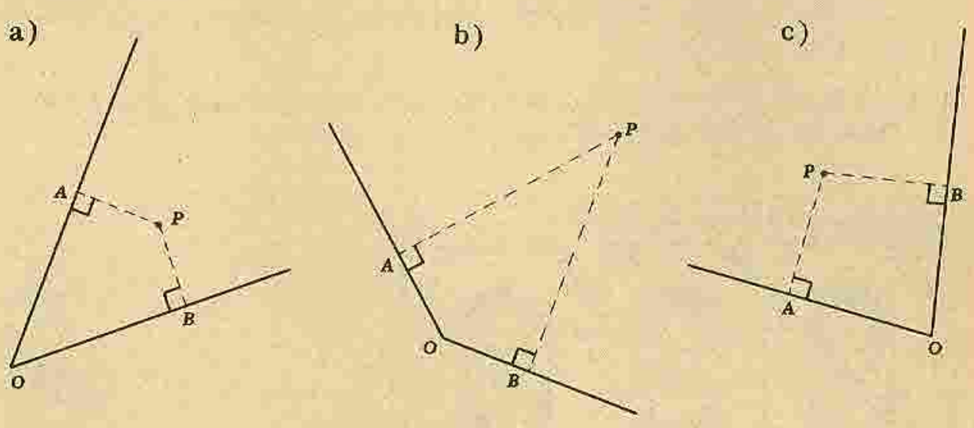
Esto se acostumbra mencionar diciendo que P *equidista de los dos lados del ángulo* $< AOB$ ("equidista" significa "está en la misma distancia").

Tracemos la bisectriz del ángulo



Observamos que, en este caso, P está en la bisectriz.

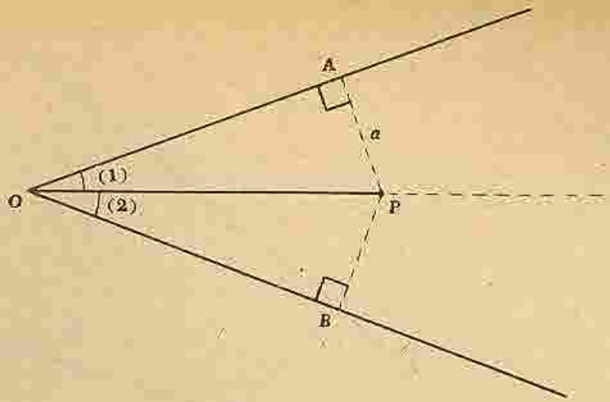
Ejercicio 38. En los tres incisos siguientes, el punto P equidista de los lados del ángulo respectivo. Trace la bisectriz de cada ángulo y vea si ésta pasa por P.



En todos los ejemplos anteriores hemos observado que P está en la bisectriz. Esta propiedad es cierta en general y lo demostraremos usando el teorema de Pitágoras.

Si un punto P equidista de los lados de un ángulo, entonces P está en la bisectriz de dicho ángulo.

Demostración. Consideremos un ángulo cualquiera y un punto P que equidiste de sus lados. Tracemos el segmento $\overline{OP}$.



Con esto determinamos dos triángulos $\triangle AOP$ y $\triangle BOP$ que son triángulos rectángulos, porque $\overline{PA}$ es perpendicular a $\overline{OA}$ y $\overline{PB}$ es perpendicular a $\overline{OB}$.

En esos dos triángulos llamamos c a la medida de $\overline{OP}$ y llamamos a a la medida de $\overline{AP}$ y a la medida de $\overline{BP}$.

Si calculamos la medida de los catetos $\overline{AO}$ y $\overline{BO}$, encontramos que:

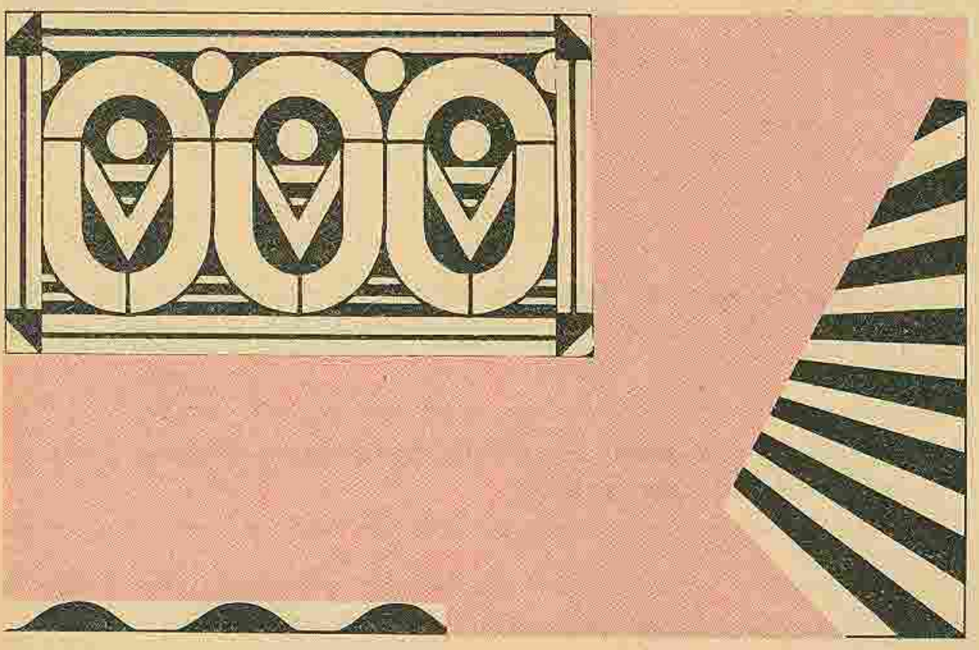
$$AD = \sqrt{c^2 - a^2}$$

y

$$BO = \sqrt{c^2 - a^2}$$

Por lo tanto, los dos triángulos tienen sus tres lados respectivamente congruentes. Luego sus ángulos respectivos son también congruentes. En particular, $\measuredangle(1) = \measuredangle(2)$.

En consecuencia, $\overrightarrow{OP}$ es la bisectriz del ángulo y P está en esa bisectriz. (Que es lo que queríamos demostrar.)

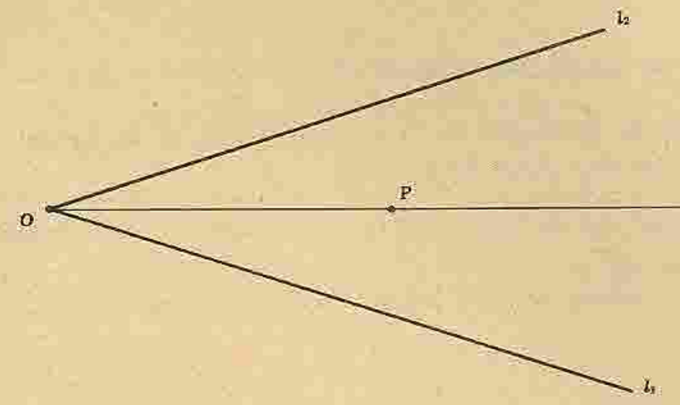


También es cierto que:

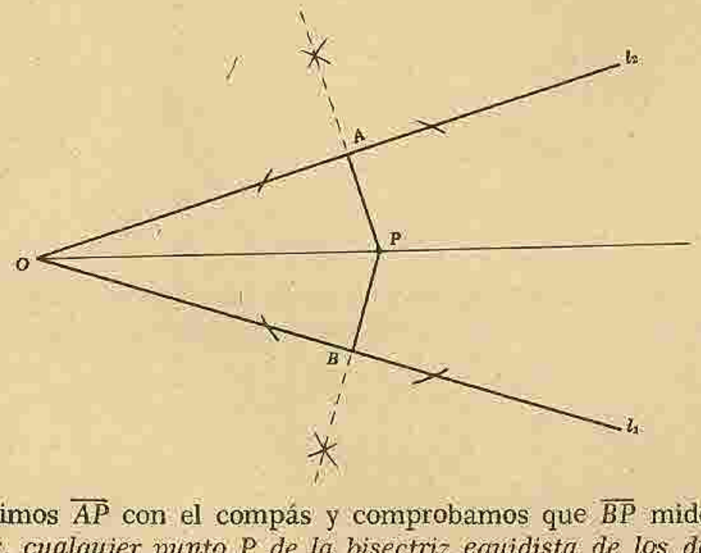
Cualquier punto de la bisectriz de un ángulo equidista de los dos lados del ángulo.

Omitiremos la demostración de esto. Simplemente lo ilustraremos en el ejemplo y en los ejercicios siguientes.

Ejemplo. Consideremos un ángulo, su bisectriz y un punto cualquiera en ella, digamos P.



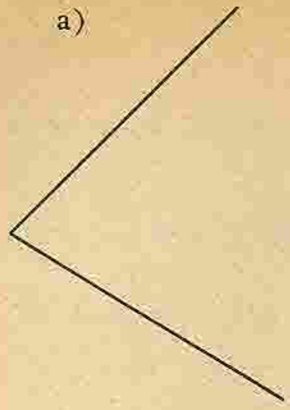
Para medir la distancia de P a l_1 trazamos desde P una perpendicular a l_1. Lo mismo hacemos para encontrar la distancia de P a l_2.



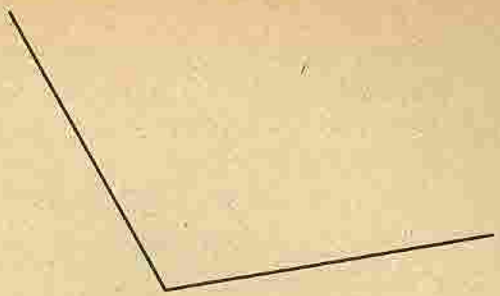
Medimos $\overline{AP}$ con el compás y comprobamos que $\overline{BP}$ mide lo mismo. Es decir, *cualquier punto P de la bisectriz equidista de los dos lados del ángulo.*

Ejercicio 39. En cada inciso trace primero la bisectriz del ángulo. Tome un punto cualquiera en la bisectriz. Después encuentre la distancia de dicho punto a cada uno de los lados y compruebe que es la misma. Es decir, cualquier punto de la bisectriz equidista de los dos lados del ángulo.

a)



b)

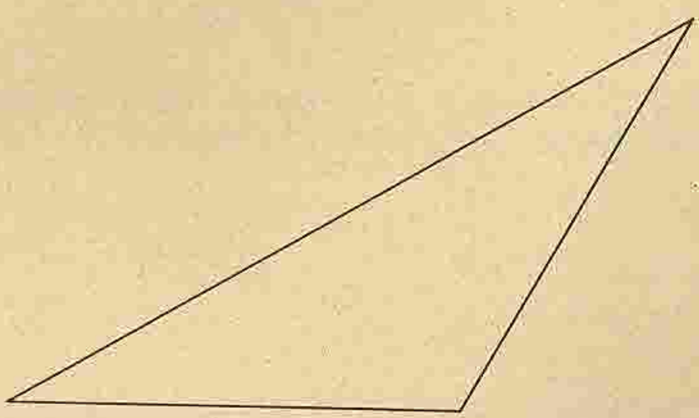


Podemos enunciar las dos proposiciones anteriores diciendo:

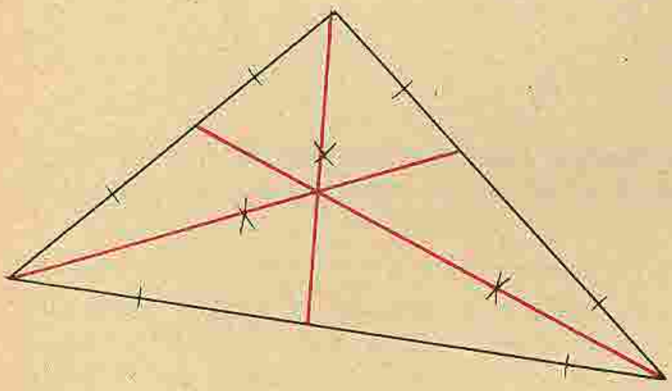
> **La bisectriz de un ángulo es el conjunto de todos los puntos que equidistan de los dos lados del ángulo.**

Veremos ahora una propiedad de las bisectrices de un triángulo.

Ejercicio 40. Trace las tres bisectrices del siguiente triángulo.



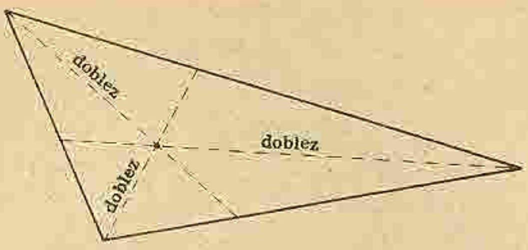
En este ejercicio habrá usted observado que *las tres bisectrices se cortan en un mismo punto*. Observe la misma propiedad en otro triángulo:



> **Las bisectrices se cortan en un punto**

¿Será cierta esta propiedad para cualquier triángulo? Podemos hacer más experimentos.

Ejercicio 41. Recorte un triángulo de papel y, doblándolo convenientemente, encuentre las tres bisectrices.

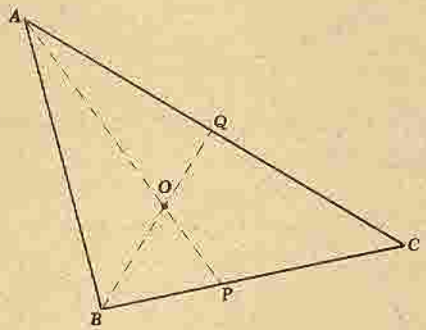


Observe que se cortan en un punto.

Este resultado es cierto para cualquier triángulo y podemos demostrarlo:

Las tres bisectrices de un triángulo se intersecan en un punto.

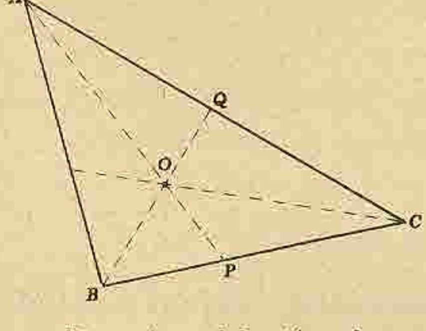
Demostración. Consideremos el siguiente triángulo ABC y sus bisectrices $\overrightarrow{AP}$ y $\overrightarrow{BQ}$, que se cortan en un punto O.



Tenemos entonces que el punto O equidista del lado $\overline{AC}$ y del lado $\overline{AB}$. (Pues está en la bisectriz $\overline{AP}$.)

El punto O también equidista del lado $\overline{BC}$ y del lado $\overline{BA}$. (Porque está en la bisectriz $\overrightarrow{BQ}$.)

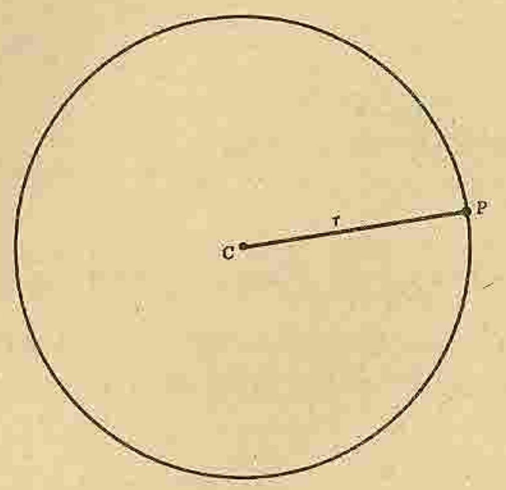
Si O equidista del lado $\overline{AC}$ y del lado $\overline{BC}$, entonces ese punto está en la bisectriz del ángulo C.



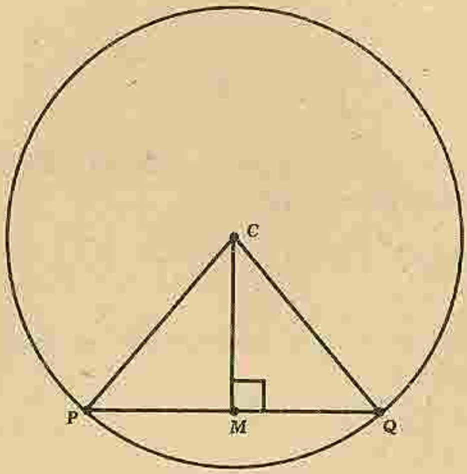
Por lo tanto, las tres bisectrices del triángulo se cortan en un punto O. (Que es lo que se quería demostrar.)

10. Circunferencias

Como ya sabemos, una circunferencia de radio r y centro C es el conjunto de todos los puntos P del plano, tales que la distancia de P a C es r. Es decir, $PC = r$. Al segmento $\overline{PC}$ se le llama también radio.



Consideremos ahora dos radios en una circunferencia, digamos $\overline{PC}$ y $\overline{QC}$ y tracemos la cuerda $\overline{PQ}$:



Obtenemos un triángulo isósceles ($\overline{PC} \cong \overline{QC}$). Sabemos que la altura $\overline{CM}$ de este triángulo es mediana, es decir,

$$PM = MQ.$$

En otras palabras, tenemos que:

El centro de una circunferencia está en la perpendicular en el punto medio de cualquier cuerda

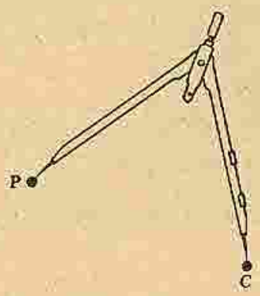
Este resultado lo utilizaremos en los problemas 2 y 3 que planteamos en seguida.

Problema 1. *Dado un punto, trazar una circunferencia que pase por este punto.*

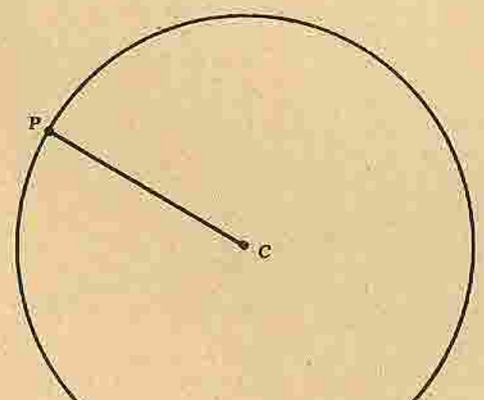
Es muy fácil resolver este problema de trazado. Además, vemos que se puede resolver de muchas maneras:

Elegimos un punto C arbitrariamente y lo tomamos como centro.

Apoyamos el compás en C y lo abrimos de tal manera que la otra punta quede en P



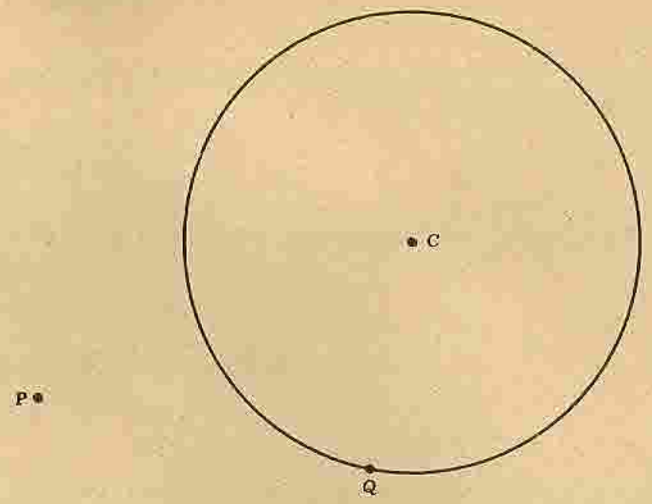
Giramos después el compás, apoyados en C, y trazamos la circunferencia.



Vemos así que podemos trazar tantas circunferencias como queramos, que pasen por P.

Problema 2. *Dados dos puntos P y Q, trazar una circunferencia que pase por ellos.*

Desde luego que ahora no podemos elegir el centro C en cualquier parte. Por ejemplo, si se elige C como en la siguiente figura, la circunferencia que pasa por Q no pasa por P.

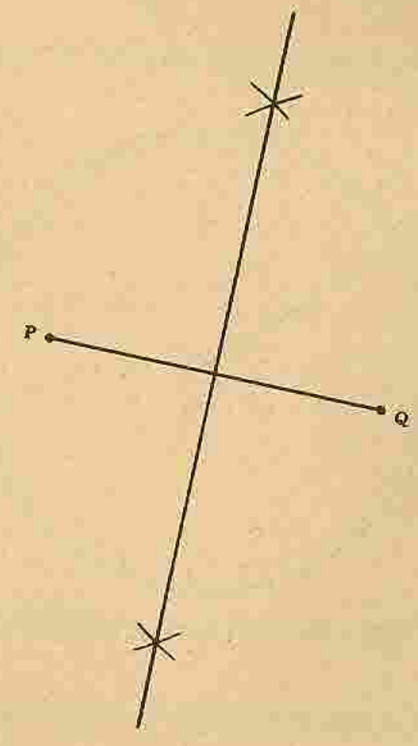


¿Dónde deberemos elegir el centro? Recordemos que *el centro de una circunferencia está en la perpendicular en el punto medio de cualquier cuerda.*

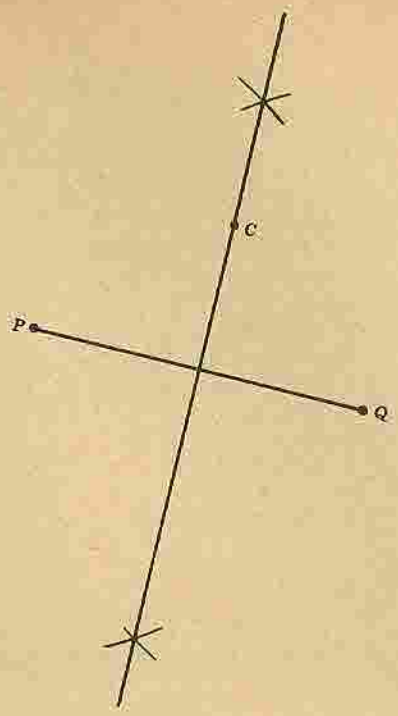
Usemos entonces este resultado:

Si la circunferencia ha de pasar por los puntos P y Q, entonces el segmento $\overline{PQ}$ es cuerda de esa circunferencia.

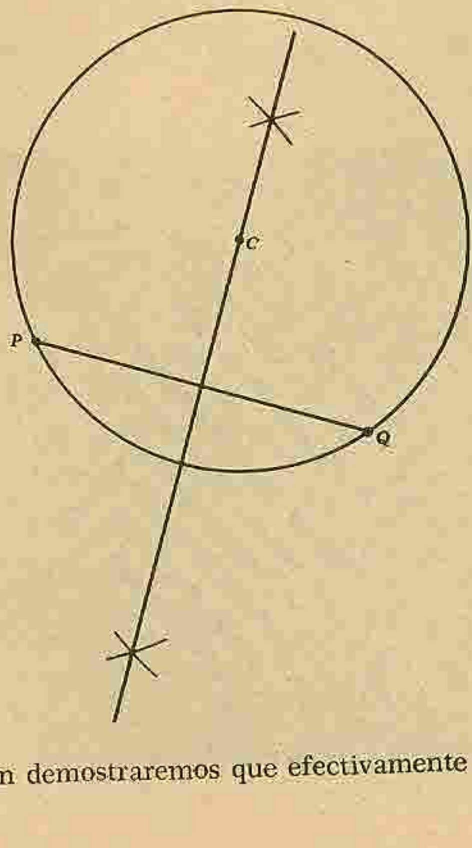
Trazamos el segmento $\overline{PQ}$ y la perpendicular que pasa por su punto medio.



Elegimos ahora como centro cualquier punto C de esta perpendicular.

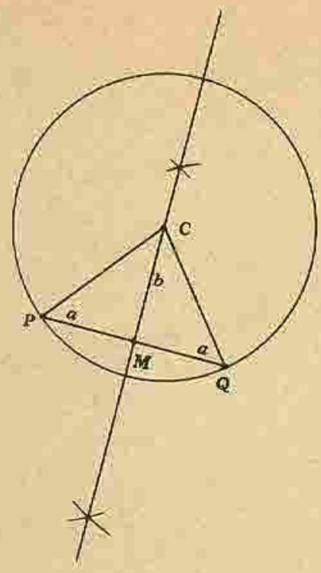


Apoyamos el compas en C, lo abrimos de tal manera que la otra punta esté en P y trazamos la circunferencia. ¡Esta pasa también por Q!



A continuación demostraremos que efectivamente pasa por P y Q.

Demostración.



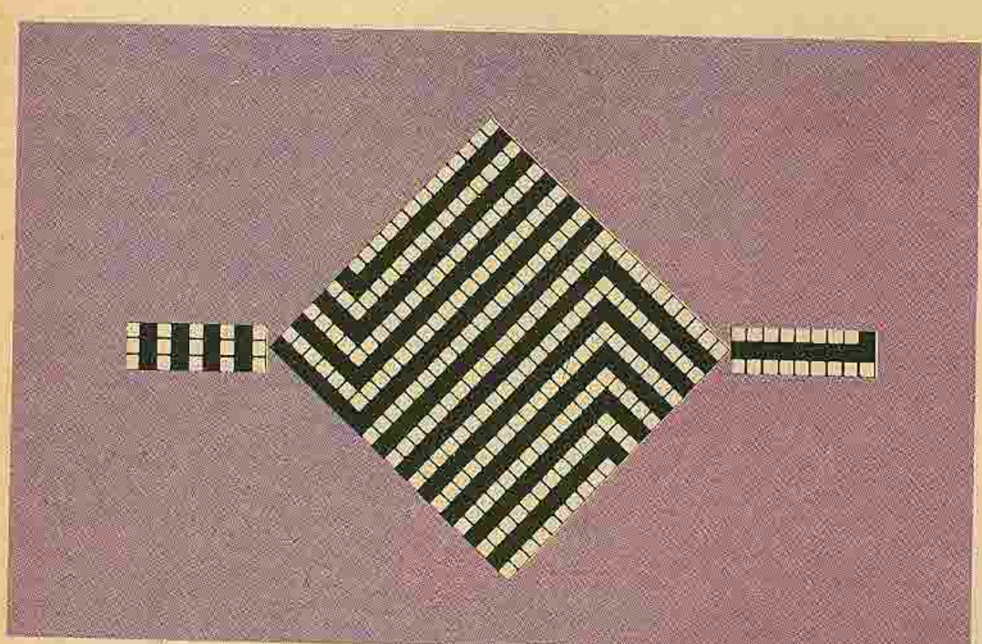
Según el teorema de Pitágoras, en el triángulo rectángulo PMC, de la figura, se tiene que

$$PC = \sqrt{a^2 + b^2}$$

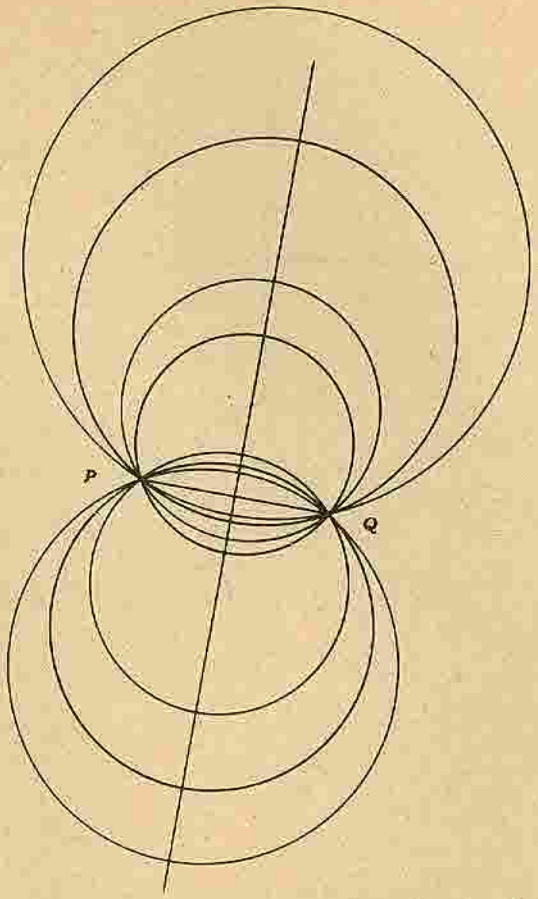
y en el triángulo rectángulo QMC, se tiene que

$$QC = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Por consiguiente, $PC = QC$, es decir, P *y* Q *están en la circunferencia.*



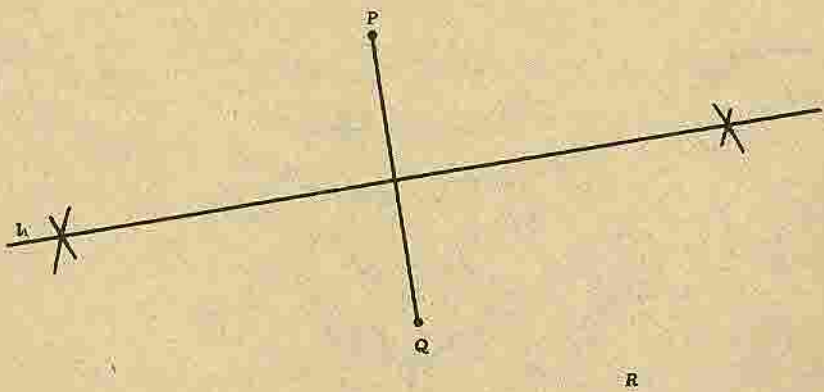
Con esto observamos que dados dos puntos P y Q podemos trazar tantas circunferencias como queramos que pasen por P y Q. Ahora bien, los centros no los podemos elegir arbitrariamente. Los centros son los puntos de la perpendicular a $\overline{PQ}$ en su punto medio.



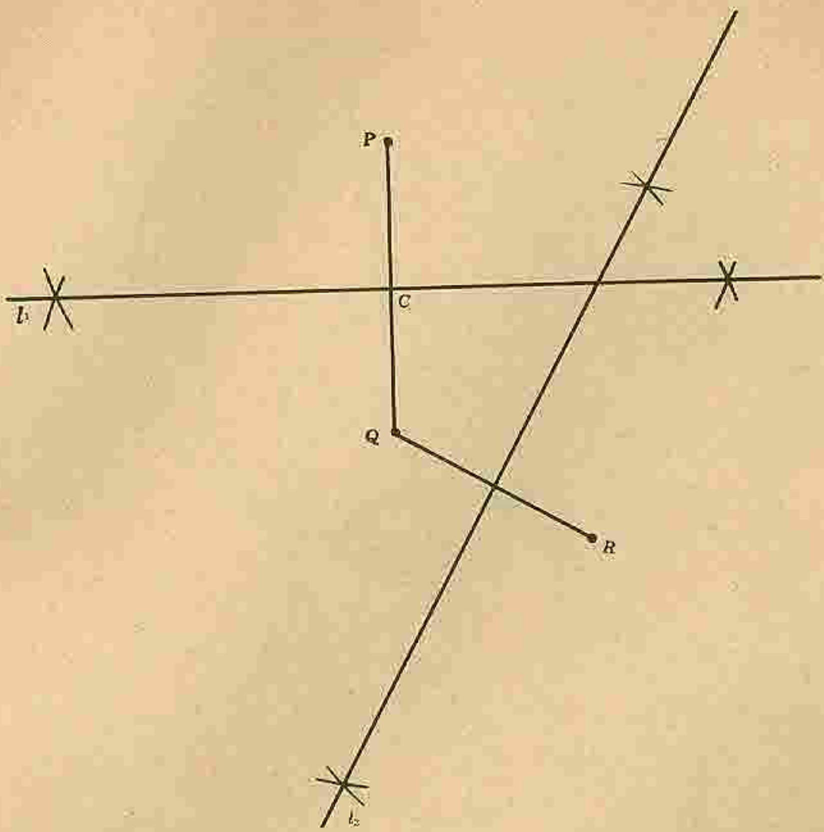
Problema 3. *Dados tres puntos no colineales P, Q y R, trazar una circunferencia que pase por ellos.*

¿Cómo atacar este problema?

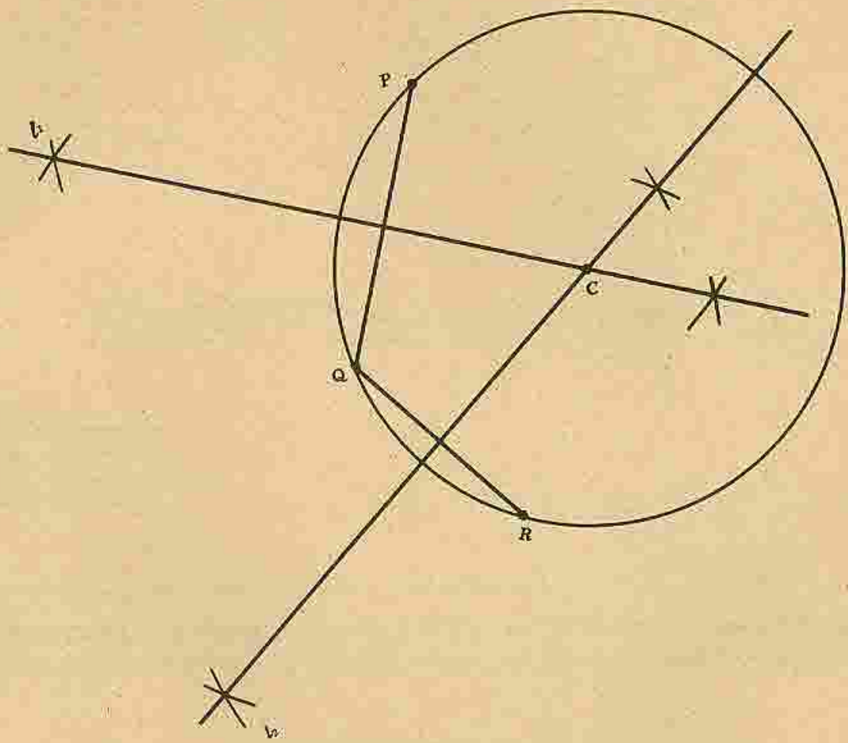
Consideremos los puntos P, Q y R no colineales. Sabemos cómo trazar circunferencias que pasen por dos puntos por ejemplo P y Q. Hacemos la construcción respectiva.



Sabemos que cualquier punto de l_1 sirve como centro de una circunferencia que pase por P y Q. Podemos también trazar circunferencias que pasen por Q y R. Hacemos la construcción.

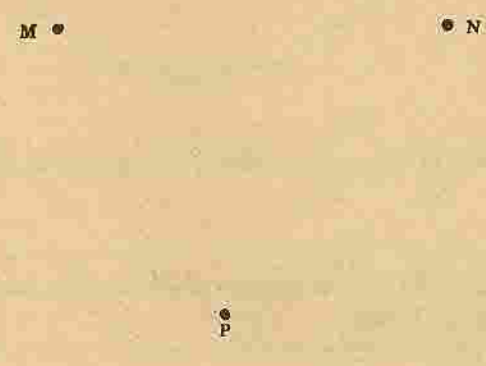


Cualquier punto de l_2 es centro de una circunferencia que pase por Q y R. Por lo tanto, el punto C, intersección de l_1 y l_2, será el centro de una circunferencia que pasa por P y Q (por estar en l_1) y por Q y R (por estar en l_2). Luego, es centro de una circunferencia que pasa por P, Q y R. La trazamos y con esto queda resuelto el problema.

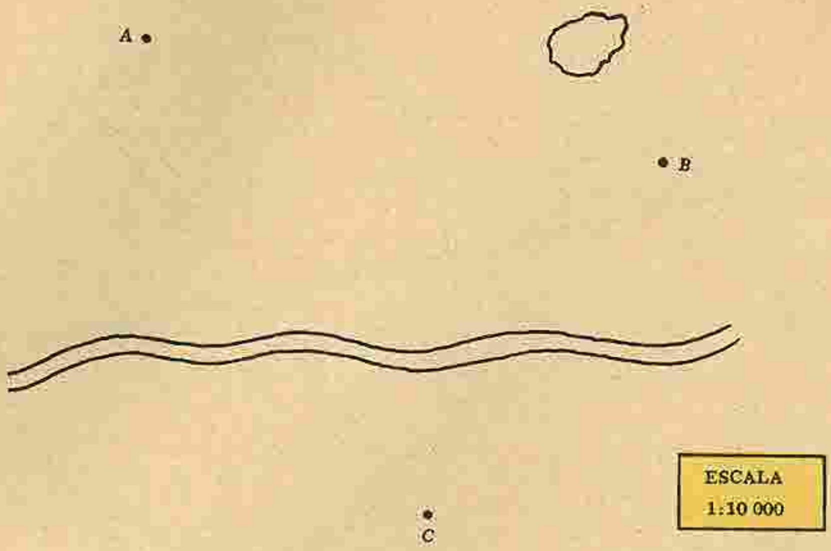


Observe usted que *hay una sola circunferencia que pasa por 3 puntos no colineales dados.*

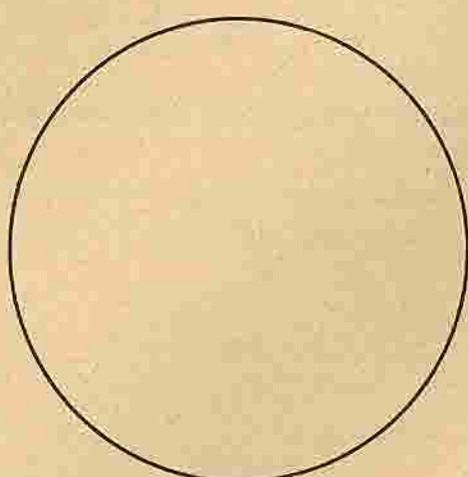
Ejercicio 42. Trace una circunferencia que pase por los tres puntos dados.



Ejercicio 43. Localice, en el siguiente mapa, un punto que equidiste de los tres puntos A, B, C, que se señalan. Indique usted la distancia real de ese punto a cada uno de los puntos A, B y C.

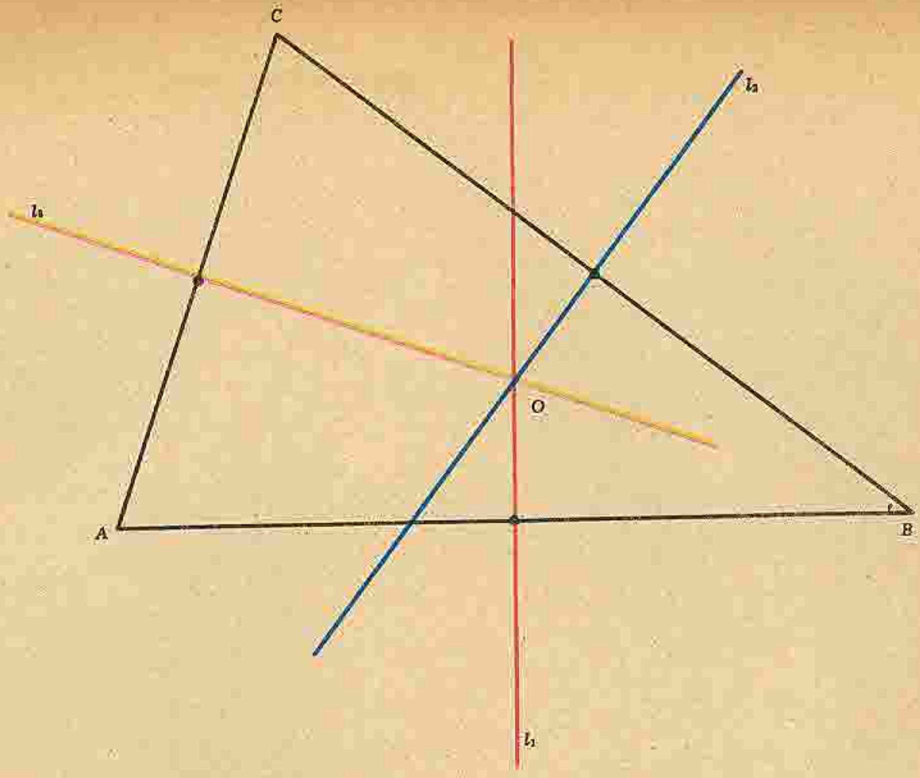


Ejercicio 44. Encuentre el centro de la siguiente circunferencia. (Sugerencia: Considere tres puntos cualesquiera de la circunferencia.)



Lo que acabamos de ver nos permite demostrar fácilmente la siguiente afirmación:

Las perpendiculares en los puntos medios de los lados de un triángulo se cortan en un punto.

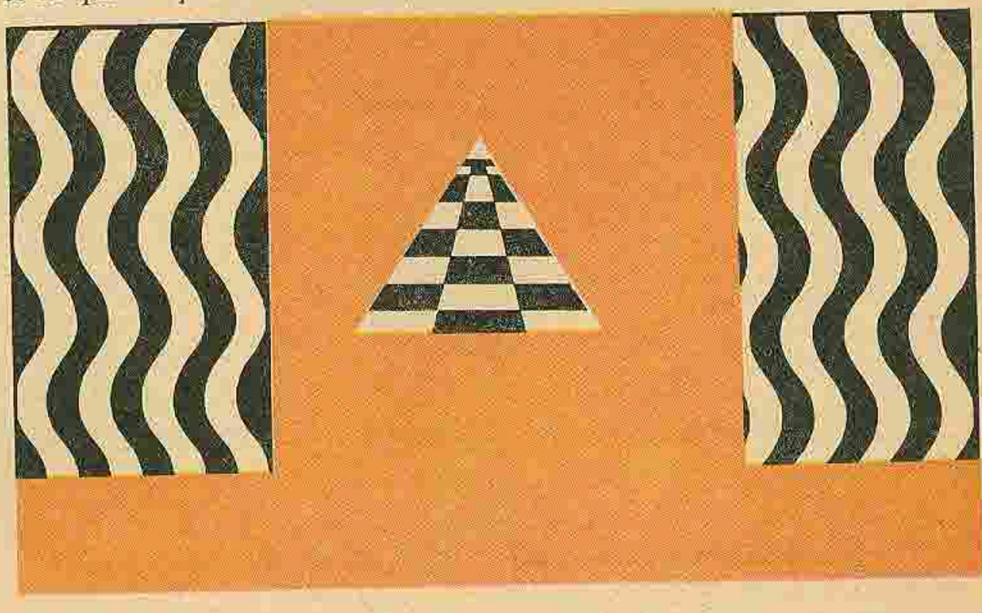


Demostración. Consideremos el punto O, intersección de las rectas l_1 y l_2.

Como O está en l_1, O equidista de A y de B.

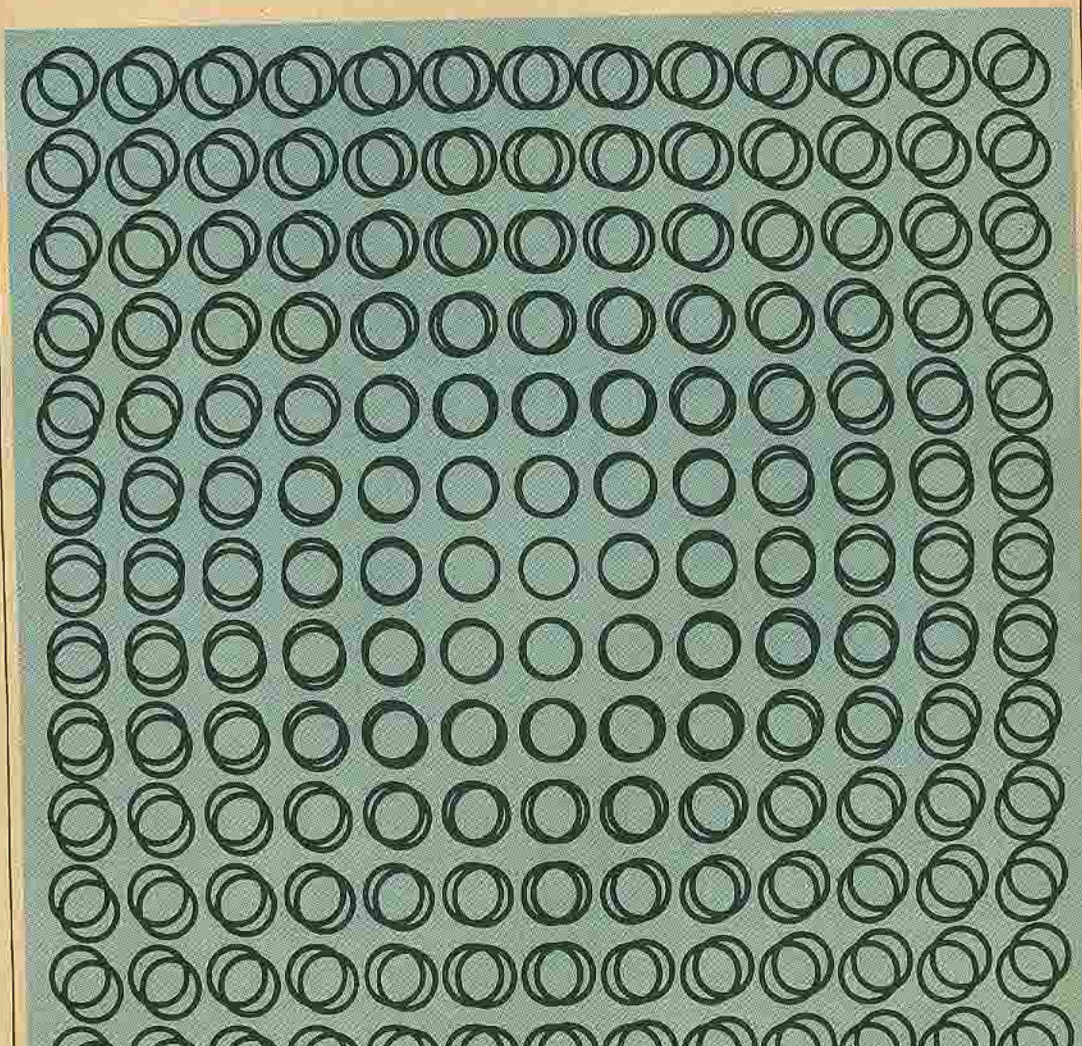
Como O está en l_2, O equidista de B y de C.

Entonces, O, equidista de A y de C y, por lo tanto, O está en l_3. (Que es lo que se quería demostrar.)



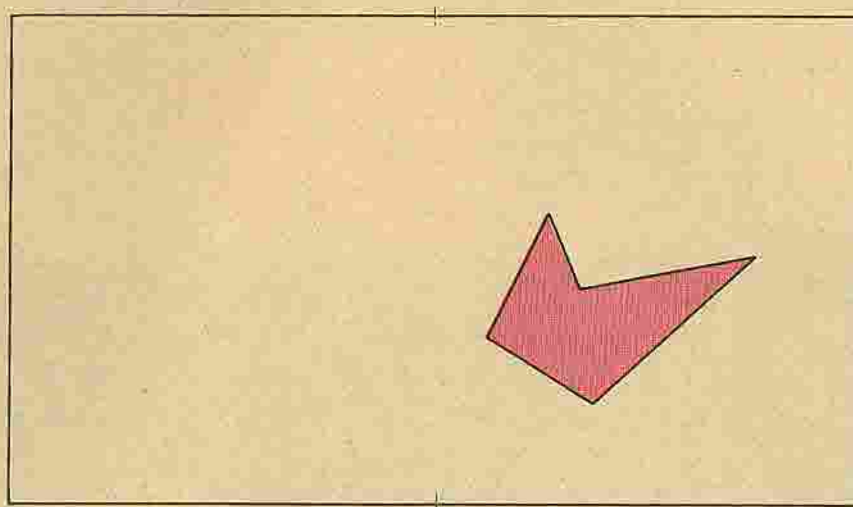
Capítulo séptimo

Transformaciones del plano

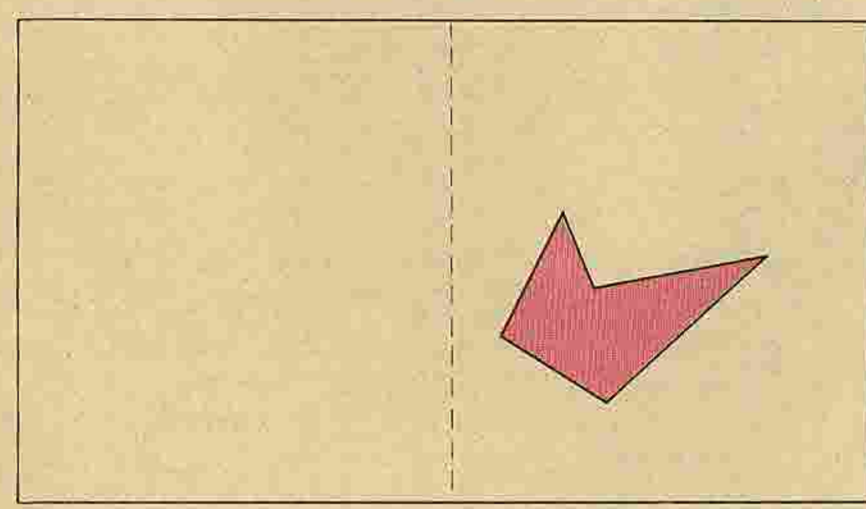


1. Simetría axial

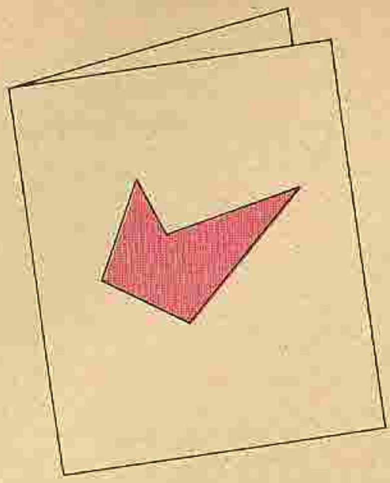
En la escuela primaria usted aprendió a usar el doblado de papel para obtener figuras simétricas con respecto a un eje. Por ejemplo, si le daban en una hoja de papel una figura,



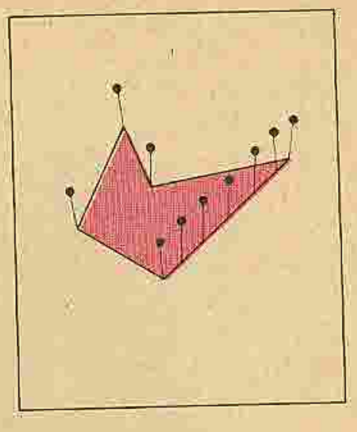
usted marcaba un doblez en la hoja para tomarlo como eje de simetría;



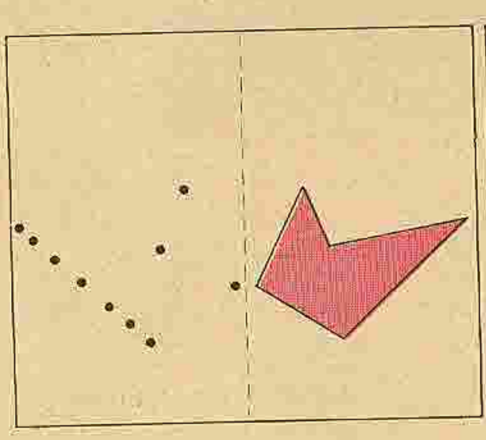
después doblaba la hoja,



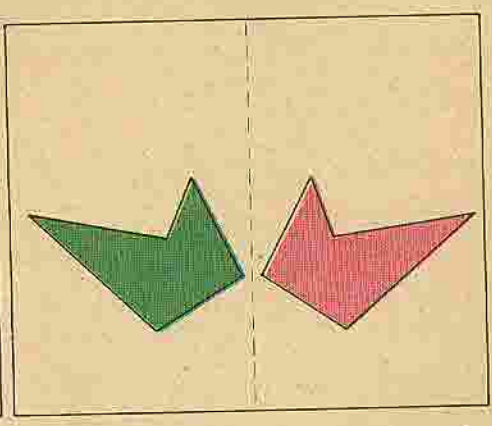
perforaba con un alfiler algunos puntos de la figura dada.



desdoblaba la hoja

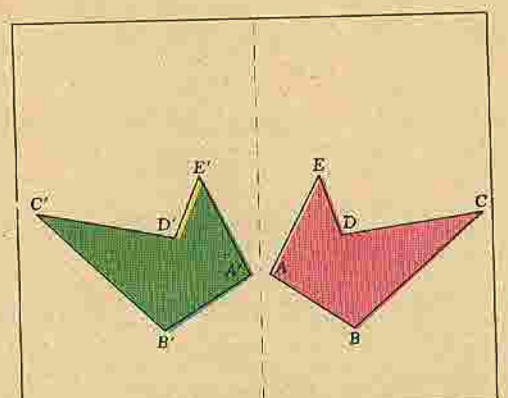


y trazaba la otra figura



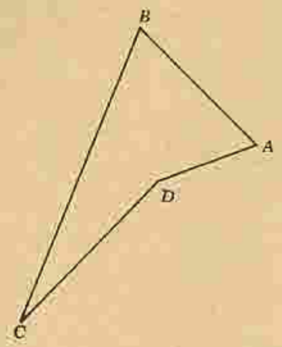
A la figura que se obtiene con un procedimiento como el que se acaba de ilustrar se le llama *imagen simétrica* de la figura original, con respecto al eje de simetría dado.

En el ejemplo anterior, la figura $A'B'C'D'E'$, es, con respecto a la recta m, la imagen simétrica de la figura $ABCDE$.



También se acostumbra decir que la figura original $ABCDE$ se transforma en la figura $A'B'C'D'E'$, por medio de la simetría axial considerada. (La palabra axial proviene de axis, que en griego significa eje.)

Ejercicio 1. Calque la siguiente figura en una hoja de papel y haga lo que se le pide.



1. Doble su hoja a la mitad y tome ese doblez como eje de simetría.
2. Trace la imagen simétrica $A'B'C'$.
3. Mida los lados y ángulos de las dos figuras y complete las expresiones

$\overline{A'B'} \cong$ ______ $\overline{B'C'} \cong$ ______ $\overline{C'D'} \cong$ ______ $\overline{D'A'} \cong$ ______

$\angle A' \cong$ ______ $\angle B' \cong$ ______ $\angle C' \cong$ ______ $\angle D' \cong$ ______

Por lo tanto, las figuras $ABCD$ y $A'B'C'D'$ son ______

4. Una con segmentos los puntos A y A', B y B', C y C' y D y D'. Estos segmentos son perpendiculares al ______.

5. Mida las distancias al eje de simetría y complete las expresiones.

La distancia de A' al eje es igual a la distancia de ______ al eje de simetría.

La distancia de B' al eje es igual a la distancia de ______ al eje de simetría.

La distancia de C' al eje es igual a la distancia de ______ al eje de simetría.

La distancia de D' al eje es igual a la distancia de ______ al eje de simetría.

En el ejercicio anterior hemos observado que una simetría axial tiene las siguientes propiedades:

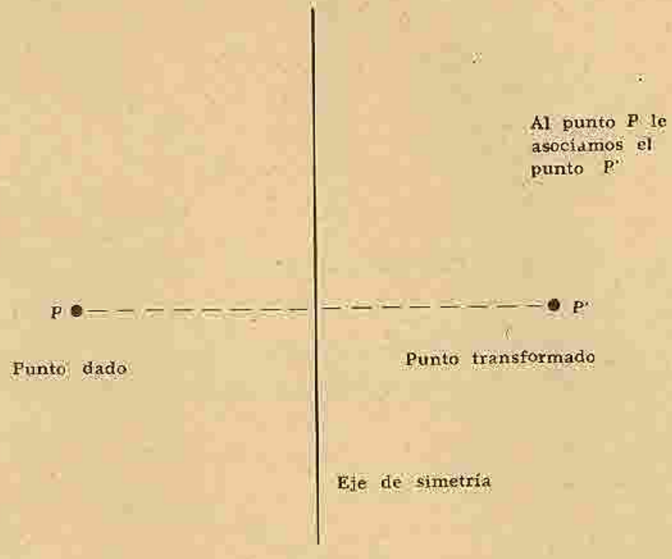
1. La imagen simétrica de un segmento $\overline{AB}$ es otro segmento $\overline{A'B'}$ congruente con $\overline{AB}$.

2. La imag... simétrica de un ángulo $\angle ABC$ es otro ángulo $\angle A'B'C'$ congruente con $\angle ABC$.

3. La imagen simétrica de un polígono es otro polígono congruente con él.

Consideremos nuevamente un plano con un eje de simetría y reflexionemos un poco sobre lo que estamos haciendo.

De hecho, *a cada punto del plano le estamos asociando otro*: su *simétrico*, o *transformado*, según la simetría axial que se considera.

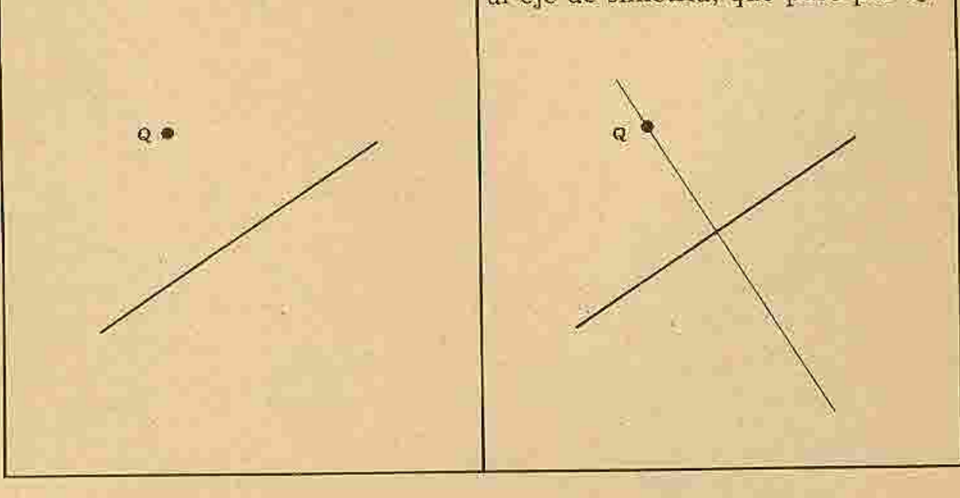


Observemos que los puntos P y P' cumplen las siguientes condiciones:

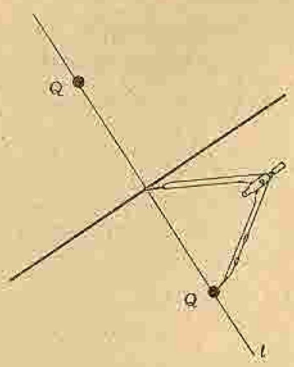
1. El segmento $\overline{PP'}$ es perpendicular al eje de simetría.
2. La distancia de esos dos puntos al eje de simetría es la misma.

Hechas estas dos observaciones, podemos encontrar el transformado de cualquier punto sin necesidad de doblar el papel. Por ejemplo, si nos dan el siguiente eje de simetría y un punto Q, para encontrar su transformado Q′ procedemos así:

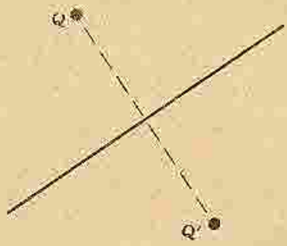
Eje de simetría y punto dado.	Trazamos una perpendicular l al eje de simetría, que pase por Q.



Medimos QM y marcamos sobre la recta l un punto Q', tal que $Q'M = QM$.



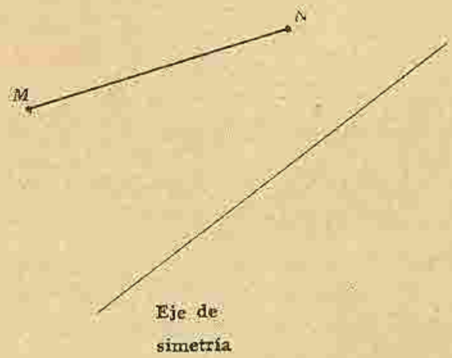
El punto Q' en el transformado o simétrico de Q, según la simetría axial que se considera.



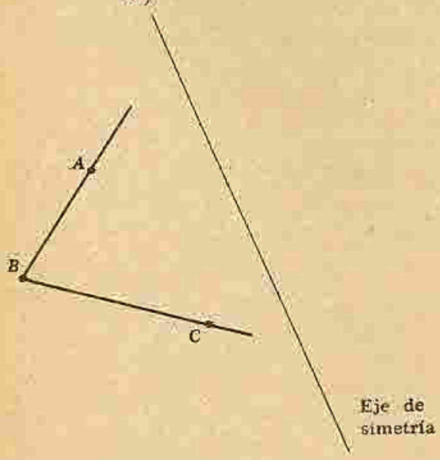
Ejercicio 2. Encuentre la imagen simétrica de cada una de las figuras dadas, según el eje de simetría que se señala en cada inciso.

a)

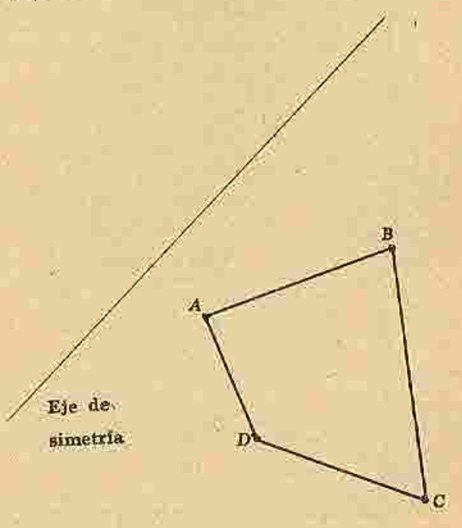
b)



c)

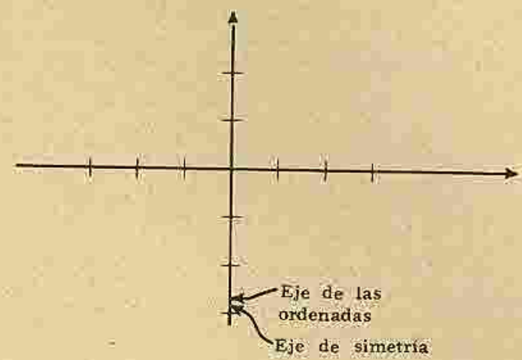


d)



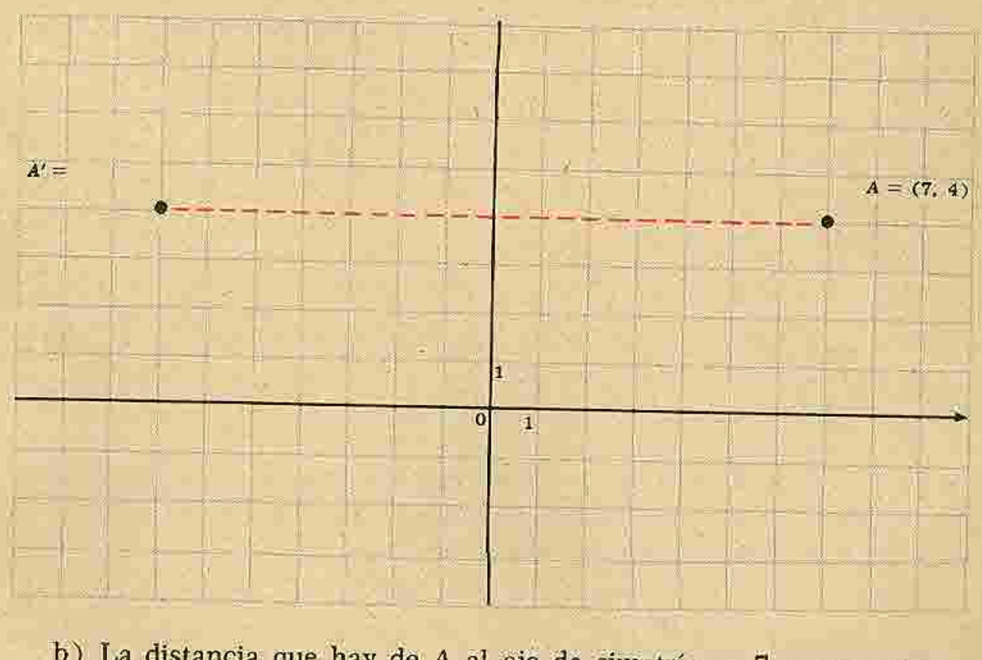
A medida que hemos ido avanzando en el estudio de las matemáticas, nos hemos dado cuenta de la importancia que tiene el uso de los números y otros símbolos para describir los fenómenos que se nos presentan. Ahora trataremos de hacer eso mismo con las simetrías axiales.

Para ello es conveniente trazar un sistema de coordenadas en el plano, de tal forma que uno de los ejes del sistema sea el eje de simetría. Por ejemplo, tomemos al eje de las ordenadas como eje de simetría.

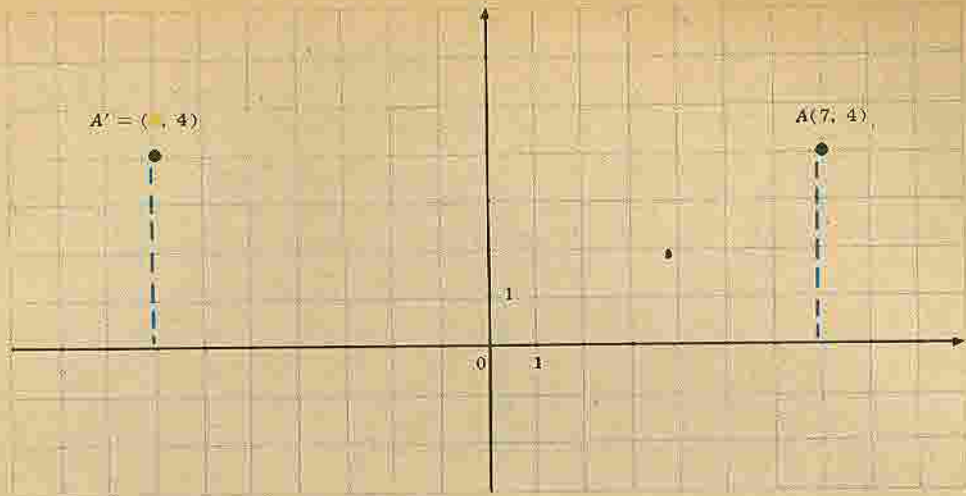


Marquemos un punto A, digamos $A = (7, 4)$ y calculemos las coordenadas de su transformado A'. Este cálculo puede hacerse considerando lo siguiente:

a) El segmento $\overline{AA'}$ es perpendicular al eje de simetría y, por lo tanto, paralelo al eje de las abscisas. Por eso, la ordenada de A' es la misma que la de A:



b) La distancia que hay de A al eje de simetría es 7 y esta misma distancia debe haber de A' al eje de simetría. Por lo tanto, la abscisa de A' es



Así tenemos que

$$A' = (-7, 4)$$

Según observamos, tomando como eje de simetría al eje de las ordenadas, el punto $A = (7, 4)$ se transforma en el punto $A' = (-7, 4)$. Simbólicamente esto se indica en la siguiente forma:

$$A \mapsto A'$$

o bien,

$$(7, 4) \mapsto (-7, 4)$$

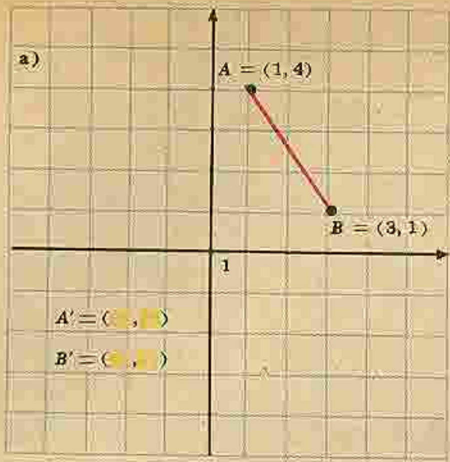
Ejercicio 3. Localice en un sistema de coordenadas los puntos que se indican y sus simétricos con respecto al eje de las ordenadas. Luego, complete las expresiones.

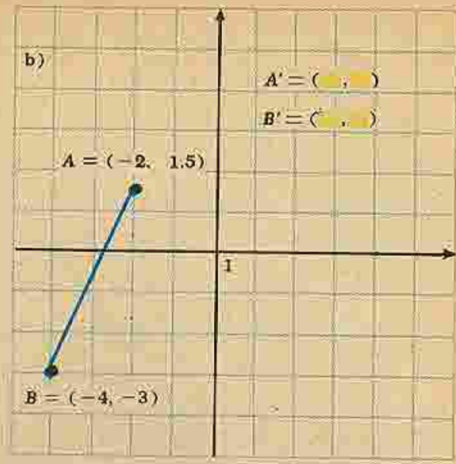
a) $(4, 1) \mapsto (\quad , \quad)$
b) $(5, 6) \mapsto (\quad , \quad)$
c) $(-3, 2) \mapsto (\quad , \quad)$
d) $(-2.5, 4) \mapsto (\quad , \quad)$
e) $(-4, -1) \mapsto (\quad , \quad)$
f) $(-6, -3.5) \mapsto (\quad , \quad)$
g) $(5, -2) \mapsto (\quad , \quad)$
h) $(3.5, -5) \mapsto (\quad , \quad)$

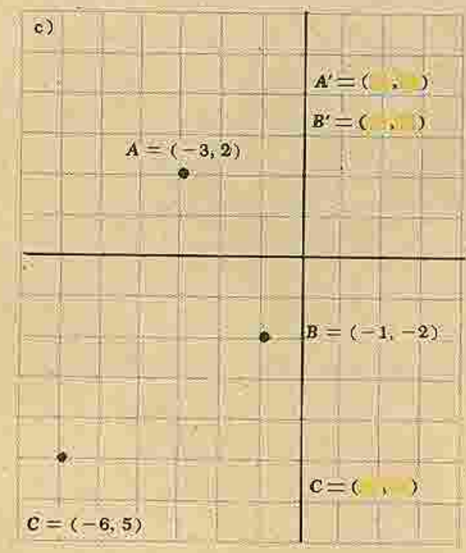
En el ejercicio anterior se observa fácilmente que, si un punto tiene coordenadas (x, y), entonces su simétrico con respecto al eje de las ordenadas es el punto $(-x, y)$. En símbolos,

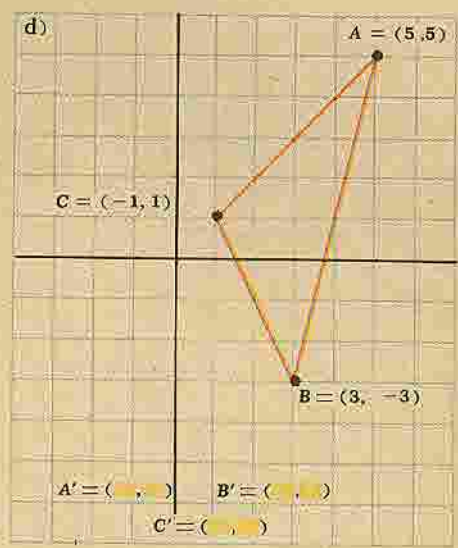
$$(x, y) \mapsto (-x, y)$$

Ejercicio 4. Considere como eje de simetría al eje de las ordenadas y complete las expresiones. Luego, trace la imagen simétrica de cada figura.

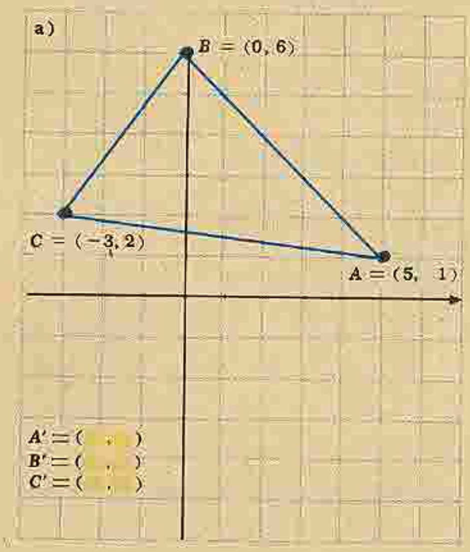


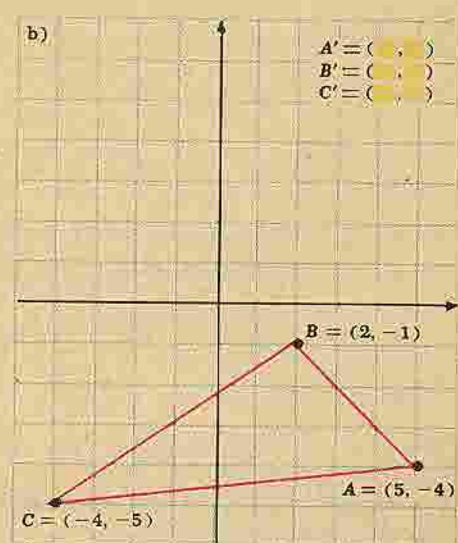






Ejercicio 5. Trace la figura que, con respecto al eje de las abscisas, es simétrica a la figura dada.





En ejemplos anteriores hemos observado que, en una simetría axial, la distancia AB entre dos puntos A y B es igual a la distancia $A'B'$ entre sus transformados A' y B'.

Ahora, usando coordenadas, podemos demostrar esto.

Analicemos primero un ejemplo.

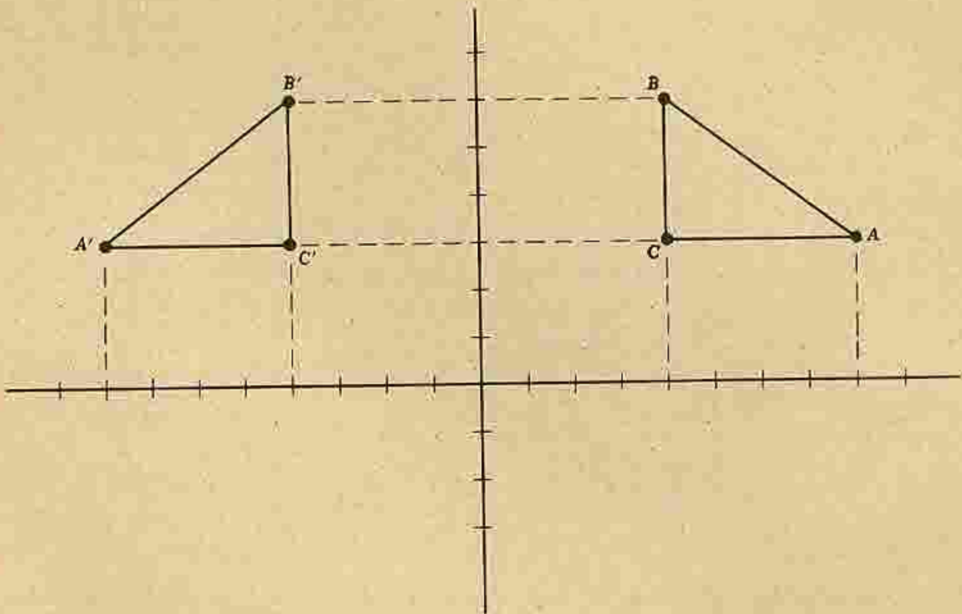
Ejemplo. Tomemos como eje de simetría al eje de las ordenadas y supongamos que

$$A = (8, 3) \text{ y } B = (4, 6)$$

Los transformados de estos puntos son

$$A' = (-8, 3) \text{ y } B' = (-4, 6)$$

Hagamos una figura, en la que consideraremos también los puntos C y C'.



De esta manera obtenemos los triángulos rectángulos ABC y $A'B'C'$. Observamos que

$$AC = 8 - 4 = \quad 4 \qquad\qquad BC = 6 - 3 = \quad 3$$

$$A'C' = (-4) - (-8) = -4 + 8 = \quad 4 \qquad B'C' = 6 - 3 = \quad 3$$

Podemos calcular la distancia entre A y B (es decir, la longitud de la hipotenusa) utilizando el teorema de Pitágoras:

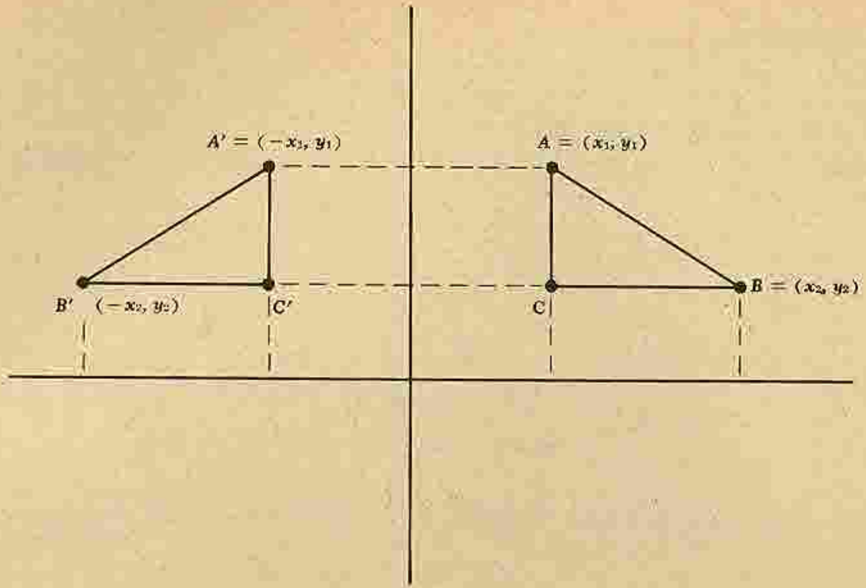
$$AB = \sqrt{(AC)^2 + (BC)^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

Análogamente,

$$A'B' = \sqrt{(A'C')^2 + (BC)^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

Por lo tanto, la distancia AB es igual a la distancia $A'B'$. (Que es lo que queríamos demostrar.)

Esta misma demostración puede hacerse para cualquier pareja de puntos A y B y sus simétricos A' y B'. Observe la figura siguiente:



Tenemos que

$$AC = y_1, -y_2 \qquad BC = x_1 - x_2$$
$$A'C' = y_1, -y_2 \qquad B'C' = (-x_1) - (-x_2) = x_2 - x_1$$

Por lo tanto, $AC = A'C'$ y $BC = B'C'$. Ahora bien, las hipotenusas de los triángulos rectángulos ABC y $A'B'C'$ miden

$$AB = \sqrt{(AC)^2 + (BC)^2} \qquad A'B' = \sqrt{(A'C')^2 + (B'C')^2},$$

de donde, como $AC = A'C'$ y $BC = B'C'$, resulta que $AB = A'B'$.

Como vemos, usando convenientemente sistemas de coordenadas, podemos demostrar una de las propiedades básicas de la simetría axial que antes hemos observado.

Utilizando ésta y otras demostraciones parecidas pueden demostrarse también las demás propiedades de la simetría axial.

Ejercicio 6. Considere un triángulo cuyos vértices son $A = (3, 4)$, $B = (-2, 5)$ y $C = (1, 2)$. Tome como eje de simetría el eje de las abscisas y calcule las coordenadas de los puntos $A'B'$ y C'. Demuestre que el triángulo $A'B'C'$ es congruente con el triángulo ABC.

Observación. En una simetría axial, *a cada punto P del plano le asociamos su transformado P'*.

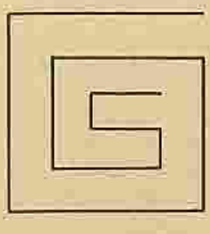
En situaciones así se dice que se tiene una **transformación del plano en sí mismo** o, simplemente, una **transformación del plano.**

En los párrafos siguientes hablaremos de otras transformaciones del plano: las *traslaciones*, las *rotaciones* y las *transformaciones de semejanza*.

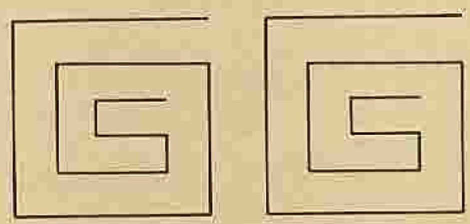
2. Traslaciones

En este párrafo estudiaremos las transformaciones del plano que reciben el nombre de **traslaciones.**

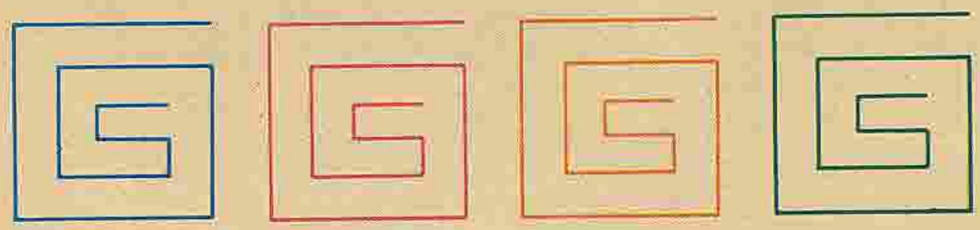
Si tenemos una figura en el plano como, por ejemplo, la siguiente,

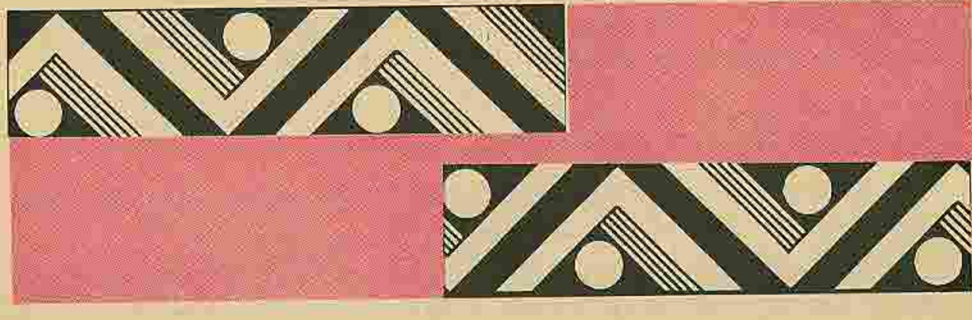


podemos "trasladarla hacia la derecha" y obtenemos otra figura congruente:



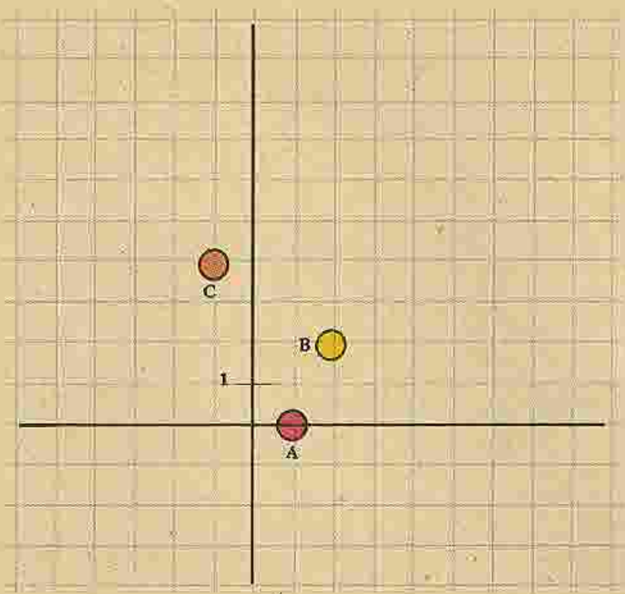
Podemos trasladar varias veces la figura obtenida y así obtenemos un motivo decorativo, una "greca".





Veremos como podemos utilizar los sistemas de coordenadas para describir este tipo de transformaciones.

A continuación tenemos un sistema cartesiano de coordenadas en el que hemos colocado tres pequeñas fichas.



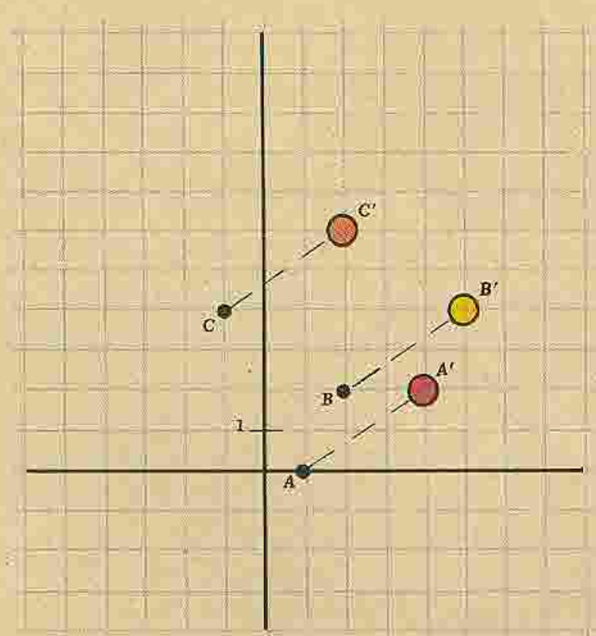
Las coordenadas de los lugares que ocupan estas fichas son:

$A = (1, 0)$ $B = (2, 2)$ $C = (-1, 4)$

Vamos a colocar ahora las fichas en otro lugar de acuerdo con la siguiente orden:

"Mueva cada ficha **tres** unidades hacia la derecha y **dos** unidades hacia arriba".

¿A qué lugar fue a dar cada ficha? Podemos verlo en la siguiente figura:



Las fichas ocupan ahora los lugares

$$A' = (4,2) \qquad B' = (5,4) \qquad C' = (2,6)$$

Si colocamos tres flechitas que vayan desde cada punto al punto trasladado, observamos que se obtienen **flechas paralelas de la misma longitud y con la misma orientación.**

¿Podría usted decir ahora cómo obtener las coordenadas de los puntos A', B' y C' a partir de las coordenadas de A, B y C y de la orden dada? Por ejemplo,

$$A = (1,0) \qquad A' = (4,2)$$

y la orden es "mueva cada punto **tres** unidades a la derecha y **dos** unidades hacia arriba". Vemos que esto equivale a dar la orden: "Sume 3 a la abscisa y 2 a la ordenada de cada punto".

$$A' = (1+3, 0+2) = (4,2)$$

Para los puntos B y C tenemos que

$$B' = (2+3, 2+2) = (5,4)$$

$$C' = (-1+3, 4+2) = (2,6)$$

Se dice que una orden como ésta define una *transformación del plano* que recibe el nombre de *traslación*.

Escribiremos, como en el caso de las simetrías axiales,

$$A \mapsto A' \quad , \quad B \mapsto B' \quad , \quad C \mapsto C'$$

O bien,

$$(1,0) \mapsto (4,2) \quad , \quad (2,2) \mapsto (5,4) \quad , \quad (-1,4) \mapsto (2,6)$$

y diremos que A se transforma en A', B en B', etc.

En general, un punto cualquiera $Q = (x, y)$ se transformará, bajo esta traslación, en

$$Q' = (x+3, y+2)$$

y hablaremos de la traslación dada por la fórmula

$$(x, y) \mapsto (x+3, y+2)$$

(Es decir, la traslación que consiste en sumar 3 a la abscisa y 2 a la ordenada de cada punto.)

Ejercicio 7. ¿En qué puntos se transforman mediante la traslación anterior los siguientes puntos? Marque en un sistema de coordenadas los puntos dados y sus transformados.

$$P = (-5, -3) \qquad Q = (2,3) \qquad R = (0, -2)$$

$$S = (-3, \ 4) \qquad T = (0,0) \qquad U = (-3,0)$$

$$P' = (-5+3, -3+2) = (-2, -1)$$

$Q' =$

$R' =$ ________ $=$ ________

$S' =$ ________ $=$ ________

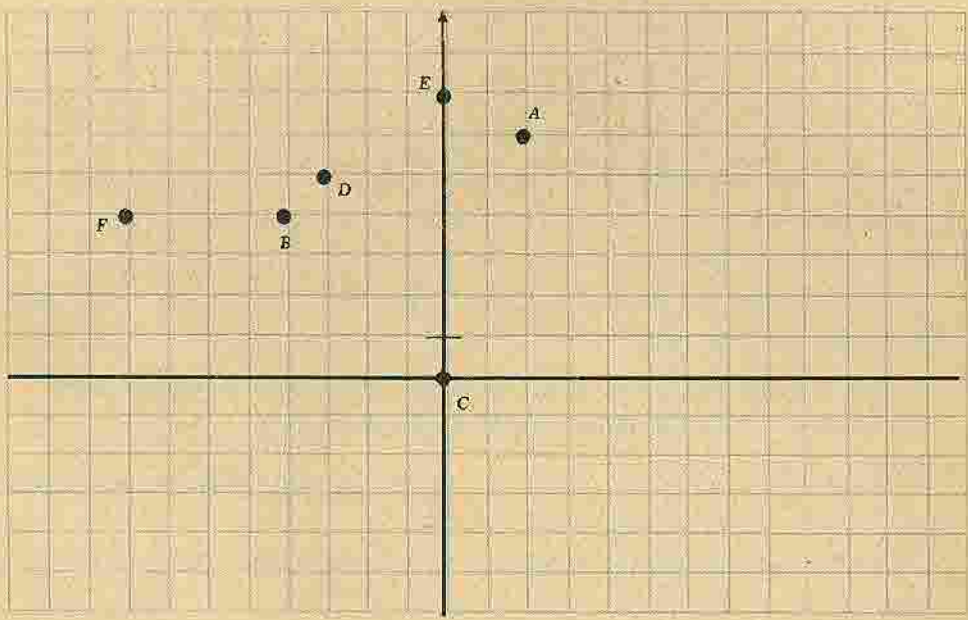
$T' =$ ________ $=$ ________

$U' =$ ________ $=$ ________

Una los puntos dados con sus transformados mediante flechitas. ¿Qué puede decir de éstas?

Ejercicio 8. Encuentre los transformados de los puntos indicados bajo la traslación dada por

$$(x, y) \mapsto (x + 8, y - 4)$$



$A = (\ \ 2, 6) \mapsto A' = (\ \_\_ + 8, -4) = (\_\_, \_\_)$

$B = (-4, 4) \mapsto B' =$ ________ $=$ ________

$C = (\ \ 0, 0) \mapsto C' =$ ________ $=$ ________

$D = (-3, 5) \mapsto D' =$ ________ $=$ ________

$E = (\ \ 0, 7) \mapsto E' =$ ________ $=$ ________

$F = (-8, 4) \mapsto F' =$ ________ $=$ ________

Una con flechitas algunos puntos con sus transformados y observe como son éstas.

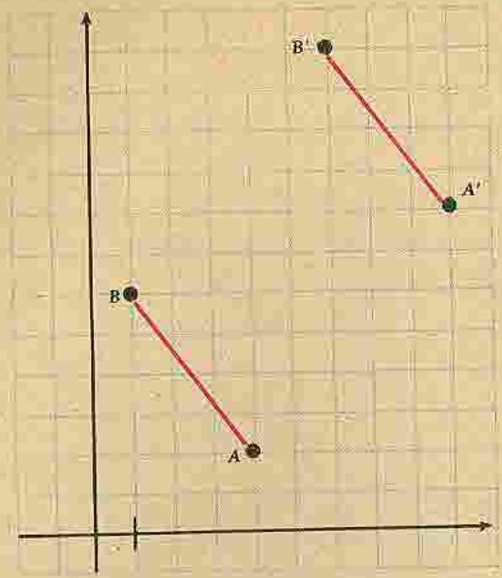
Consideremos la traslación dada por la fórmula

$$(x, y) \mapsto (x + 5,\ y + 6)$$

y los puntos $A = (4, 2)$ y $B = (1, 6)$. Sus transformados son

$$A' = (4 + 5, 2 + 6) = (9, 8) \text{ y } B' = (1 + 5, 6 + 6) = (6, 12)$$

La siguiente figura ilustra la situación.

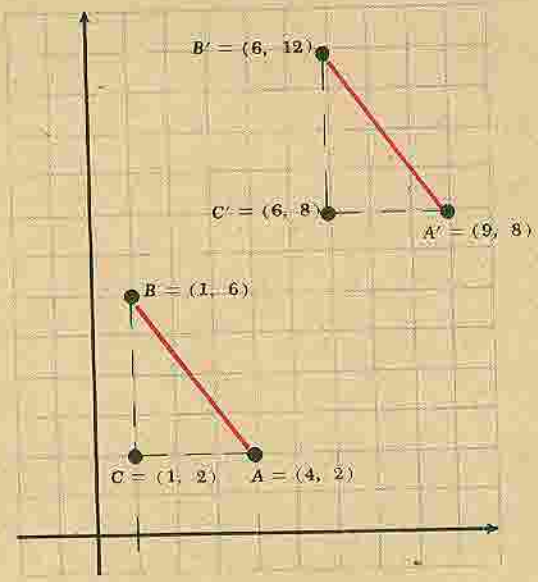


Podemos medir el segmento $\overline{AB}$ y el segmento $\overline{A'B'}$ y comprobar que miden lo mismo. En otras palabras,

Bajo una traslación, la distancia entre dos puntos A y B es igual a la disancia entre los puntos transformados A' y B'.

¿Podríamos encontrar una demostración de este hecho que pudiera hacerse en general sin tener que medir?

No es muy difícil. Si le parece interesante, véala a continuación.



Marcamos los puntos C y C' de modo que se obtengan dos triángulos rectángulos. Evidentemente, las coordenadas de estos puntos son

$$C = (1, 2) \text{ y } C' = (6, 8).$$

1. La longitud del cateto $\overline{CA}$ es $4 - 1 = \boxed{3}$ (o sea, la diferencia de las abscisas de A y C). La longitud del cateto $\overline{C'A'}$ es $9 - 6 = \boxed{3}$ (o sea, la diferencia de las abscisas de A' y C'). De aquí vemos que $CA = C'A'$.

2. En forma análoga, la longitud del cateto $\overline{CB}$ es la diferencia de las ordenadas de B y C, o sea, $6 - 2 = \boxed{4.}$ La longitud de $\overline{C'B'}$ es la diferencia de las ordenadas de B' y C', o sea, $12 - 8 = \boxed{4.}$ Por lo tanto, $BC = B'C'$.

3. Según el teorema de Pitágoras.

$$AB = \sqrt{(AC)^2 + (BC)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$A'B' = \sqrt{(A'C')^2 + (B'C')^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

Por lo tanto, $AB = A'B'$. (Que es lo que quería demostrar.)

Ejercicio 9. Considere la traslación dada por la fómula

$$(x, y) \mapsto (x + 4, y + 5)$$

a) Calcule los transformados de los puntos.

$A = (10, 1)$ $\quad A' =$

$B = (2, 7)$ $\quad B' =$

b) Trace los puntos C y C' de tal manera que los triángulos ABC *y* $A'B'C'$ tengan los catetos paralelos a los ejes de coordenadas y encuentre sus coordenadas.

c)

$AC =$ $\quad BC =$

$A'C' =$ $\quad B'C'$

d)

$$AB = \sqrt{\quad^2 + \quad^2} =$$

$$A'B' = \qquad =$$

Por lo tanto, $AB = A'B'$.

Así pues, en el ejemplo y ejercicio anteriores hemos demostrado que la distancia entre los puntos A y B es la misma que la distancia entre los puntos trasladados A' y B'.

Esto que hemos demostrado para dos traslaciones particulares, ¿podríamos hacerlo para cualquier otra traslación y cualquier pareja de puntos?

Tomemos la traslación del plano indicada por

$$(x, y) \mapsto (x + a, y + b)$$

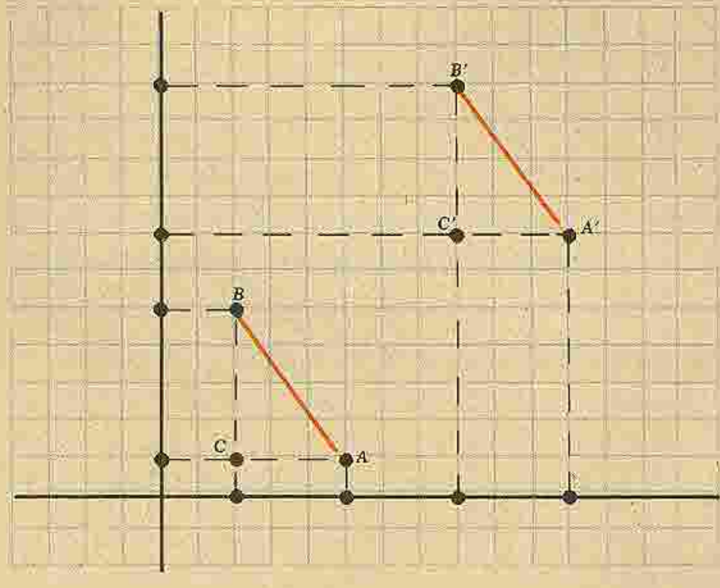
y dos puntos arbitrarios,

$$A = (x_1, y_1),\ B = (x_2, y_2)$$

Sus trasladados son, respectivamente

$$A' = (x_1 + a, y_1 + b) \qquad B' = (x_2 + a, y_2 + b)$$

Observe la figura siguiente, en donde se han marcado dos triángulos rectángulos.



Tenemos que

$$AC = \boxed{x_1 - x_2} \qquad BC = \boxed{y_2 - y_1}$$

$$A'C' = (x_1 + a) - (x_2 + a = \boxed{x_1 - x_2}$$

$$B'C' = (y_2 + b) - (y_1 + b) = \boxed{y_2 - y_1}$$

Por lo tanto, $AC = A'C'$ y $BC = B'C'$. Ahora bien, las hipotenusas de los triángulos rectángulos ABC y $A'B'C'$ miden

$$AB = \sqrt{(AC)^2 + (BC)^2} \qquad A'B' = \sqrt{(A'C')^2 + (B'C')^2},$$

de donde, como $AC = A'C'$ y $BC = B'C'$, resulta que $AB = A'B'$.

Es decir, hemos demostrado que

Bajo una traslación, la distancia entre los puntos es igual a la distancia entre los puntos transformados.

Esto se acostumbra mencionar diciendo que las traslaciones *conservan la distancia*.

Aunque aquí no lo haremos, se puede demostrar que toda transformación del plano que conserve la distancia transforma cualquier figura congruente con ella.

Ejercicio 10. Considere la traslación dada por la fórmula

$$(x, y) \mapsto (x - 2, y + 4)$$

a) Calcule los trasladados de los puntos siguientes:

$A = (2, -2)$ $\qquad A' =$

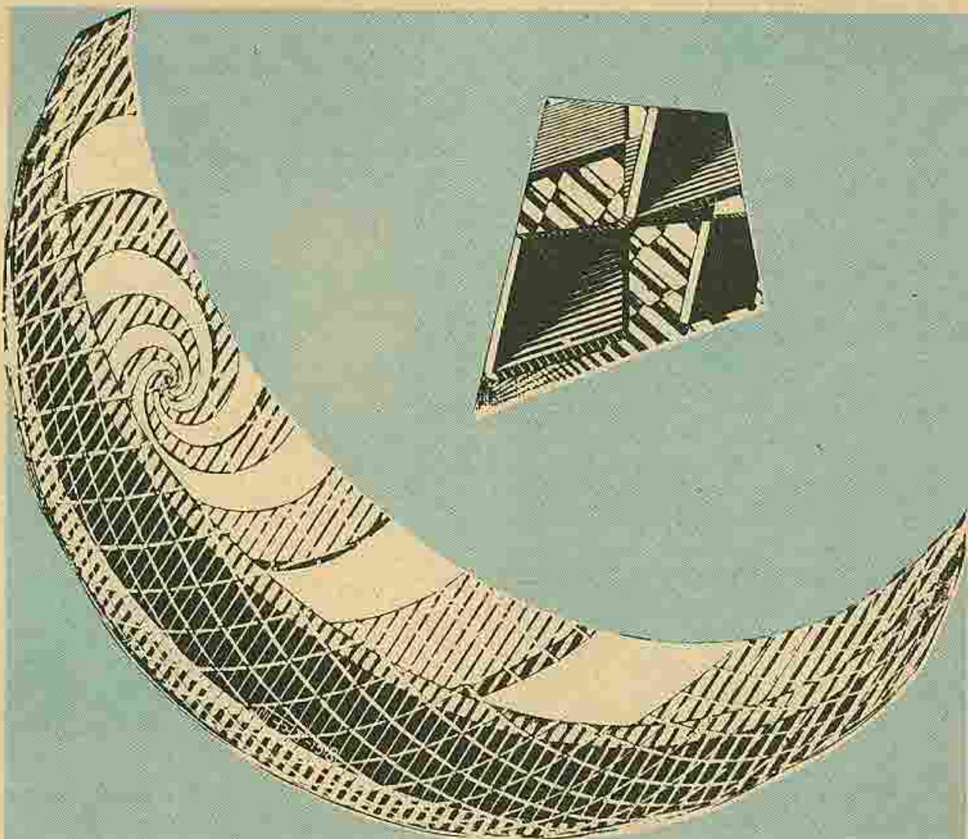
$B = (4, -1)$ $\qquad B' =$

$C = (7, -2)$ $\qquad C' =$

$D = (4, -4)$ $\qquad D' =$

$E = (5, -4)$ $\qquad E' =$

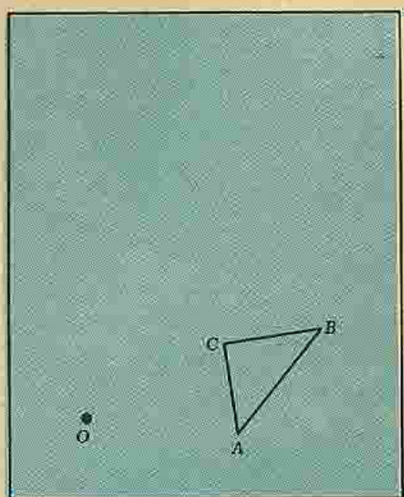
b) En un sistema de coordenadas trace el pentágono $ABCDE$ y el pentágono $A'B'C'D'E'$. Observe que son congruentes.



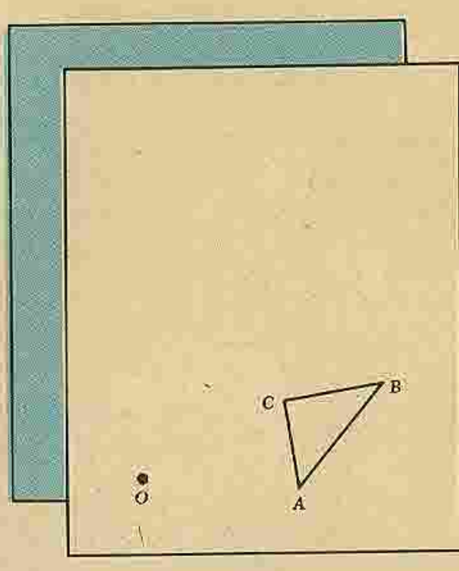
3. Rotaciones

En las transformaciones que acabamos de estudiar (simetrías axiales y traslaciones), ocurre que la imagen de toda figura es otra figura congruente con ella. Ahora veremos otro tipo de transformaciones en las que sucede lo mismo y que reciben el nombre de **rotaciones.**

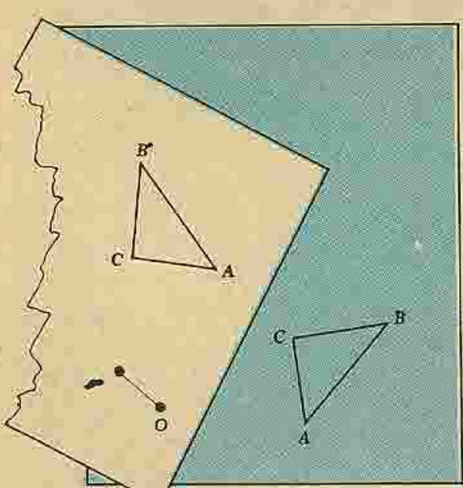
A fin de obtener alguna idea sobre lo que es una rotación, hagamos el siguiente experimento:



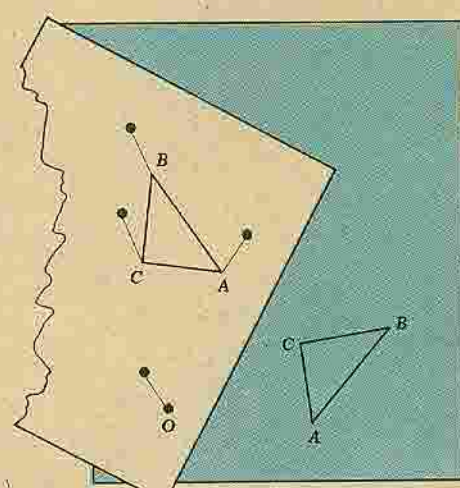
Tomamos una hoja de papel y marcamos en ella un punto O y una figura cualquiera. Por ejemplo, el triángulo *ABC*.



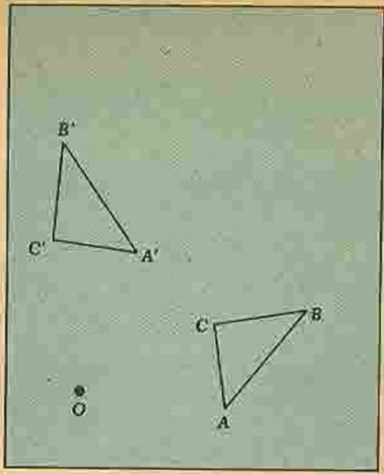
Sobre esa hoja ponemos otra y calcamos el punto y la figura.



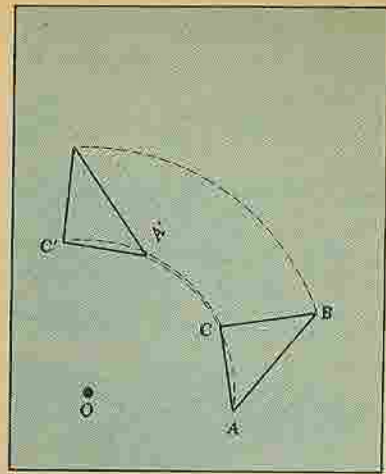
Clavamos un alfiler en el punto *O* y giramos la hoja de encima. (El giro es arbitrario.)



Clavamos alfileres en los puntos *A*, *B* y *C*, para pasar éstos a la hoja de abajo.



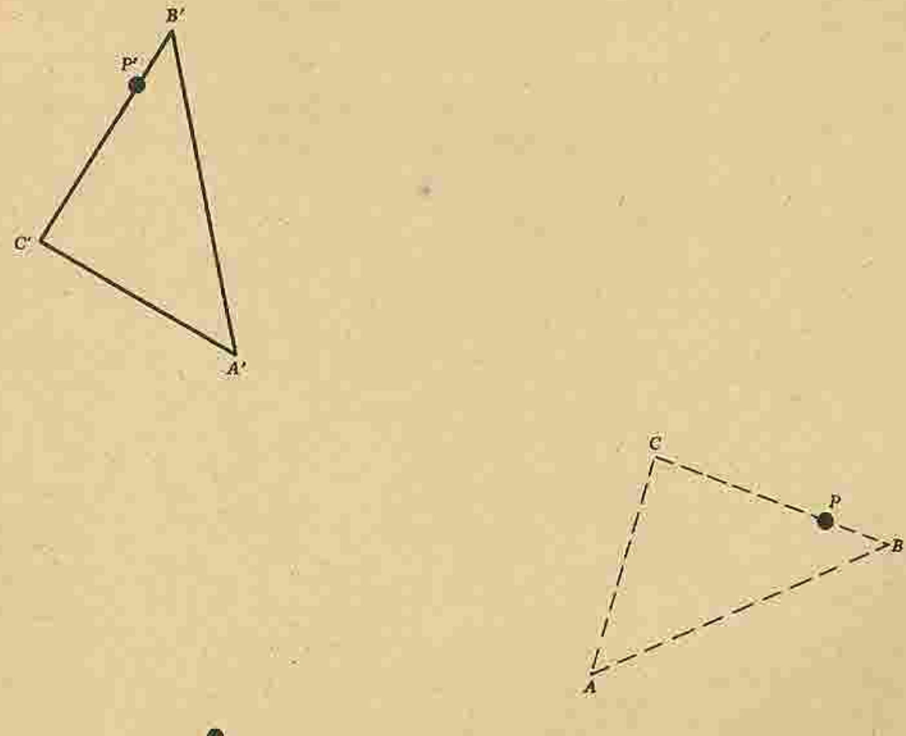
Quitamos la hoja de encima y, con las marcas dejadas por los alfileres, trazamos el triángulo $A'B'C'$.



Todo este proceso que hemos seguido nos permite ahora asociar puntos de la figura ABC con puntos de la figura $A'B'C'$.

Cualquier asociación que se haga entre puntos del plano siguiendo un proceso como el de nuestro experimento, será una transformación a la que daremos el nombre de **rotación**.

Ejercicio 11. Con un procedimiento como el que acabamos de describir, a partir del $\triangle ABC$ se obtuvo el $\triangle A'B'C'$, tomando como centro de rotación el punto O.



a) Trace usted los segmentos $\overline{AO}$, $\overline{BO}$, $\overline{CO}$, $\overline{A'O}$, $\overline{B'O}$, y $\overline{C'O}$, y mídalos en milímetros.

Resulta que $\overline{A'O} \cong$ ___, $\overline{B'O} \cong$ ___ y ___ $\cong \overline{CO}$

b) Mida usted los ángulos $\angle ADA'$, $\angle BOB'$ y $\angle COC'$. La medida de todos y cada uno de esos ángulos es ___ En este caso lo usual, es decir que se hizo una rotación de 80 grados.

c) Ahora mida los segmentos y los ángulos de los dos triángulos. Se encuentra que

$\overline{A'B'} \cong$ ___ $B'C' \cong$ ___ y $\overline{C'A'} \cong$ ___

$\angle A' \cong$ ___ $\angle B' \cong$ ___ $\angle C' \cong$ ___

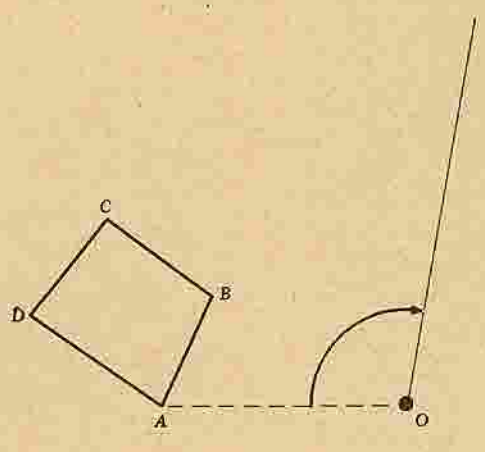
En la rotación del ejercicio anterior observamos lo siguiente:

1. El transformado de cualquier segmento es un segmento congruente con él.
2. El transformado de todo ángulo es un ángulo congruente con él.
3. Todo polígono y su transformado son congruentes.

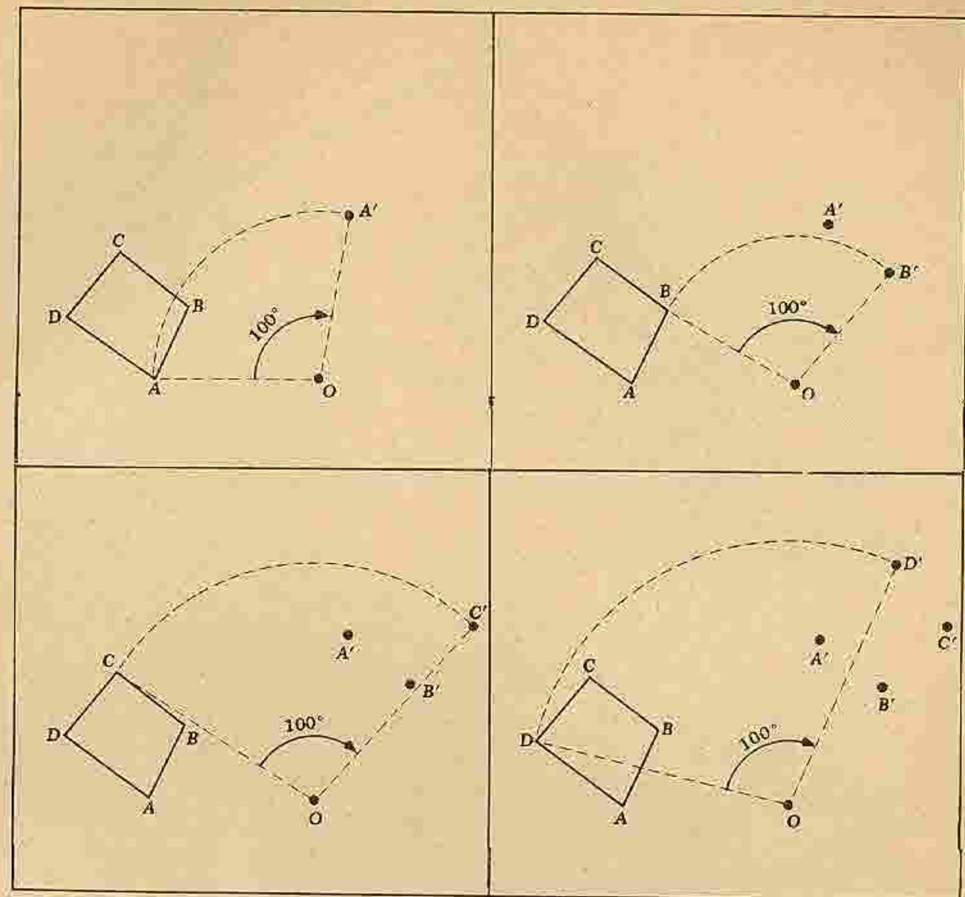
Toda rotación posee estas tres propiedades que acabamos de mencionar. Esto es, *toda rotación conserva la congruencia de figuras.*

Ejercicio 12. Tal como se hace en a), en cada inciso tome el punto O como centro de rotación y efectúe la transformación indicada.

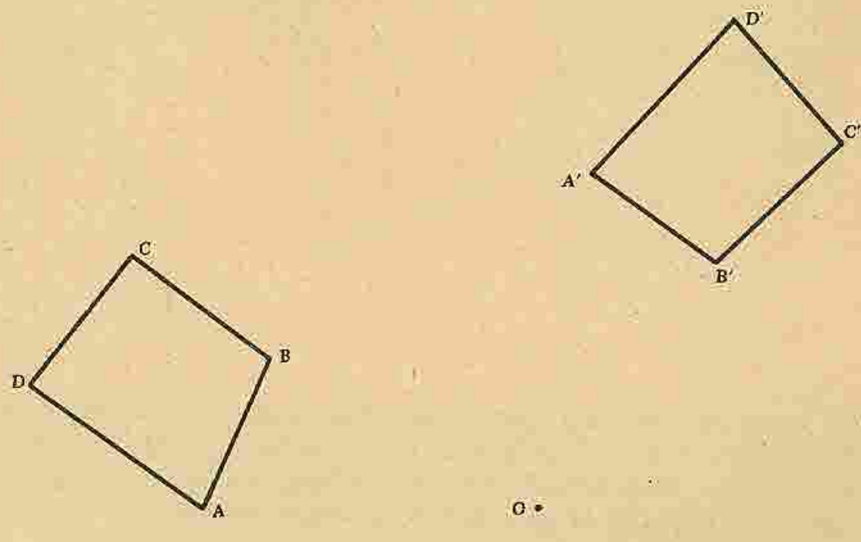
a) Rotación de 100°



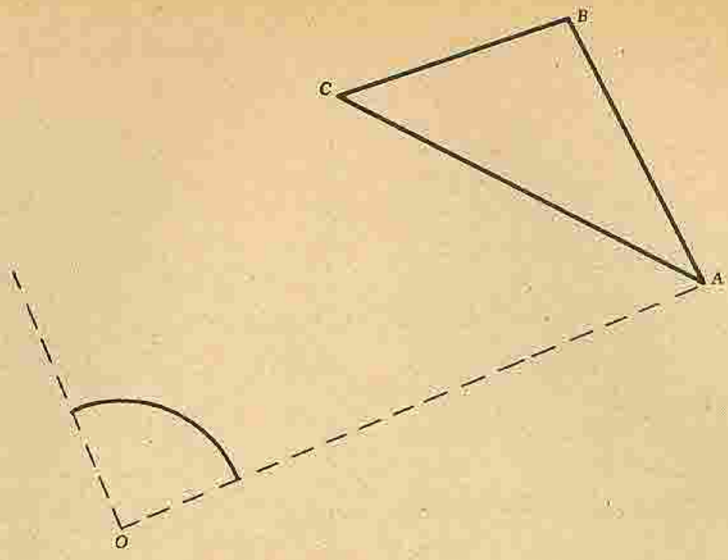
Resolución.



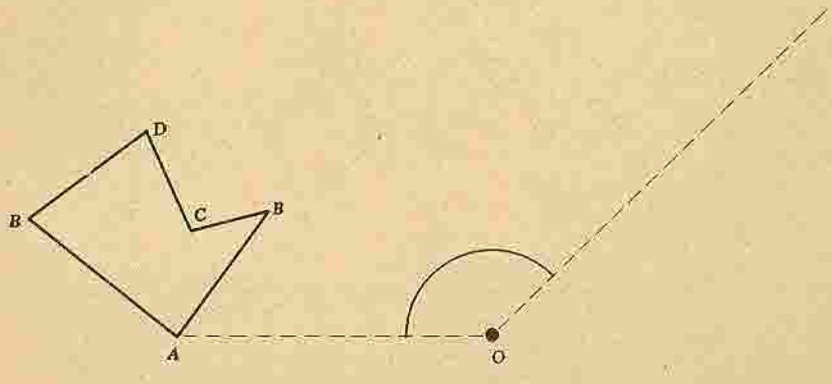
Solución.



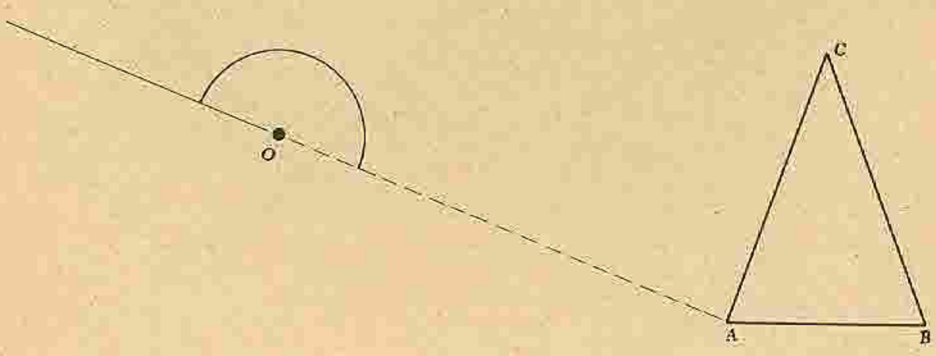
b) Rotación de 90°



c) Rotación de 135°



d) Rotación de 180°

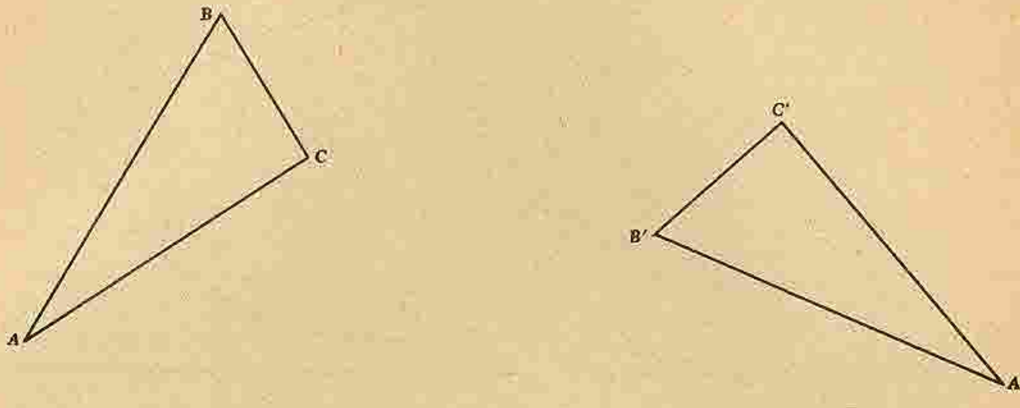


Las rotaciones, al igual que las simetrías axiales y las traslaciones, también pueden estudiarse utilizando coordenadas; pero por el momento no haremos esto, pues necesitaríamos para ello algunos conocimientos, que todavía no tenemos, sobre funciones trigonométricas.

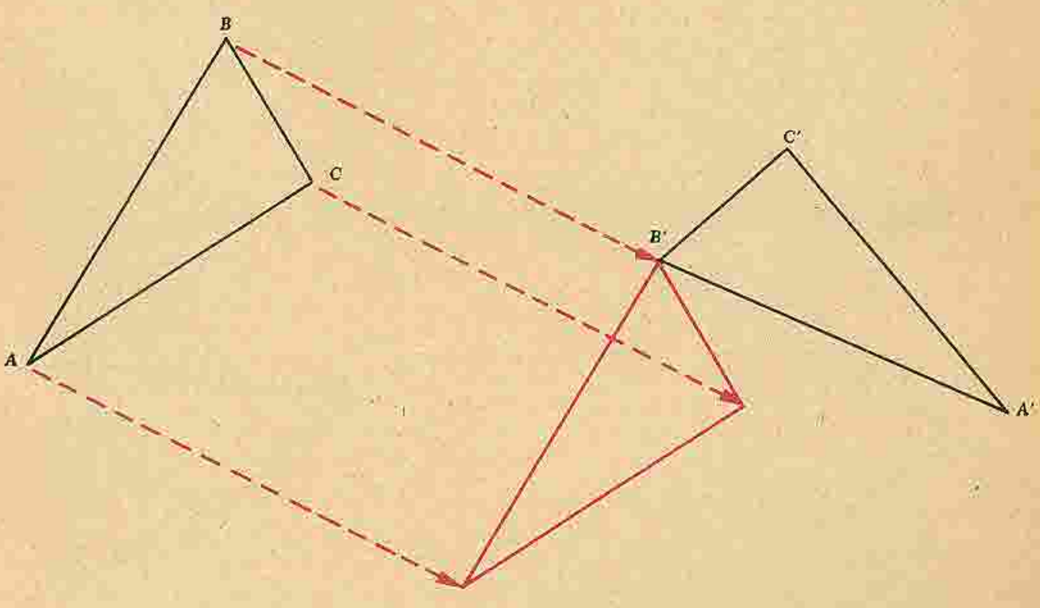
Hasta aquí hemos estudiado tres transformaciones del plano que conservan la congruencia de figuras. Estas transformaciones han sido las simetrías axiales, las traslaciones y las rotaciones.

Ahora veremos cómo, dadas dos figuras congruentes en el plano, es posible aplicar sucesivamente varias de esas transformaciones para transformar una de esas figuras en la otra.

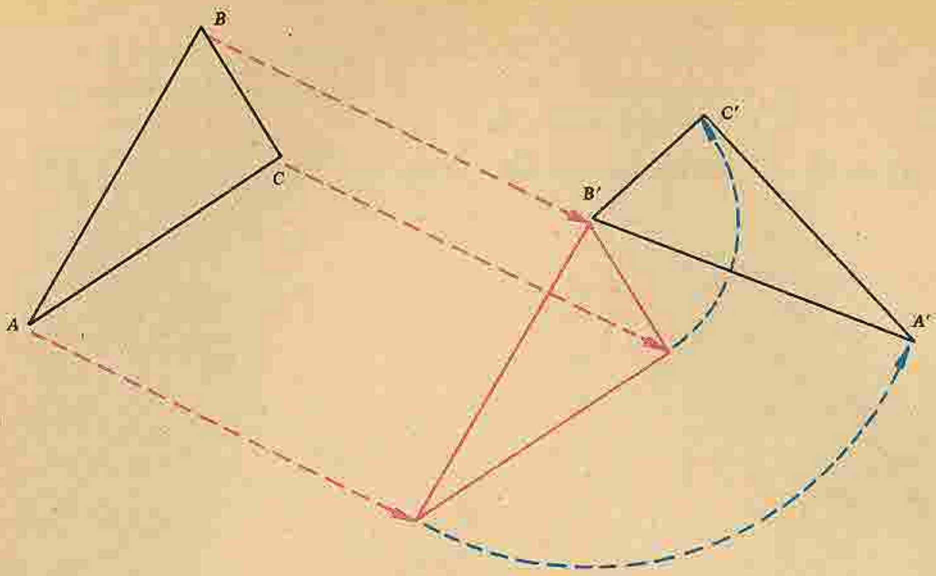
Ejemplo. Consideremos los dos triángulos congruentes ABC y $A'B'C'$.



Hagamos primero una traslación:



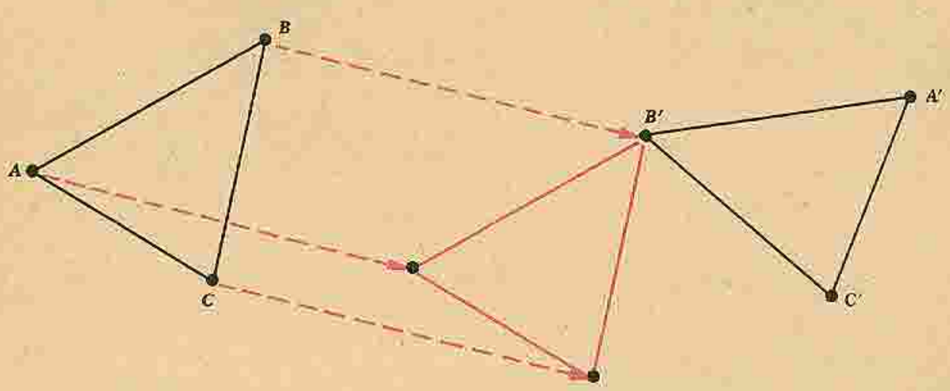
A continuación efectuemos una rotación:



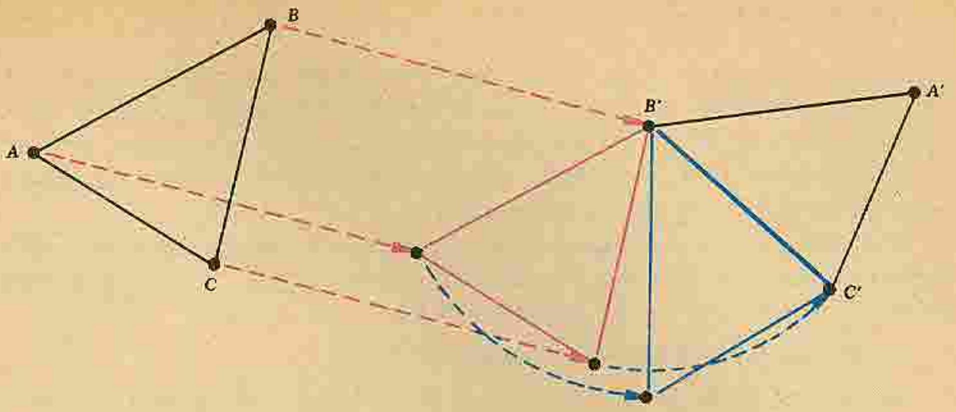
Aquí vemos que el triángulo ABC se transformó en el triángulo $\triangle A'B'C'$ por medio de una traslación seguida de una rotación.

Ejemplo. Consideremos los siguientes triángulos congruentes.

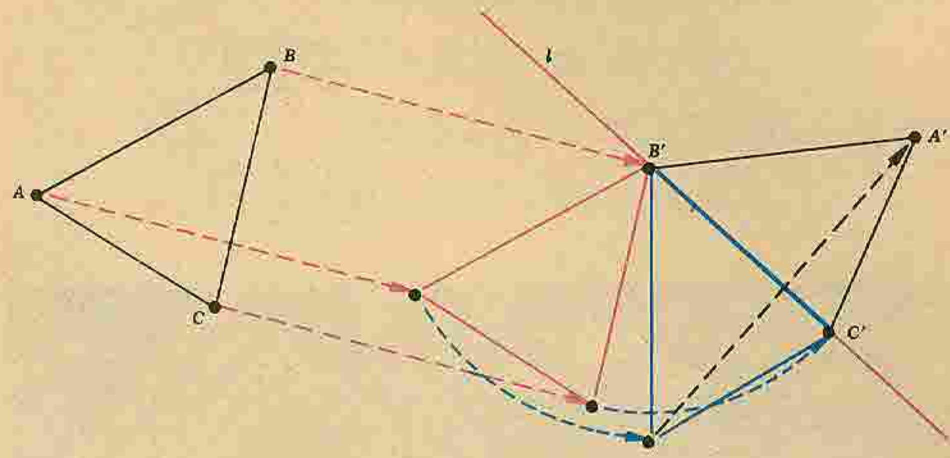
Como antes, efectuemos primero una traslación:



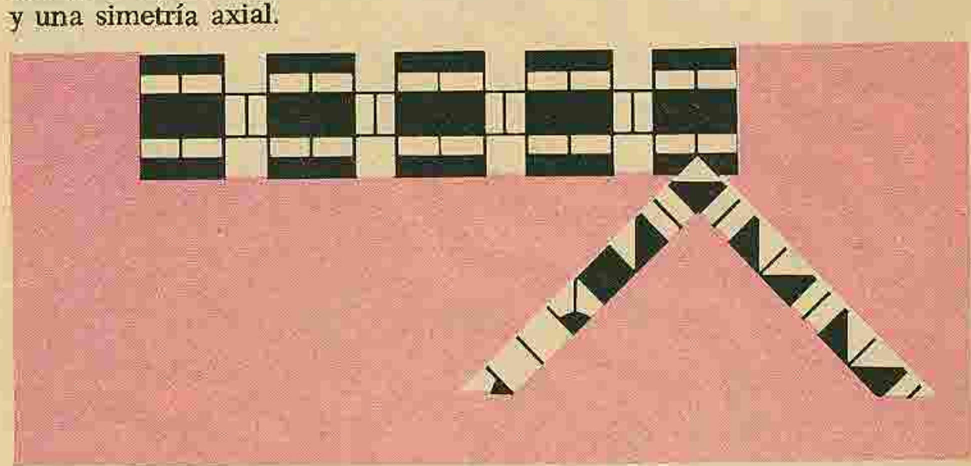
Ahora hagamos una rotación:



Finalmente, considerando la recta l como eje establezcamos una simetría axial.



En este caso observamos que el triángulo $\triangle ABC$ se transformó en el triángulo $\triangle A'B'C'$ por medio de una traslación, seguida de una rotación y una simetría axial.



4. Transformaciones de semejanza

En los tres párrafos anteriores hemos estudiado transformaciones del plano que preservan la congruencia de las figuras. Ahora veremos otras transformaciones del plano que no conservan ya la congruencia, pero sí la semejanza de figuras; es decir, con estas transformaciones cada figura se transforma en una figura semejante.

Consideremos un sistema de coordenadas en el plano y definamos una transformación que consista en asociar a cada punto A del plano otro punto A' de acuerdo con la siguiente orden:

"Multiplique por 3 las coordenadas de A".

Así, por ejemplo, si $A = (3, 4)$, el transformado de A será el punto

$$A' = (3 \times 3, 3 \times 4) = \boxed{(9, 12).}$$

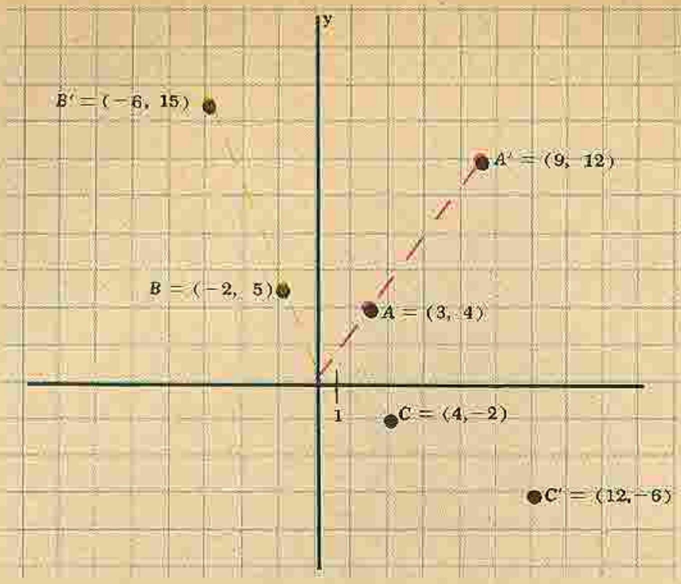
El transformado de $B = (-2, 5)$, será el punto

$$B' = (3(-2), 3 \times 5) = \boxed{(-6, 15).}$$

El transformado de $C = (4, -2)$, será el punto

$$C' = (3 \times 4, 3 \times (-2)) = \boxed{(12, -6).}$$

En el siguiente dibujo se ilustran los puntos A, B y C y sus transformados.



Como en las otras transformaciones que hemos estudiado, para indicar que un punto A se transforma en A' escribiremos $A \mapsto A'$, o bien, $(3, 4) \mapsto (9, 12)$. Así, por ejemplo,

$$(6, 2) \mapsto (3 \times 6, 3 \times 2) = (18, 6)$$
$$(-5, 0) \mapsto (3 \times (-5), 3 \times 0) = (-15, 0)$$
$$(4, -5) \mapsto (3 \times 4, 3 \times (-5)) = (12, -15)$$
$$(0, 0) \mapsto (3 \times 0, 3 \times 0) = (0, 0)$$

y, en general,

$$\boxed{(x, y) \mapsto (3x, 3y)}$$

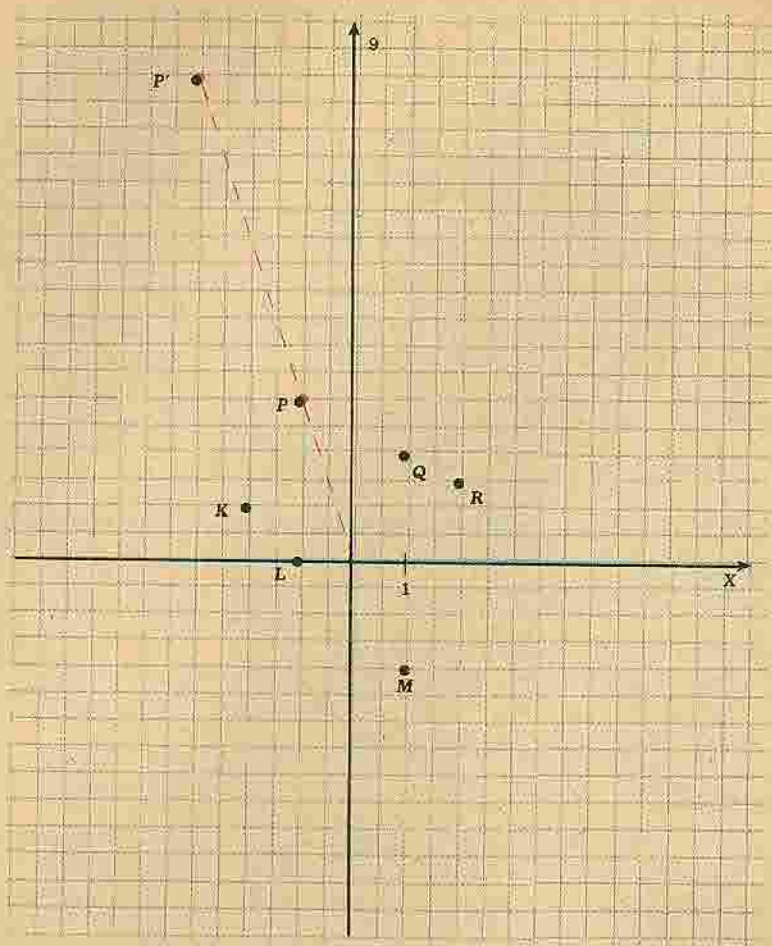
Ejercicio 13. En la anterior transformación del plano, es decir, en la transformación dada por la fórmula

$$\boxed{(x, y) \mapsto (3x, 3y)}$$

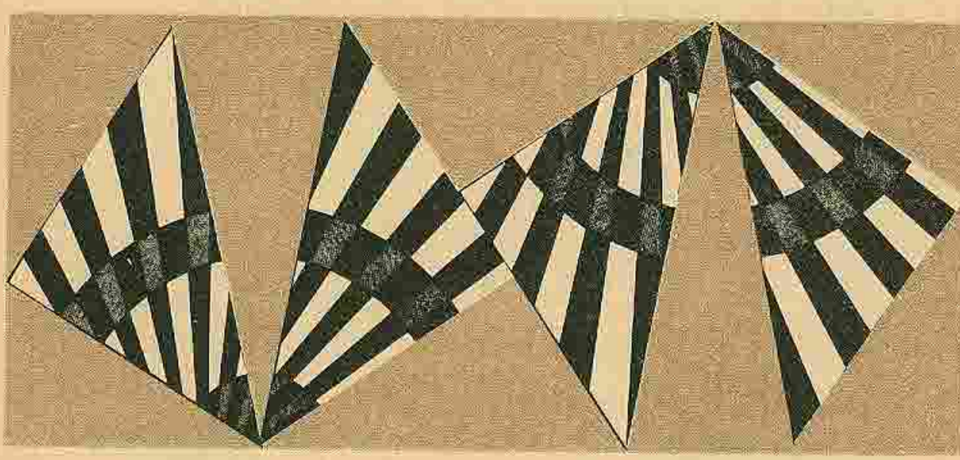
a) Encuentre los transformados de los puntos siguientes:

$P = (-1, 3)$	$P \mapsto P'$	$P' = (3 \times (-1), 3 \times 3) = (-3, 9)$
$Q = (1, 2)$	$Q \mapsto Q'$	$Q' = (3 \times \quad, 3 \times \quad) = (\quad, \quad)$
$R = (2, 1.5)$	$R \mapsto R'$	$R' =$
$K = (-2, 1)$	$K \mapsto K'$	$K' =$
$L = (-1, 0)$	$L \mapsto L'$	$L' =$
$M = (1, -2)$	$M \mapsto M'$	$M' =$

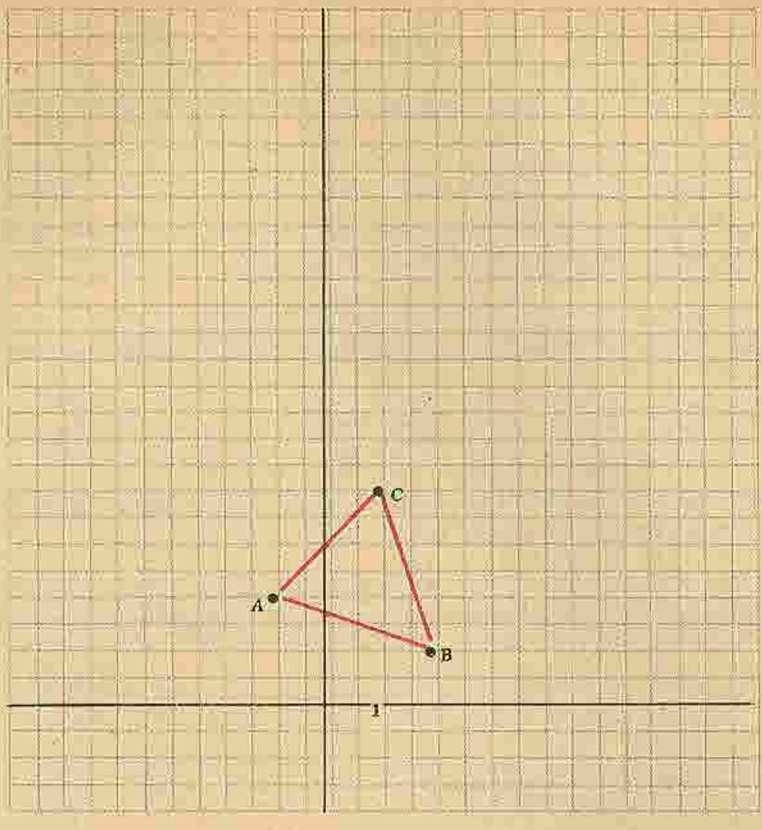
b) En el dibujo siguiente se han marcado los puntos P, Q, R, K, L y M del inciso a). Marque sus transformados P', Q', R', K', L' y M'. Observe que los puntos P, Q y R son colineales. ¿Cómo son sus transformados P', Q' y R'? Observe lo mismo con los puntos K, L, M y sus transformados.



Se puede demostrar que en esta transformación **la imagen de un segmento $\overline{AB}$ es el segmento que tiene por extremos los puntos A' y B' transformados de A y B respectivamente.**



Ejercicio 14. En el siguiente dibujo se ilustra el triángulo ABC.



$A = (-1, 2)$ $B = (2, 1)$ $C = (1, 4)$

a) Los transformados de los puntos A, B y C son, respectivamente,

$$A' = (3 \times \square, 3 \times \square) = (\square, \square)$$

$$B' = \square$$

$$C' = \square$$

b) Trace en el dibujo anterior los puntos A', B' y C'. Debido a que la imagen de un segmento, por ejemplo $\overline{AB}$, es el segmento $\overline{A'B'}$, el triángulo ABC se transforma en el triángulo $A'B'C'$.

c) Trace en el dibujo el $\triangle A'B'C'$, transformado del $\triangle ABC$.

d) Midiendo los lados respectivos, encuentre las razones siguientes:

$$\frac{AB}{A'B'} = \square \qquad \frac{BC}{B'C'} = \square \qquad \frac{CA}{C'A'} = \square$$

e) Recuerde la definición de semejanza de triángulos. Lo que se encontró en el inciso d) indica que los triángulos ABC y $A'B'C'$ son $\square$

f) En dos triángulos semejantes, los ángulos respectivos son
Por lo tanto,

$\angle A \cong$, $\angle B \cong$, $\angle C \cong$.

Observe que la razón de semejanza del triángulo ABC al triángulo transformado $A'B'C'$ es $\boxed{\frac{1}{3}}$.

En el ejemplo y los ejercicios anteriores hemos examinado la transformación del plano dada por la fórmula

$$(x, y) \mapsto (3x, 3y)$$

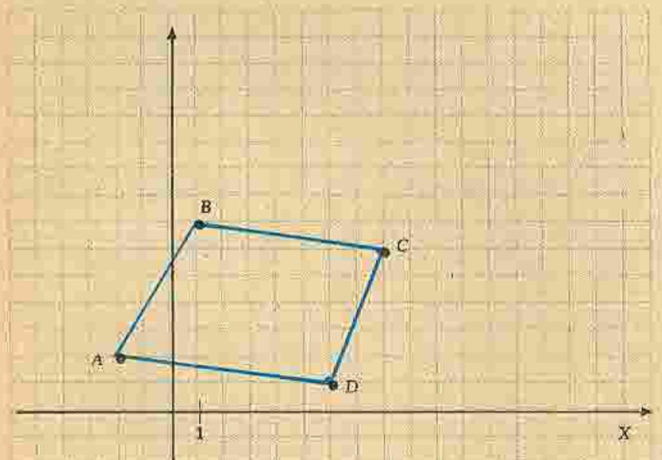
En general, podemos considerar transformaciones del plano determinadas por la regla

$$(x, y) \mapsto (kx, ky)$$

donde k es un número cualquiera diferente de cero.

En este tipo de transformaciones se puede ver que cada figura se transforma en una figura semejante a ella.

Ejercicio 15. En la siguiente figura está ilustrado un cuadrilátero $ABCD$.



$A = (-2, 2)$

$B = (1, 7)$

$C = (8, 6)$

$D = (6, 1)$

a) Considerando la transformación dada por la fórmula $(x, y) \to (2x, 2y)$ encuentre los transformados de los puntos A, B, C y D.

$A' =$ $B' =$ $C' =$ $D' =$

b) Trace en el dibujo anterior los puntos A', B', C' y D'.

c) Debido a que en esta transformación cada segmento se transforma en un segmento, el cuadrilátero $ABCD$ se transforma en el cuadrilátero $A'B'C'D'$. Trace el cuadrilátero transformado.

d) Midiendo los lados respectivos, encuentre las razones siguientes:

$\frac{AB}{A'B'} =$ $\frac{BC}{B'C'} =$ $\frac{CD}{C'D'} =$ $\frac{DA}{D'A'} =$

e) Compruebe que

$$\angle A \cong \angle A', \qquad \angle B \cong \angle B', \qquad \angle C \cong \angle C' \text{ y } \angle D \cong \angle D'.$$

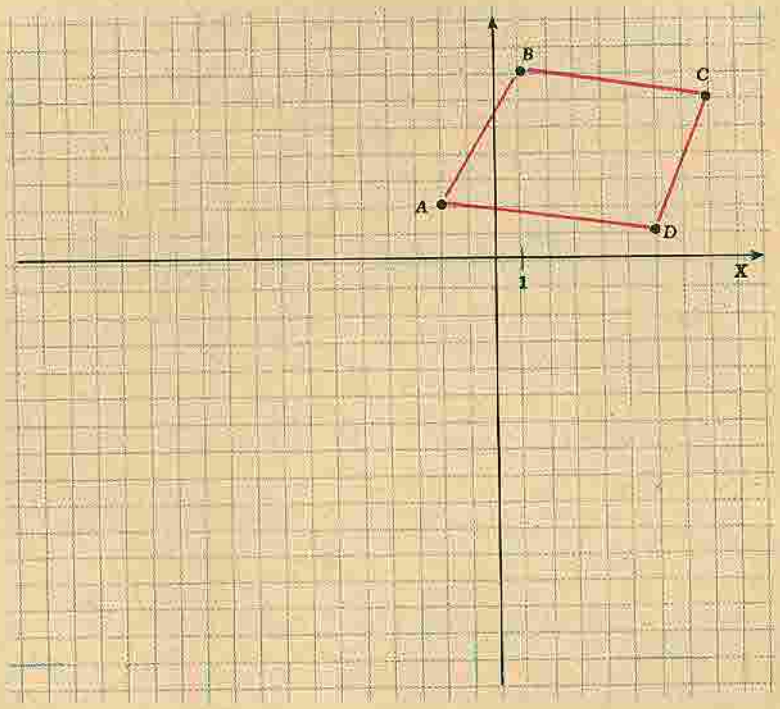
f) De d) y e) podemos concluir que el cuadrilátero $ABCD$ y su transformado $A'B'C'D'$ son

g) La razón de semejanza del primer cuadrilátero a su transformado es

---

Ejercicio 16. Haga los mismos pasos que en el ejercicio anterior con la transformación dada por la fórmula

$$(x, y) \to (-2x, -2y)$$



$A = (-2, 2)$ $\qquad$ $B = (1, 7)$

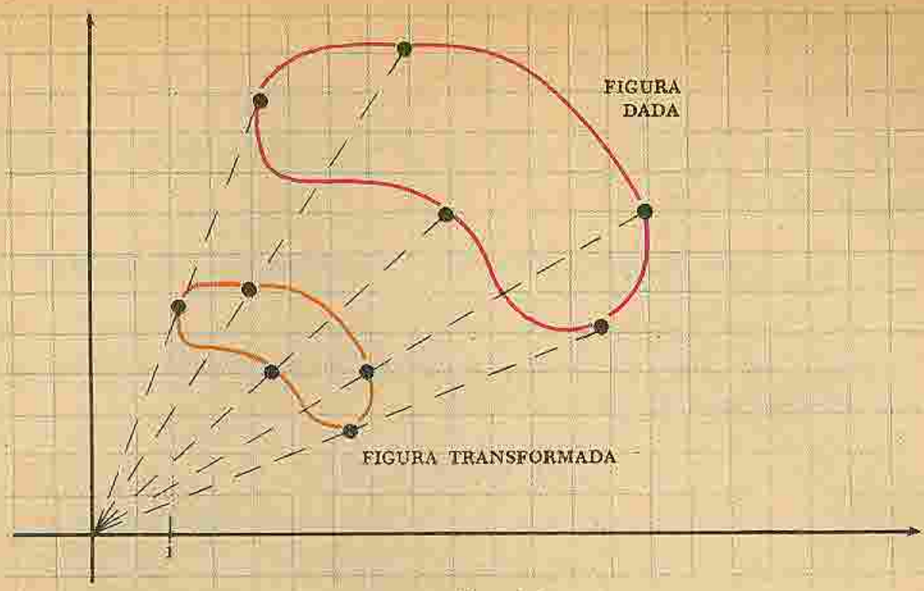
$C = (8, 6)$ $\qquad$ $D = (6, 1)$.

En general la transformación del plano dada por la regla $(x, y) \to (kx, ky)$, con $k \neq 0$, tiene las siguientes propiedades:

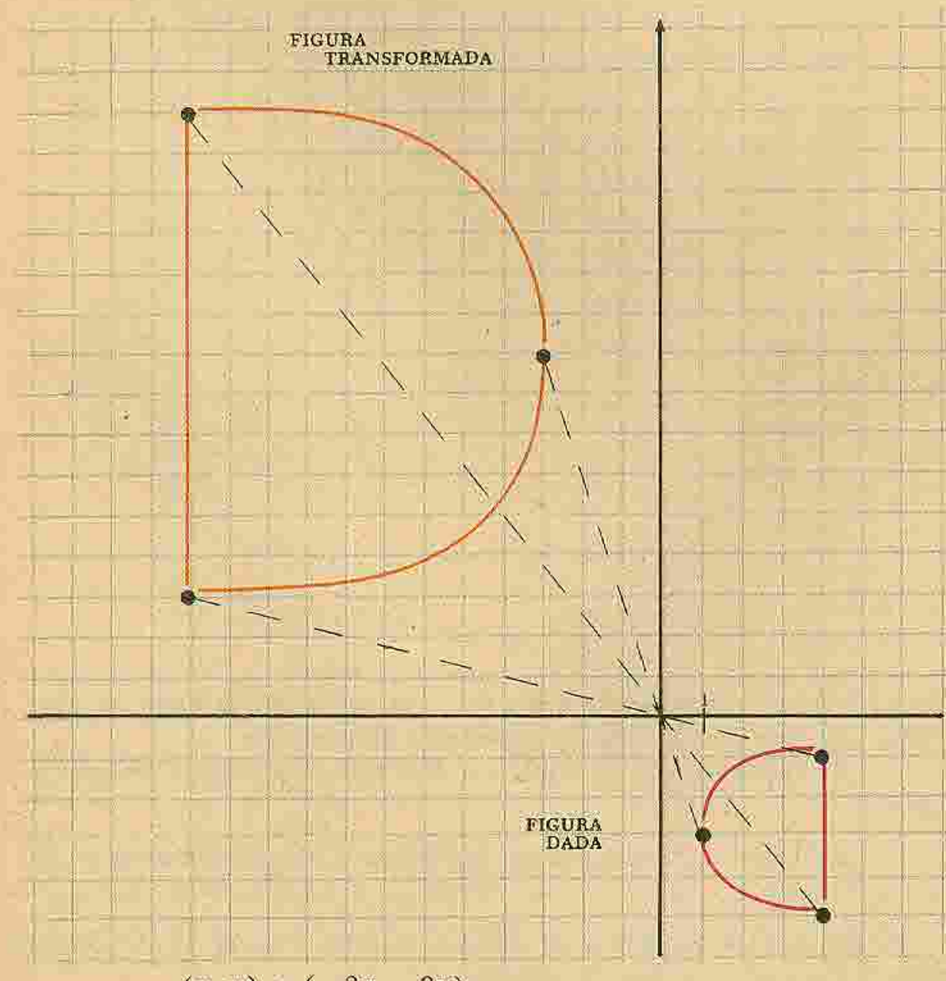
a) El transformado de cualquier figura es una figura semejante a ella.

b) La razón de semejanza de una figura a su transformado es $\frac{1}{k}$.

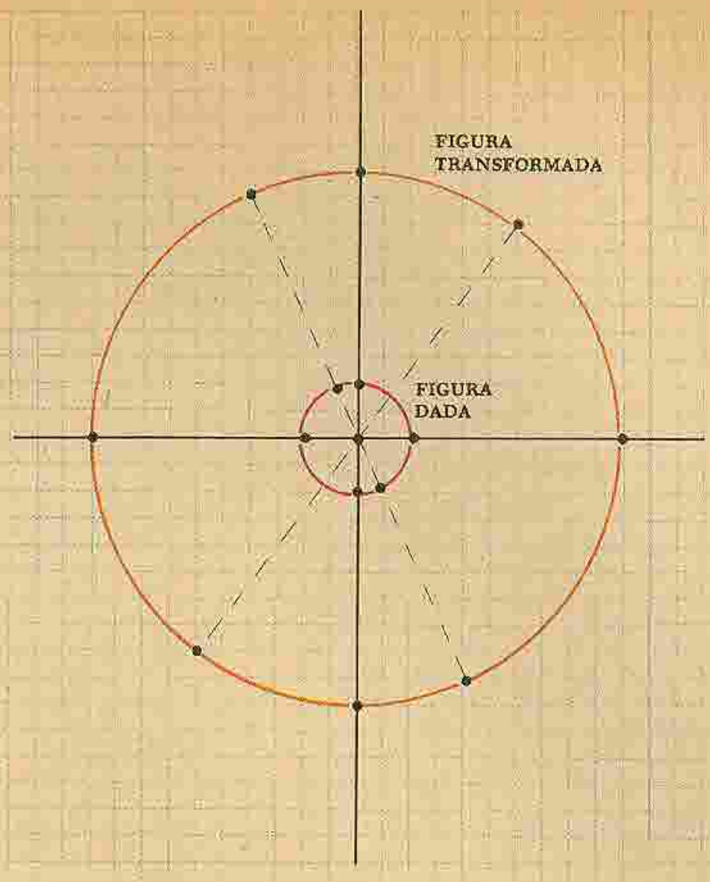
En los dibujos siguientes se ilustran algunas figuras y sus imágenes según las transformaciones indicadas.



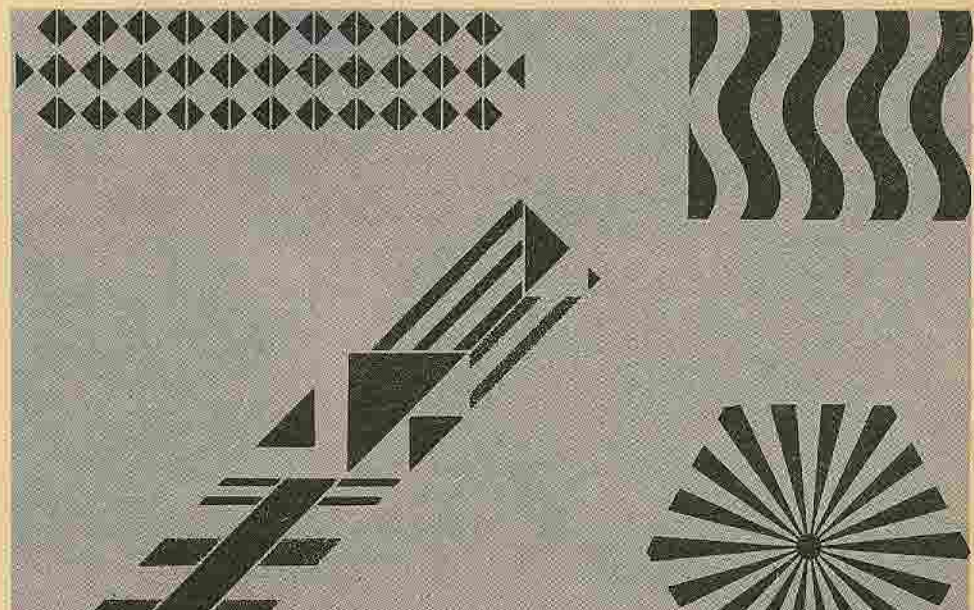
$$(x, y) \to \left(\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y\right)$$



$$(x, y) \to (-3x, -3y)$$

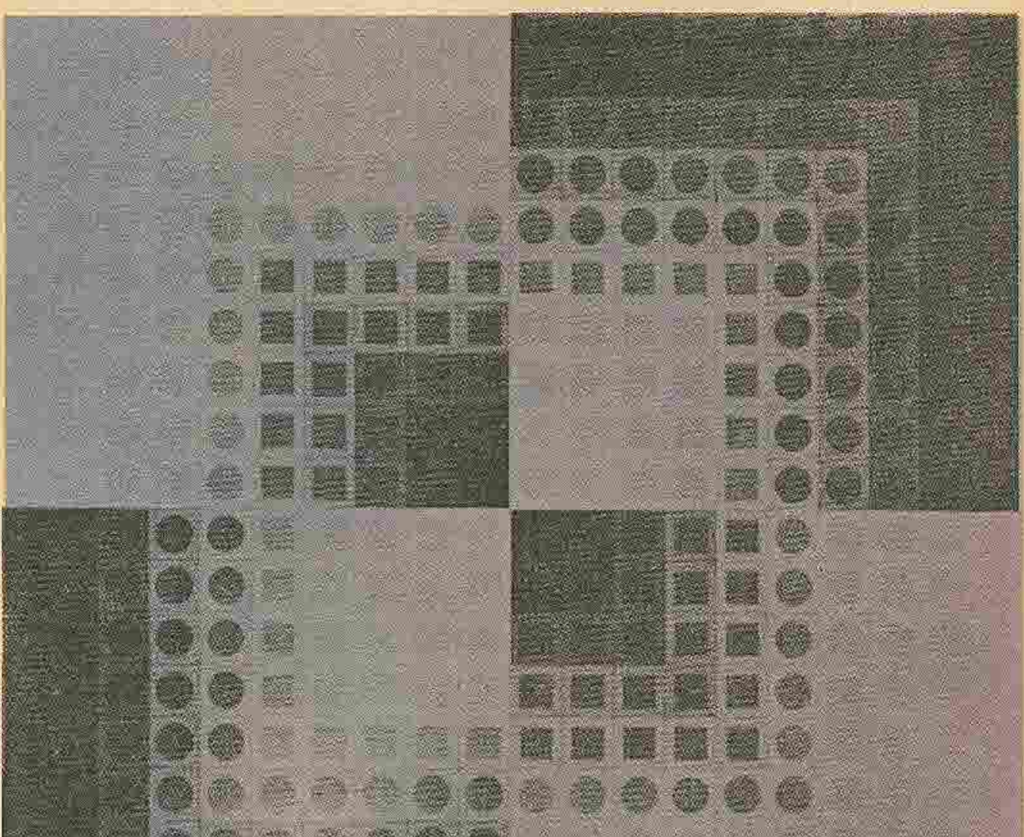


$(x, y) \to (5x, 5y)$



Capítulo octavo

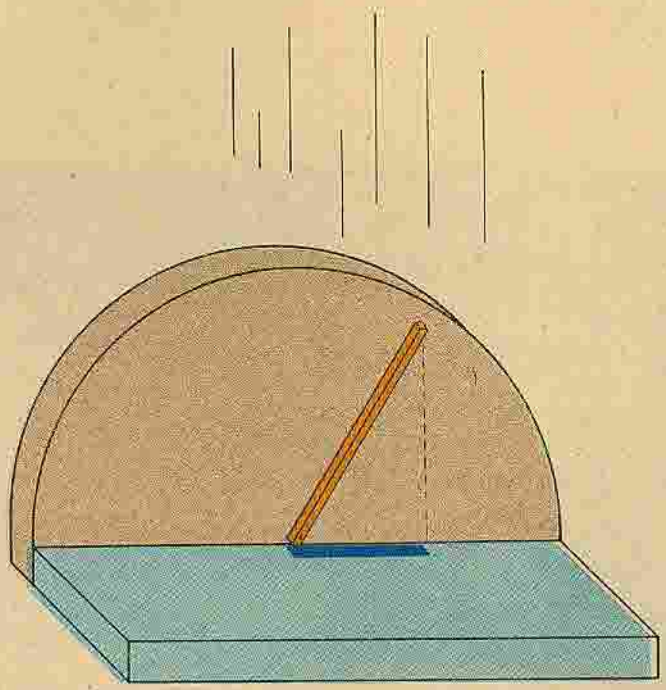
Funciones trigonométricas



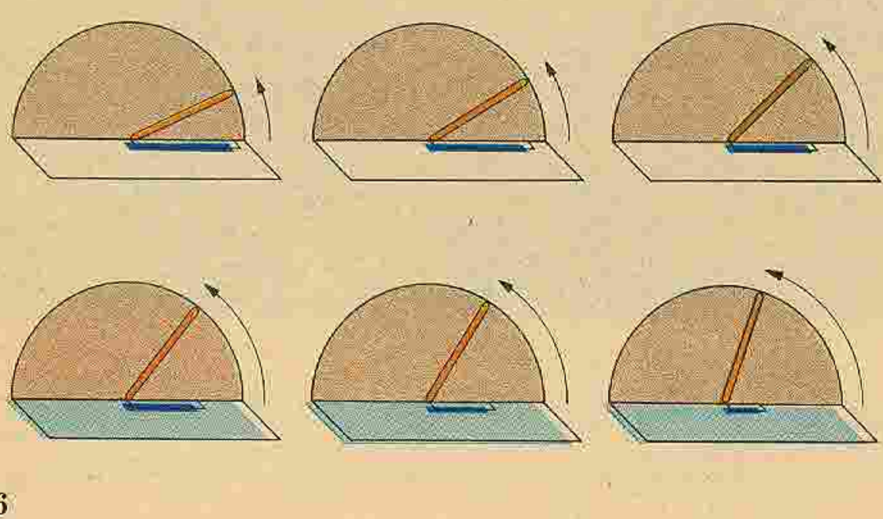
1. La función coseno

Con frecuencia el empleo de algún material o instrumento facilita el estudio de algunos temas. En este caso, para iniciar el estudio de las funciones trigonométricas, emplearemos un semicírculo de madera y una varilla a manera de manecilla de reloj.

Supondremos que sobre el semicírculo actúan rayos de luz verticales. De esa manera, la varilla proyectará una sombra sobre la base tal como se muestra en la figura.

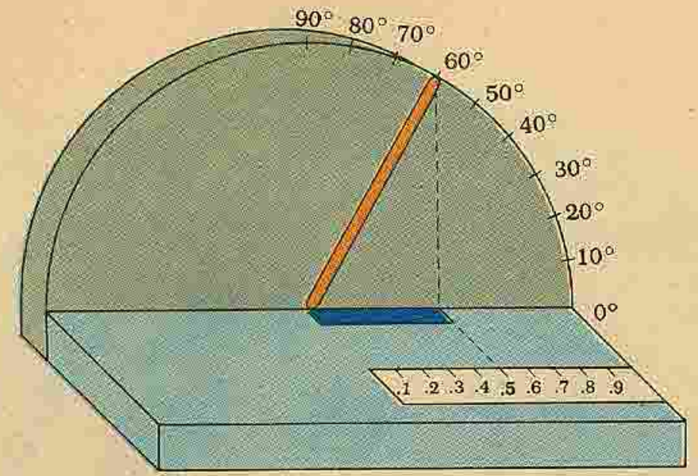


En las siguientes ilustraciones podemos observar claramente que a diferentes posiciones de la varilla corresponden sombras de diferente tamaño.



Podemos graduar convenientemente el semicírculo y colocar una regla sobre la base, de modo que se pueda medir el ángulo determinado por el giro de la varilla y la longitud de la sombra.

A continuación ilustramos esto.

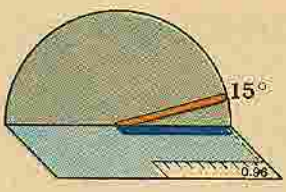


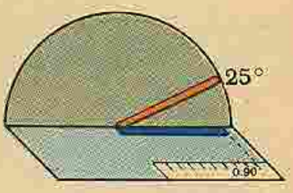
Aquí apreciamos que el giro de la varilla es de 60° y que la longitud de la sombra es de 0.5. (La regla sobre la base tiene como unidad la longitud de la varilla.)

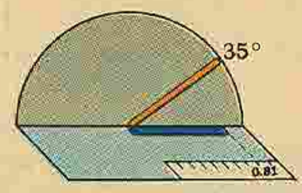
Construcción de una gráfica

Por ahora consideraremos en el semicírculo de madera, únicamente giros de la varilla menores de 90° y tomando en cuenta que a cada ángulo se le puede asociar la longitud de la correspondiente sombra de la varilla, construiremos una gráfica.

Ejemplo.

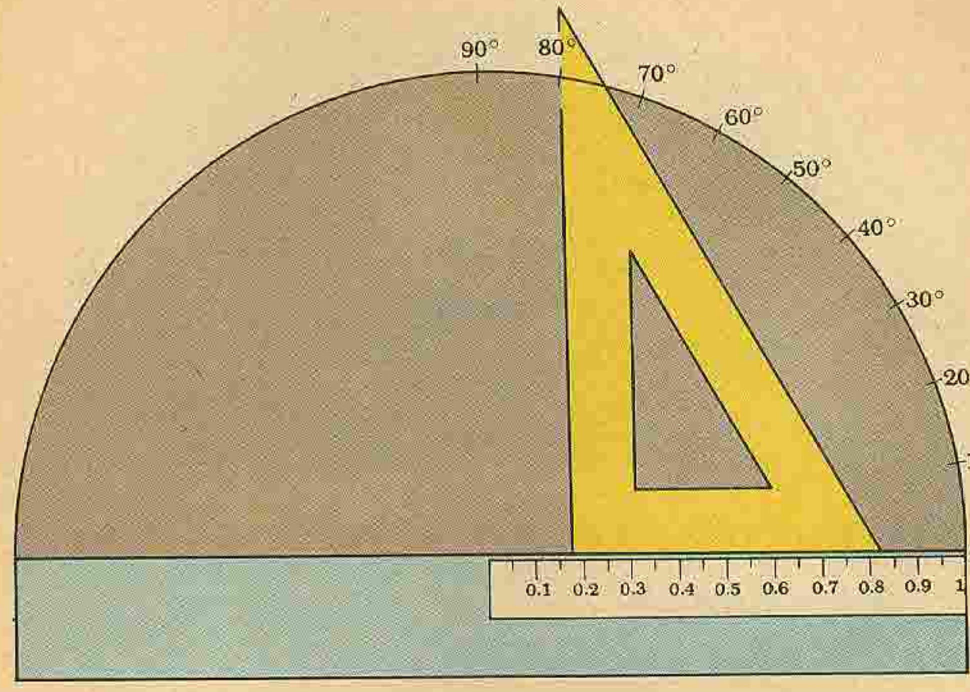






Al ángulo de 15° le corresponde el número 0.96, al ángulo de 25° le corresponde el número 0.90 y al ángulo de 35° el número 0.81.

Auxiliándose con una escuadra, y con el dibujo de un semicírculo, puede uno imaginar un giro de la varilla y medir la supuesta sombra, como se muestra a continuación.

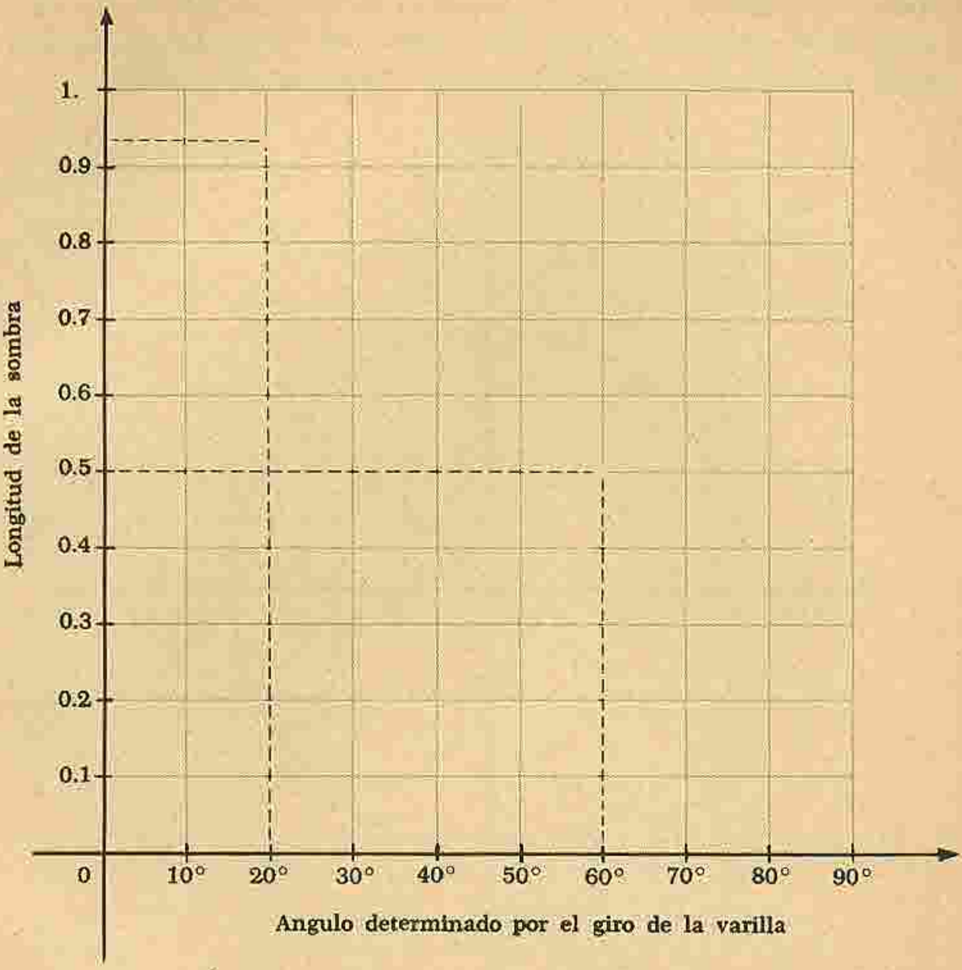


Aquí, en particular, a un ángulo de 80° le corresponde el número 0.17.

Ejercicio 1. Use la ilustración anterior y una escuadra, para completar la siguiente tabla.

Ángulo	°0	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
Número									0.17	

Ejercicio 2. Con los datos de la tabla anterior, complete la siguiente gráfica.



Ejercicio 3. Observe la gráfica que construyó y luego conteste las preguntas y complete las expresiones.

a) ¿Están los puntos de la gráfica contenidos en una recta?

b) Para un ángulo entre 40° y 50°, el número correspondiente está entre ____________ y ____________.

c) A ángulos cada vez mayores, corresponden números cada vez ____________.

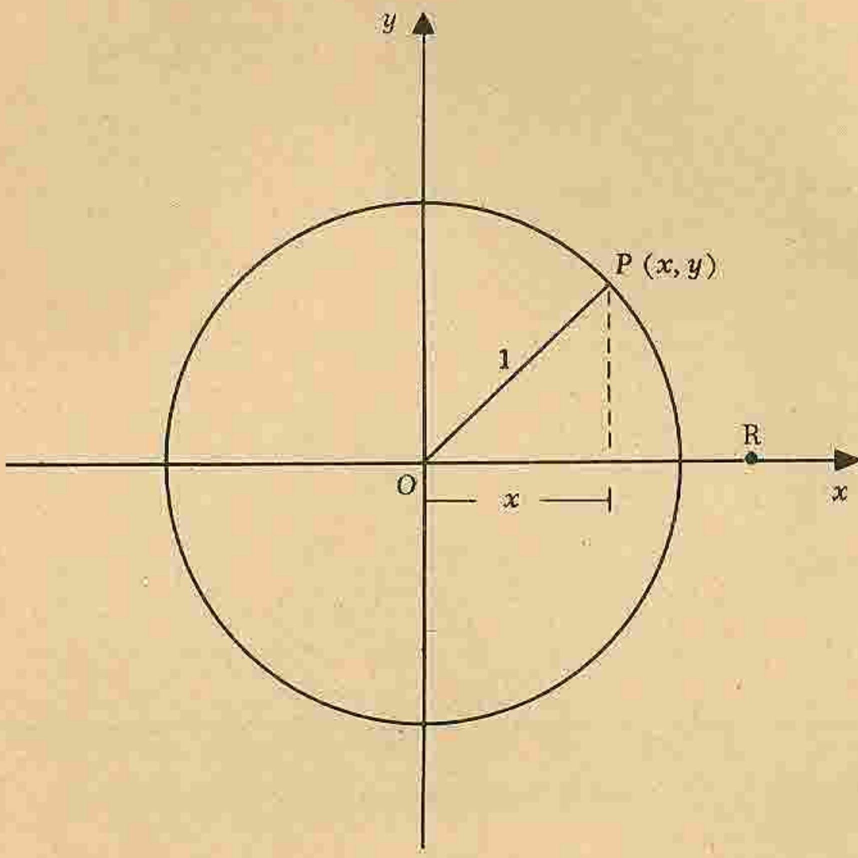
d) Para un ángulo entre ____________ y ____________, el número correspondiente está entre 0.5 y 0.

e) A ángulos mayores de 70° corresponden números menores que ____________.

f) A un ángulo mayor de 10° y menor que 40°, le corrresponde un número mayor que ____________ y menor que ____________.

g) ¿El número que le corresponde al ángulo de 60°, es la mitad del número que le corresponde al ángulo de 30°?

A fin de precisar las ideas anteriores vamos a considerar en un sistema de coordenadas una circunferencia cuyo centro esté en el origen y cuyo radio mida una unidad. Esta unidad será precisamente la longitud de la varilla que hemos usado en el semicírculo de madera.



En esta forma, cada punto P de la circunferencia en el primer cuadrante determina una posición de la varilla; o sea, un ángulo y la sombra de la varilla quedan determinados precisamente por la abscisa de cada punto P.

Considerando lo anterior, estableceremos una correspondencia, de tal modo que a cada $\angle ROP$ se le asocie la abscisa del punto P. Y esta correspondencia entre ángulos y números la llamaremos función coseno.

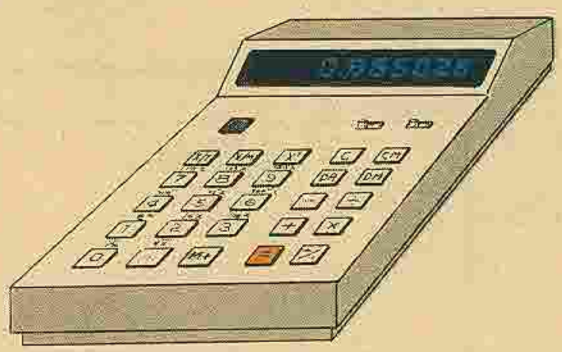
Observe que en la tabla anterior que usted elaboró aparecen algunos valores de esta función coseno.

Existen diversas tablas de esta función elaboradas de tal manera que puedan contener más valores y con una mayor precisión. Por ejemplo, en la siguiente tabla se anotan los ángulos de grado en grado, y el coseno correspondiente aparece con tres decimales.

r	cos r	r	cos r	r	cos r
1°	1.000	31°	.857	61°	.485
2°	.999	32°	.848	62°	.469
3°	.999	33°	.839	63°	.454
4°	.998	34°	.829	64°	.438
5°	.996	35°	.819	65°	.423
6°	.995	36°	.809	66°	.407
7°	.993	37°	.799	67°	.391
8°	.990	38°	.788	68°	.375
9°	.988	39°	.777	69°	.358
10°	.985	40°	.766	70°	.342
11°	.982	41°	.755	71°	.326
12°	.978	42°	.743	72°	.309
13°	.974	43°	.731	73°	.292
14°	.970	44°	.719	74°	.276
15°	.966	45°	.707	75°	.259
16°	.961	46°	.695	76°	.242
17°	.956	47°	.682	77°	.225
18°	.951	48°	.669	78°	.208
19°	.946	49°	.656	79°	.191
20°	.940	50°	.643	80°	.174
21°	.934	51°	.629	81°	.156
22°	.927	52°	.616	82°	.139
23°	.921	53°	.602	83°	.122
24°	.914	54°	.588	84°	.105
25°	.906	55°	.574	85°	.087
26°	.899	56°	.559	86°	.070
27°	.891	57°	.545	87°	.052
28°	.883	58°	.530	88°	.035
29°	.875	59°	.515	89°	.017
30°	.866	60°	.5	90°	0

Hay otras tablas en las que aparecen anotados los ángulos de minuto en minuto y el coseno correspondiente con 6 decimales.

Existen también pequeñas calculadoras que indican el coseno de un ángulo con 6 decimales.

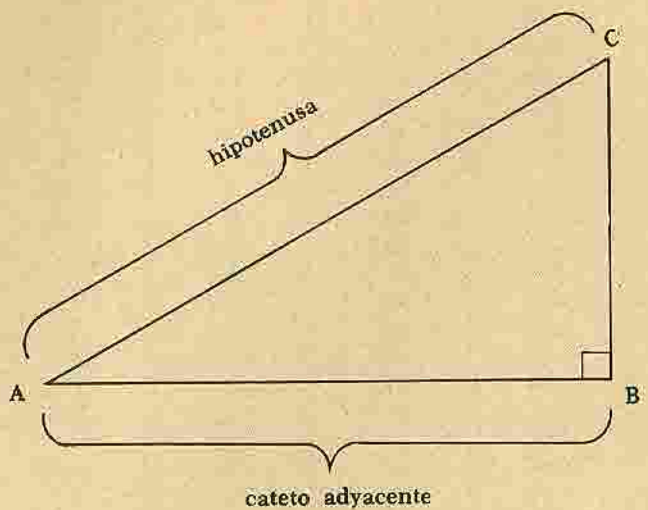


Estos instrumentos son empleados generalmente por ingenieros o técnicos muy especializados que deben resolver problemas cuya solución exige una gran precisión. Para el tipo de problemas que resolveremos aquí es suficiente la tabla anterior, de 3 decimales.

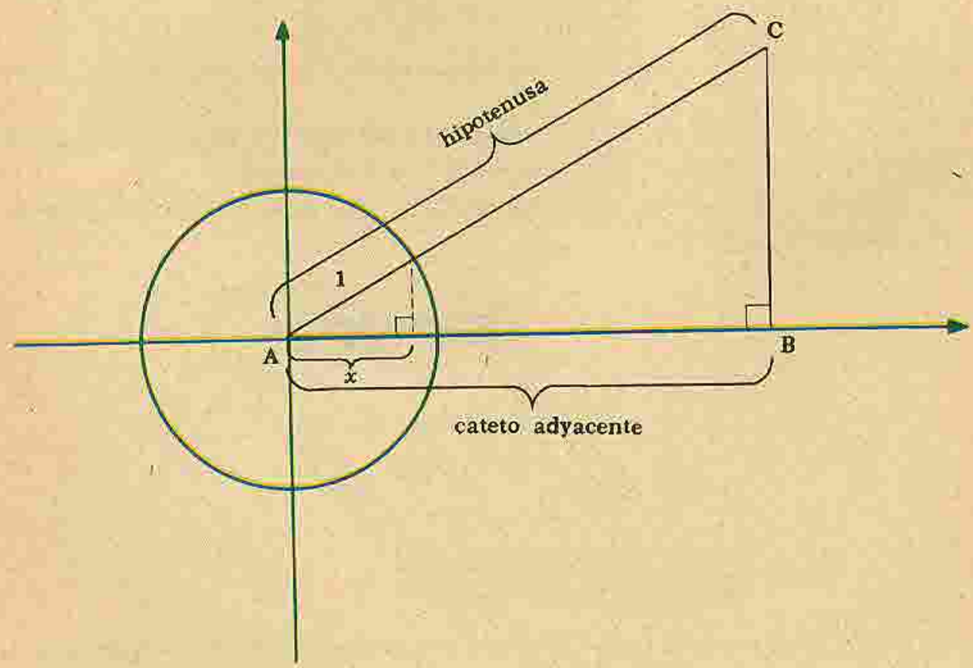
A continuación veremos cómo se puede usar la tabla de la función coseno en la resolución de algunos problemas.

Ejemplo. Se tiene un triángulo rectángulo cualquiera, $\triangle\ A B C$, en el cual se conoce la medida del ángulo $\angle A$ y se desea saber cuál es el cociente de la medida del cateto adyacente al $\angle A$ entre la medida de la hipotenusa.

Observación. En un triángulo rectángulo hablamos de cateto adyacente, con respecto a un ángulo, cuando el cateto está contenido en uno de los lados del ángulo.



Para resolver esto, primero tracemos en el triángulo un sistema de coordenadas y una circunferencia de radio 1.



Por lo visto anteriormente, sabemos que

$$\cos \angle A = \frac{x}{1}$$

Y como los triángulos de la figura son semejantes, tenemos que

$$\frac{x}{1} = \frac{\text{medida del cateto adyacente}}{\text{medida de la hipotenusa}}$$

Por lo tanto, en ese triángulo cualquiera se tiene que

$$\cos \angle A = \frac{\text{medida del cateto adyacente}}{\text{medida de la hipotenusa}}$$

Es decir, en cualquier triángulo rectángulo $\triangle\, A\, B\, C$, el cociente de la medida del cateto adyacente al $\angle\, A$ entre la medida de la hipotenusa, es el coseno del ángulo $\angle\, A$ y, por consiguiente, podemos buscarlo en la tabla de cosenos.

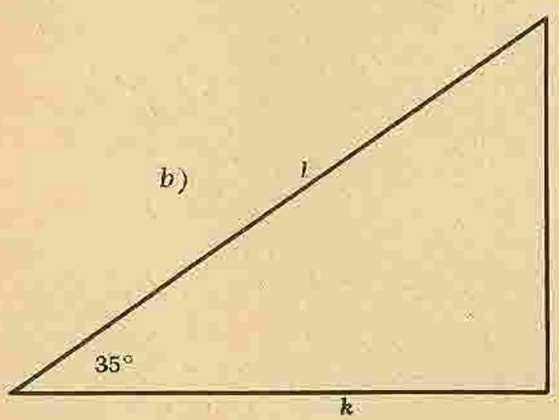
Así, por ejemplo, si en la tabla encontramos que el coseno de 40° es 0.707, concluimos que en cualquier triángulo rectángulo que tenga un ángulo de 40°, el cociente de la medida de cateto adyacente entre la medida de la hipotenusa será 0.707.

Ejercicio 4. Usando su tabla de la función coseno complete las siguientes expresiones.

a)

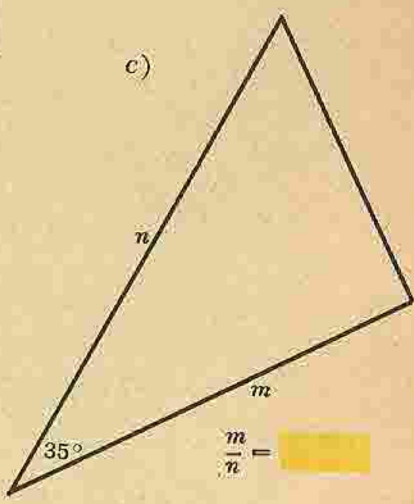
cos 35° =

b)



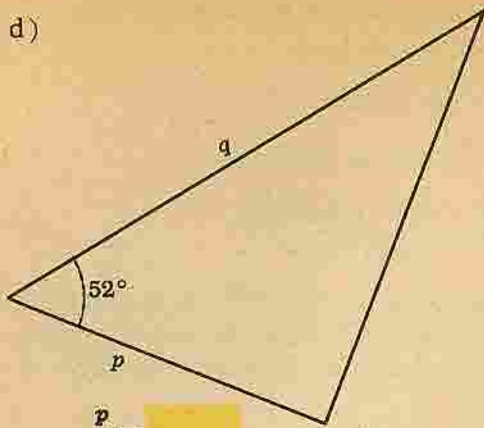
$\frac{k}{1} =$

c)



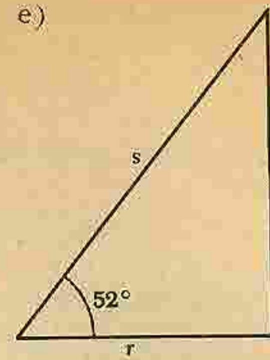
$\frac{m}{n} =$

d)



$\frac{p}{q} =$

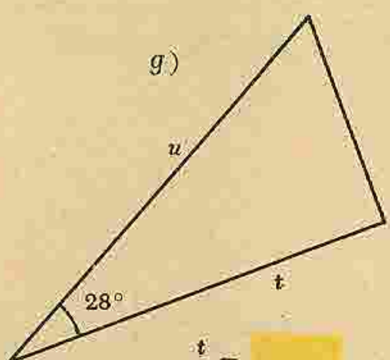
e)



$\frac{r}{s} =$

f) $\cos 52° =$

g)

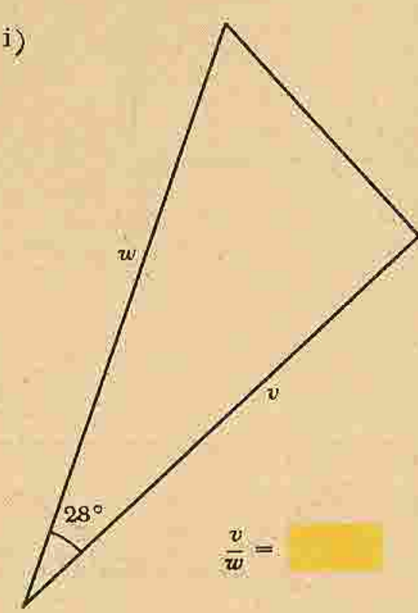


$\frac{t}{u} =$

h)

$\cos 28° =$

i)



$\frac{v}{w} =$

Antes de que resuelva usted algunos problemas veamos el siguiente.

Problema. Sobre una pared se apoya un vidrio formando un ángulo de 73° con el piso. Si se sabe que el vidrio mide 1.80 m de largo, ¿cuál es la distancia de la pared a la base del vidrio?

Resolución. Por lo que sabemos,

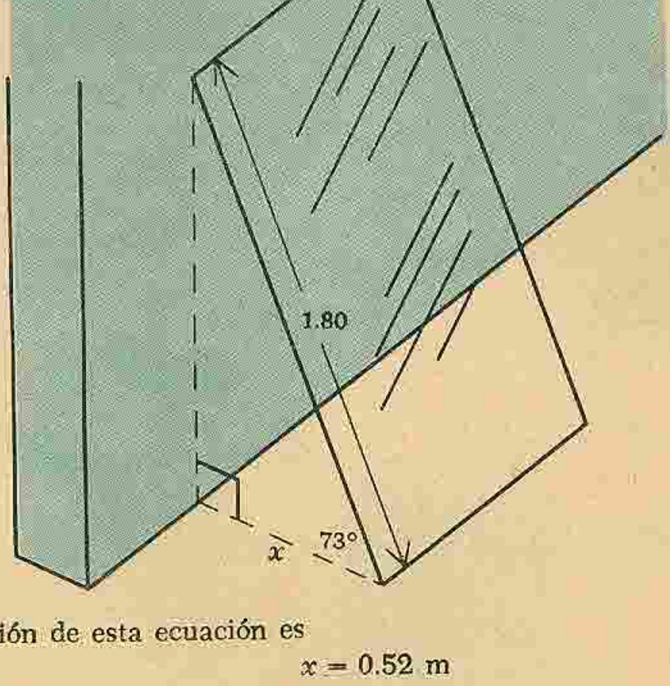
$$\cos 73° = \frac{x}{1.80}$$

En las tablas encontramos que

$$\cos 73° = 0.292$$

Entonces tenemos que

$$0.292 = \frac{x}{1.80}$$



La solución de esta ecuación es

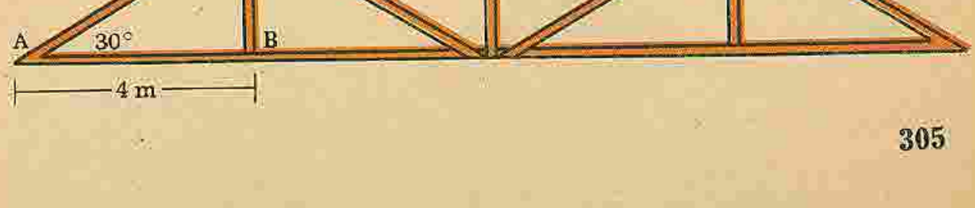
$$x = 0.52 \text{ m}$$

Por consiguiente, la respuesta al problema es:

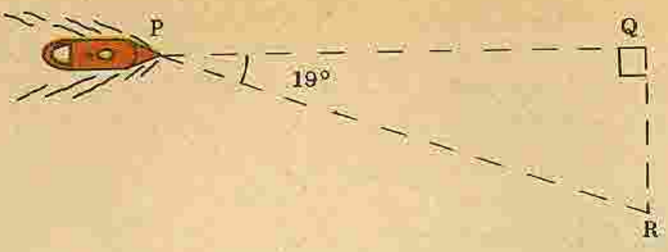
Respuesta. La distancia de la pared a la base del vidrio es .52 metros.

Problemas.

a) De acuerdo con la figura calcule la longitud de la viga cuyos extremos son A y C.

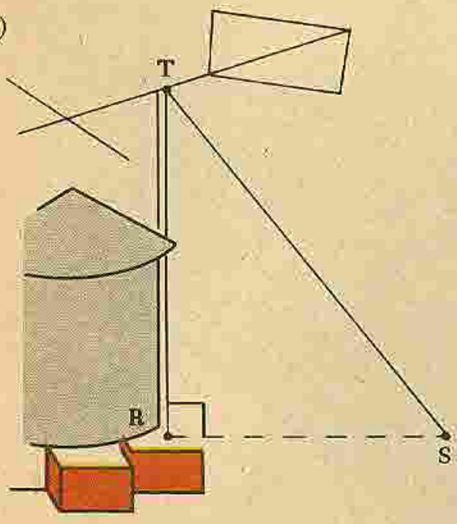


b) Un barco cambia su rumbo 19°, como se muestra en la figura.



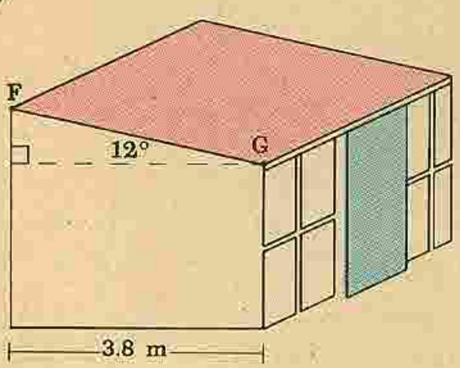
Si la distancia entre P y Q es de 8 millas, ¿cuál es la distancia entre P y R?

c)



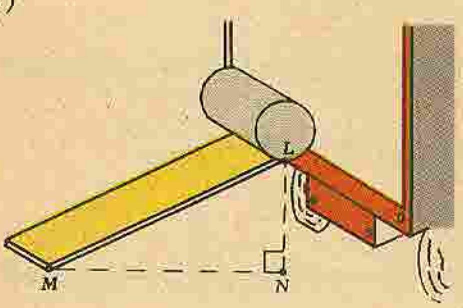
Una antena de televisión está sujeta como se muestra en la figura. Si el cable que va de T a S mide 4.5 m y la altura RT de la antena mide 3.5 m, ¿cuál es la medida del ángulo $\angle RTS$?

d)



Observe la figura. ¿Cuál es la longitud FG de la losa?

e)



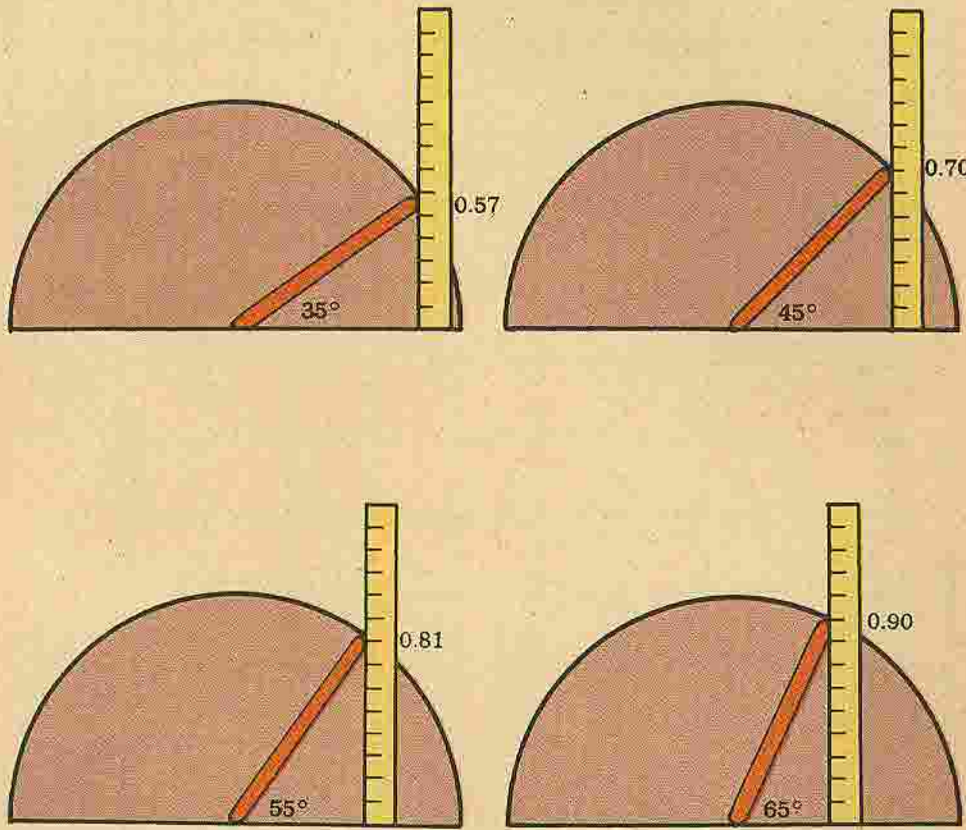
Si la longitud del tablón para descarga es 3.15 m y la distancia entre M y N es de 2.85 m, ¿cuál es la medida del ángulo que forma el tablón con el piso?

2. La función seno

Veremos a continuación otra correspondencia entre ángulos y números, a la cual se le da el nombre de función seno. Y también utilizaremos una tabla de esta función para resolver algunos problemas.

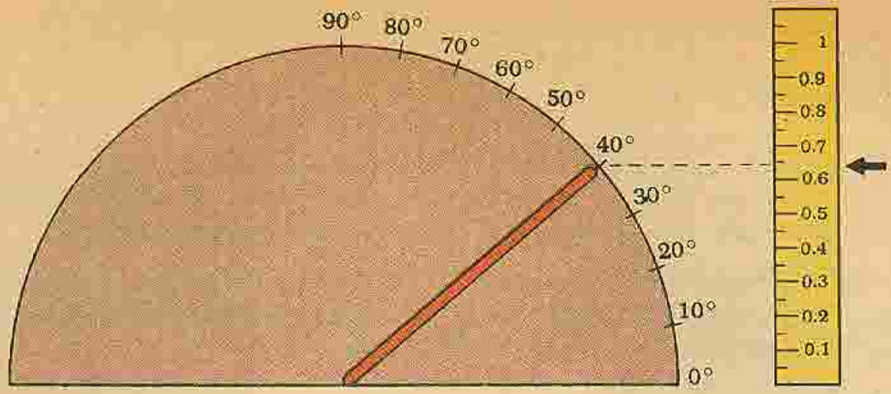
Consideremos nuevamente nuestro semicírculo de madera y hagamos una correspondencia de modo que a cada ángulo se le asocie la distancia que hay entre el extremo libre de la varilla y la base.

Ejemplo.



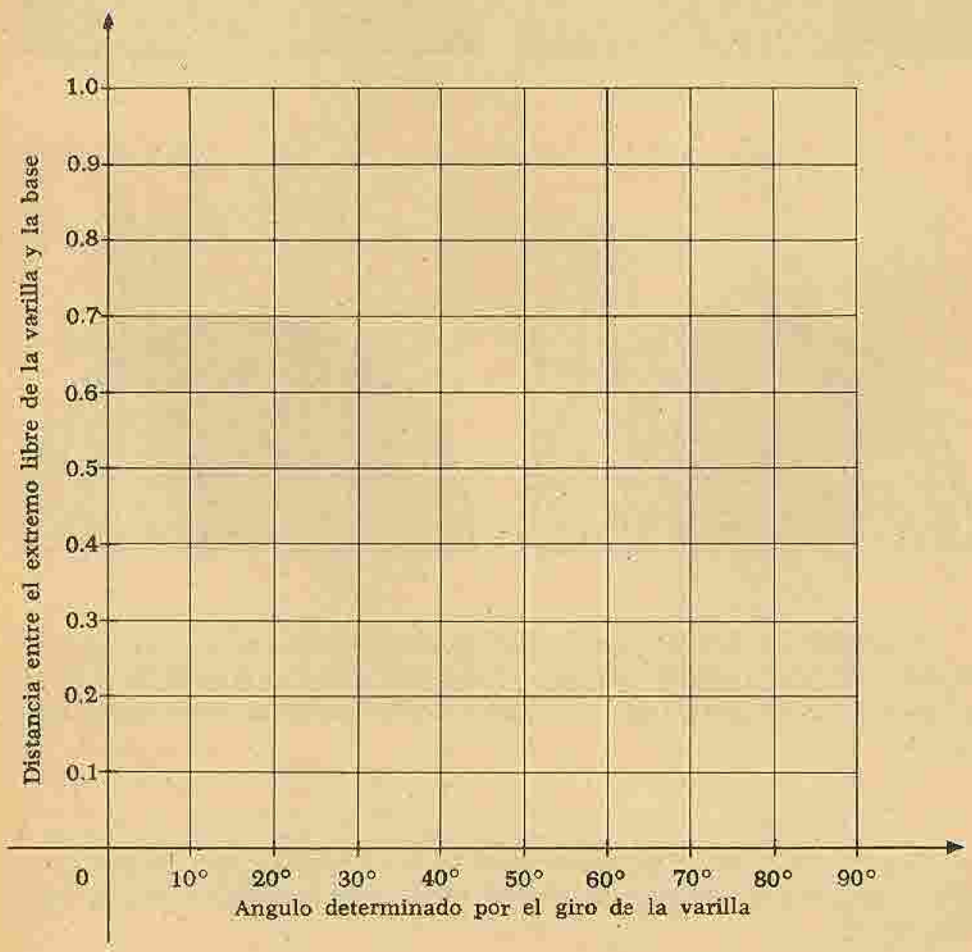
Al ángulo de 35° le corresponde el número .57; al ángulo de 45°, el número .70; al ángulo de 55°, el número .81 y al ángulo de 65°, el número .90. (Recuerde que la longitud de la varilla se toma como unidad.)

Ejercicio 5. Use la siguiente ilustración y, como en el ejemplo anterior, asocie a cada ángulo un número para completar la tabla que aparece abajo.



Angulo	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
Número					0.64					

Ejercicio 6. Con los datos de la tabla anterior complete la siguiente gráfica.



Ejercicio 7. Observe la gráfica anterior y conteste las siguientes preguntas.

a) ¿Están los puntos de la gráfica contenidos en una recta?

b) ¿Es esta gráfica igual a la de la función coseno?

c) ¿A ángulos cada vez mayores, corresponden números cada vez menores?

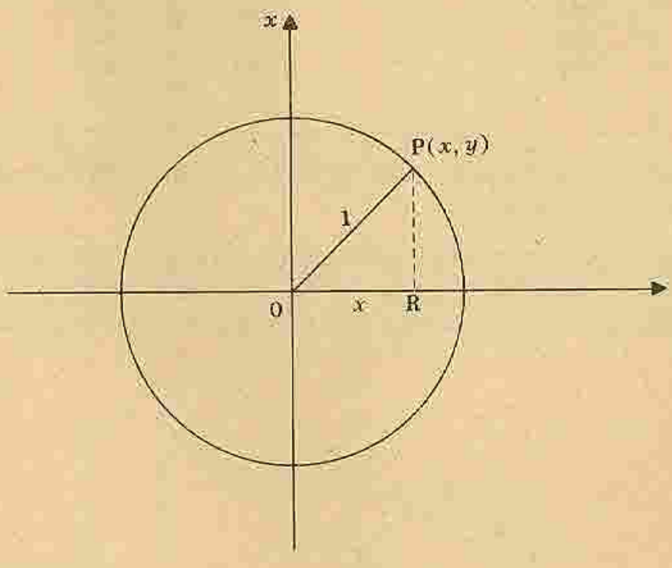
d) ¿A ángulos cada vez menores, corresponden números cada vez menores?

e) ¿A un ángulo entre 20° y 30° le corresponde un número entre .34 y .5?

f) ¿Hay en la gráfica dos ángulos a los que les corresponda un mismo número?

g) ¿Hay un ángulo al que le corresponda el mismo número tanto en la gráfica de la función coseno como en ésta?

Nuevamente, a fin de buscar una mayor precisión al estudiar la función seno, consideraremos en el plano cartesiano una circunferencia de radio 1 que tenga su centro en el origen.



De esta manera encontramos que la función seno asocia a cada ángulo ∠ R O P, la ordenada del punto P. Y por lo tanto, podemos escribir:

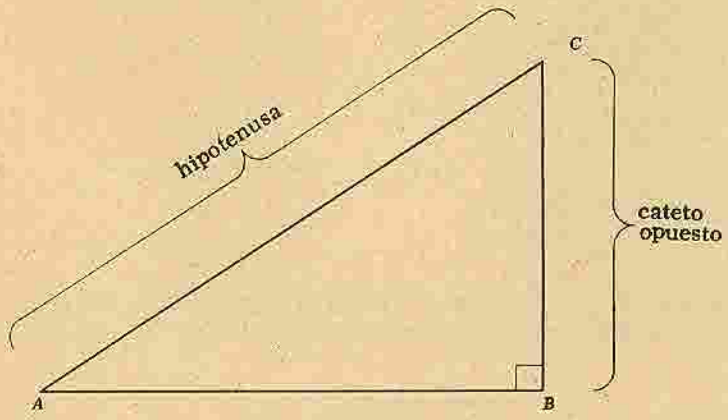
$$\text{sen } \angle \text{R O P} = y$$

En la siguiente tabla aparecen anotados los ángulos de grado en grado y los senos correspondientes con 3 decimales.

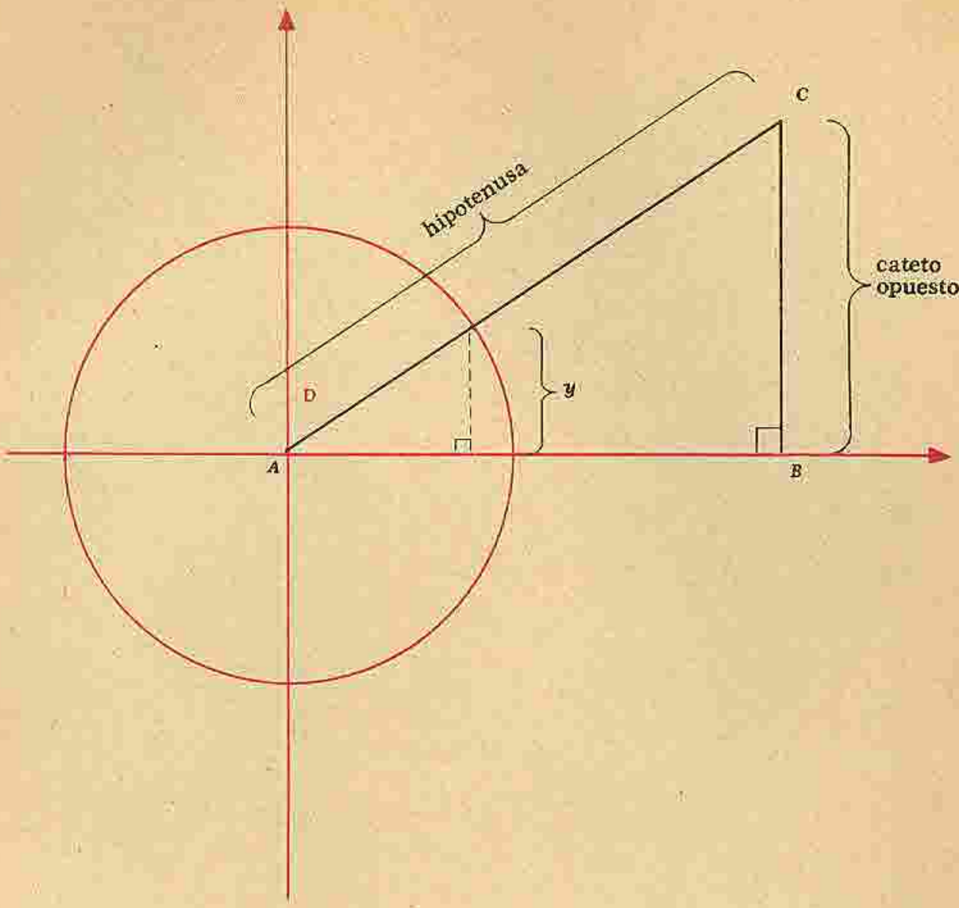
r	sen r	r	sen r	r	sen r
1°	.017	31°	.515	61°	.875
2°	.035	32°	.530	62°	.883
3°	.052	33°	.545	63°	.891
4°	.070	34°	.559	64°	.899
5°	.087	35°	.574	65°	.906
6°	.105	36°	.588	66°	.914
7°	.122	37°	.602	67°	.921
8°	.139	38°	.616	68°	.927
9°	.156	39°	.629	69°	.934
10°	.174	40°	.643	70°	.940
11°	.191	41°	.656	71°	.946
12°	.203	42°	.669	72°	.951
13°	.225	43°	.682	73°	.956
14°	.242	44°	.695	74°	.961
15°	.259	45°	.707	75°	.966
16°	.276	46°	.719	76°	.970
17°	.292	47°	.731	77°	.974
18°	.309	48°	.743	78°	.978
19°	.326	49°	.755	79°	.982
20°	.342	50°	.766	80°	.985
21°	.358	51°	.777	81°	.988
22°	.375	52°	.788	82°	.990
23°	.391	53°	.799	83°	.993
24°	.407	54°	.809	84°	.995
25°	.423	55°	.819	85°	.996
26°	.438	56°	.829	86°	.998
27°	.454	57°	.839	87°	.999
28°	.469	58°	.848	88°	.999
29°	.485	59°	.857	89°	.999
30°	.5	60°	.866	90°	1

Esta tabla de la función seno también puede utilizarse en la resolución de algunos problemas.

Ejemplo. Supongamos que un triángulo rectángulo cualquiera $\triangle$ A B C, conocemos el valor del ángulo $\angle$ A y queremos calcular el cociente de la medida del cateto opuesto entre la medida de la hipotenusa.



Para resolver esto podemos considerar en el triángulo un sistema de coordenadas y una circunferencia de radio 1 como se muestra a continuación.



$$\text{sen } \angle \text{A} = \frac{y}{1}$$

Y como los triángulos de la figura son semejantes, tenemos que

$$\frac{y}{1} = \frac{\text{medida del cateto opuesto}}{\text{medida de la hipotenusa}}$$

Por lo tanto, en cualquier triángulo rectángulo $\triangle ABC$ ocurre que

$$\text{sen } \angle A = \frac{\text{medida del cateto opuesto}}{\text{medida de la hipotenusa}}$$

Esto es, en cualquier triángulo rectángulo el cociente del cateto opuesto a un ángulo $\angle A$ entre la hipotenusa es el seno de ese ángulo A y, por lo tanto, dicho cociente se puede buscar en la tabla de senos.

Ejercicio 8. Use su tabla de la función seno para completar las siguientes expresiones.

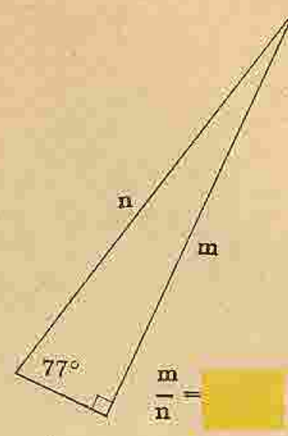
a)

sen $77^\circ =$

b)

$\frac{k}{l} =$

c)

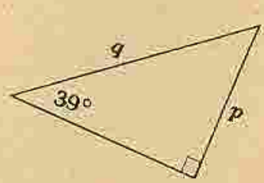


$\frac{m}{n} =$

d)

sen $39^\circ =$

e)

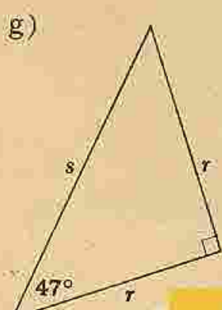


$\frac{p}{q} =$

f)

$\frac{x}{q} =$

g)



$\frac{r}{s} =$

h)

sen $47^\circ =$

i)

$\frac{t}{u} =$

Ejercicio 9. Resuelva las siguientes ecuaciones.

a) sen $\quad = 0.36$

b) cos $\quad = 0.39$

c) $x = \cos 58^\circ$

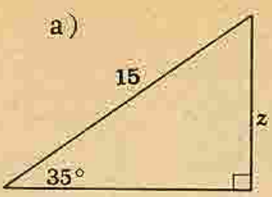
d) $\cos 25^\circ =$

e) $x = \text{sen } 75^\circ$

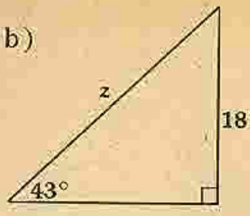
f) sen $x = 0.59$

Ejercicio 10. En cada inciso encuentre el valor de z.

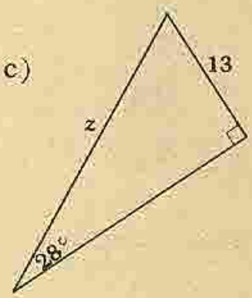
a)



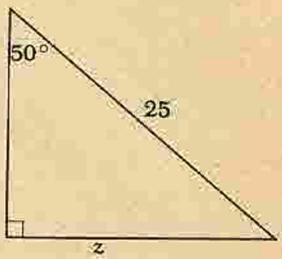
b)



c)

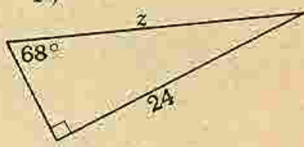


d)



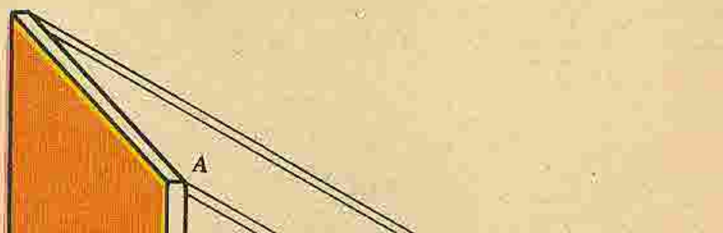
e)

f)

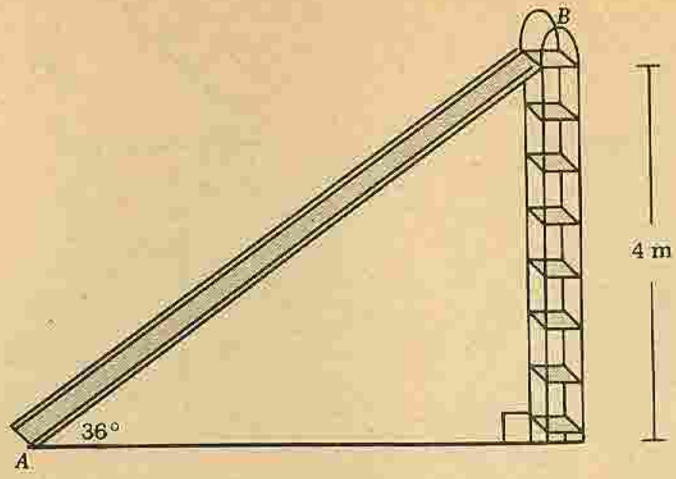


Problemas

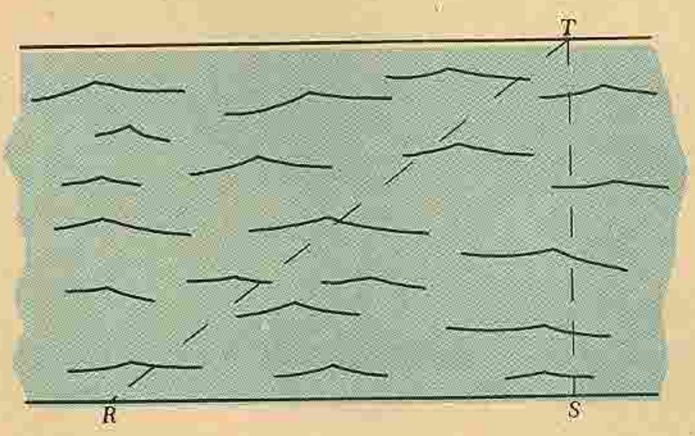
a) ¿Cuánto mide el cable de extremos A y C, si la altura del anuncio es de 3.5 m y el cable forma con el suelo un ángulo de 29°?



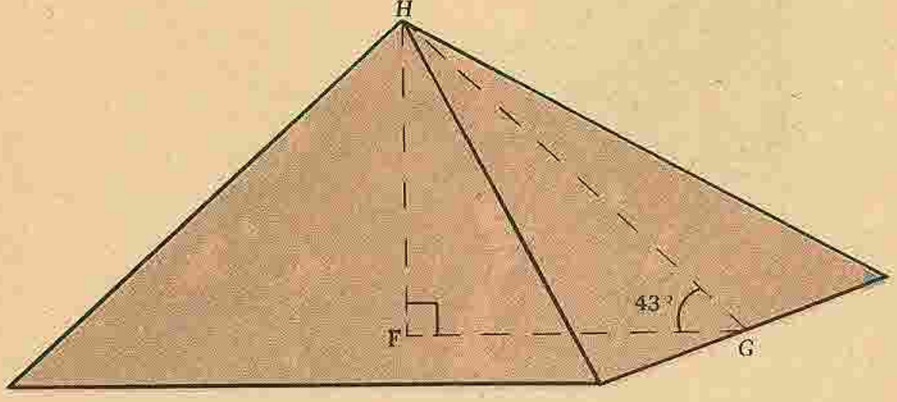
b) Se quiere construir una "resbaladilla" de manera que forme un ángulo de 36° con el suelo. Si la altura deberá ser de 4 m, ¿cuál deberá ser la medida entre los puntos A y B?



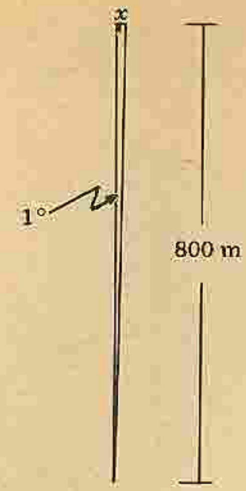
c) El ángulo $\angle TRS$ mide 36° y la distancia entre R y T es de 36 m, ¿cuál es el ancho del río?



d) Observe la ilustración. Si la distancia de H a G es de 75 m y el ángulo $\angle HGF$ es de 43°. ¿Cuál es la altura de la pirámide?

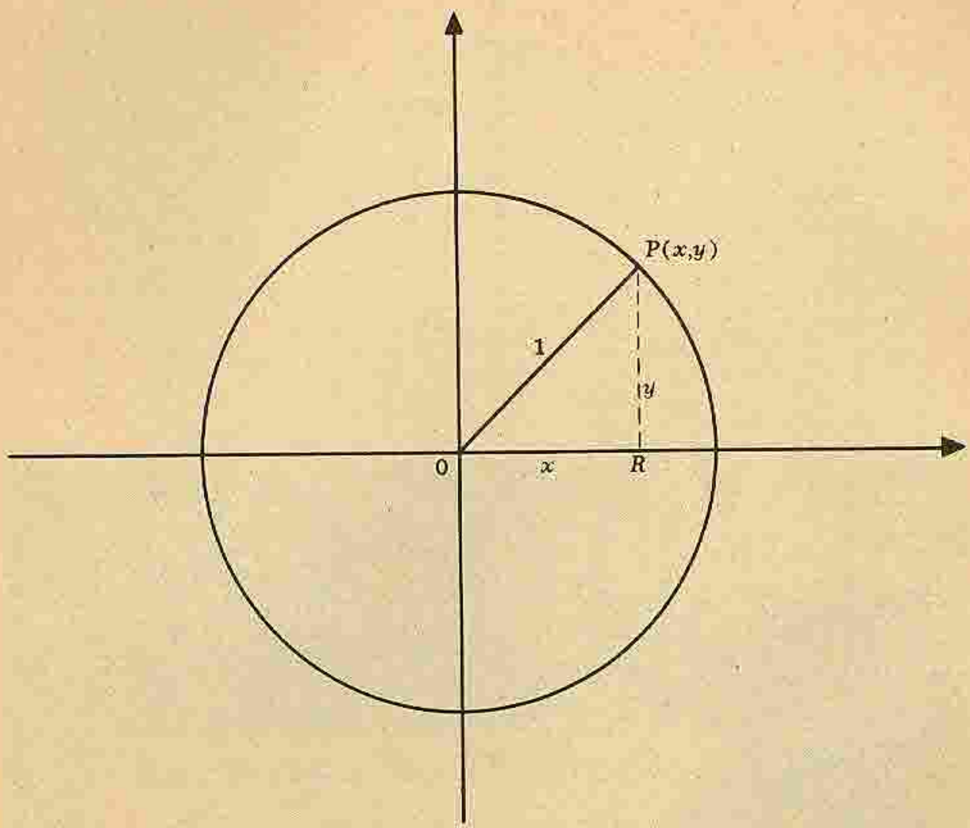


e) Si un proyectil se desvió 1° de su trayectoria, ¿cuánto se ha apartado de ésta al recorrer 800 m?



3. La función tangente

Consideremos nuevamente la figura ya conocida por nosotros: la circunferencia de radio 1 y cuyo centro está en el origen de un sistema de coordenadas.



Hablaremos ahora de la función tangente, la cual asocia a cada ángulo $\angle R\,O\,P$, el cociente $\frac{y}{x}$; es decir, la ordenada del punto P sobre la abscisa del mismo. Escribiremos entonces

$$\tan \angle R\,O\,P = \frac{y}{x}$$

Anteriormente vimos que

$$\operatorname{sen} \angle R\,O\,P = y$$

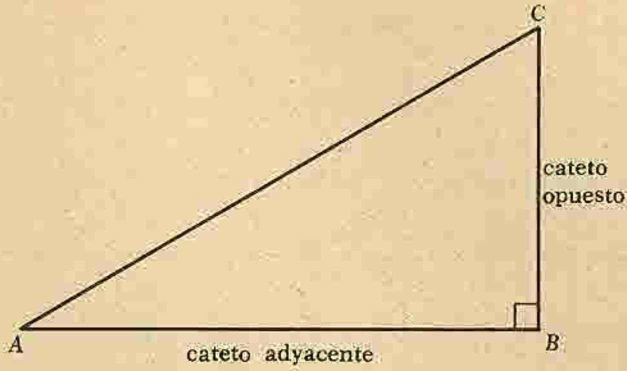
$$\cos \angle R\,O\,P = x$$

Entonces, sustituyendo estos valores en la definición anterior, tenemos que

$$\tan \angle R\,O\,P = \frac{\operatorname{sen} \angle R\,O\,P}{\cos \angle R\,O\,P}$$

Ejercicio 11. Pruebe que en un triángulo rectángulo cualquiera $\triangle ABC$, la tangente del ángulo $\angle A$ es igual a la medida del cateto opuesto entre la medida del cateto adyacente.

$$\tan \angle A = \frac{\text{medida del cateto opuesto}}{\text{medida del cateto adyacente}}$$



(Sugerencia: Considere en el triángulo un sistema de coordenadas y una circunferencia de radio 1 con centro en el origen.)

Usaremos ahora la expresión $\tan \angle A = \dfrac{\operatorname{sen} \angle A}{\cos \angle A}$, para obtener la tangente de un ángulo.

Ejemplo. Queremos obtener la tangente de 15° y sabemos que $\operatorname{sen} 15° = .25$ y $\cos 15° = .96$.

Escribimos entonces

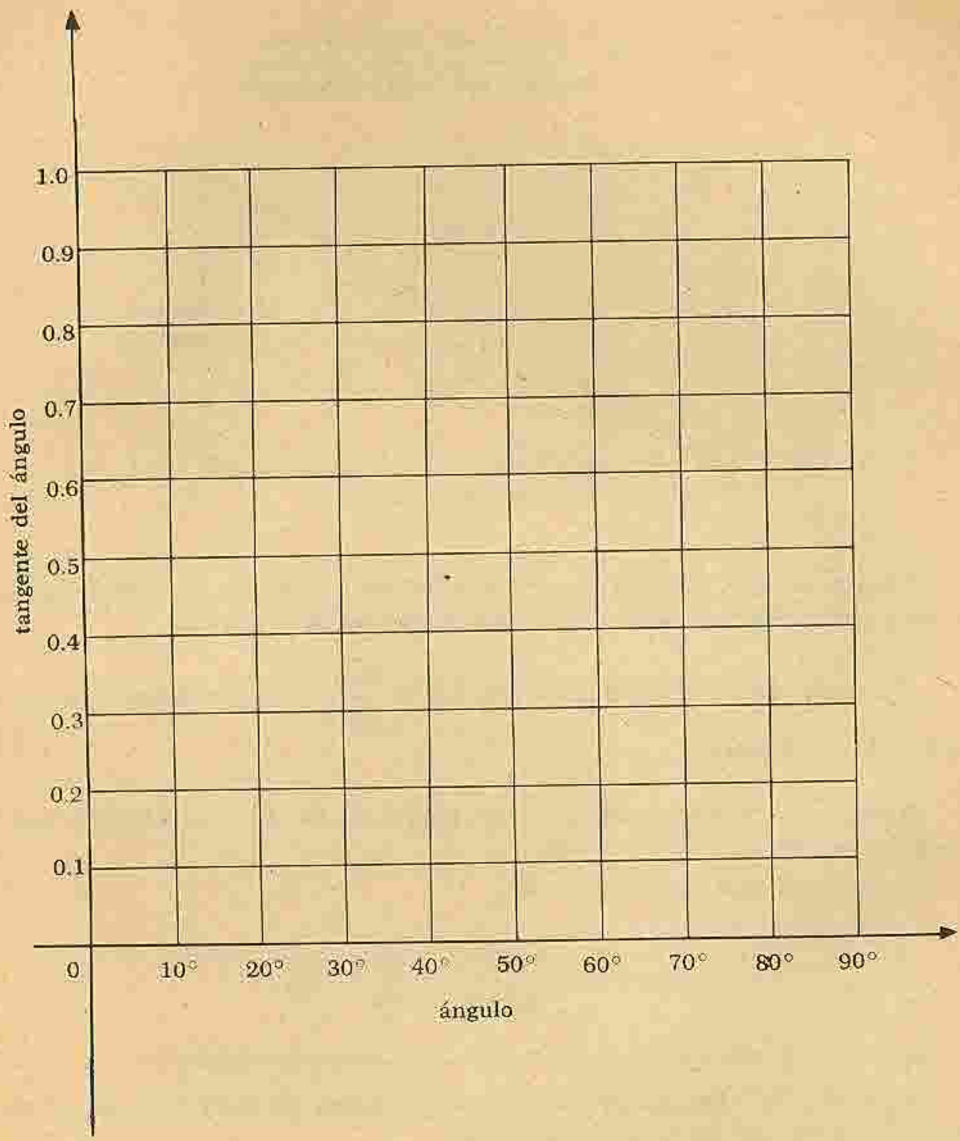
$$\tan 15° = \frac{\operatorname{sen} 15°}{\cos 15°} = \frac{.25}{.96} = .26,$$

Ejercicio 12. Empleando el seno y el coseno de cada uno de los siguientes ángulos, obtenga su tangente.

Angulo	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
tan del ángulo										

Como en los casos de las tablas para la función seno y la función coseno, la tabla para la función tangente también nos servirá para resolver algunos problemas.

Ejercicio 13. De acuerdo con la tabla anterior, complete la siguiente gráfica.



Ejercicio 14.

a) Por los puntos de la gráfica anterior, trace una línea curva.

b) Utilizando la gráfica obtenga la tangente de 35°. Compárela con el valor correspondiente en las tablas de la Pág. 320.

c) Usando la gráfica calcule aproximadamente el ángulo cuya tangente es .4.

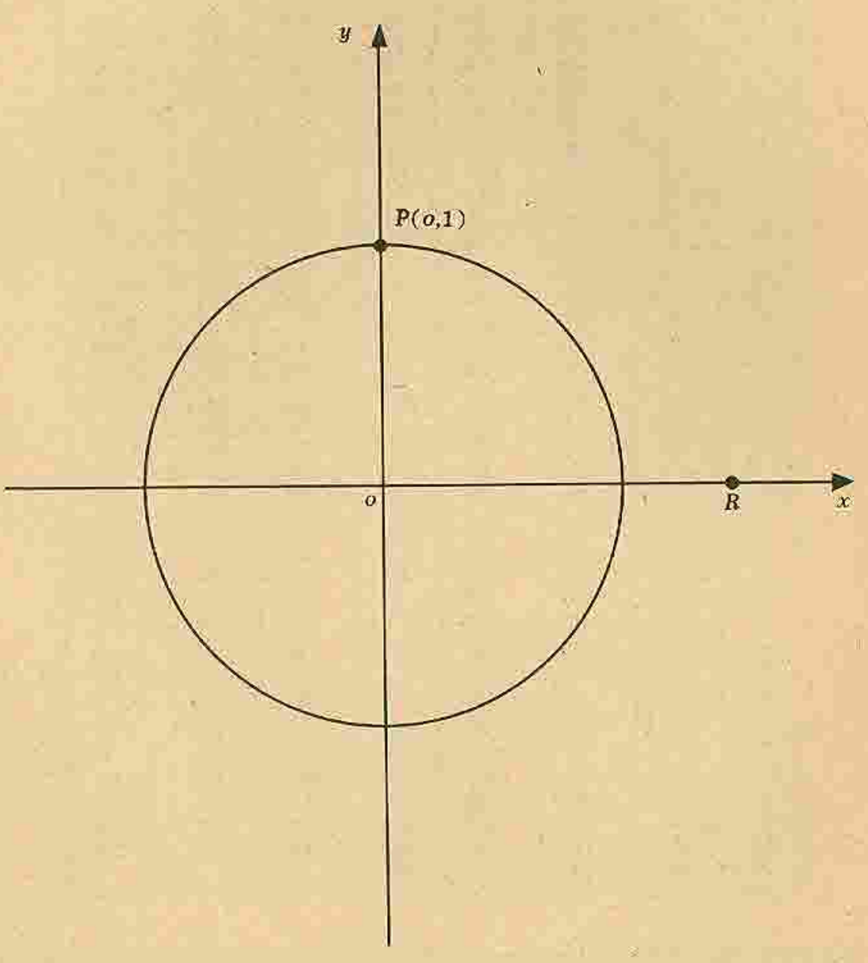
d) Usando la gráfica obtenga la tangente de 25°. Compárelo con el valor correspondiente en las tablas de la Pág. 320.

e) ¿Puede obtener en la gráfica la tangente de 88°?

f) Busque en las tablas (Pág. 320) la tangente 88°.

g) Busque en las tablas (Pág. 320) el seno de 88° y el coseno de 88°, con estos datos obtenga la tangente de 88°, compare su resultado con el resultado del inciso anterior.

Observación. Con respecto a la figura, cuando el punto P está sobre el eje Y, el ángulo $\angle POR$ mide 90° y las coordenadas del punto son (0, 1).



De acuerdo con la función tangente al ángulo $\angle ROP$ deberíamos asociarle el cociente $\frac{1}{0}$, pero esta expresión ya sabemos que carece de sentido, por lo que decimos que la tangente de 90° no está definida.

Nota. A la tangente de un ángulo también se le denomina pendiente. En algunos problemas emplearemos esta denominación.

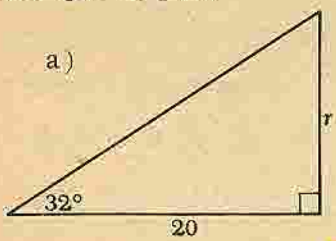
A continuación presentamos la siguiente tabla para las funciones seno, coseno y tangente.

TABLA DE RAZONES TRIGONOMETRICAS

r	sen r	cos r	tan r	r	sen r	cos r	tan r
1°	.017	1.000	.017	46°	.719	.695	1.035
2°	.035	.999	.035	47°	.731	.682	1.072
3°	.052	.999	.052	48°	.743	.669	1.111
4°	.070	.998	.070	49°	.755	.656	1.150
5°	.087	.996	.087	50°	.766	.643	1.192
6°	.105	.995	.105	51°	.777	.629	1.235
7°	.122	.993	.123	52°	.788	.616	1.280
8°	.139	.990	.141	53°	.799	.602	1.327
9°	.156	.988	.158	54°	.809	.588	1.376
10°	.174	.985	.176	55°	.819	.574	1.428
11°	.191	.982	.194	56°	.829	.559	1.483
12°	.208	.978	.213	57°	.839	.545	1.540
13°	.225	.974	.231	58°	.848	.530	1.600
14°	.242	.970	.249	59°	.857	.515	1.664
15°	.259	.966	.268	60°	.866	.5	1.732
16°	.276	.961	.287	61°	.875	.485	1.804
17°	.292	.956	.306	62°	.883	.469	1.881
18°	.309	.951	.325	63°	.891	.454	1.963
19°	.326	.946	.344	64°	.899	.438	2.050
20°	.342	.940	.364	65°	.906	.423	2.145
21°	.358	.934	.384	66°	.914	.407	2.246
22°	.375	.927	.404	67°	.921	.391	2.356
23°	.391	.921	.424	68°	.927	.375	2.475
24°	.407	.914	.445	69°	.934	.358	2.605
25°	.423	.906	.466	70°	.940	.342	2.747
26°	.438	.899	.488	71°	.946	.326	2.904
27°	.454	.891	.510	72°	.951	.309	3.078
28°	.469	.883	.532	73°	.956	.292	3.271
29°	.485	.875	.554	74°	.961	.276	3.487
30°	.5	.866	.577	75°	.966	.259	3.732
31°	.515	.857	.601	76°	.970	.242	4.011
32°	.530	.848	.625	77°	.974	.225	4.331
33°	.545	.839	.649	78°	.978	.208	4.705
34°	.559	.829	.675	79°	.982	.191	5.145
35°	.574	.819	.700	80°	.985	.174	5.671
36°	.588	.809	.727	81°	.988	.156	6.314
37°	.602	.799	.754	82°	.990	.139	7.115
38°	.616	.788	.781	83°	.993	.122	8.144
39°	.629	.777	.810	84°	.995	.105	9.514
40°	.643	.766	.839	85°	.996	.087	11.430
41°	.656	.755	.869	86°	.998	.070	14.301
42°	.669	.743	.900	87°	.999	.052	19.081
43°	.682	.731	.933	88°	.999	.035	28.636
44°	.695	.719	.966	89°	.999	.017	57.290
45°	.707	.707	1	90°	1	0	

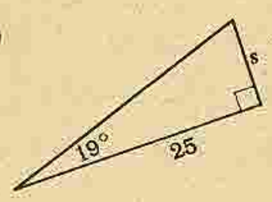
Ejercicio 15. En cada uno de los siguientes incisos encuentre el valor que se pide.

a)



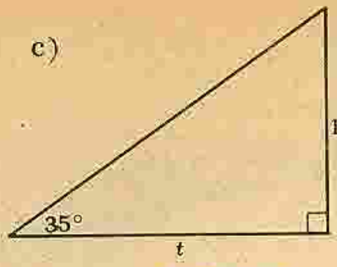
r =

b)



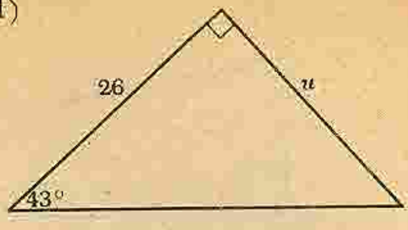
s =

c)



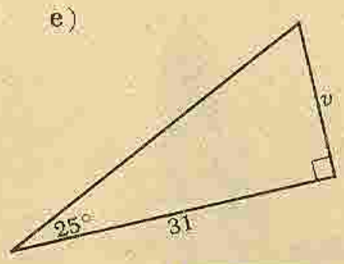
$t =$

d)



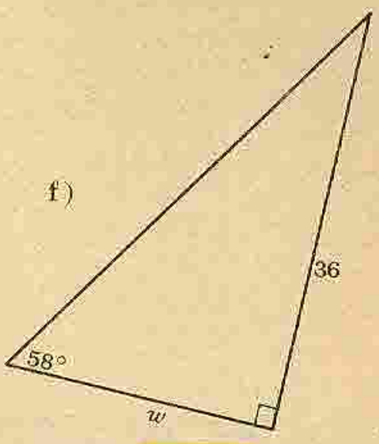
$u =$

e)



$v =$

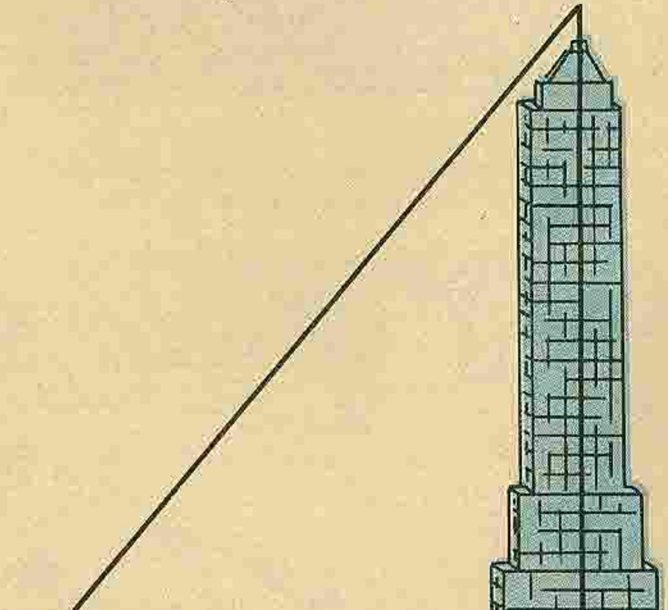
f)



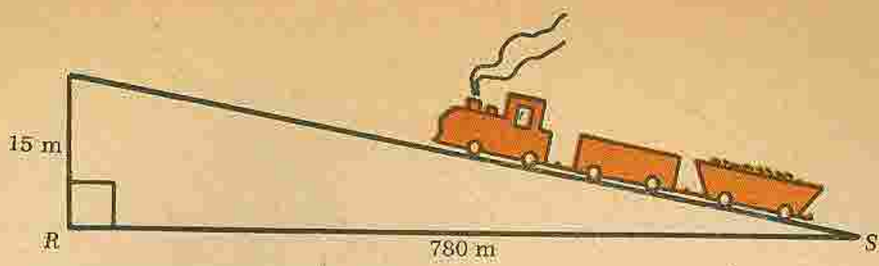
$w =$

Problemas

a) Con los datos de la figura, calcule la altura de la torre.

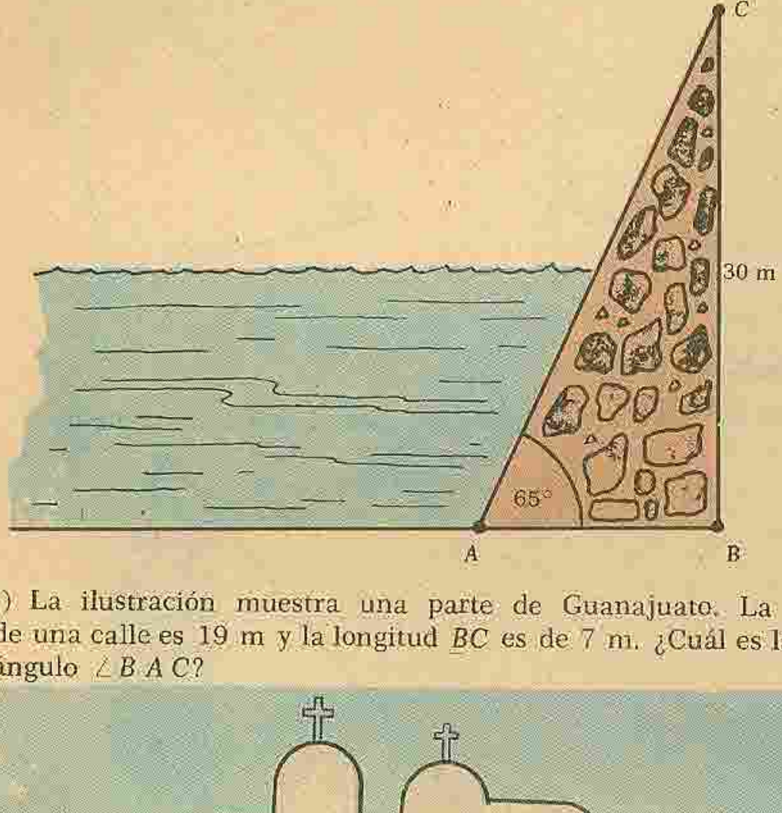


b) La máxima pendiente autorizada en la construcción de un ferrocarril es de .03. ¿Cumple el proyecto del dibujo con el requisito?

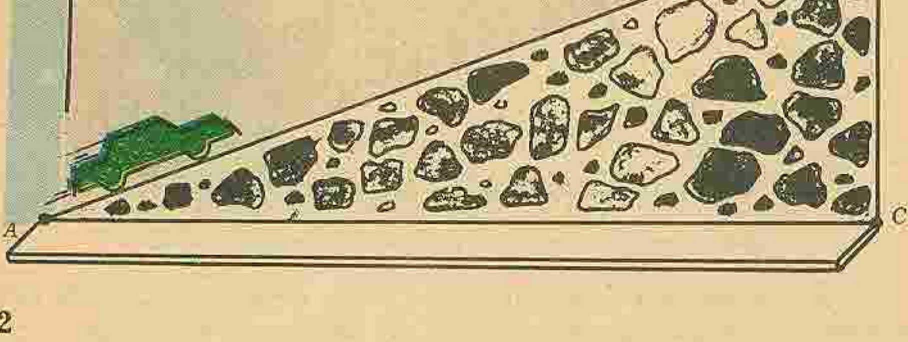


c) Calcule la medida del apotema de un exágono cuyo lado mide 5 cm. (Sugerencia: Haga el dibujo del exágono y encuentre después la medida de cierto ángulo.)

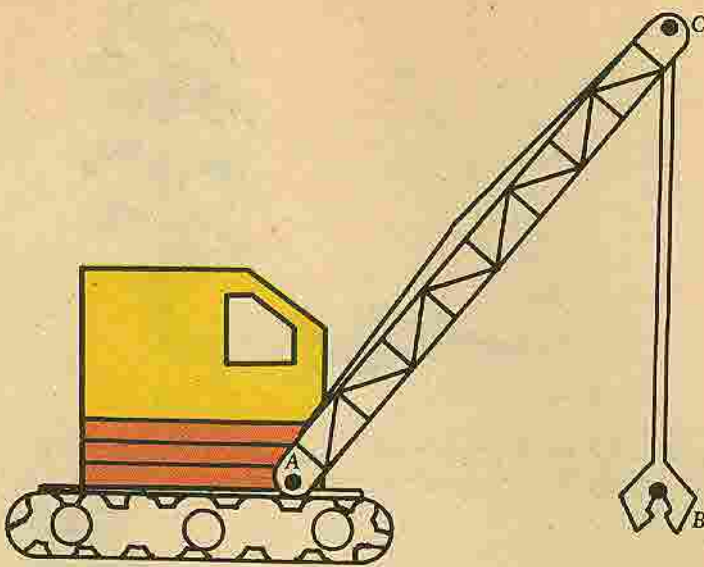
d) En una presa se desea construir un muro de contención. El ángulo $\angle CAB$ debe ser de 65° y la altura del muro de 30 m. Calcule el ancho AB de la base del muro.



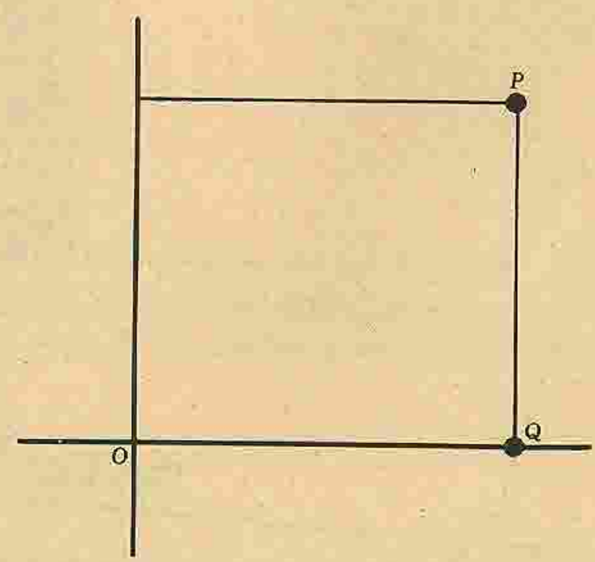
e) La ilustración muestra una parte de Guanajuato. La longitud AB de una calle es 19 m y la longitud BC es de 7 m. ¿Cuál es la medida del ángulo $\angle BAC$?



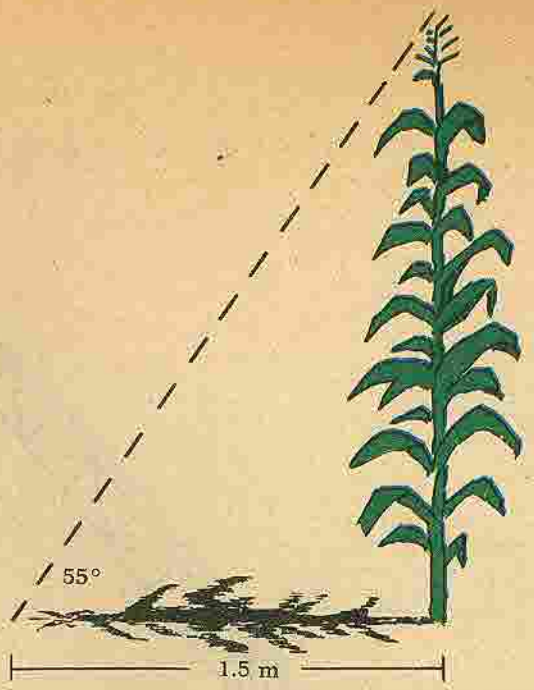
a) ¿Cuál es la medida de $\overline{AC}$? El $\angle ACB$ es de 39° y la longitud de $\overline{CB}$ es de 15 m.



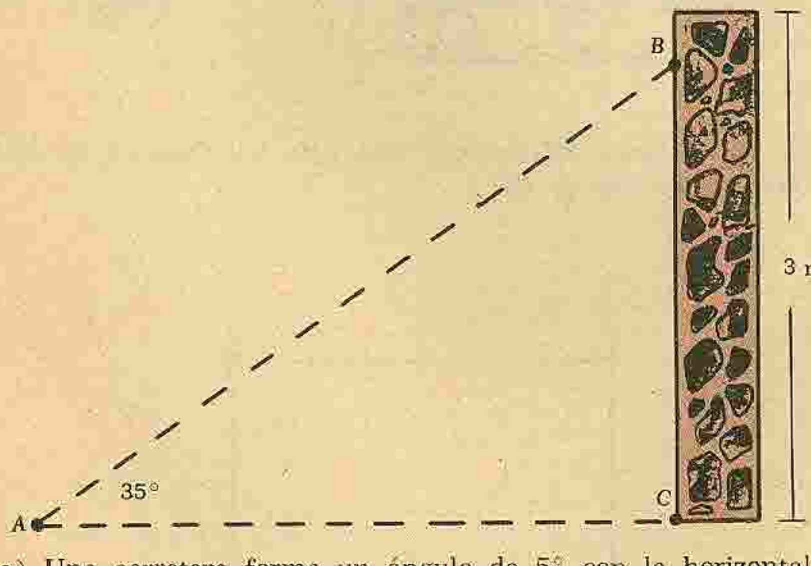
b) Las coordenadas del punto P son (10, 9). Obtenga la medida del $\angle POQ$ y la medida de $\overline{OP}$.



c) La dirección de los rayos solares con la horizontal es de 55°. Si la sombra proyectada por una planta de maíz es de 1.5 m, ¿cuál es la altura de ésta?

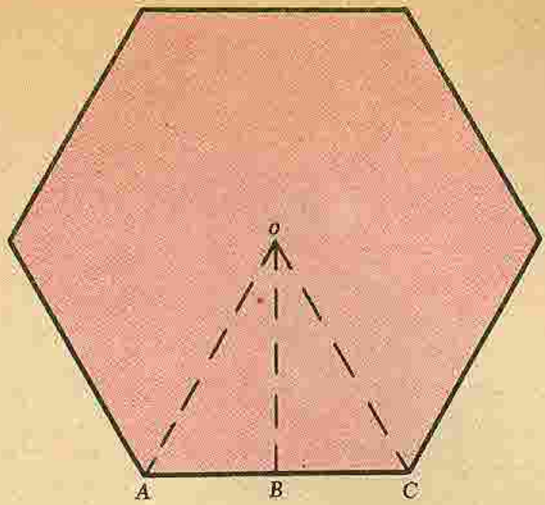


d) Un proyectil es disparado con un ángulo de 35° y choca con una pared. Si BC mide 3 m, ¿cuál es la distancia recorrida por la bala?

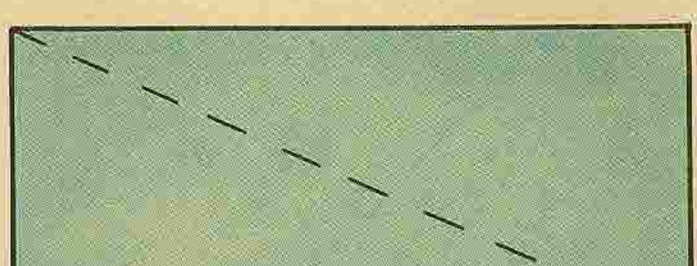


e) Una carretera forma un ángulo de 5° con la horizontal. ¿Cuál es la distancia PR recorrida por la carreta, si $\overline{RQ}$ mide 8 m?

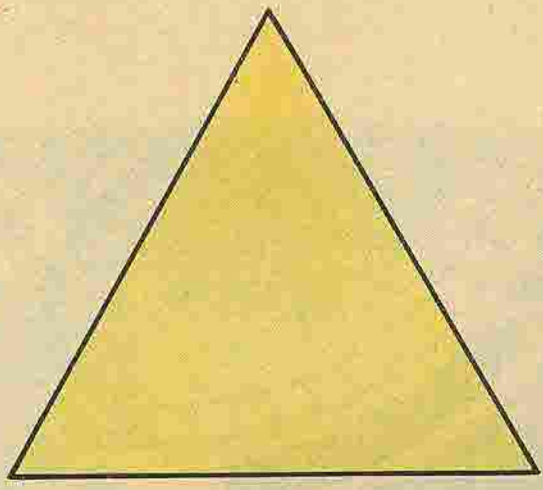
f) En un exágono regular, el apotema $\overline{OB}$ mide 7.5 m, encuentre la medida de $\overline{AB}$. (Tenga en cuenta que el $\angle AOC$ mide 60° y que $\angle AOB \cong \angle BOC$.)



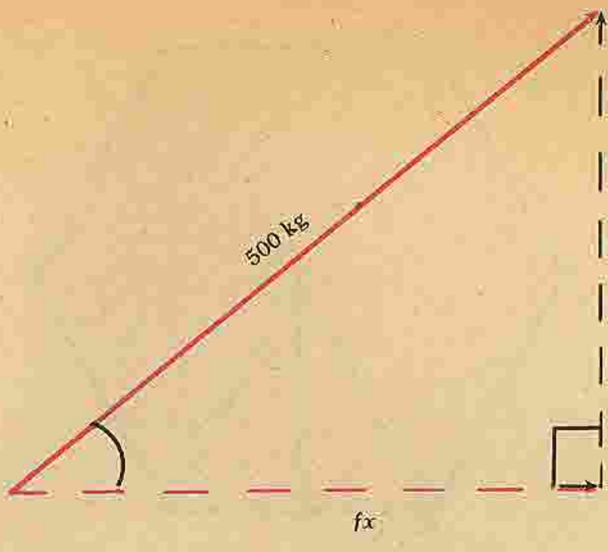
g) Si tenemos un rectángulo de 9 m por 4 m, ¿cuál es la medida del ángulo formado por la diagonal y el lado mayor?



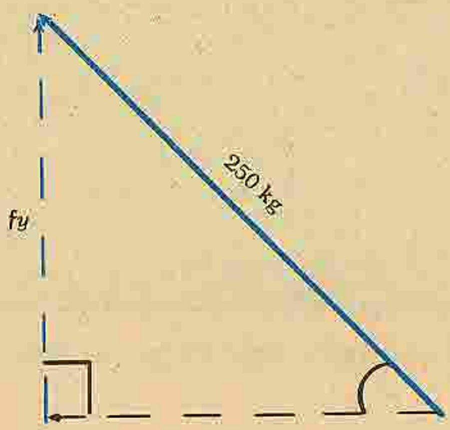
h) Un triángulo equilátero mide 15 m por lado. Encuentre la medida de la altura.

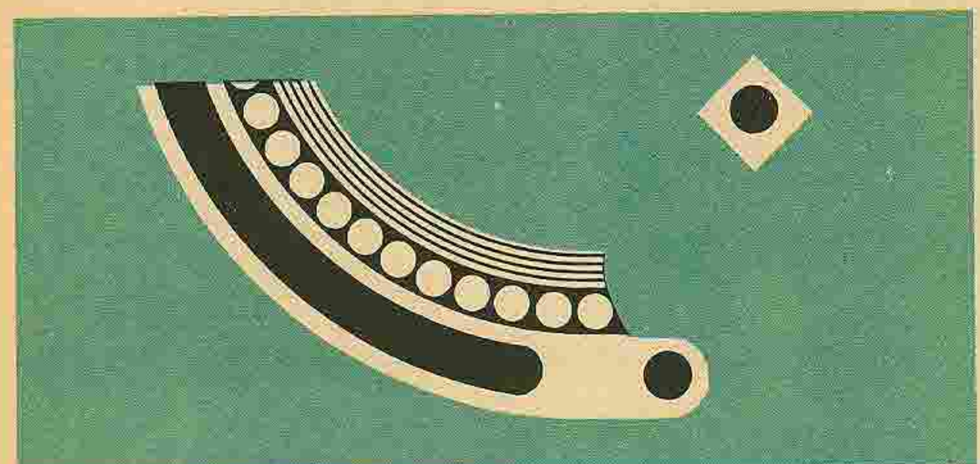


i) Una fuerza f de 500 kg forma un ángulo de 38° con la horizontal. Encuentre la componente horizontal fx de la fuerza.

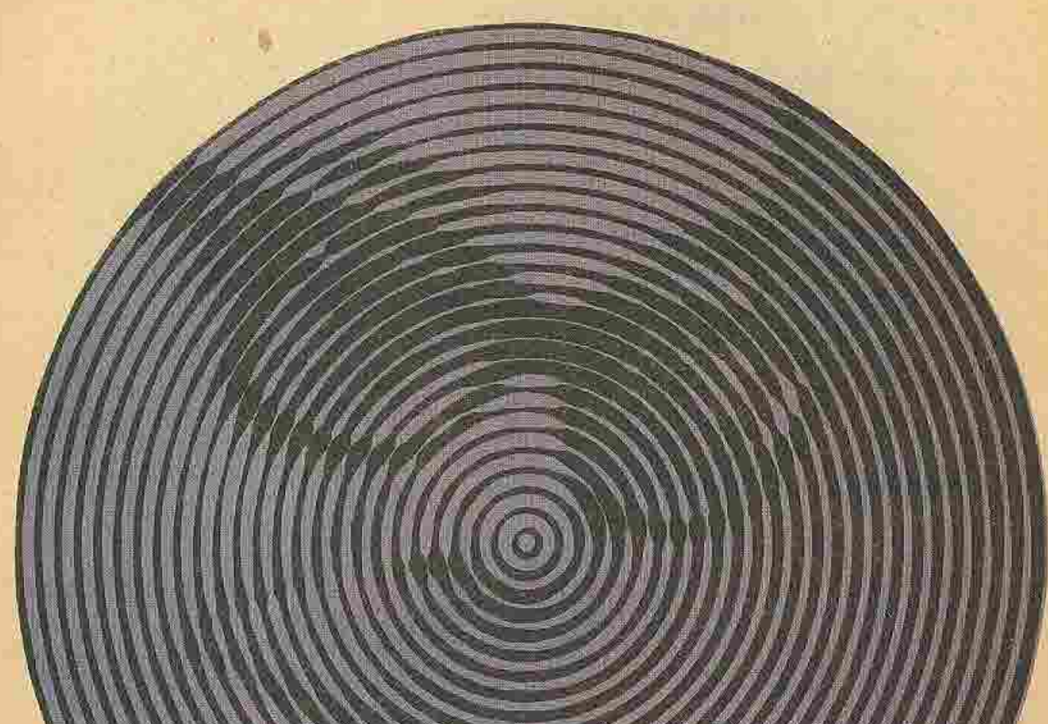


j) Una fuerza T de 250 kg forma una ángulo de 45° con la horizontal. Encuentre la componente vertical fy de la fuerza.





Soluciones a los ejercicios



Capítulo Sexto

Semejanza y congruencia

1. Figuras semejantes

Ejercicio 1.

a) $\measuredangle A = 40°$ $\qquad$ $\measuredangle P = 60°$

$\measuredangle B = 80°$ $\qquad$ $\measuredangle Q = 40°$

$\measuredangle C = 60°$ $\qquad$ $\measuredangle R = 80°$

El $\triangle ABC$ y el $\triangle PQR$ *son* semejantes.

b) $\measuredangle R = 45°$ $\qquad$ $\measuredangle L = 105°$

$\measuredangle S = 105°$ $\qquad$ $\measuredangle M = 30°$

$\measuredangle T = 30°$ $\qquad$ $\measuredangle N = 45°$

Los triángulos RST y LMN *son* semejantes.

c) $\measuredangle A = 28°$ $\qquad$ $\measuredangle A' = 28°$

$\measuredangle B = 47°$ $\qquad$ $\measuredangle B' = 47°$

$\measuredangle C = 105°$ $\qquad$ $\measuredangle C' = 105°$

El triángulo ABC y el triángulo $A'B'C'$ *son* semejantes.

Ejercicio 2.

a) $AB = 1$ cm $\qquad$ $MN = 2$ cm

$BC = 2$ cm $\qquad$ $NS = 5$ cm

$CA = 2.5$ cm $\qquad$ $SM = 4$ cm

La razón de semejanza del $\triangle ABC$ al $\triangle MNS$ es $\frac{1}{2}$, o sea $1:2$.

La razón de semejanza del $\triangle MNS$ al $\triangle ABC$ es 2, o sea, $2:1$.

b) $RT = 7$ $\qquad$ $EF = 1$

$TS = 3$ $\qquad$ $FG = 2$

$SR = 6$ $\qquad$ $GE = 2.3$

La razón de semejanza del $\triangle EST$ al $\triangle GEF$ es 3, o sea, $3:1$.

La razón de semejanza del $\triangle GEF$ al $\triangle RST$ es $\frac{1}{3}$, o sea, $1:3$.

Ejercicio 3.

a) $A'B' = 3$, $B'C' = 2$, $C'A' = 4$

b) $R'S' = 12$, $S'T' = 6$, $TR = 3$

c) $F'H' = 2$, $G'H' = 1$

La razón de semejanza del $\triangle FGH$ al $\triangle F'G'H'$ es $4:1$.

Ejercicio 4.

a) $\dfrac{AB}{SB} = \dfrac{RT}{ST}$; $\dfrac{AB}{9} = \dfrac{2}{1.5}$

$AB = 12$

La altura del poste es 12 metros.

b) Los triángulos CAB y CMN *son* semejantes.

$\dfrac{CM}{CA} = 2$; $MN = 94$; $BN = 21$

c) $\angle(1) \cong \angle(2)$, los triángulos son semejantes.

La razón de semejanza del $\triangle ABC$ al $\triangle CDE$ es 5.

$AB = 200$, $AC = 250$

2. Perímetros de polígonos semejantes

Ejercicio 5.

a) $P' = 5.5$ cm

b) La razón de semejanza de la primera a la segunda es $\dfrac{5}{2.5} = 2$, por lo tanto $P' = 18$

c) $P = 8.5$. Los lados de la segunda figura miden: 4, 4, 6, 3.

La razón de semejanza de la primera figura a la segunda es $\frac{1}{2}$. La razón de semejanza de la segunda figura a la primera es 2.

Problemas.

a) El perímetro del dibujo a escala es 27 cm.

El perímetro de la cancha de voleibol es 5.40 m.

b) 3.5 kilómetros.

3. Areas de polígonos semejantes

Ejercicio 6.

a) La razón del área del cuadrado $ABCD$ al área del cuadrado $A'B'C'D'$ es $\frac{1}{9}$.

b) El área del segundo cuadrado es 10.24.

c) Como $\frac{A}{A'} = (1.2)^2$, entonces $A = 14.4$ cm².

d) $\frac{A}{A'} = \frac{64}{100} = .64$, por lo tanto la razón de semejanza es $\sqrt{.64} = .8$.

e) La razón de semejanza del primer cuadrado al segundo es .7.

Ejercicio 7.

a) $A' = 2$ m².

b) $A = 300$ cm².

c) La razón de semejanza de la primera figura a la segunda es $\frac{1}{3}$. La altura del primer triángulo es entonces 5 y $A = 7.5$. Por último $A' = 67.5$.

d) La razón de las áreas es $\frac{A}{A'} = \frac{1}{4}$.

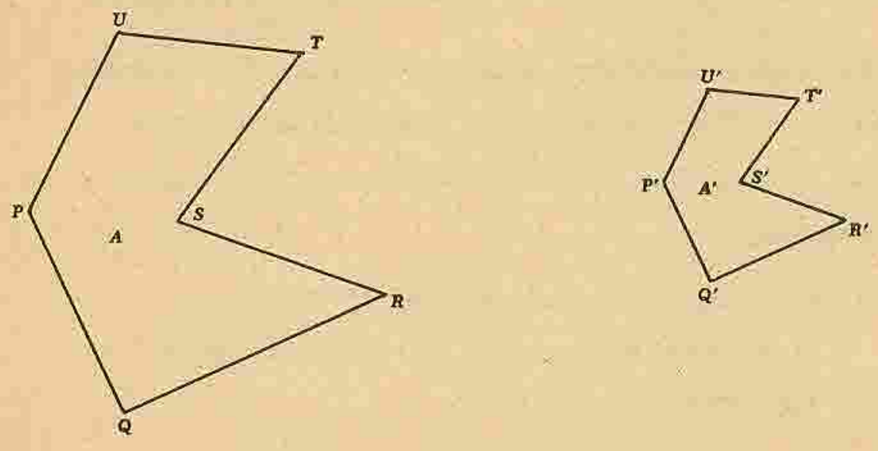
e) La razón de semejanza pedida es 1.2.

f) $A = 1.95$ cm².

g) El área que ocupa realmente ese jardín es de 1 600 metros cuadrados.

h) Como el segmento rojo mide 4.5 cm. La escala es $\frac{1}{2\,000}$. El área del terreno en la realidad es de 16 000 metros cuadrados.

Problema. Como la razón de las áreas es $\frac{1}{4}$, entonces la razón de semejanza será $\frac{1}{2}$.



4. El teorema de Pitágoras

Ejercicio 8.

a) $c = 20$	b) $b = 8$	c) $a = 8.7$
d) $c = 9.9$	e) $y = 2$	

Ejercicio 9.

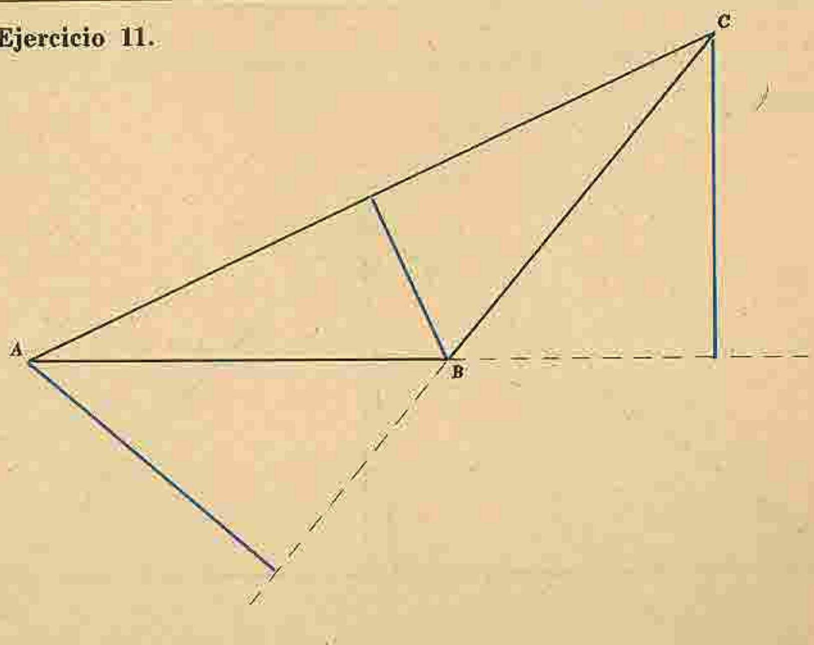
a) $a = 6$	$b = 5$	$AB = 7.8$
b) $a = 4$	$b = 4$	$AB = 5.6$
c) $a = 6$	$b = 3$	$AB = 6.7$
d) $a = 1$	$b = 4$	$AB = 4.1$
e) $a = 7$	$b = 2$	$AB = 7.3$
f) $a = 4$	$b = 5$	$AB = 6.4$

Ejercicio 10.

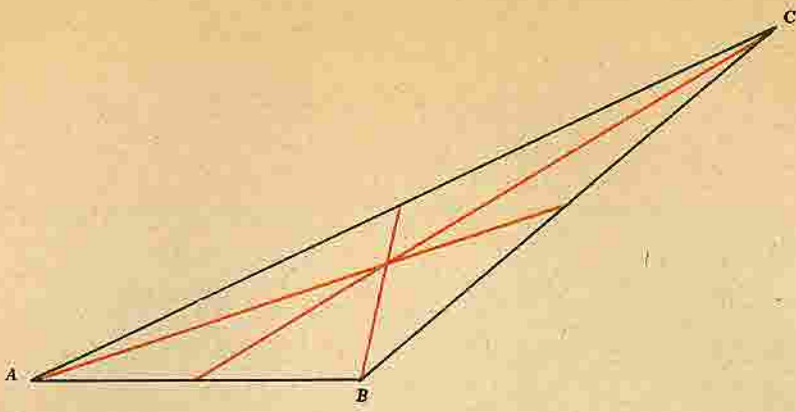
a) $AB = 10.3$	b) $CD = 6.4$
c) $EF = 2.2$	d) $GH = 13.6$
e) $JK = 9.8$	f) $LM = 10.3$
g) $SP = 9$	h) $QR = 16$
i) $TO = 8.6$	j) $WO = 8.5$

5. Triángulos isósceles

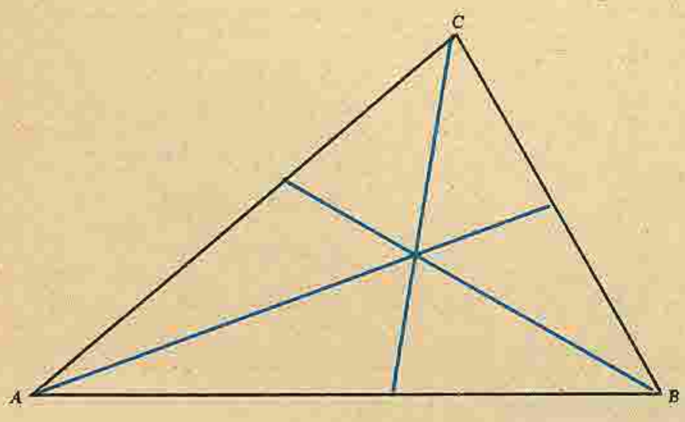
Ejercicio 11.



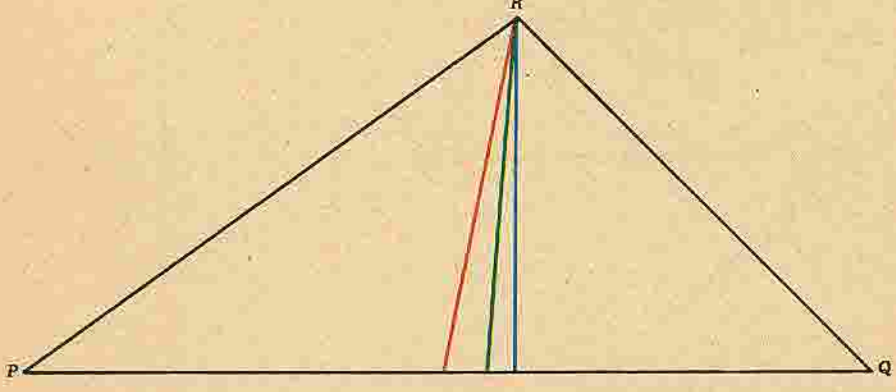
Ejercicio 12.



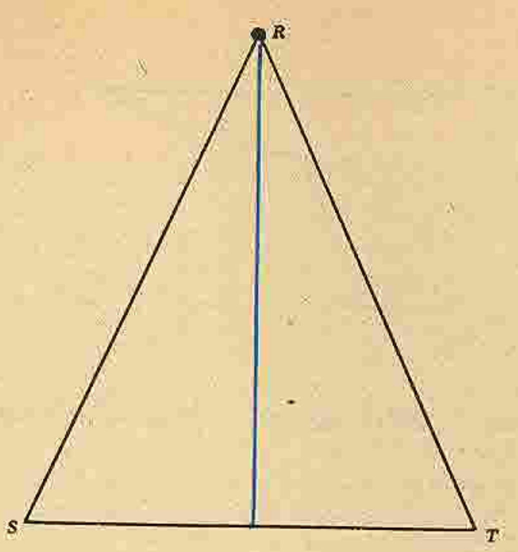
Ejercicio 13.



Ejercicio 14.



Ejercicio 15.



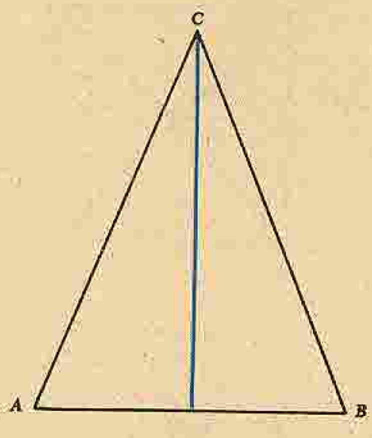
Ejercicio 16.

$AC = 43$ mm $\quad BC = 43$ mm

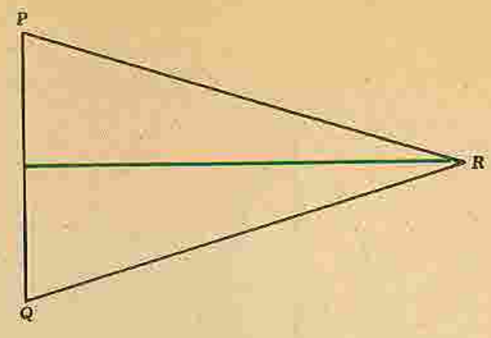
Ejercicio 17.

$\measuredangle PRQ = 25°$ $\quad \measuredangle PQR = 130°$

Ejercicio 18.



Ejercicio 19.



Ejercicio 20.

$AC = 10$ cm $\quad BC = 10$ cm $\quad$ perímetro $= 32$ cm

Ejercicio 21.

Altura $CD = 12.5$ cm $\quad$ Area $= 43.75$ cm²

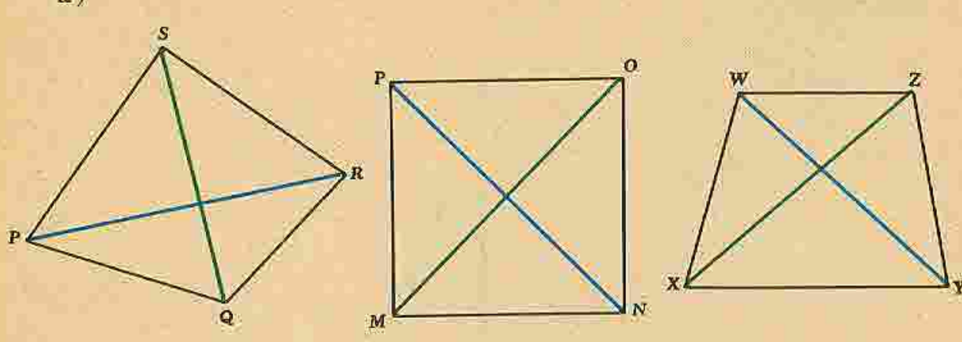
Ejercicio 22.

$x = 1.65$

6. Rombos

Ejercicio 23.

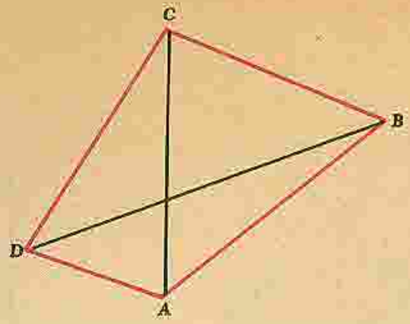
a)



$\overline{PR}$ $\quad$ $\overline{PN}$ $\quad$ $\overline{WY}$

$\overline{SQ}$ $\quad$ $\overline{MO}$ $\quad$ $\overline{XZ}$

b)



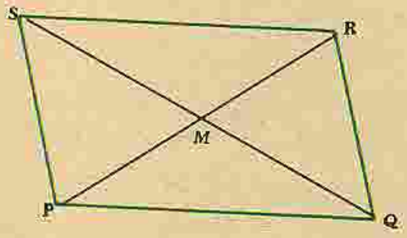
Lados: $\overline{AB}$

$\overline{BC}$

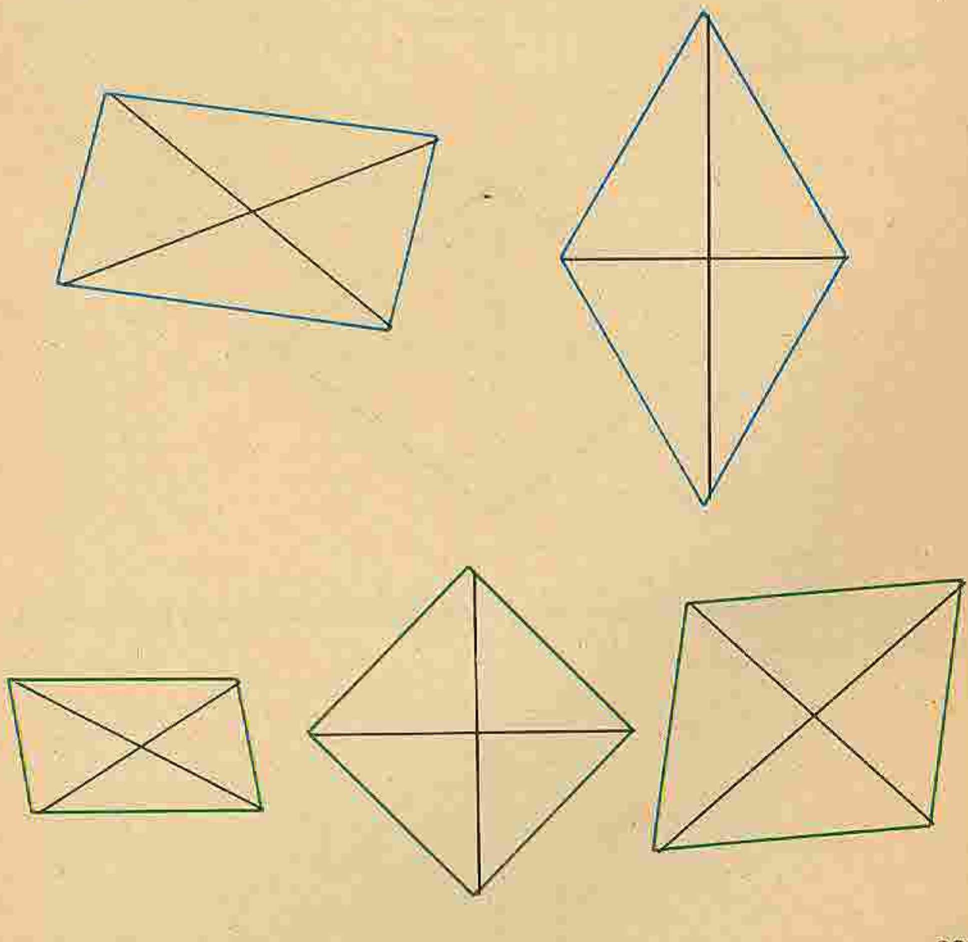
$\overline{CD}$

$\overline{DA}$

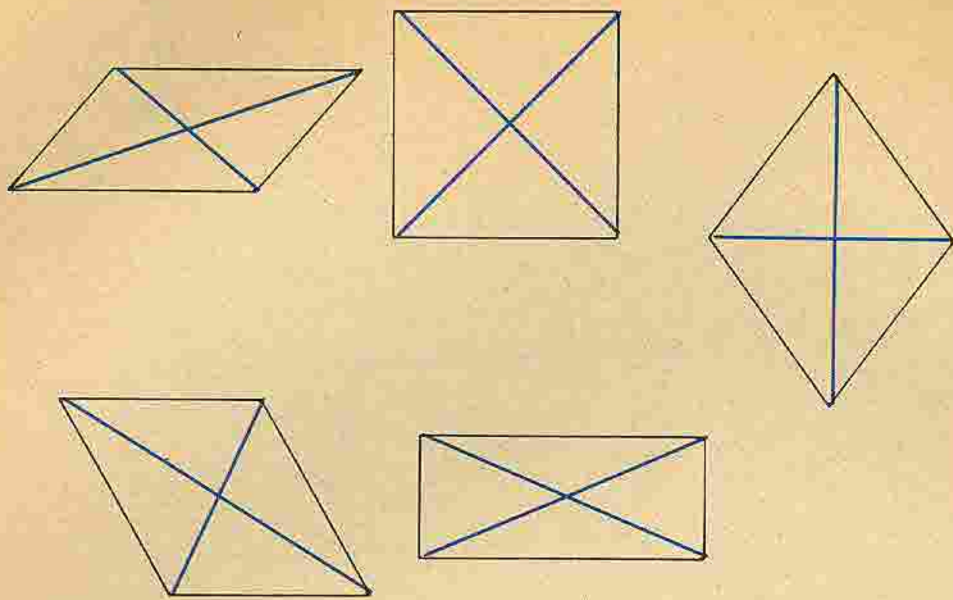
c)



Ejercicio 24.

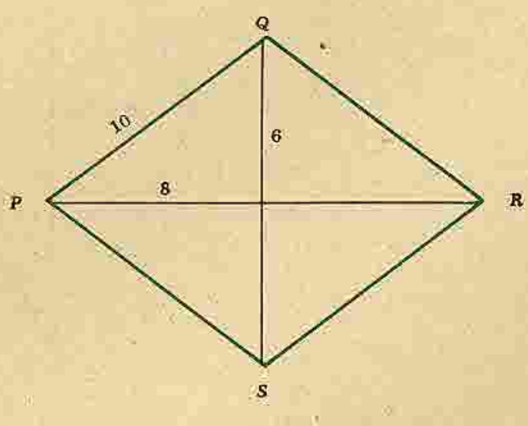


Ejercicio 25.



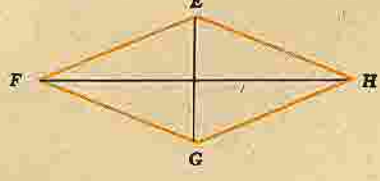
Ejercicio 26.

a)



Cada uno de los lados del cuadrilátero *PQRS* mide 10 cm, por lo tanto, sí es un rombo.

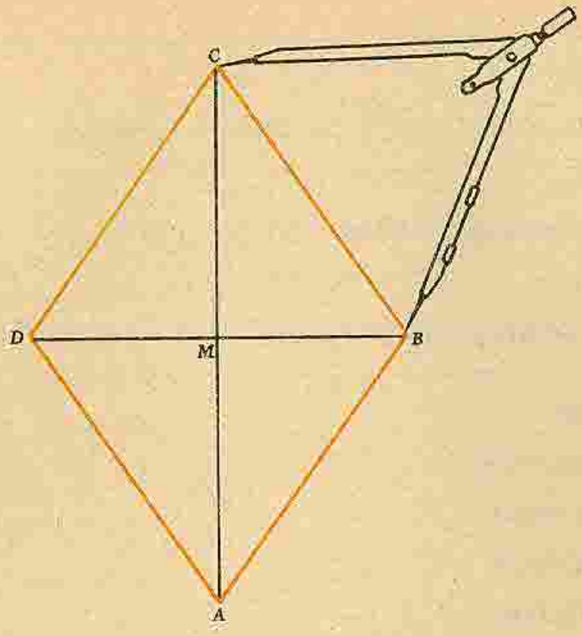
b)



Cada uno de los lados del cuadrilátero $EFGH$ mide 14 mm.

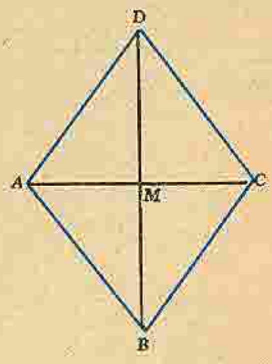
Desde luego que sí se pueden calcular los lados utilizando el teorema de Pitágoras.

Ejercicio 27.



Ejercicio 28.

La diagonal $\overline{BD}$ mide 40 mm.



$AC = 30, \qquad AM = 15$

$AD = 25,$

$MD = \sqrt{25^2 - 15^2} = \sqrt{400} = 20$

$BD = 40$ mm.

Ejercicio 29.

La otra diagonal mide 91.6 mm.

Ejercicio 30.

La otra diagonal mide 56.6.

Ejercicio 31.

$\measuredangle B = 110,$ $\measuredangle C = 70°,$ $\measuredangle D = 110°$

Ejercicio 32.

Si un lado mide a, entonces la otra diagonal mide $\sqrt{3}\ a$.

Ejercicio 33.

Dos ángulos miden 120° y dos ángulos miden 60°.

7. Construcciones geométricas (No hay ejercicios)

8. Distancia de un punto a una recta

Ejercicio 34.

a) 39 milímetros

b) 37 milímetros

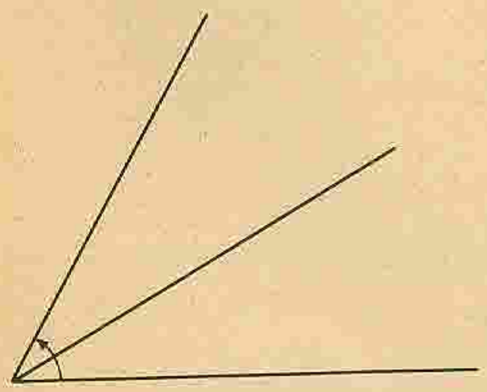
c) 47 milímetros

d) 48 milímetros

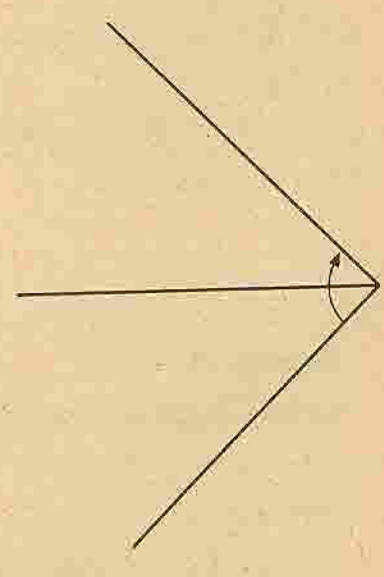
9. Bisectrices

Ejercicio 35.

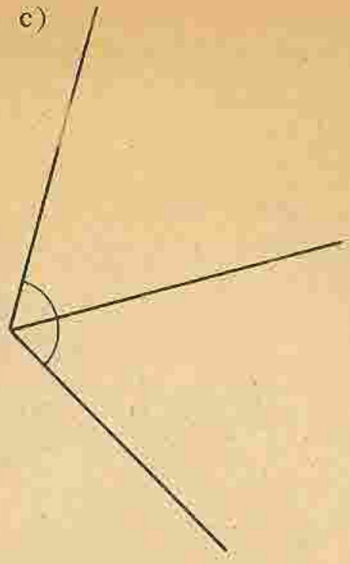
a)



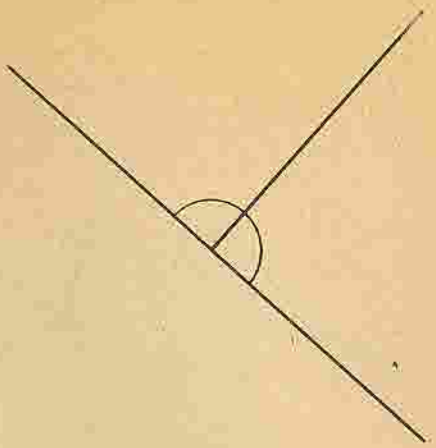
b)



c)



d)

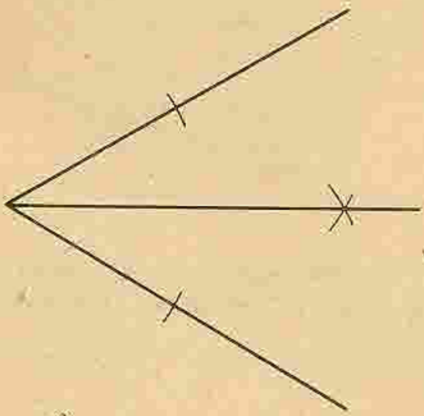


Ejercicio 36.

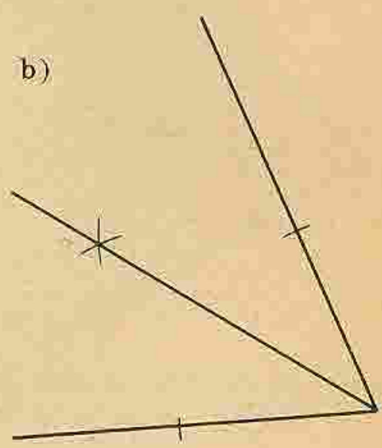
Las bisectrices encontradas con el doblado del papel coinciden con las que se trazaron usando el transportador.

Ejercicio 37.

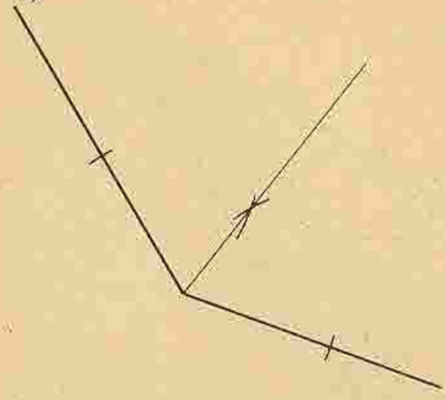
a)



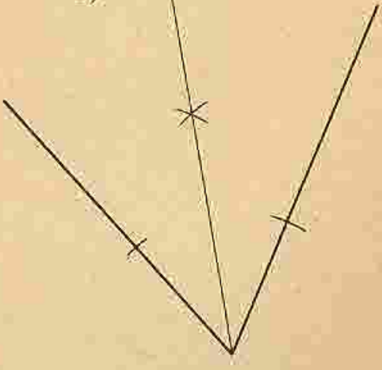
b)



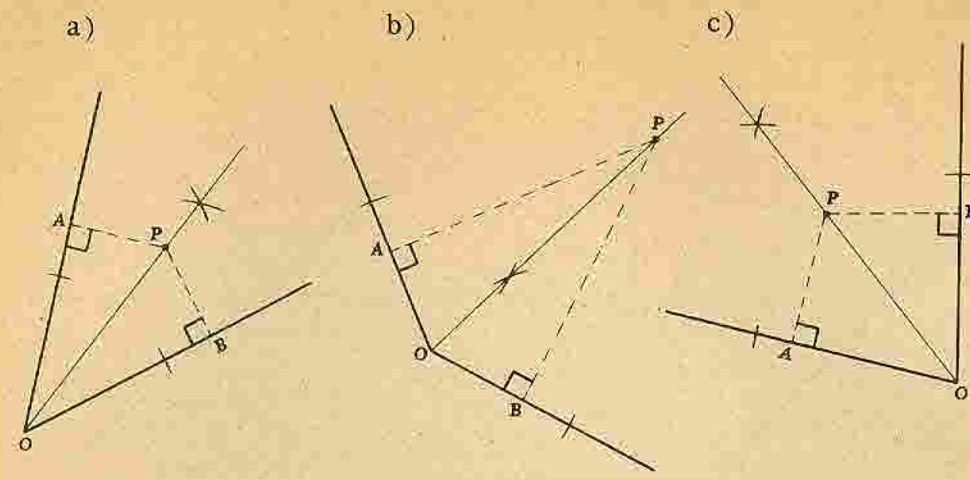
c)



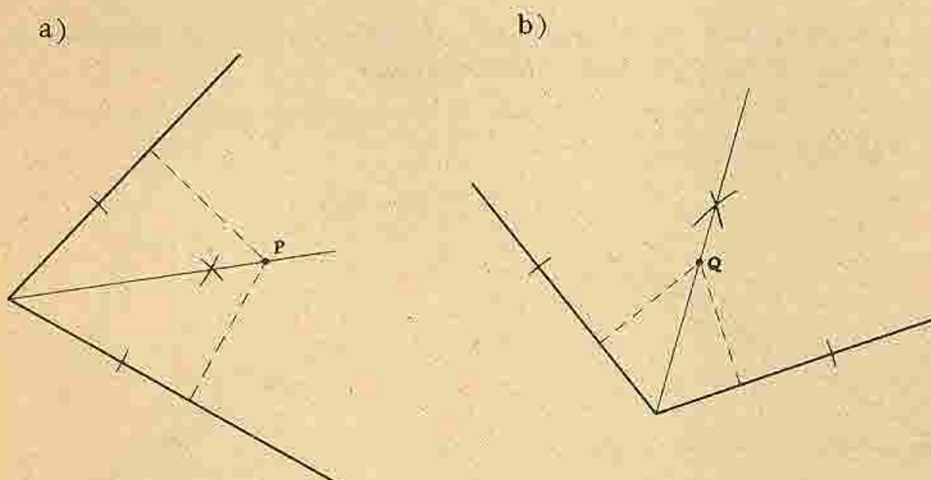
d)



Ejercicio 38. En los tres ángulos la bisectriz pasa por el punto *P*.



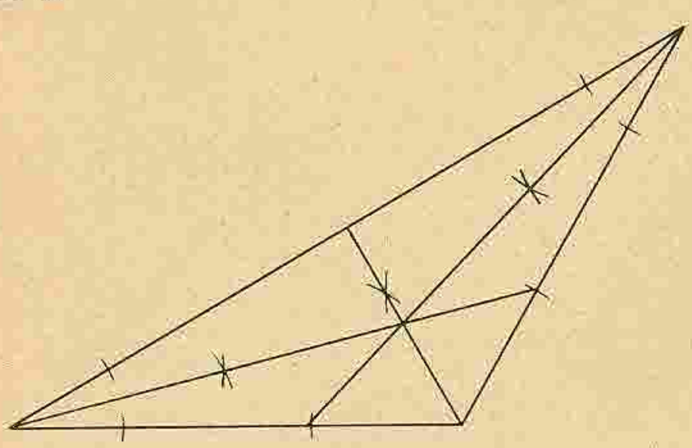
Ejercicio 39.



La distancia de *P* a cada uno de los lados del ángulo es la misma.

La distancia de Q a cada uno de los lados del ángulo es la misma.

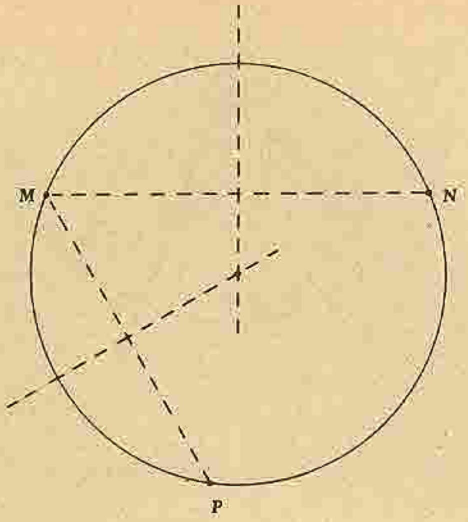
Ejercicio 40.



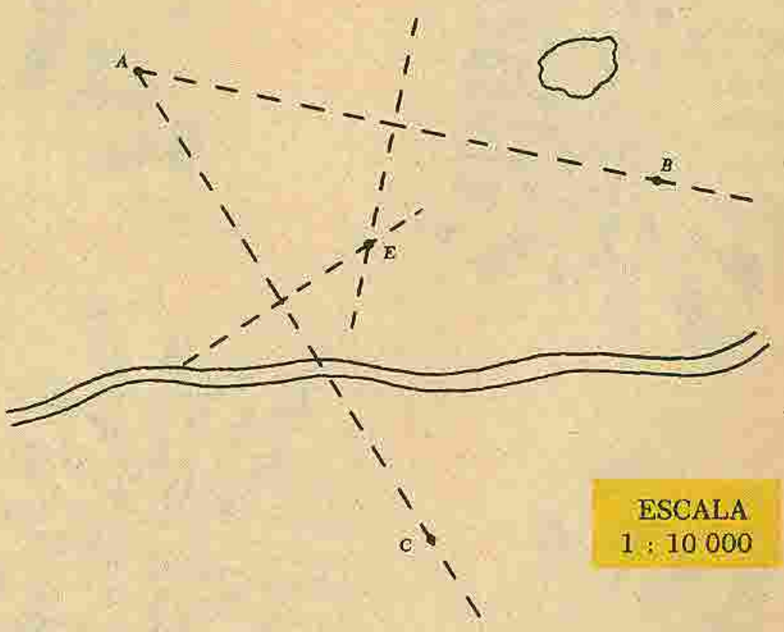
Ejercicio 41. Los tres dobleces coinciden en un punto.

10. Circunferencias

Ejercicio 42.



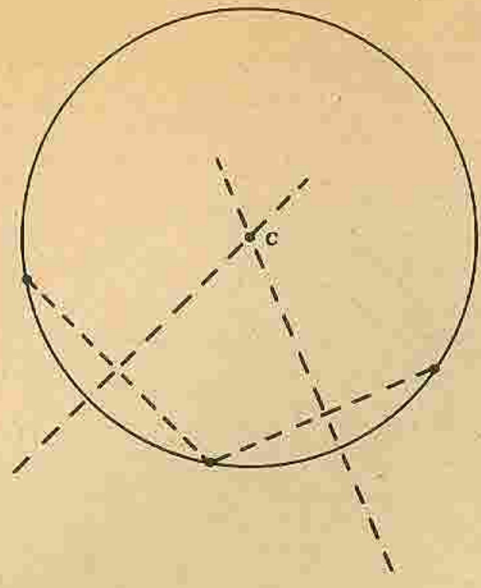
Ejercicio 43.



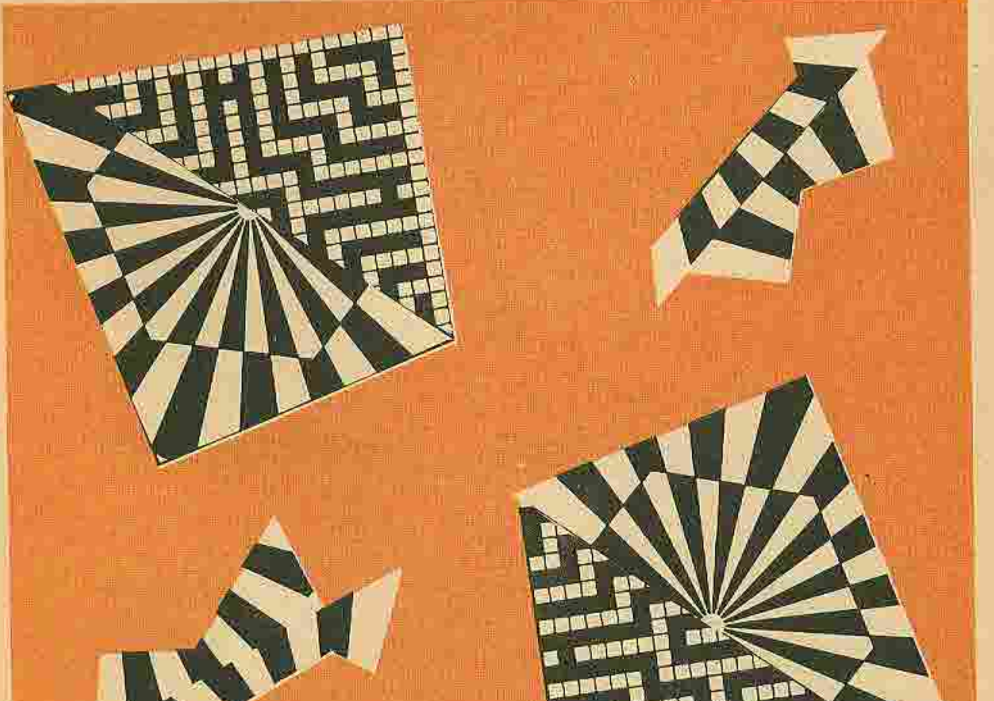
El punto *E* equidista de los puntos *A*, *B* y *C*. La distancia de *E* a cada uno de esos puntos es de 39 milímetros en el mapa.

Considerada la escala 1 : 10 000, la distancia real del punto *E* a cada uno de los puntos *A*, *B* y *C* es de 390 000 mm; o sea, 390 metros.

Ejercicio 44.



El punto C es el centro de la circunferencia.



Capítulo séptimo

Transformaciones del plano

1. Simetría axial

Ejercicio 1.

3. $\overline{A'B'} \cong \boxed{\overline{AB}}$ $\quad \overline{B'C'} \cong \boxed{\overline{BC}}$ $\quad \overline{C'D'} \cong \boxed{\overline{CD}}$ $\quad \overline{D'A'} \cong \boxed{\overline{DA}}$

$\angle A' \cong \boxed{\angle A}$ $\quad \angle B' \cong \boxed{\angle B}$ $\quad \angle C' \cong \boxed{\angle C}$ $\quad \angle D' \cong \boxed{\angle D}$

Por lo tanto, las figuras $ABCD$ y $A'B'C'D'$ son $\boxed{\text{congruentes.}}$

4. Los segmentos $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$ y $\overline{DD'}$ son perpendiculares al $\boxed{\text{eje de simetría.}}$

5. La distancia de A' al eje de simetría es igual a la distancia de A al eje de simetría.

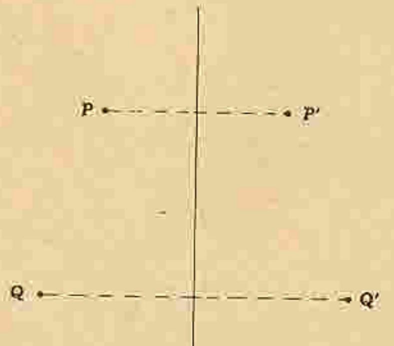
La distancia de B' al eje de simetría es igual a la distancia de B al eje de simetría.

La distancia de C' al eje de simetría es igual a la distancia de C al eje de simetría.

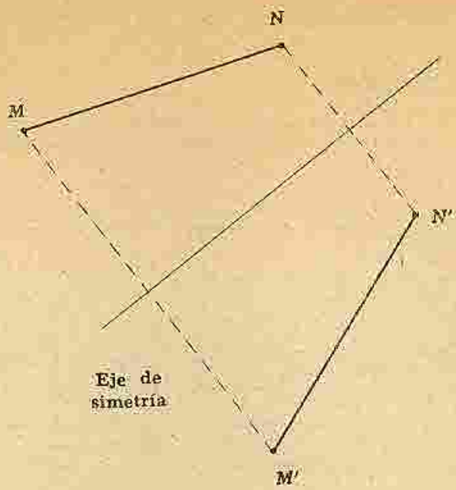
La distancia de D' al eje de simetría es igual a la distancia de D al eje de simetría.

Ejercicio 2.

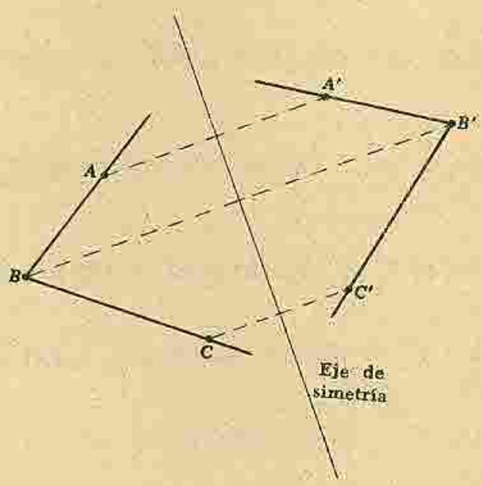
a)



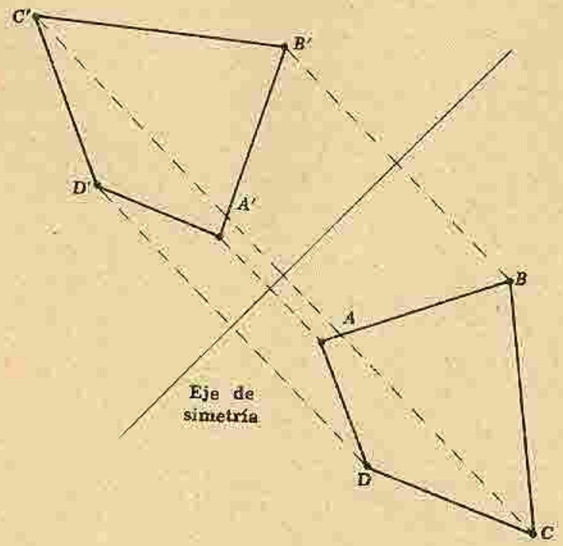
b)


N
M
N'
Eje de
simetría
M'

c)


A'
B'
A
B
C'
C
Eje de
simetría

d)


C'
B'
D'
A'
B
A
Eje de
simetría
D
C

Ejercicio 3.

a) $(4, 1) \mapsto (-4, 1)$ b) $(5, 6) \mapsto (-5, 6)$

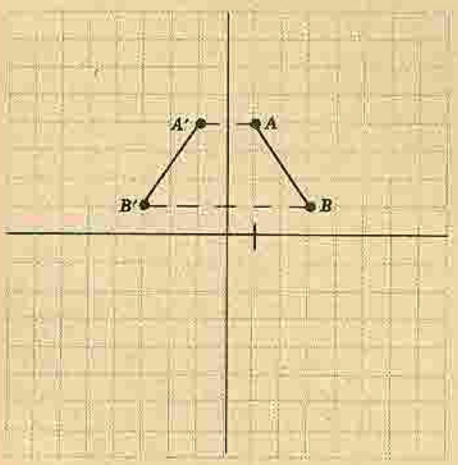
c) $(-3, 2) \mapsto (3, 2)$ d) $(-2.5, 4) \mapsto (2.5, 4)$

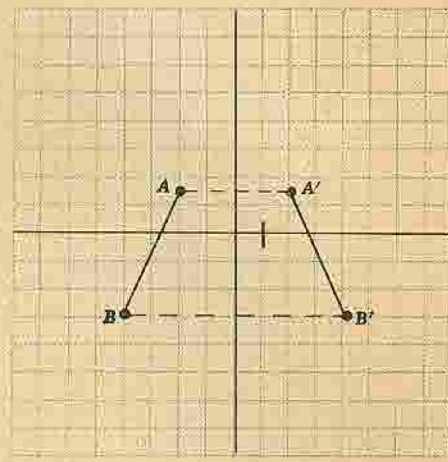
e) $(-4, -1) \mapsto (4, -1)$ f) $(-6, -3.5) \mapsto (6, -3.5)$

g) $(5, -2) \mapsto (-5, -2)$ h) $(3.5, -5) \mapsto (-3.5, -5)$

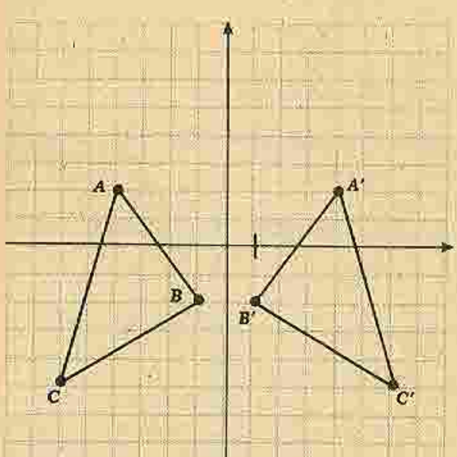
Ejercicio 4.

a) $A' = (-1, 4)$, $B' = (-3, 1)$. b) $A' = (2, 1.5)$, $B' = (4, -3)$.



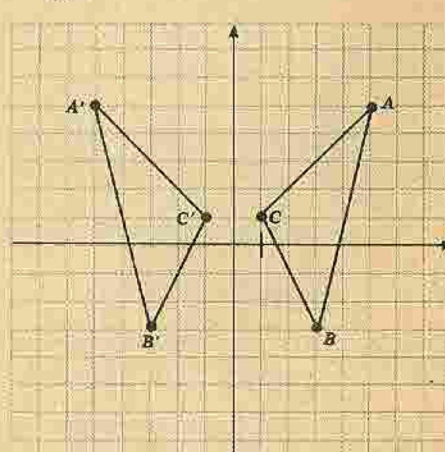


c)



$A' = (4, 2)$, $B' = (1, -2)$, $C' = (6, -5)$.

d)

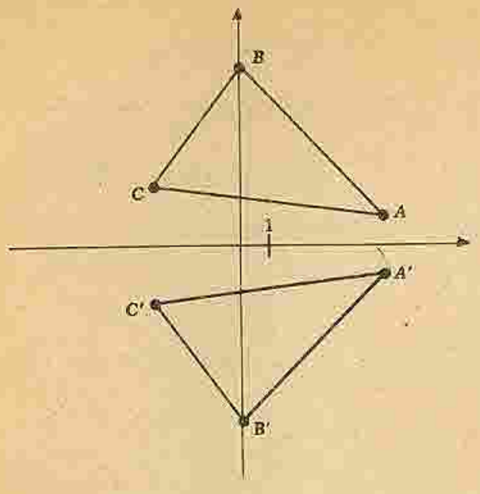


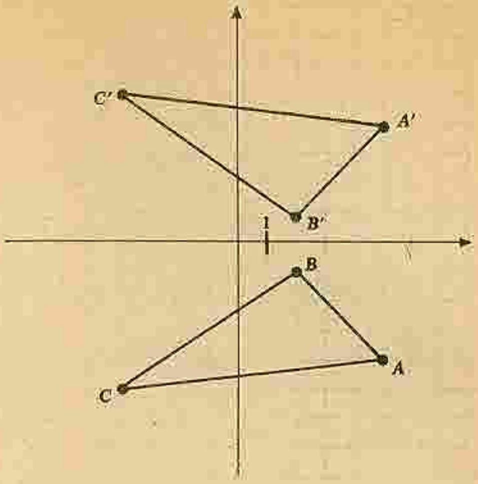
$A' = (-5, 5)$, $B' = (3, -3)$, $C' = (-1, 1)$.

Ejercicio 5.

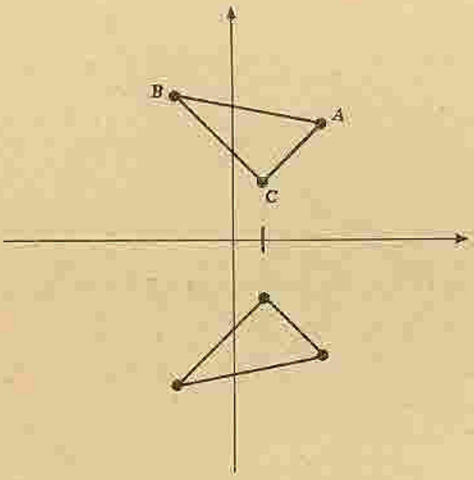
a) $A' = (5, -1)$, $B' = (0, -6)$, $C' = (-3, -2)$

b) $A' = (5, 4)$, $B' = (2, 1)$, $C' = (-4, 5)$





Ejercicio 6.



$A' = (3, -4)$

$B' = (-2, -5)$

$C' = (1, -2)$

El triángulo $A'B'C'$ es congruente con el triángulo ABC por que los lados respectivos son congruentes.

$$
\begin{aligned}
AB &= \sqrt{(4-5)^2 + [3-(-2)]^2} = \sqrt{(-1)^2 + 5^2} = \sqrt{1+25} \\
&= \sqrt{26} \\
A'B' &= \sqrt{[-4-(-5)]^2 + [3-(-2)]^2} = \sqrt{1^2 + 5^2} = \sqrt{1+25} \\
&= \sqrt{26} \\
BC &= \sqrt{(5-2)^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} \\
B'C' &= \sqrt{[-5-(-2)]^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2} \\
&= \sqrt{9+9} = \sqrt{18}
\end{aligned}
$$

$$CA = \sqrt{(4-2)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$$

$$C'A' = \sqrt{[-4-(-2)]^2 + (3-1)^2} = \sqrt{(-2)^2 + 2^2}$$

$$= \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$$

2. Translaciones

Ejercicio 7.

$P' = (-5+3,\ -3+2) = (-2,\ -1)$

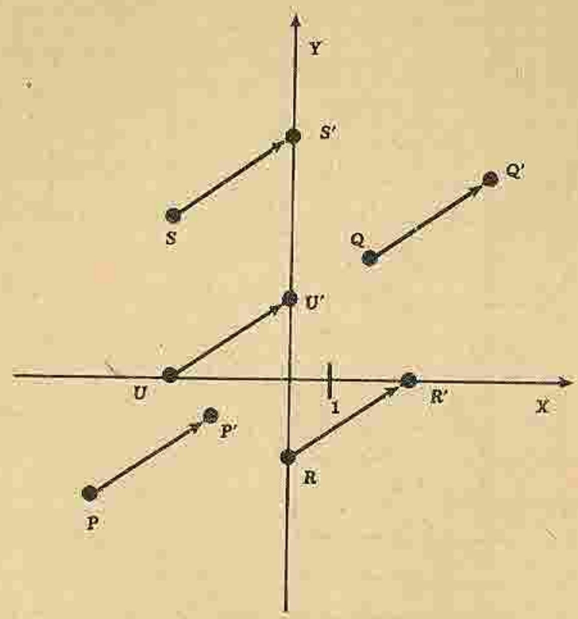
$Q' = (2+3,\ 3+2) = (5,\ 5)$

$R' = (0+3,\ -2+2) = (3,\ 0)$

$S' = (-3+3,\ 4+2) = (0,\ 6)$

$T' = (0+3,\ 0+2) = (3,\ 2)$

$U' = (-3+3,\ 0+2) = (0,\ 2)$



Las flechas son congruentes, paralelas y con el mismo sentido.

Ejercicio 8.

$A' = (2+8,\ 6-4) = (10,\ 2)$

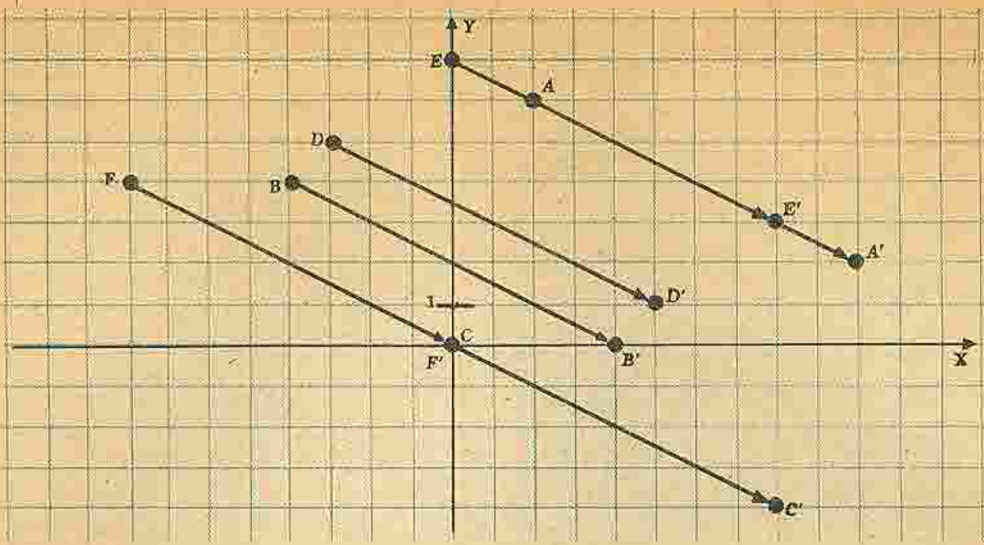
$B' = (-4+8,\ 4-4) = (4,\ 0)$

$C' = (0+8,\ 0-4) = (8,\ -4)$

$D' = (-3+8,\ 5-4) = (5,\ 1)$

$E' = (0+8,\ 7-4) = (8,\ 3)$

$F' = (-8+8,\ 4-4) = (0,\ 0)$

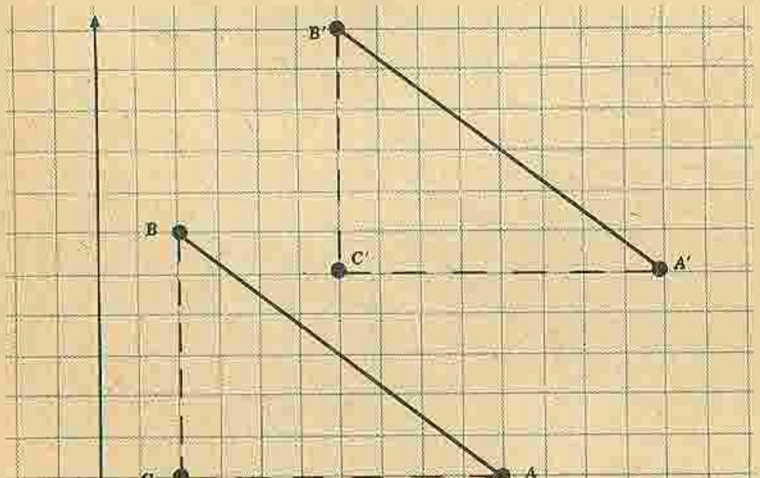


Las flechas que van de los puntos a sus transformados son congruentes, paralelas y de igual sentido.

Ejercicio 9.

a) $A' = 10 + 4,\ 1 + 5) = (14,\ 6)$

b) $B' = (2 + 4,\ 7 + 5) = (6,\ 12)$



c) $AC = 10 - 2 = 8,$ $\qquad BC = 7 - 1 = 6$

$A'C' = 14 - 6 = 8,$ $\qquad B'C' = 12 - 6 = 6$

d) $AB = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{100} = 10$

$A'B' = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{100} = 10$

Ejercicio 10.

a) $A' = (2 - 2,\ -2 + 4) = (0,\ 2)$

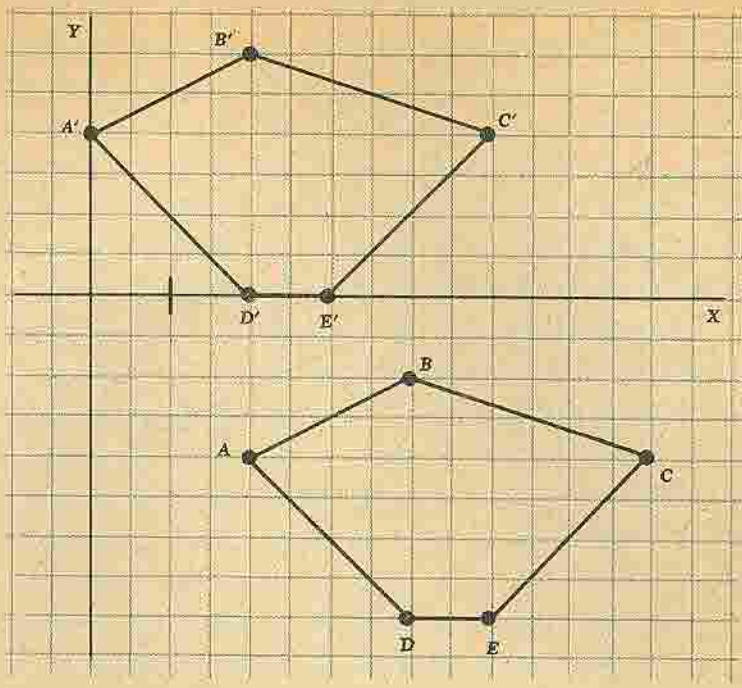
$B' = (4 - 2,\ -1 + 4) = (2,\ 3)$

$$C' = (7 - 2,\ -2 + 4) = (5,\ 2)$$

$$D' = (4 - 2,\ -4 + 4) = (2,\ 0)$$

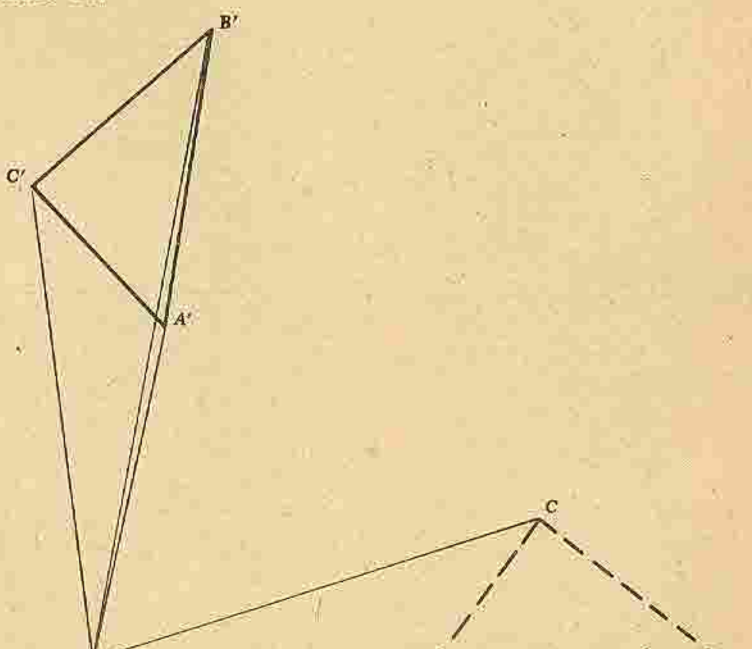
$$E' = (5 - 2,\ -4 + 4) = (3,\ 0)$$

b)



3. Rotaciones

Ejercicio 11.



a) $\overline{A'O} \cong \overline{AO}$, $\overline{B'O} \cong \overline{BO}$ y $\overline{C'O} \cong \overline{CO}$

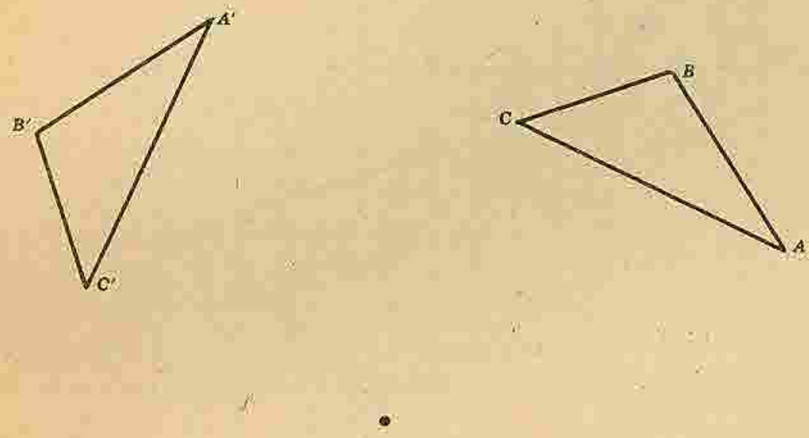
b) $\measuredangle ADA' = \measuredangle BOB'' = \measuredangle COC' = 80$

c) $\overline{A'B} \cong \overline{AB}$, $\overline{B'C'} \cong \overline{BC}$ y $\overline{C'A'} \cong \overline{CA}$

$\angle A \cong A$, $\angle B' \cong \angle B$ y $\angle C' \cong \angle C$

Ejercicio 12.

b) Rotación de 90°.



c) Rotación de 135°.

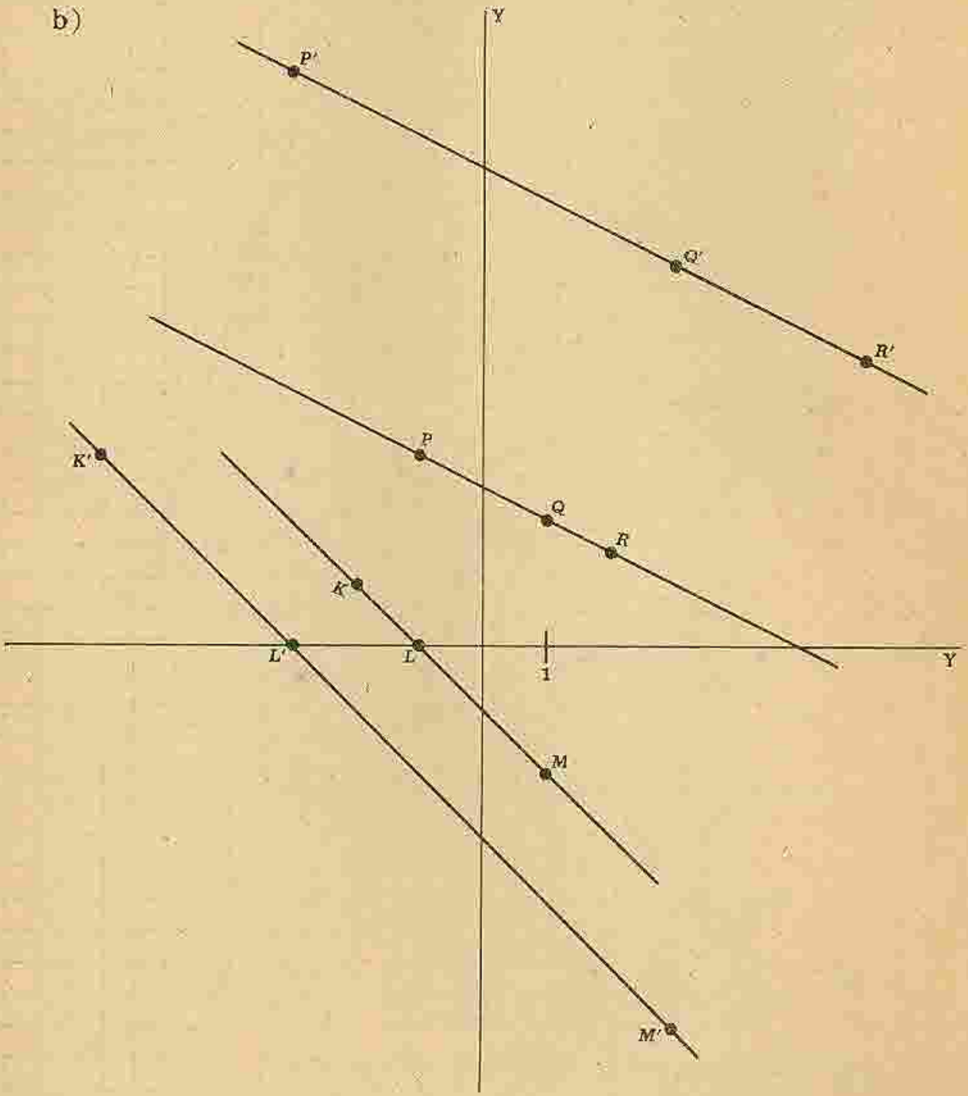
d) Rotación de 180°.

4. Transformaciones de semejanza

Ejercicio 13.

a) $P' = [3 \times (-1),\ 3 \times 3] \quad = (-3,\ 9)$
$Q' = (3 \times 1,\ 3 \times 2) \quad = (3,\ 6)$
$R' = (3 \times 2,\ 3 \times 1.5) \quad = (6,\ 4.5)$
$K' = [3 \times (-2),\ 3 \times 1] \quad = (-6,\ 3)$
$L' = [3 \times (-1),\ 3 \times 0] \quad = (-3,\ 0)$
$M' = [3 \times 1,\ 3 \times (-2)] \quad = (3,\ -6)$

b)



Los puntos P', Q', R', transformados de los puntos P, Q, R, respectivamente, son colineales. Los puntos K, L y M son colineales, asimismo lo son sus transformados, los puntos K', L' y M'.

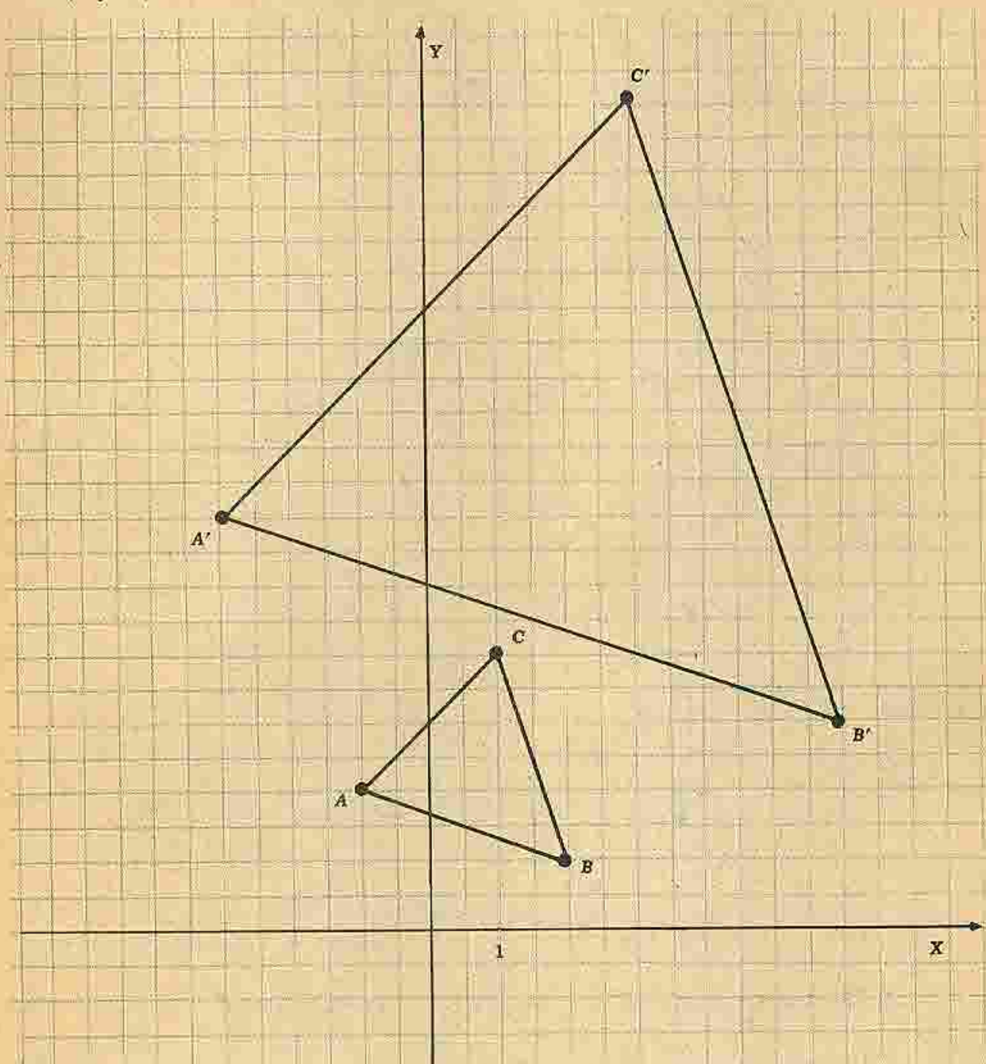
Ejercicio 14.

a) $A' = [3 \times (-1),\ 3 \times 2] = (-3,\ 6)$

$B' = (3 \times 2,\ 3 \times 1) \quad = (6,\ 3)$

$C' = (3 \times 1,\ 3 \times 4) \quad = (3,\ 12)$

b) y c)



d) $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{2.2}{6.6} = \dfrac{1}{3}; \quad \dfrac{BC}{B'C'} = \dfrac{2.2}{6.6} = \dfrac{1}{3}; \quad \dfrac{CA}{C'A'} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$

c) Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes.

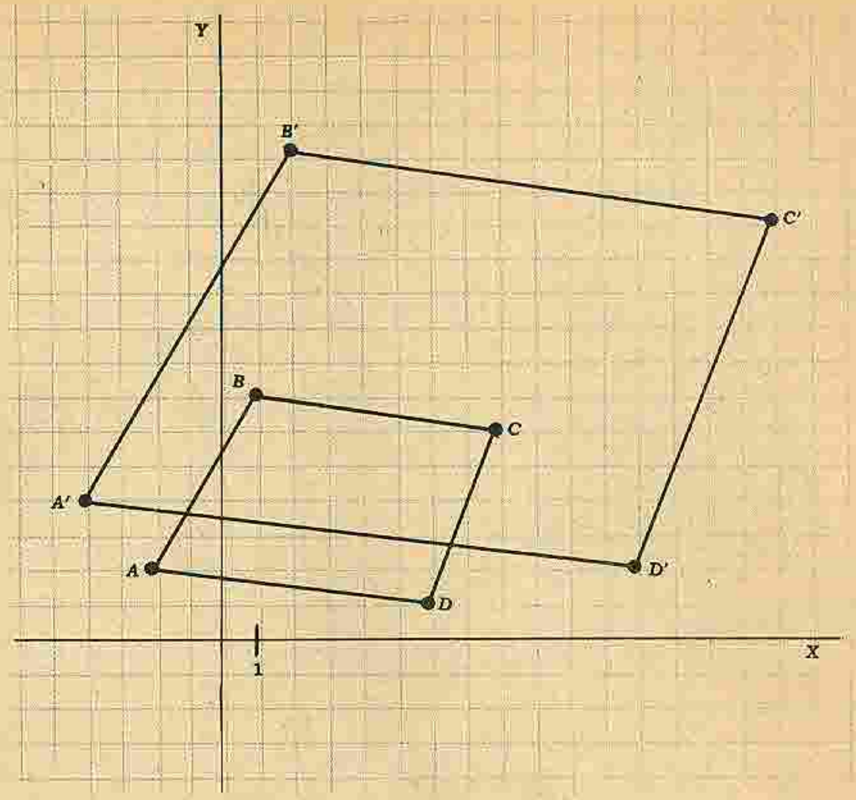
f) En dos triángulos semejantes los ángulos respectivos son congruentes. Por lo tanto,

$$\angle A \cong \angle A', \quad \angle B \cong \angle B', \quad \angle C \cong \angle C'.$$

Ejercicio 15.

a) $A' = (-4, 4)$; $B' = (2, 14)$; $C' = (16, 12)$; $D' = (12, 2)$

b) y c)



d) $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{BC}{B'C'} = \dfrac{2.5}{5} = \dfrac{1}{2}$

$\dfrac{CD}{C'D'} = \dfrac{1.9}{3.8} = \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{DA}{D'A'} = \dfrac{2.9}{5.8} = \dfrac{1}{2}$

e) Las parejas de ángulos dados son congruentes.

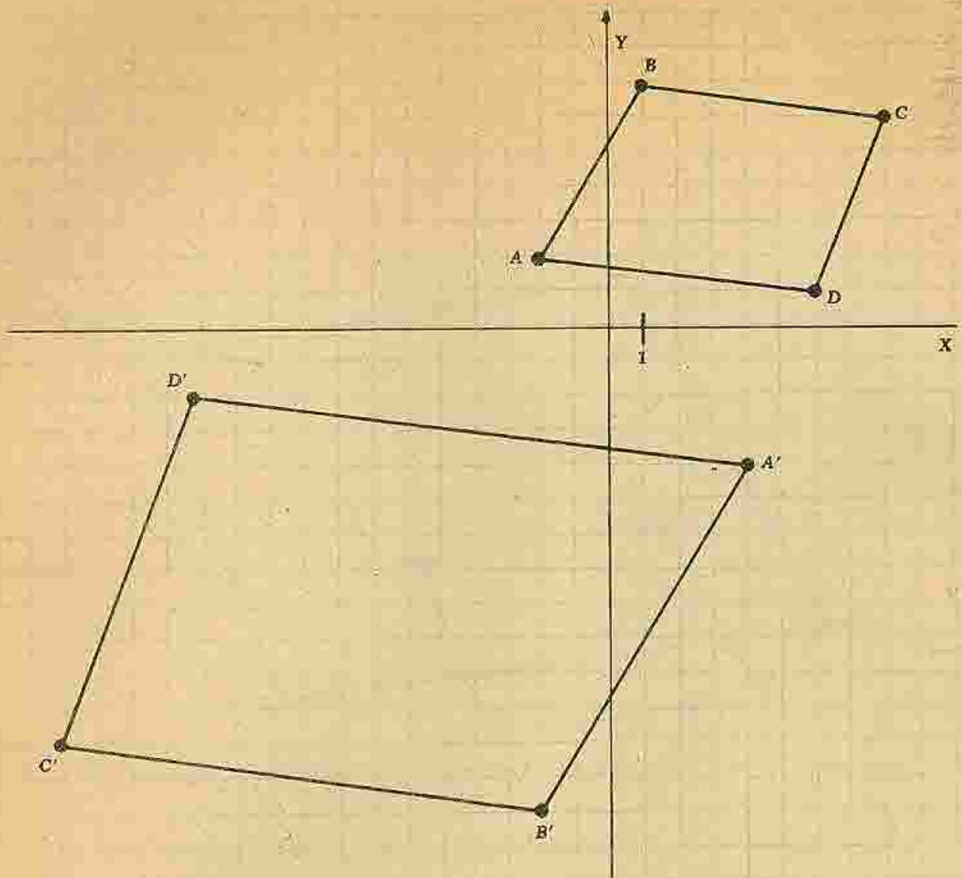
f) El cuadrilátero $ABCD$ y su transformado $A'B'C'D'$ son semejantes.

g) La razón de semejanza del primer cuadrilátero a su transformado es $1 : 2$, o bien, $\dfrac{1}{2}$.

Ejercicio 16.

a) $A' = (4, -4)$; $B' = (-2, -14)$; $C' = (-16, -12)$; $D' = (-12, -2)$

b) y c)



d) $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$, $\qquad \dfrac{BC}{B'C'} = \dfrac{2.5}{5} = \dfrac{1}{2}$

$\dfrac{CD}{C'D'} = \dfrac{1.9}{3.8} = \dfrac{1}{2}$, $\qquad \dfrac{DA}{D'A'} = \dfrac{2.9}{5.8} = \dfrac{1}{2}$

e) $\angle A \cong \angle A'$, $\quad \angle B \cong \angle B'$ $\quad \angle C \cong \angle C'$,
$\angle D \cong \angle D'$.

f) El cuadrilátero *ABCD* y su transformado son semejantes.

g) La razón de semejanza del cuadrilátero *ABCD* a su transformado es $\dfrac{1}{2}$.

Capítulo octavo
Funciones trigonométricas

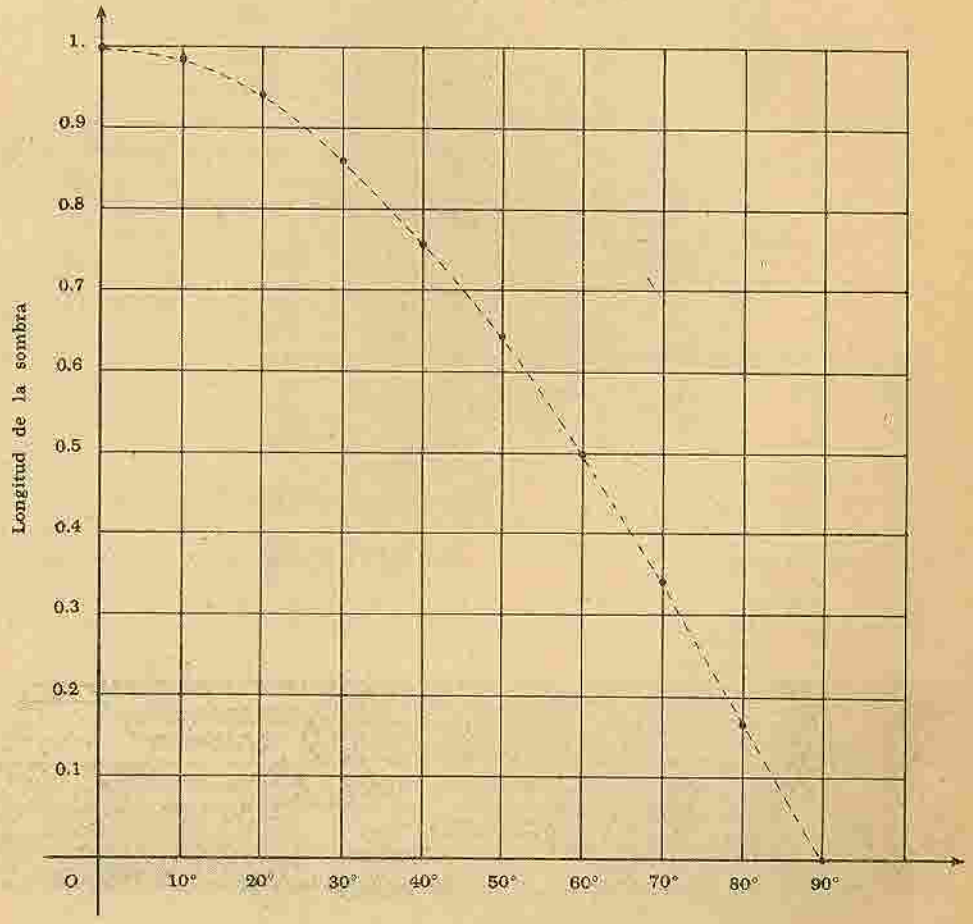
1. La función coseno

Ejercicio 1.

Angulo	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
Número	1	.98	.94	.86	.76	.64	.5	.34	0.17	0

Sus respuestas pueden diferir un poco de las que aquí damos.

Ejercicio 2.



Ejercicio 3.

a) no
b) entre 0.76 y .64
c) menores
d) 60° y 90°
e) .34
f) mayor que .76 y menor que .98
g) no

Ejercicio 4.

a) $\cos 35 = .819$
b) $\frac{k}{l} = .819$
c) $\frac{m}{n} = .819$
d) $\frac{p}{q} = .616$
e) $\frac{r}{s} = .616$
f) $\cos 52^\circ = .616$
g) $\frac{t}{u} = .883$
h) $\cos 28^\circ = .883$
i) $\frac{v}{w} = .883$

Problemas.

a) $\cos 30^\circ = \frac{4}{AC}$

$$AC = \frac{4}{\cos 30^\circ}$$

$$AC = \frac{4}{.866}$$

$$AC = 4.61 \text{ m}$$

b) $\cos 19^\circ = \frac{PQ}{PR}$

$$PR = \frac{PQ}{\cos 19^\circ}$$

$$PR = \frac{8}{.946}$$

$$PR = 8.45 \text{ m}$$

c) $\cos \angle RTS = \frac{TR}{TS}$

$$\cos \angle RTS = \frac{3.5}{4.5}$$

$$\cos \angle RTS = 0.777$$

Para encontrar el valor del $\angle RTS$ buscamos en la tabla en la columna "cos r", el número 0.777.

Encontramos que

$$\cos 39^\circ = 0.777$$

Por lo que

$$\angle RTS = 39^\circ$$

r	sen r	cos r	tan r
31°	.515	.857	.601
32°	.530	.848	.625
33°	.545	.839	.649
34°	.559	.829	.675
35°	.574	.819	.700
36°	.588	.809	.727
37°	.602	.799	.754
38°	.616	.788	.781
39°	.629	.777	.810
40°	.643	.766	.839
41°	.656	.755	.869
42°	.669	.743	.900
43°	.682	.731	.933
44°	.695	.719	.966
45°	.707	.707	1

d) $\cos 12^\circ = \frac{3.8}{FG}$

$$FG = \frac{3.8}{\cos 12^\circ}$$

$$FG = \frac{3.8}{.978}$$

$$FG = 3.89 \text{ m}$$

e) $\cos \angle LMN = \frac{MN}{ML}$

$$\cos \angle LMN = \frac{2.85}{3.15}$$

$$\cos \angle LMN = 0.904$$

Para encontrar el valor del $\angle LMN$ buscamos el número 0.904 en la columna "cos r", como no aparece el número 0.904 tomamos el que más se aproxima, en este caso 0.906. Leemos entonces

$$\cos 25° = .906$$

Por lo que el valor aproximado del $\angle LMN$ es 25°.

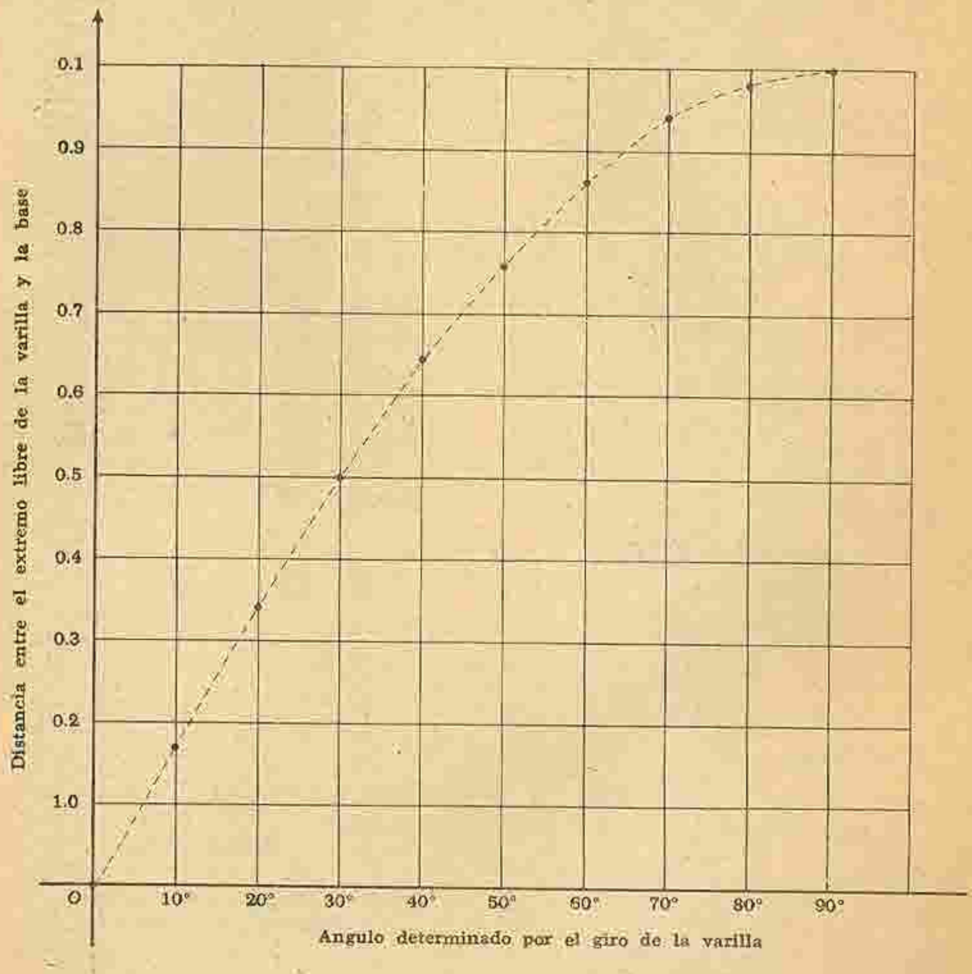
r	sen r	cos r	tan r
23°	.391	.921	.424
24°	.407	.914	.445
25°	.423	.906	.466
26°	.438	.899	.488
27°	.454	.891	.510
28°	.469	.883	.532

2. La función seno

Ejercicio 5.

Angulo	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
Número	0	.17	.34	.5	0.64	.76	.86	.94	.98	1

Ejercicio 6.



Ejercicio 7.

a) no b) no c) no d) sí e) sí f) no g) sí al ángulo de 45°

Ejercicio 8.

a) sen 77° = .974 b) $\frac{k}{l} = .974$ c) $\frac{m}{n} = .974$

d) sen 39° = .629 e) $\frac{p}{q} = .629$ f) $\frac{x}{y} = .629$

g) $\frac{r}{s} = .731$ h) sen 47° = .731 i) $\frac{t}{u} = .731$

Ejercicio 9.

a) sen 21° = 0.36

b) cos 67° = 0.39

c) $x = .530$

d) cos 25° = 0.906

e) $x = .966$

f) $x = 36°$

Ejercicio 10.

a) $\text{sen } 35° = \frac{z}{15}$

$z = \text{sen } 35° \times 15$

$z = .574 \times 15$

$z = 8.61$

b) $\text{sen } 43° = \frac{18}{z}$

$z = \frac{18}{\text{sen } 43°}$

$z = \frac{18}{.682}$

$z = 26.39$

c) $\text{sen } 28° = \frac{13}{z}$

$z = \frac{13}{\text{sen } 28°}$

$z = \frac{13}{.469}$

$z = 27.71$

d) $\text{sen } 50° = \frac{z}{25}$

$z = \text{sen } 50° \times 25$

$z = .766 \times 25$

$z = 19.15$

e) $\text{sen } 15° = \frac{z}{19}$

$z = \text{sen } 15° \times 19$

$z = .259 \times 19$

$z = 4.92$

f) $\text{sen } 68° = \frac{24}{z}$

$z = \frac{24}{\text{sen } 68°}$

$z = \frac{24}{.927}$

$z = 25.88$

Problemas.

a) $\text{sen } 29° = \frac{3.5}{AC}$

$AC = \frac{3.5}{\text{sen } 29°}$

b) $\text{sen } 36° = \frac{4}{AB}$

$AB = \frac{4}{\text{sen } 36°}$

$$AC = \frac{3.5}{.485}$$
$$AC = 7.21 \text{ m}$$

$$AB = \frac{4}{.588}$$
$$AB = 6.80 \text{ m}$$

c) $\text{sen } 36° = \dfrac{TS}{36}$

$TS = \text{sen } 36° \times 36$

$TS = .588 \times 36$

$TS = 21.16 \text{ m}$

d) $\text{sen } 43° = \dfrac{HF}{75}$

$HF = \text{sen } 43° \times 75$

$HF = .682 \times 75$

$HF = 51.15 \text{ m}$

e) $\text{sen } 1° = \dfrac{x}{800}$

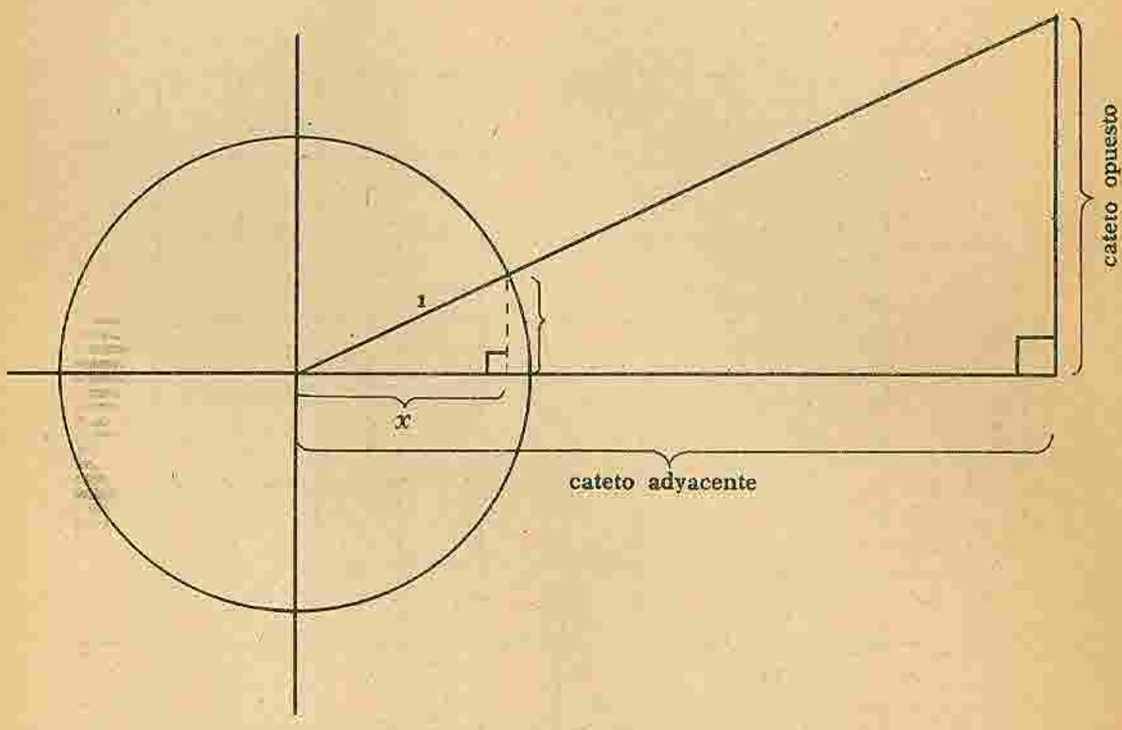
$x = \text{sen } 1° \times 800$

$x = .017 \times 800$

$x = 13.6 \text{ m}$

3. La función tangente

Ejercicio 11.



Sabemos que

$$\tan \angle A = \frac{y}{x}$$

como los triángulos de la figura son semejantes

$$\frac{y}{x} = \frac{\text{medida del cateto opuesto}}{\text{medida del cateto adyacente}}$$

$$\tan \angle A = \frac{\text{medida del cateto opuesto}}{\text{medida del cateto adyacente}}$$

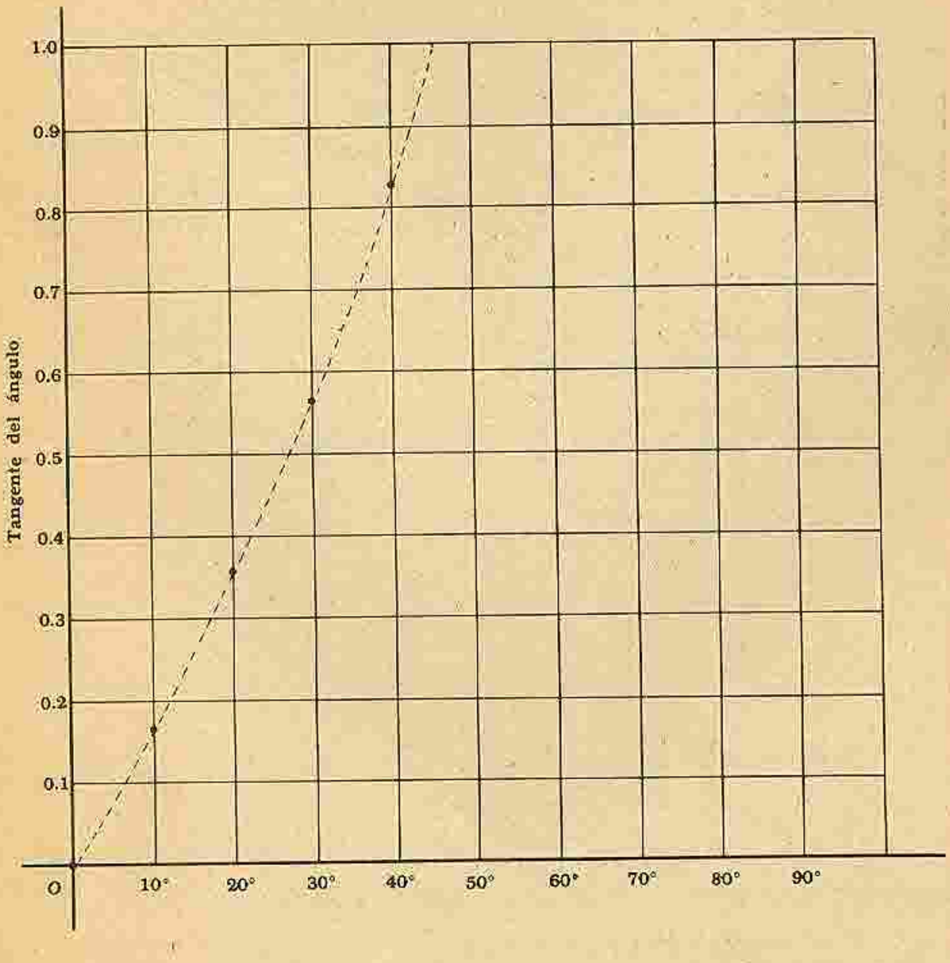
4. La función tangente

Ejercicio 12.

Angulo	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
Tangente del ángulo	0	.17	.36	.57	.83	1. 19	1.73	2.74	5.67	

Nota: La tangente de 90° no está definida.

Ejercicio 13.



Ejercicio 14.

b) La diferencia entre los valores que se comparan debe ser pequeña.

c) El ángulo es aproximadamente 22°.

d) La diferencia entre los valores que se comparan debe ser pequeña.

e) No.

f) La tangente de 88° es 28.636.

g) La diferencia entre los valores que se comparan debe ser pequeña.

Ejercicio 15.

a) $\tan 32° = \frac{r}{20}$

$r = \tan 32° \times 20$
$r = .625 \times 20$
$r = 12.50$

b) $\tan 19° = \frac{s}{25}$

$s = \tan 19° \times 25$
$s = .344 \times 25$
$s = 8.6$

c) $\tan 35° = \frac{19}{t}$

$t = \frac{19}{\tan 35°}$
$t = \frac{19}{.7}$
$t = 27.14$

d) $\tan 43° = \frac{u}{26}$

$u = \tan 43° \times 26$
$u = .933 \times 26$
$u = 24.25$

e) $\tan 25° = \frac{v}{31}$

$v = \tan 25° \times 31$
$v = .466 \times 31$
$v = 14.44$

f) $\tan 58° = \frac{36}{w}$

$w = \frac{36}{\tan 58°}$
$w = \frac{36}{1.6}$
$w = 22.5$

Problemas.

a) $\tan 50° = \frac{h}{56}$

$h = \tan 50° \times 56$
$h = 1.192 \times 56$
$h = 66.75$ m

b) $\frac{15}{790} = .018$

El proyecto cumple con el requisito ya que $.018 < .03$.

c) $\tan 30° = \frac{2.5}{a}$

$a = \frac{2.5}{\tan 30°}$
$a = \frac{2.5}{.577}$
$a = 4.33$ cm

d) $\tan 65° = \frac{30}{AB}$

$AB = \frac{30}{\tan 65°}$
$AB = \frac{30}{2.145}$
$AB = 13.98$ m

e) $\tan \angle BAC = \dfrac{7}{19}$

$\tan \angle BAC = 0.368$

$\angle BAC = 20°$

Problemas.

a) $\cos \angle ACB = \dfrac{CB}{AC}$

$\cos 39° = \dfrac{15}{AC}$

$AC = \dfrac{15}{\cos 39°}$

$AC = \dfrac{15}{.777}$

$AC = 19.30$ m

b) $\tan \angle POQ = \dfrac{9}{10}$

$\tan \angle POQ = .9$

$\angle POQ = 42°$

$\text{sen } 42° = \dfrac{9}{OP}$

$OP = \dfrac{9}{\text{sen } 42°}$

$OP = \dfrac{9}{.669}$

$OP = 13.45$

c) $\tan 55° = \dfrac{h}{1.5}$

$h = \tan 55° \times 1.5$

$h = 1.428 \times 1.5$

$h = 2.14$ m

d) $\text{sen } 35° = \dfrac{3}{AB}$

$AB = \dfrac{3}{\text{sen } 35°}$

$AB = \dfrac{3}{.574}$

$AB = 5.22$ m

e) $\tan 5° = \dfrac{8}{PR}$

$PR = \dfrac{8}{\tan 5°}$

$PR = \dfrac{8}{.087}$

$PR = 91.\ 95$ m

f) $\tan \angle AOB = \dfrac{AB}{OB}$

$\tan 30° = \dfrac{AB}{7.5}$

$AB = \tan 30° \times 7.5$

$AB = .577 \times 7.5$

$AB = 4.32$ m

g) $\tan \angle A = \dfrac{4}{9}$

$\tan \angle A = .444$

$\angle A = 24°$

h) $\text{sen } 60° = \dfrac{h}{15}$

$h = \text{sen } 60° \times 15$

$h = .866 \times 15$

$h = 12.99$ m

Nota: La altura también puede obtenerse a partir de

$$\tan 60° = \frac{h}{7.5}$$

i) $\cos 38° = \dfrac{fx}{500}$

$fx = \cos 38° \times 500$

$fx = .788 \times 500$

$fx = 394$ kg.

j) $\text{sen } 45° = \dfrac{fy}{250}$

$fy = \text{sen } 45° \times 250$

$fy = .707 \times 250$

$fy = 176.75$ kg.

N O T A S

ESTA EDICION DE
50,000 EJEMPLARES SE
TERMI-
NO DE
IMPRI-
MIR EL
MES DE AGOS-
TO DE 1976, EN
LOS TA-
LLERES
DE IM-
PRESO-
RES Y
EDI TORES,
S. A., AVENA
No. 19, FRAC-
CIONAMIENTO ESME-
RALDA, MEXICO
13, D. F.