Publicaciones Electrónicas
Instituto Mexicano de
Ciencias y Humanidades

Matemáticas
Segundo Curso

Emilio Lluis Riera
Humberto Cárdenas
Miguel Ángel Curiel Ariza
Fidel Peralta Corona
Cuauhtémoc Tavera Guerrero
Elías Villar Quijano

www.imch.org.mx

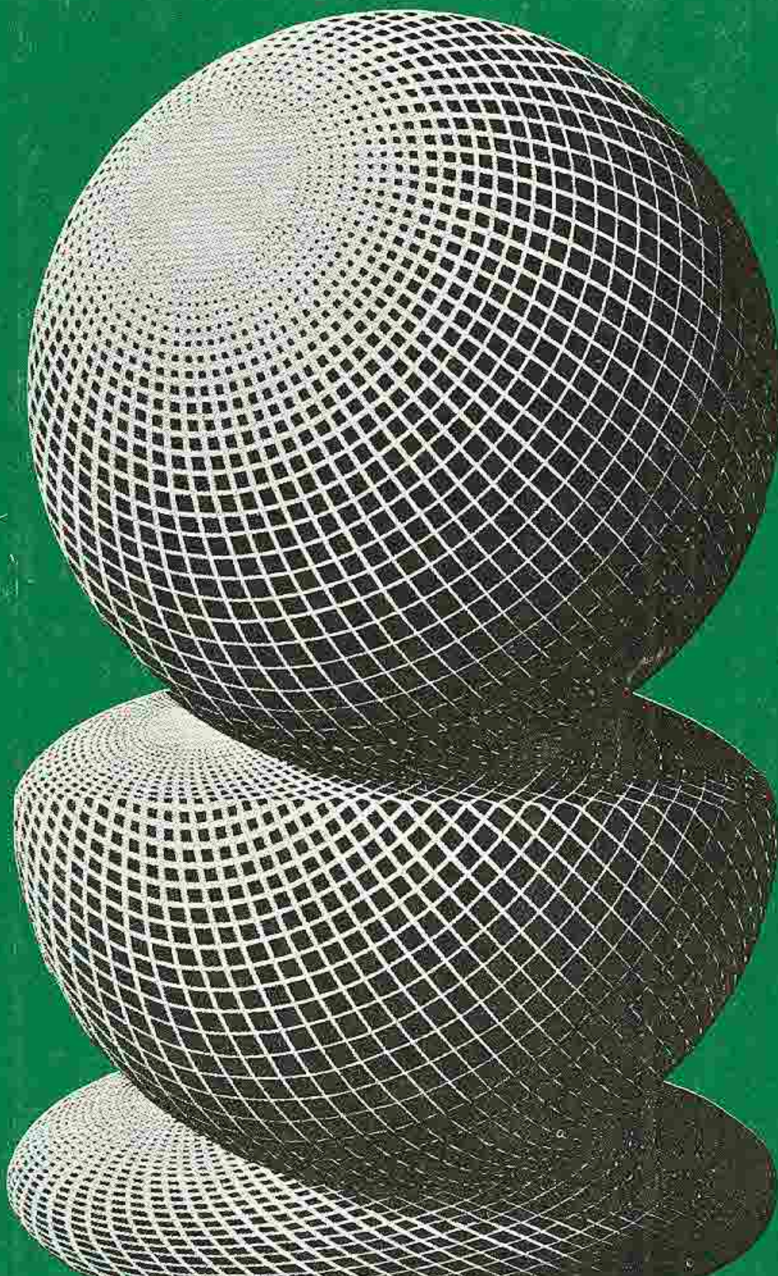
Academia de Ciencias. Vol. 6 (2019)

Segundo grado

MATEMATICAS

secundaria abierta

SEP



C. E. C. S. A.

primera parte

Este libro es parte del plan de secundaria abierta, que tiene por objeto acreditar la enseñanza media a sectores de la población que no han tenido oportunidad de ir a la escuela. Se publica dentro de un convenio establecido entre la Secretaría de Educación Pública y la Cámara Nacional de la Industria Editorial, para hacer llegar libros de calidad y a precios económicos a dichos sectores.

Primera Edición, 1974.

COMPAÑIA EDITORIAL CONTINENTAL, S. A.
MEXICO - ESPAÑA - ARGENTINA - CHILE - VENEZUELA
COLOMBIA - PERU

MIEMBRO DE LA CAMARA NACIONAL DE LA INDUSTRIA EDITORIAL
Registro Núm. 43

IMPRESO EN MEXICO PRINTED IN MEXICO

Segundo grado

MATEMATICAS

primera parte

SEP CONAFE CNIE CECSA

Autores: Dr. Humberto Cárdenas Trigos
Instituto de Matemáticas, UNAM

Profr. Miguel Angel Curiel Ariza
Secretaría de Educación Pública

Dr. Emilio Lluis Riera
Instituto de Matemáticas, UNAM

Profr. Fidel Peralta Corona
Secretaría de Educación Pública

Profr. Cuauhtémoc Tavera Guerrero
Secretaría de Educación Pública

Profr. Elías V. Villar Quijano
Secretaría de Educación Pública

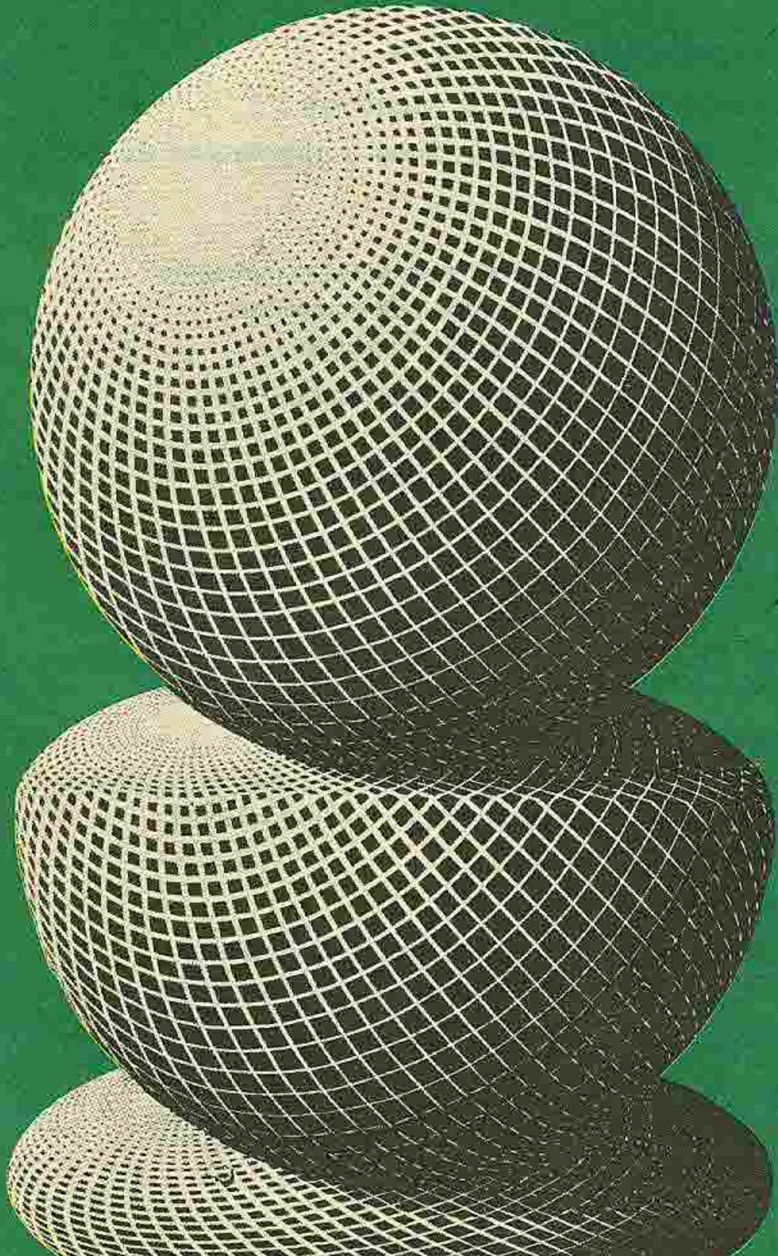
Dibujos de las páginas 5, 11, 147 de **M. C. Escher.**

Segundo grado

MATEMATICAS

secundaria abierta

SEP



C. E. C. S. A.

primera parte

Indice

Introducción

"El deseo de saber y de superación es innato en el corazón del hombre"

Benito Juárez

Estimado lector:

Ahora que usted ha terminado los estudios del primer grado de Secundaria, y está dispuesto a continuar por la ruta ascendente que se ha trazado, permítanos desearle éxito en su labor, a la vez que felicitarlo por su afán de superación.

En este segundo curso de matemáticas usted logrará conocimientos y habilidades superiores a los del curso anterior.

Entre ellos, los más importantes son los siguientes:

a) Conocerá nuevos números y aprenderá a operar con ellos.

b) Aprenderá a resolver algunos problemas con esos nuevos números.

c) Aumentará su habilidad para interpretar y manejar expresiones que representan números.

d) Aprenderá a resolver ecuaciones más complicadas.

e) Aprenderá a representar números y relaciones numéricas por medio de gráficas.

f) Llegará al concepto de función, que tiene gran importancia en el estudio de las matemáticas.

g) Adquirirá un conocimiento más avanzado de la Geometría.

Una vez que usted, amigo lector, haya dominado el contenido de este libro, estará en posibilidades de presentar el examen correspondiente y acreditar su segundo curso de matemáticas.

Algunas orientaciones para el estudio de este libro

A fin de lograr una mayor eficacia con un menor esfuerzo, en el estudio de este libro, nos permitimos sugerirle a usted lo siguiente:

1. Prepare un sitio adecuado para sus estudios. Un lugar en el que se sienta cómodo y tranquilo para trabajar a gusto.

2. Elabore su propio horario de estudios de acuerdo con sus otras ocupaciones. Es conveniente estudiar entre 50 y 60 minutos diarios, por lo menos 5 días a la semana.

3. Empiece cada sesión de estudio teniendo a la mano los útiles que va a necesitar: cuaderno, lápiz, papel, pluma, goma, pinturas, etc.

4. Procure usted cumplir con el horario que se haya fijado para estudiar. El contenido de este libro podrá cubrirse aproximadamente en 150 horas de trabajo; pero esto es muy relativo, pues todo depende de las condiciones y necesidades de cada persona.

A continuación le explicamos cómo está hecho el libro y le indicamos cómo estudiar en él para obtener el máximo provecho:

Cada lección en el libro consta de una breve explicación, algunos ejemplos y varios ejercicios y problemas.

Lea cuidadosamente la explicación hasta que capte la idea que se expone. Los ejemplos ayudan a aclarar la misma idea; por eso, léalos también con mucho cuidado. Finalmente, resuelva los ejercicios.

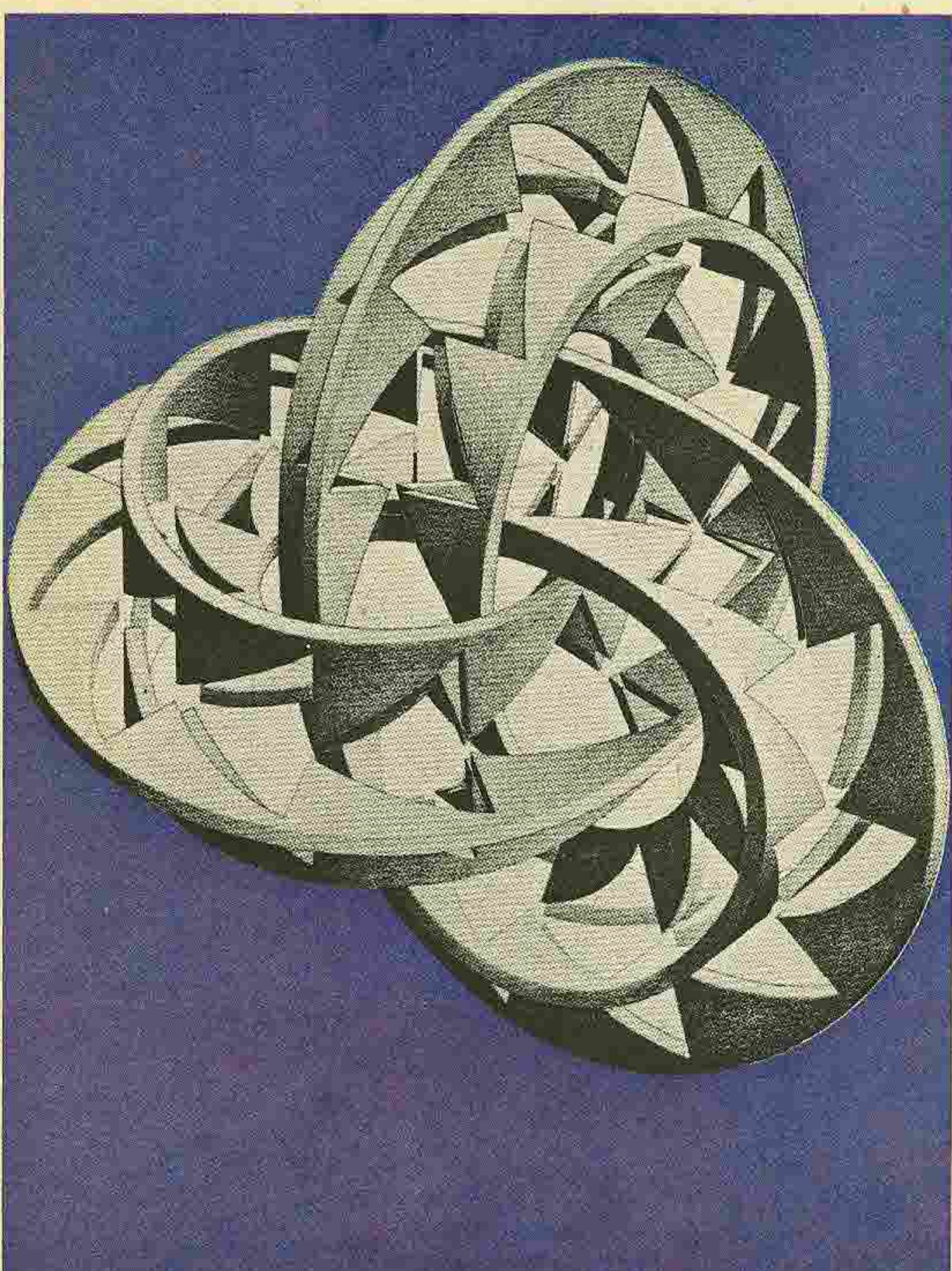
Existe al final del libro una sección en la que se encuentra la solución de todos los ejercicios. Compare sus respuestas con las que ahí se dan. Si tuvo errores, analice por qué, repase las explicaciones y ejemplos y, por último, corrija las fallas que haya tenido en su resolución. No pase usted a la lección siguiente sin haber hecho este trabajo por completo. Esto es de vital importancia para lograr un aprendizaje firme.

El presente libro es, al mismo tiempo, un texto y un cuaderno de trabajo. Esperamos que su estudio le ayude a lograr los objetivos que usted persigue.

Los autores.

Capítulo primero

Los números racionales



Los números racionales no negativos.

En el libro correspondiente al curso anterior usted adquirió algunas ideas acerca de los números racionales. ¿Recuerda usted la aclaración que hicimos entonces? Dijimos que los números racionales estudiados no eran todos los números racionales.

En este segundo curso de matemáticas sí estudiaremos **todos** los números racionales y, para evitar posibles confusiones, cuando hablemos de los números estudiados en el curso anterior, diremos que esos son los **números racionales no negativos.**

Antes de iniciar nuestro curso hagamos un repaso de los principales conceptos dados en el libro anterior acerca de este tipo de números:

1. Son números racionales (no negativos) todos aquellos números que se pueden representar por medio de fracciones.

2. Una fracción es un símbolo de la forma $\frac{a}{b}$, en donde a es un número natural o cero, y b es un número natural. (Más adelante ampliaremos este concepto de fracción).

Ejemplo.

a) Los siguientes símbolos son fracciones y, por lo tanto, representan números racionales.

$$\frac{2}{3} \qquad \frac{15}{8} \qquad \frac{1}{6} \qquad \frac{0}{4}$$

b) Las siguientes expresiones no son fracciones y, por lo tanto, no representan números racionales.

$$\frac{1}{0} \qquad \frac{2}{0} \qquad \frac{3}{0} \qquad \frac{4}{0} \qquad \frac{0}{0}$$

3. Cada número racional (no negativo) se puede expresar con una infinidad de fracciones.

Ejemplo.

a) $\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{12}{16} = \frac{9}{12} = \frac{30}{40}$, etc.

b) $\frac{100}{60} = \frac{50}{30} = \frac{25}{15} = \frac{5}{3} = \frac{10}{6}$, etc.

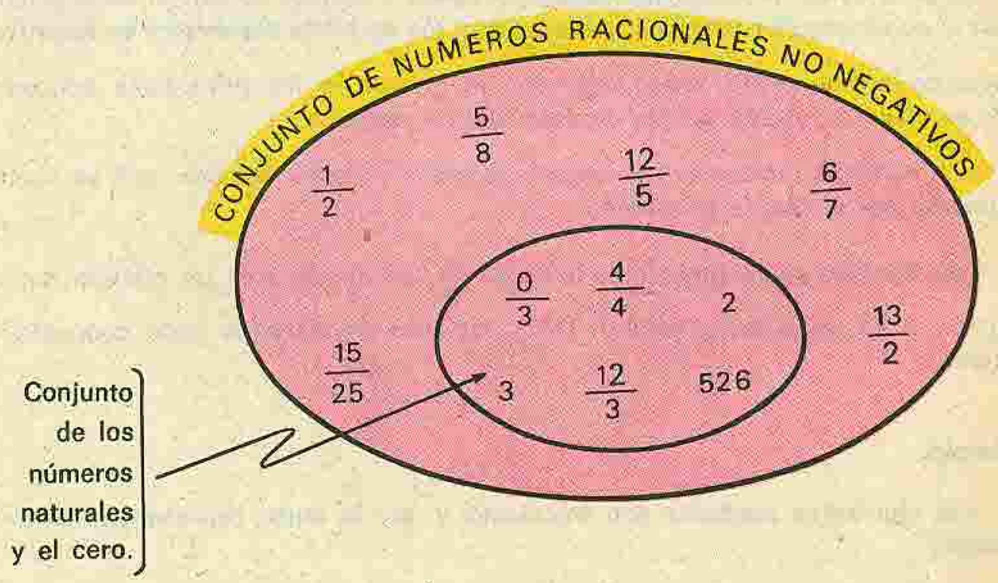
4. Todo número natural y el cero se pueden representar por medio de fracciones. Por lo tanto, los números naturales y el cero son números racionales no negativos.

Ejemplo.

$$8 = \frac{8}{1} = \frac{16}{2} = \frac{24}{3} = \frac{40}{5} = \frac{72}{9}, \text{ etc.}$$

$$0 = \frac{0}{3} = \frac{0}{1} = \frac{0}{25} = \frac{0}{7}, \text{ etc.}$$

Dicho en otra forma, el conjunto formado por los números naturales y el cero está contenido en el conjunto de racionales no negativos.



5. Todo número racional no negativo puede expresarse también en notación decimal. Para cada racional hay sólo un decimal que lo representa, y éste puede ser finito o periódico.

Ejemplo.

a) $\frac{4}{5} = .8$ b) $\frac{2}{3} = .\overline{6}$

c) $\frac{15}{8} = 1.875$ d) $\frac{29}{15} = 1.9\overline{3}$

6. Los números racionales se pueden sumar, multiplicar, restar y dividir.

7. La adición y la multiplicación de números racionales no negativos tienen las siguientes propiedades:

	Adición	Multiplicación
Conmutativa	$r + s = s + r$	$r \cdot s = s \cdot r$
Asociativa	$(r + s) + t = r + (s + t)$	$(r \cdot s)t = r(s \cdot t)$
Elemento neutro	$r + 0 = 0 + r = r$	$r \cdot 1 = 1 \cdot r = r$
Elemento inverso		$r \cdot \frac{1}{r} = 1 \; (r \neq 0)$
Distributiva	$r \cdot (s + t) = r \cdot s + r \cdot t$	

8. En la sustracción, la diferencia es el número que sumado con el sustraendo da el minuendo.

Ejemplo.

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{minuendo}}}{\frac{9}{10}} - \underset{\substack{\uparrow \\ \text{sustraendo}}}{\frac{2}{5}} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{diferencia}}}{\frac{5}{10}} \quad \text{porque} \quad \underset{\substack{\uparrow \\ \text{diferencia}}}{\frac{5}{10}} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{sustraendo}}}{\frac{2}{5}} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{minuendo}}}{\frac{9}{10}}$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{minuendo}}}{.34} - \underset{\substack{\uparrow \\ \text{sustraendo}}}{.25} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{diferencia}}}{.09} \quad \text{porque} \quad \underset{\substack{\uparrow \\ \text{diferencia}}}{.09} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{sustraendo}}}{.25} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{minuendo}}}{.34}$$

9. Para poder efectuar una sustracción con racionales no negativos es necesario que el minuendo sea mayor o igual que el sustraendo.

10. En la división, el cociente es el número que multiplicado por el divisor da el dividendo.

Ejemplo.

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{dividendo}}}{\frac{2}{3}} \div \underset{\substack{\uparrow \\ \text{divisor}}}{\frac{1}{5}} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{cociente}}}{\frac{10}{3}} \quad \text{porque} \quad \underset{\substack{\uparrow \\ \text{cociente}}}{\frac{10}{3}} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{divisor}}}{\frac{1}{5}} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{dividendo}}}{\frac{2}{3}}$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{dividendo}}}{.6} \div \underset{\substack{\uparrow \\ \text{divisor}}}{4} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{cociente}}}{.15} \quad \text{porque} \quad \underset{\substack{\uparrow \\ \text{cociente}}}{.15} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{divisor}}}{4} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{dividendo}}}{.6}$$

11. Un número racional no puede dividirse entre cero. Las expresiones como $28 \div 0$ y $0 \div 0$, carecen de significado.

12. En la división de números racionales se puede usar la propiedad del inverso multiplicativo para encontrar el cociente. Sólo tenemos que multiplicar el dividendo por el inverso multiplicativo del divisor.

Ejemplo.

a) $\frac{3}{4} \div \frac{6}{7} = \frac{3}{4} \cdot \frac{7}{6} = \frac{21}{24}$

b) $5 \div 4 = 5 \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$

c) $\frac{1}{3} \div 6 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{18}$

II

Números racionales no negativos y segmentos de recta.

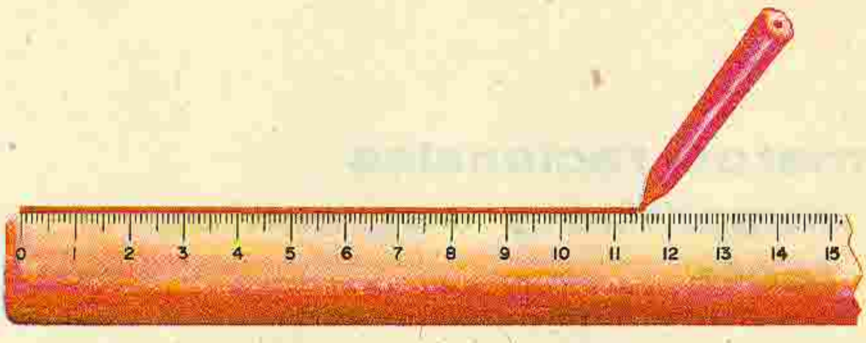
Algunas veces hemos oído que los números naturales se usan para contar y que los números racionales no negativos se utilizan en algunos procesos de medir. Así, por ejemplo, se habla de una longitud de 5.3 metros, de un peso de $\frac{3}{4}$ de kilogramo, de una velocidad de 60 kilómetros por hora, etc.

Usted aprendió en la escuela primaria un procedimiento para medir segmentos de recta con una regla. Pero ¿sabe cuáles son las ideas matemáticas que justifican ese procedimiento que usted conoce?

Cada vez que medimos un segmento con una regla estamos aplicando nuestro conocimiento sobre segmentos, sobre congruencia de segmentos y sobre subdivisión de algún segmento en segmentos congruentes. Repasemos todos estos conceptos para darnos una idea de cómo se relacionan los números racionales con los segmentos de una recta, cuando se realiza un proceso de medición de segmentos.

1. Rectas y segmentos de recta.

Usted representa líneas rectas usando lápiz y regla, de la siguiente manera:



(En esta ilustración aparece sólo una parte de recta pues, en matemáticas, las rectas se consideran ilimitadas en ambos sentidos).

Si tenemos una recta cualquiera y tomamos una parte de ella, que esté formada por dos puntos y todos los puntos comprendidos entre ellos, decimos que esa parte es un **segmento de la recta.**

Por ejemplo, en la siguiente ilustración tenemos un segmento de recta pintado de rojo.

Para poder referirse cómodamente a un segmento dado, primero se nombran sus puntos extremos, con las letras *A* y *B* por ejemplo,

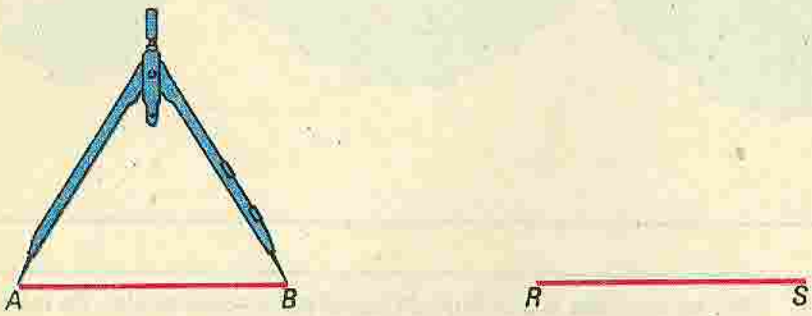
y luego se emplea la notación $\overline{AB}$ (Léase: "segmento de extremos *A* y *B*", o bien "segmento *AB*").

A un segmento cuyos extremos son los puntos *A* y *B* se le puede denotar también como $\overline{BA}$ ("segmento *BA*")

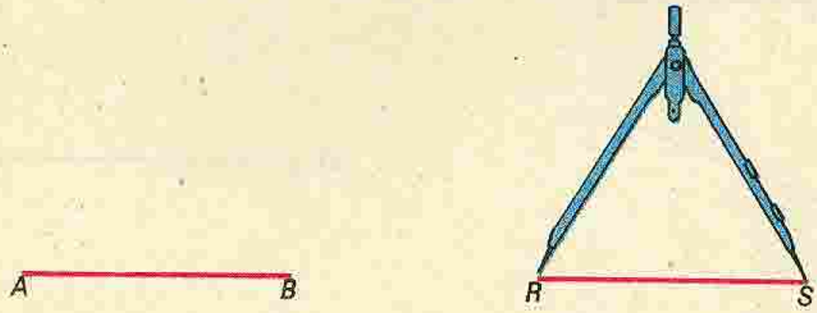
2. Segmentos congruentes

Consideremos los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{RS}$ siguientes.

Coloquemos un compás sobre los puntos A y B, como se ilustra.

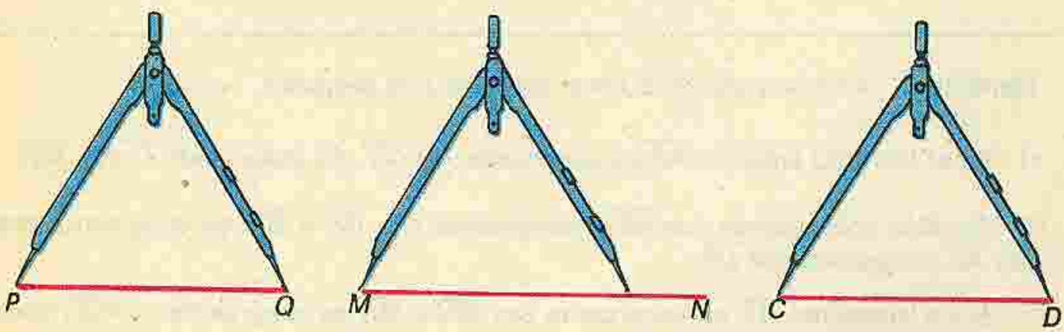


Si con esta abertura del compás colocamos ahora una punta en uno de los extremos de $\overline{RS}$, vemos que la otra punta coincide con el otro extremo.



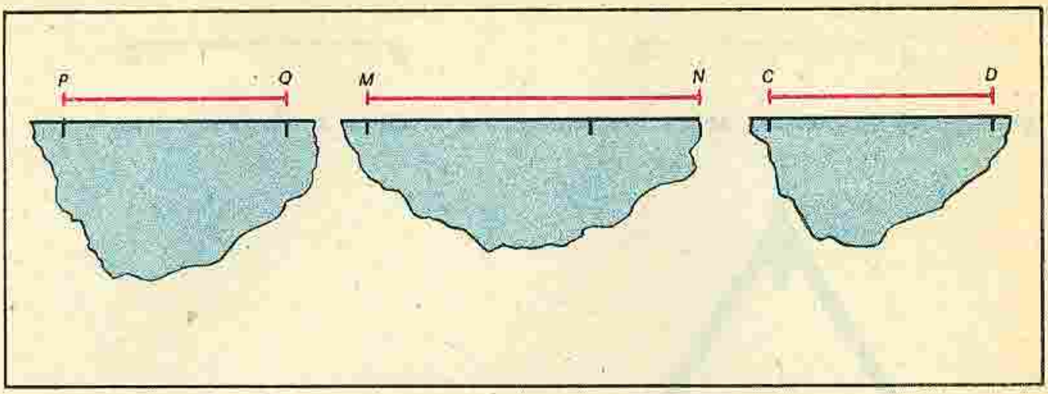
En este caso decimos que $\overline{RS}$ es **congruente** con $\overline{AB}$; o bien, decimos, que $\overline{AB}$ es congruente con $\overline{RS}$; o bien, decimos que $\overline{AB}$ y $\overline{RS}$ son congruentes entre sí.

El uso del compás, como acabamos de ver, nos sirve para saber cuándo dos segmentos son congruentes o no. Por ejemplo, veamos los siguientes segmentos:

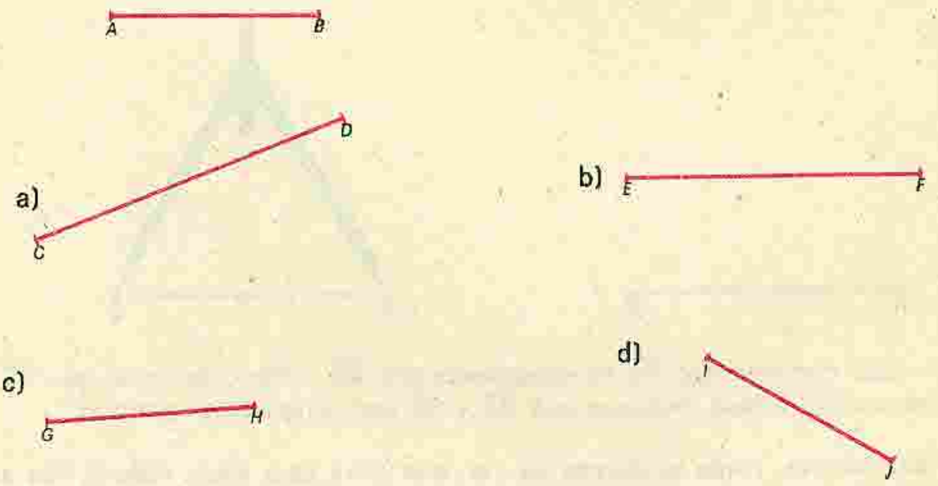


$\overline{PQ}$ es congruente con $\overline{CD}$
$\overline{MN}$ no es congruente con $\overline{PQ}$
$\overline{MN}$ no es congruente con $\overline{CD}$

En caso de no tener un compás podemos poner marcas en el filo de una hoja de papel, para saber si los segmentos son congruentes o no.



Ejercicio 1. Use un compás o una hoja de papel para saber cuáles de los siguientes segmentos son congruentes con $\overline{AB}$.



Ejercicio 2. Analice cada situación y conteste a la pregunta.

a) En el ejercicio anterior, $\overline{AB}$ es congruente con $\overline{IJ}$. ¿Es congruente $\overline{IJ}$ con $\overline{AB}$?

b) También encontramos que $\overline{AB}$ es congruente con $\overline{GH}$ y $\overline{GH}$ es congruente con $\overline{IJ}$. ¿Es $\overline{AB}$ congruente con $\overline{IJ}$?

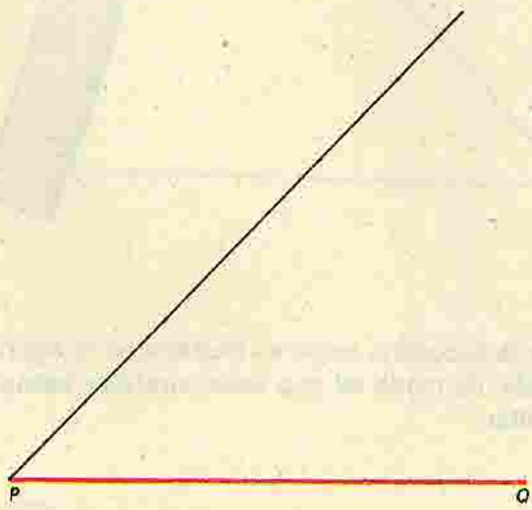
c) Si un segmento $\overline{RS}$ es congruente con $\overline{MN}$ y $\overline{MN}$ es congruente con $\overline{DE}$, ¿son congruentes entre sí $\overline{RS}$ y $\overline{DE}$?

3. Subdivisión de un segmento en segmentos congruentes

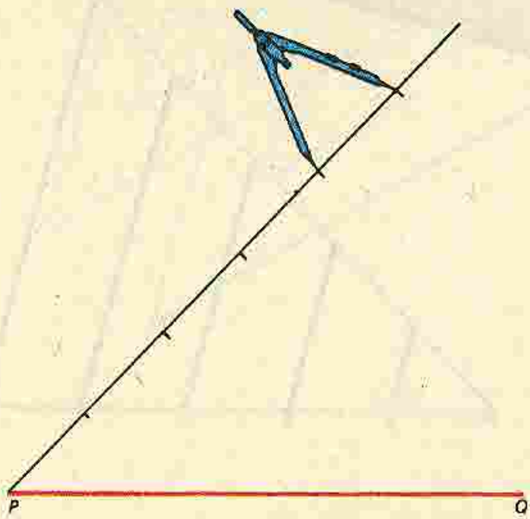
Deseamos subdividir el segmento $\overline{PQ}$ en 5 segmentos congruentes usando solamente regla, compás y escuadra.

Para efectuar esta subdivisión podemos valernos del siguiente procedimiento:

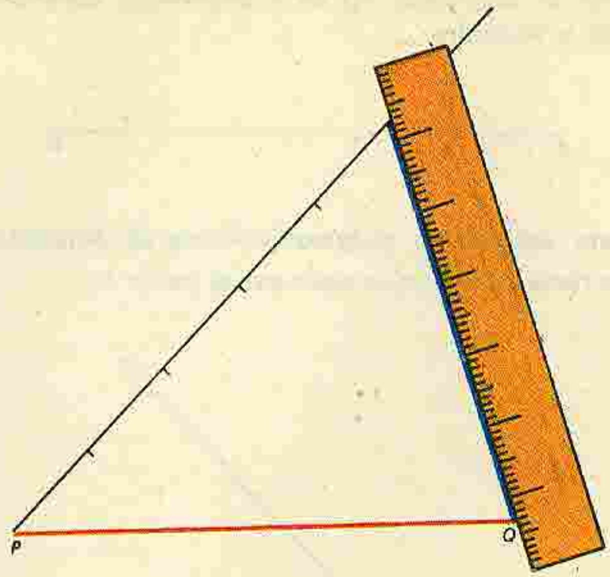
1. Trazamos una recta auxiliar que pase por el punto P.



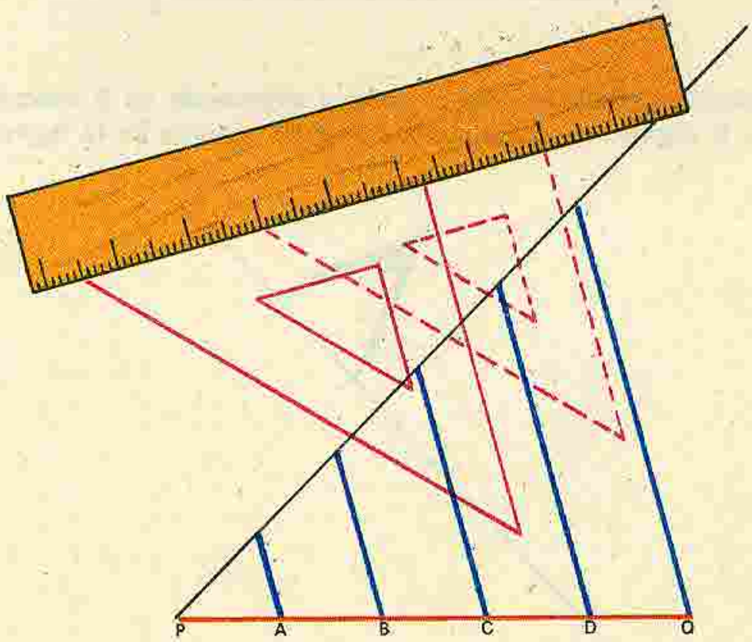
2. Con una abertura cualquiera del compás, y empezando en P, marcamos sobre la recta auxiliar 5 segmentos congruentes como se muestra en la figura.



3. Trazamos una recta que pase por Q y por el extremo final del último segmento trazado.



4. Usando la regla y la escuadra, como se muestra en la figura, trazamos paralelas a la última recta dibujada, de modo tal que esas paralelas pasen por los puntos marcados en la recta auxiliar.



Con los puntos A, B, C y D queda dividido $\overline{PQ}$ en 5 segmentos congruentes. Esto es, $\overline{PA}$, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{DQ}$ son congruentes entre sí.

Ejercicio 3. Aplique el procedimiento visto en el ejemplo para subdividir el siguiente segmento $\overline{MN}$.

a) En 3 segmentos congruentes.

b) En 4 segmentos congruentes.

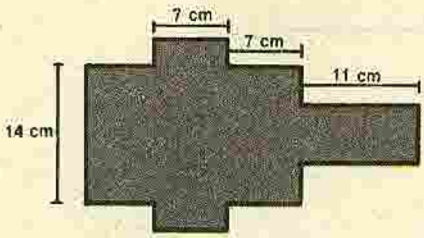
c) en 5 segmentos congruentes.

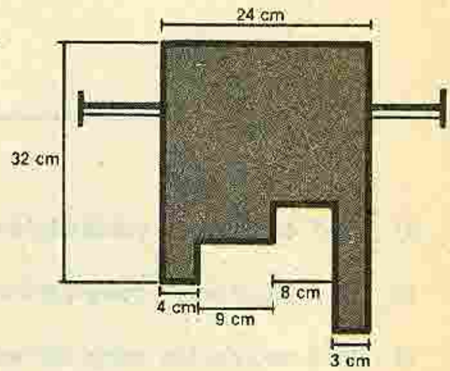
d) En 7 segmentos congruentes.

Ahora ya podemos ver cómo se usan los números racionales no negativos en la medición de segmentos.

4. Números racionales como medidas de segmentos

En la práctica nos encontramos frecuentemente números racionales asociados con segmentos. (Observe usted los dibujos siguientes).



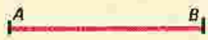


Cuando ocurre esto se dice que los números racionales asociados con los segmentos son las **medidas** de esos segmentos.

Para poder asociar un número racional a un segmento, como se hizo en los dibujos anteriores, es necesario comparar tal segmento con otro que se elige arbitrariamente y que se denomina **unidad**

En el proceso de medir se pueden asociar números racionales a segmentos o, viceversa, segmentos a números racionales. Veamos este último caso.

Ejemplo 1. Tomando como unidad el siguiente segmento $\overline{AB}$, podemos construir un segmento que se asocie al número 3, con el procedimiento siguiente:



a) Consideramos una recta cualquiera y en ella marcamos un punto 0.

b) A partir del punto 0 trazamos tres segmentos congruentes con la unidad $\overline{AB}$.

Ahora podemos asociar al número 3 el segmento $\overline{OR}$. Y al hacer esto decimos que 3 es la medida de $\overline{OR}$ si se toma como unidad $\overline{AB}$

Ejemplo 2. Tomando como unidad el segmento $\overline{RS}$, mostrado abajo, construimos un segmento que mide $\frac{3}{4}$ de unidad, en la siguiente forma:

a) Dividimos la unidad en 4 segmentos congruentes:

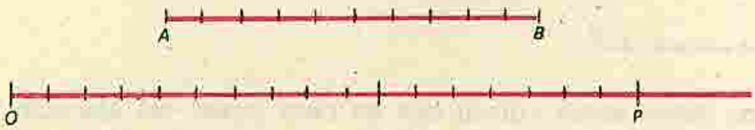
Cada uno de estos segmentos es $\frac{1}{4}$ de unidad.

b) A partir de un punto 0 en una recta, trazamos 3 segmentos de $\frac{1}{4}$ de unidad. $(3 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{4})$

La medida de $\overline{OP}$ es $\frac{3}{4}$, si se toma la unidad $\overline{RS}$.

Ejemplo 3. Si la unidad es $\overline{ST}$, la medida de $\overline{ON}$ es $\frac{7}{3}$

Ejemplo 4. Si consideramos la unidad $\overline{AB}$, la medida de $\overline{OP}$ es 1.7



Ejercicio 4. Considerando la unidad que se indica en cada inciso, encuentre el segmento que se pide.

a)  unidad El segmento $\overline{OA}$ debe medir 5 unidades.

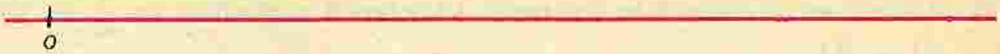
b)  unidad El segmento $\overline{OB}$ debe medir 3 unidades.

c)  unidad El segmento $\overline{OD}$ debe medir $\frac{8}{3}$ de unidad.

d)  unidad El segmento $\overline{OE}$ debe medir $\frac{18}{5}$ de unidad.

e)  unidad El segmento $\overline{OF}$ debe medir 3.6 unidades.

f)  unidad El segmento $\overline{OG}$ debe medir 4.3 unidades.



Ejercicio 5.

a) Con la unidad $\overline{AB}$ construya dos segmentos distintos cuya medida sea 4. ¿Son congruentes estos dos segmentos?

b) Con la unidad $\overline{MN}$ construya dos segmentos distintos cuya medida sea 2.5. ¿Son congruentes esos dos segmentos?

c) Con la unidad mostrada abajo construya dos segmentos que midan 1.8 unidades. ¿Son congruentes esos dos segmentos?

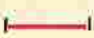
Observación: Habrá usted notado que en cada inciso del ejercicio anterior, los dos segmentos que usted construyó resultaron congruentes. Note también que para construir cada pareja de segmentos usted usó una misma unidad.

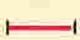
Ejercicio 6. Considerando la unidad que se da en cada inciso, construya segmentos $\overline{OP}$ cuya medida sea 4. ¿Son congruentes entre sí todos los segmentos construídos?

a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

Observación: Note usted que todos estos segmentos **no** son congruentes, a pesar de que la medida de todos ellos es el número 4. Esto se debe a que la unidad empleada para construirlos es diferente para todos.

Lo que observamos en estos dos últimos ejercicios nos sugiere lo siguiente:

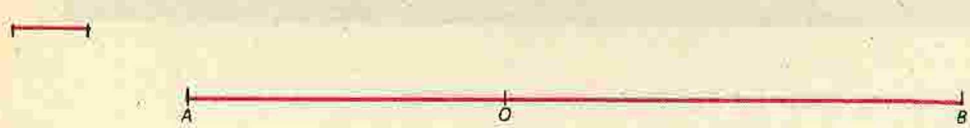
Dos o más segmentos son congruentes si tienen la misma medida, midiéndolos con la misma unidad.

Ejercicio 7. Analice cada situación y complete la oración.

a) segmento $\overline{OB}$ mide 2.8 unidades y el segmento $\overline{BC}$ mide 3.5 unidades

El segmento $\overline{OC}$ mide ☐ unidades.

b) Si $\overline{OA}$ mide 4.3 unidades y $\overline{OB}$ mide 6.2 unidades, entonces $\overline{AB}$ mide ☐ unidades.



c) Si $\overline{OB}$ mide 12 unidades y $\overline{OA}$ mide 7 unidades, entonces $\overline{AB}$ mide ☐ unidades.

d) Si $\overline{AB}$ mide 9.8 unidades y $\overline{OB}$ mide 4.2 unidades, entonces $\overline{OA}$ mide ☐ unidades.

e) Si $\overline{OA}$ mide 4 unidades y $\overline{AB}$ mide 3.6 unidades, entonces $\overline{OB}$ mide ☐ unidades.

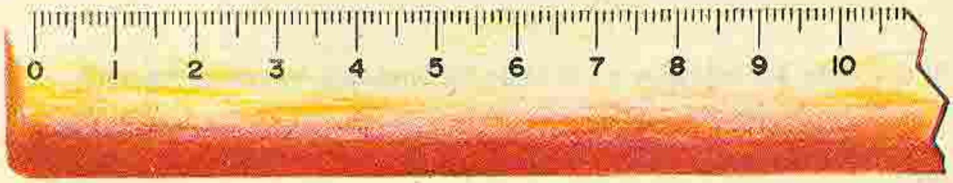
f) Si $\overline{OB}$ mide 10 unidades y $\overline{OA}$ mide 4.5 unidades, entonces $\overline{AB}$ mide ____ unidades.

Ejercicio 8.

a) Considerando la unidad $\overline{PA}$, y partiendo del punto P, encuentre segmentos en la siguiente recta que correspondan a los números 2, 5, 6, 9 y 11.

b) Tomando a $\overline{OB}$ como unidad, y partiendo del punto 0, marque sobre la recta los segmentos correspondientes a los números 1.4, 2.5 y 2.9.

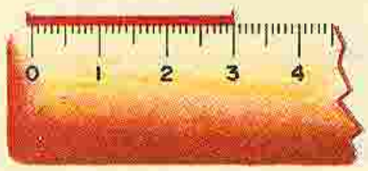
Para medir, usted ha usado una regla como la que se ilustra a continuación:



Aquí podemos hacer las siguientes observaciones:

1. El filo de la regla representa una parte de una recta en la que se han puesto marcas para señalar diversos segmentos. Estos segmentos se consideran siempre a partir del punto que se señala con el cero. Por ejemplo,

a)



b)

2. Esos segmentos en la regla se miden considerando como unidad el segmento que va del punto cero al punto señalado con el 1.

(Usted conoce esta unidad con el nombre de centímetro).

3. Todos los segmentos se construyeron en la regla de tal modo que su medida puede darse hasta en décimos de la unidad.

Ejemplo.

a)

La medida de este segmento es $\frac{3}{10}$ de unidad.

b)

La medida de este segmento es .9 de unidad.

c)

Este segmento mide $\frac{14}{10}$ de unidad.

d)

Este segmento mide $\frac{42}{10}$ de unidad.

4. Algunos de los segmentos en la regla ya tienen indicada su medida en unidades enteras. Por ejemplo,

a)

La medida de este segmento es 1 centímetro.

b)

La medida de este segmento es 3 centímetros.

c)

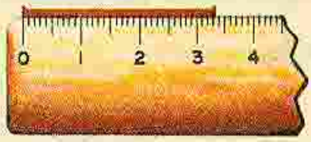
La medida de este segmento es 7 centímetros.

Esto nos permite saber rápidamente la medida de cualquier segmento de la regla. Por ejemplo,

a)

Este segmento mide 1.6 centímetros, o sea, 16 décimos de centímetro.

b)



Este segmento mide 3.3 centímetros, o sea, 33 décimos de centímetro.

Aclaración. Se pueden tener reglas en las que la unidad no sea el centímetro. Usted conoce, por ejemplo, algunas en las que se toma otra unidad llamada pulgada.

En resumen:

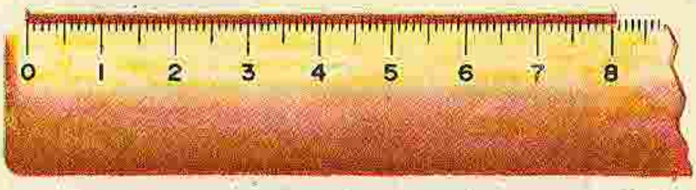
En el filo de una regla se representa un conjunto de segmentos cuya medida se determina fácilmente de acuerdo con una unidad elegida previamente sobre la misma regla.

Ejercicio 9. En el filo de cada regla se ha ilustrado con color uno de sus segmentos. Indique usted la medida de cada segmento.

a)

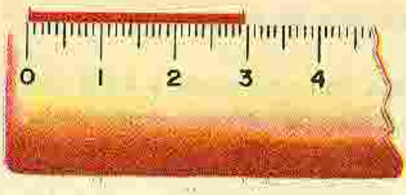
Este segmento mide ______

b)



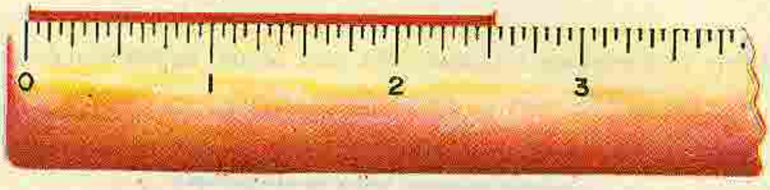
Este segmento mide ______

c)



Este segmento mide

d)



(Aquí la unidad se llama pulgada)

Este segmento mide pulgadas y de pulgada.

e)

Este segmento mide

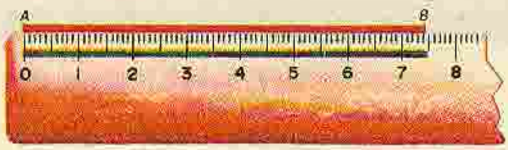
5. Uso de la regla en la medición de segmentos

Usted sabe medir segmentos con una regla, y sabe que el procedimiento que se usa está basado en las ideas que hemos venido exponiendo en las páginas anteriores. Veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo.

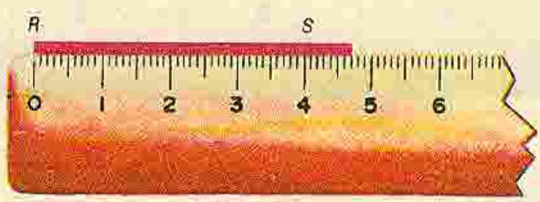
a) Determinemos la medida del siguiente segmento AB.

Para medirlo procedemos a compararlo con algún segmento de la regla



$\overline{AB}$ es congruente con el segmento de la regla cuya medida es 7.4 centímetros. Por lo tanto, la medida de $\overline{AB}$ es también 7.4 centímetros.

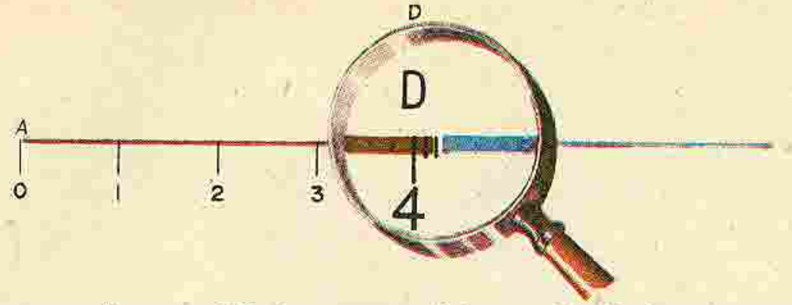
b) Busquemos la medida del segmento $\overline{RS}$, siguiente,



$\overline{RS}$ mide lo mismo que el segmento azul de la regla. Por lo tanto $\overline{RS}$ mide 4.7 centímetros.

c) El segmento $\overline{MN}$, siguiente, mide 3.7 centímetros

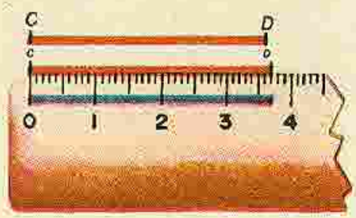
Al medir algún segmento puede ocurrir que no sea congruente con ninguno de los de la regla. Por ejemplo, vea el siguiente:



En este caso se dice que $\overline{AB}$ tiene una **medida aproximada** de 4.2, pues el segmento que en la regla mide 4.2 es el que está más cerca de ser congruente con $\overline{AB}$.

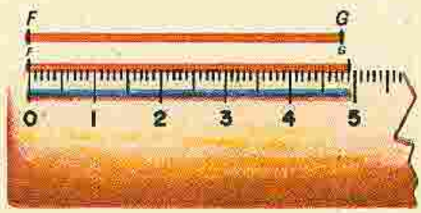
Ejemplo.

a) El segmento $\overline{CD}$ mide aproximadamente 3.7 centímetros.



(El segmento azul, en la regla mide 3.7 centímetros y es el que está más cerca de ser congruente con $\overline{CD}$)

b) Midamos $\overline{FG}$.



$\overline{FG}$ mide aproximadamente 4.9 centímetros pues el segmento de la regla que mide 4.9 centímetros es el que está más cerca de ser congruente con $\overline{FG}$.

III

El conjunto de los números racionales.

Hasta aquí hemos venido trabajando sólo con los números racionales no negativos, números que nos han servido para resolver cierto tipo de problemas, y para interpretar algunas situaciones. Pero existen otros problemas y situaciones en la técnica y la ciencia que no pueden resolverse o interpretarse adecuadamente con estos números.

Por primera vez surgió la necesidad de crear otro tipo de números cuando se intentó resolver ecuaciones como las siguientes:

a) $x + 5 = 2$

("¿Qué número sumado con 5, da por resultado 2?")

b) $x + 8.3 = 4.1$

("¿Qué número sumado con 8.3 da por resultado 4.1?")

En la primera ecuación no se encuentra ningún número racional, no negativo, que al sumarse con 5 dé como suma el número 2.

En la segunda ecuación tampoco hay solución porque, de los números conocidos hasta el momento, no hay ninguno que sumado con 8.3 dé 4.1 como suma.

Para poder dar la solución de ecuaciones como éstas se inventaron otros números racionales a los que se dio el nombre de **números racionales negativos.** Estos números, que estudiamos a continuación, fueron al principio sólo una curiosidad matemática; pero con el tiempo se les encontraron muchas aplicaciones y pasaron a formar parte importante del acervo matemático.

1. Los números racionales negativos.

Los números racionales negativos están íntimamente relacionados con los racionales que ya conocemos.

Para cada número racional no negativo, excepto para el cero, existe un número racional negativo que se denota como vemos en los siguientes ejemplos:

A 1 le corresponde el racional negativo denotado como -1 ("menos 1")

A 2 le corresponde el racional negativo denotado como -2 ("menos 2")

A $\frac{3}{4}$ le corresponde el racional negativo denotado como $-\frac{3}{4}$ ("menos $\frac{3}{4}$")

A .6 le corresponde el racional negativo denotado como $-.6$ ("menos .6")

A .825 le corresponde el racional negativo denotado como $-.825$ ("menos .825")

Etcétera.

Observación:

Observe usted que en la notación empleada para representar a los números negativos el signo $(-)$ forma parte de dicha notación y de ninguna manera indica sustracción.

Ejercicio 1. Complete cada expresión nombrando el número racional correspondiente.

a) A 2.5 le corresponde

b) A 12.83 le corresponde

c) A $\frac{2}{5}$ le corresponde

d) A 4.05 le corresponde

e) A 25.2 le corresponde

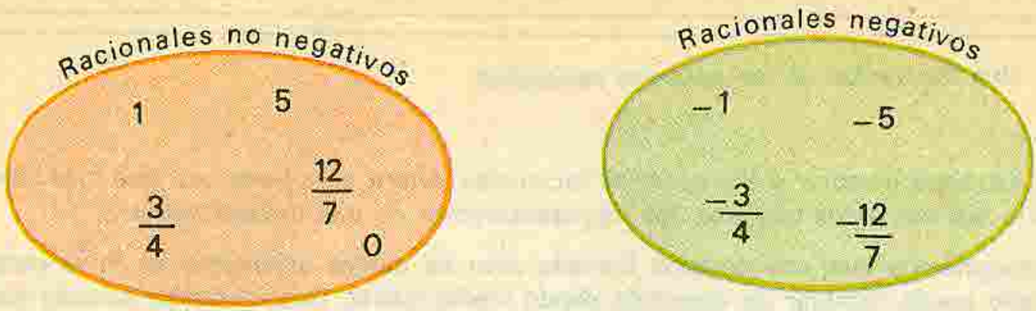
f) -7 es el que corresponde a

g) -2.5 es el que corresponde a

h) $-\frac{5}{8}$ es el que corresponde a

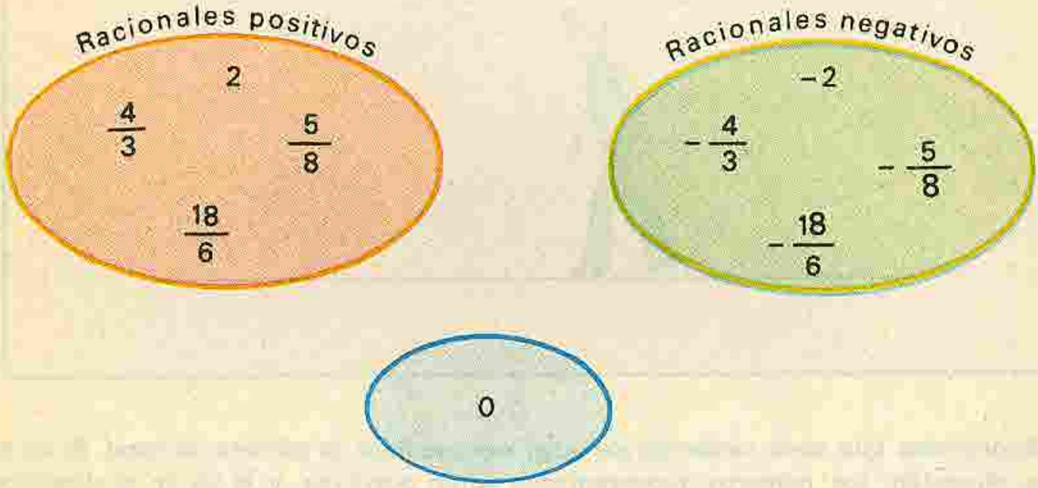
i) -28.3 es el que corresponde a

De esta manera podemos considerar los siguientes conjuntos de números racionales:



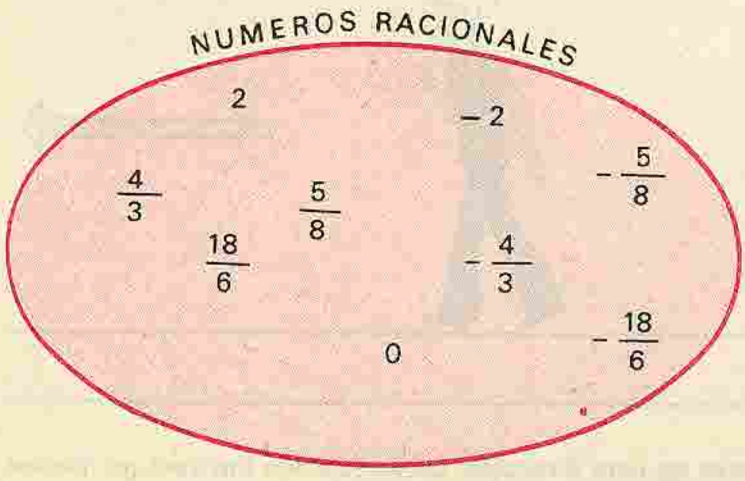
Observaciones:

1. Si sacamos al cero del conjunto de racionales no negativos, lo que nos queda recibe el nombre de "conjunto de **números racionales positivos**". Así que ahora tenemos tres conjuntos: el de racionales positivos, el de racionales negativos y el que sólo tiene al cero como elemento.



¿Nota usted que el cero no es un número positivo ni negativo?

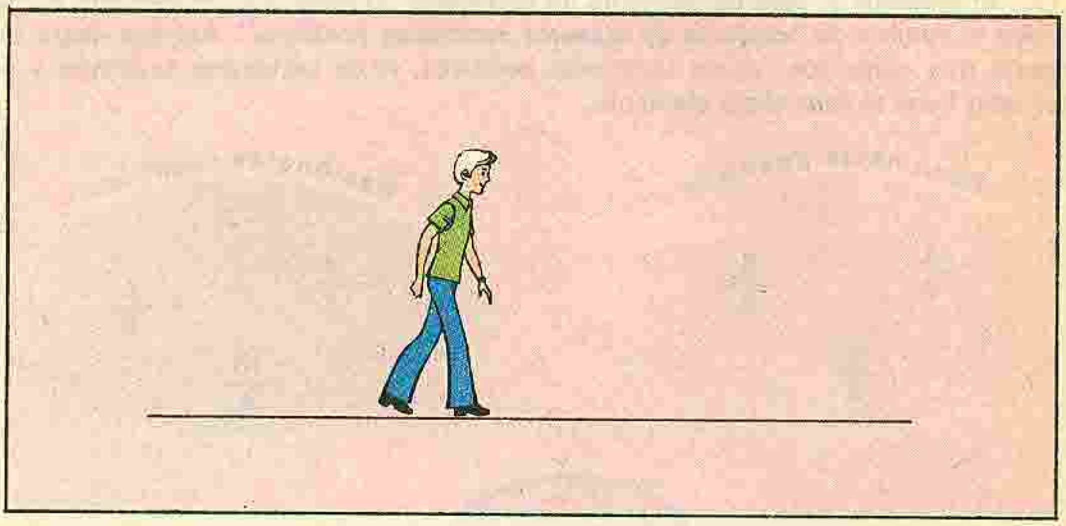
2. Si formamos un sólo conjunto con todos los racionales positivos, todos los racionales negativos y el cero, a ese conjunto le llamamos simplemente **"el conjunto de los números racionales".**



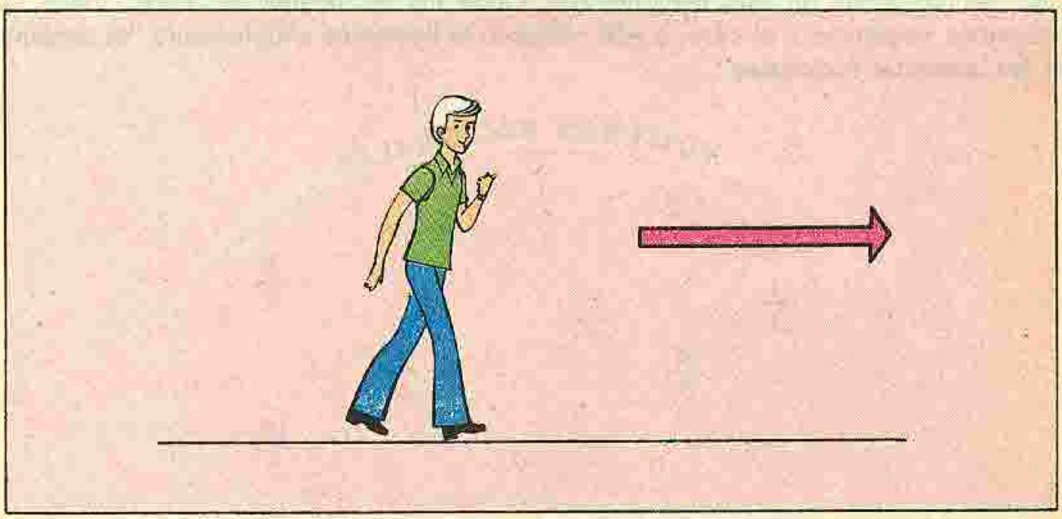
2. Una ilustración de los números racionales.

Ya sabemos nombrar a los números racionales. Ahora, para tener una idea más clara de lo que son estos números, los representaremos de una manera especial.

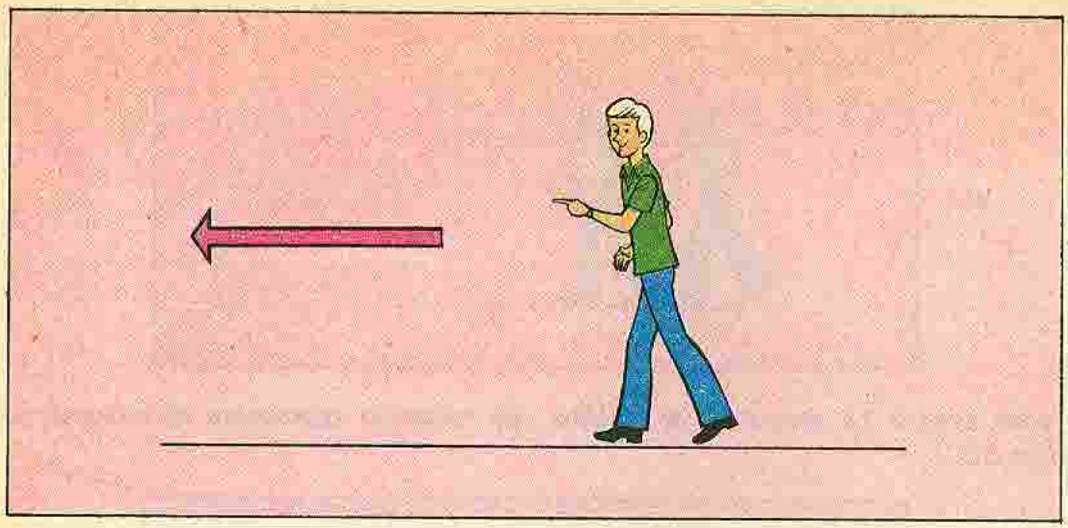
Imaginemos que una persona llamada Juan se mueve solamente en línea recta y sólo puede cambiar de dirección dando media vuelta. Consideremos además que sus recorridos se miden en metros.



Acordemos que cada recorrido de Juan representará un número racional. Si va en una dirección, los números representados serán positivos, y si va en al dirección contraria, los números serán negativos. Por ejemplo:

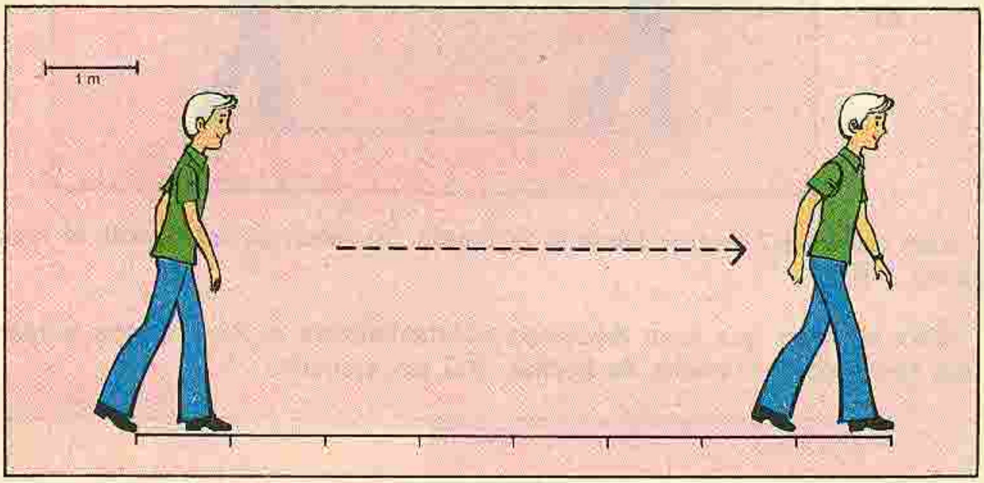


Si Juan avanza en esta dirección, cada recorrido ilustrará un número positivo.

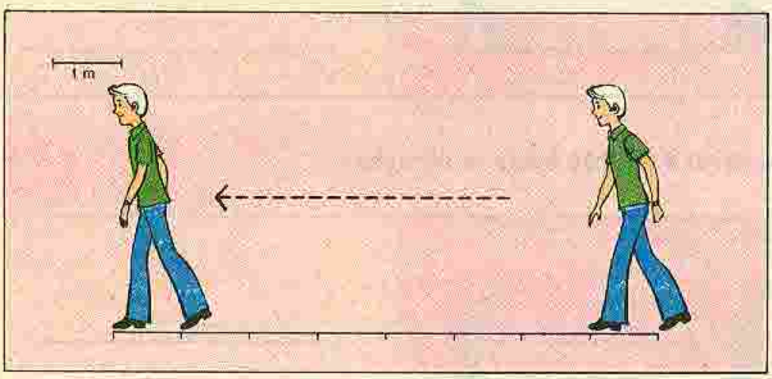


Si va en esta otra dirección, sus recorridos ilustrarán números negativos.

Ejemplo

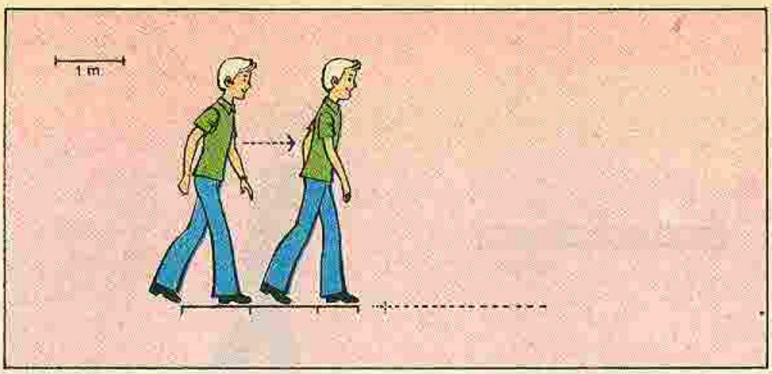
a) 

Juan avanzó 8 metros a la derecha. Su recorrido representa al racional positivo 8.

b) 

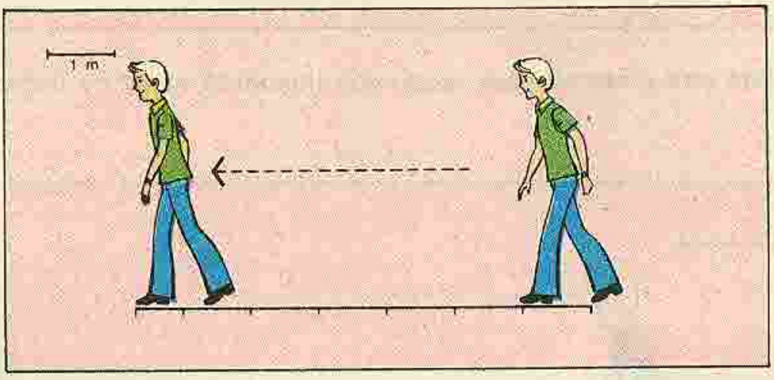
Juan avanzó 8 metros hacia la izquierda. Su recorrido representa al racional negativo -8.

c)



Juan avanzó 2.6 metros a la derecha. Su recorrido representa al racional positivo 2.6.

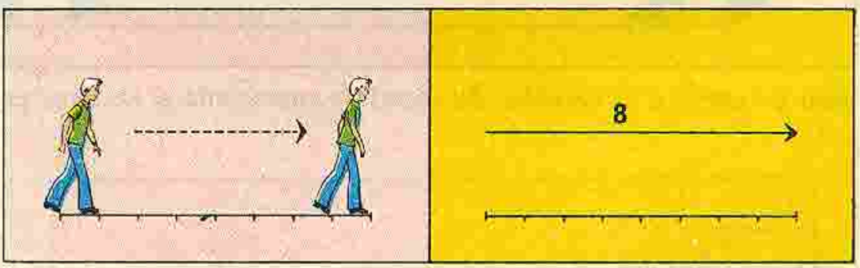
d)



Juan avanzó 6.7 metros hacia la izquierda. Su recorrido representa al racional negativo -6.7.

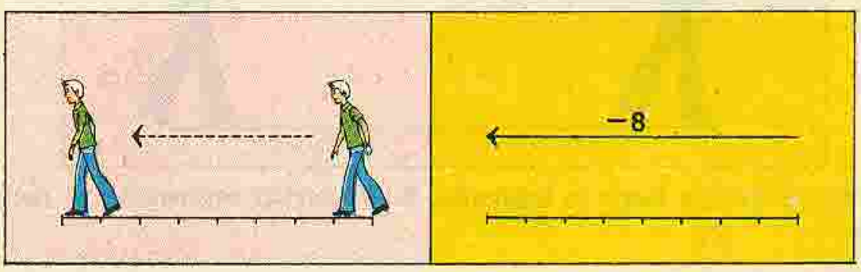
Para no tener que estar dibujando constantemente a Juan, vamos a representar sus recorridos por medio de flechas. Así, por ejemplo:

a)

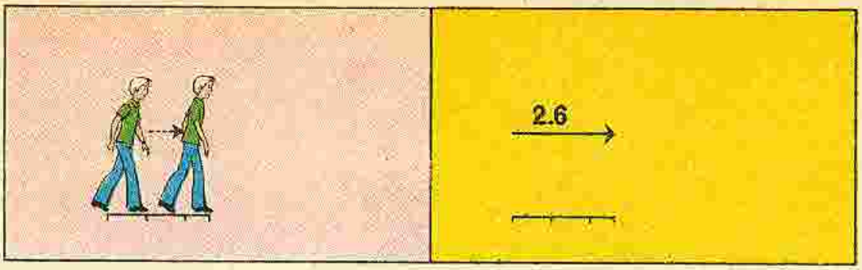


Juan recorrió 8 metros hacia la derecha.

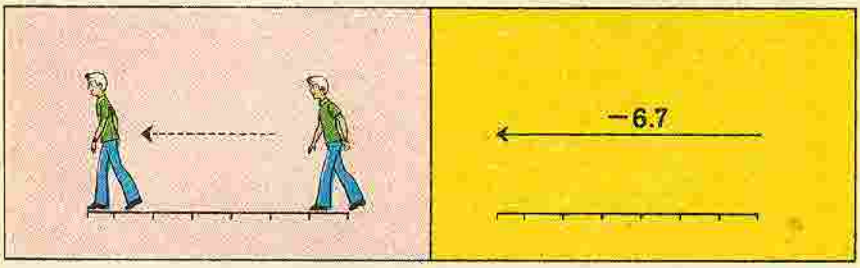
b)



Juan recorrió 8 metros hacia la izquierda.

c) 

Juan recorrió 2.6 metros hacia la derecha.

d) 

Juan avanzó 6.7 metros hacia la izquierda.

Ejercicio 2. Represente con una flecha el número racional indicado en cada inciso. Empiece la flecha en el punto rojo:

1 m

a) 5 ____________ ____________________________

1 m

b) −3 ___________________________________ _____

1 m

c) −2.5 ______________________________ ___________

1 m

d) 2.4 ____________ ____________________________

1 m

e) −1.8 __________________________ ______________

IV

Adición de números racionales.

En esta sección estudiaremos la adición de números racionales y veremos qué propiedades tiene. Encontraremos solamente una propiedad nueva, que no conocíamos, y que se agrega a la lista de las propiedades vistas en la adición de racionales no negativos.

En la adición de números racionales se pueden presentar tres situaciones diferentes: Hallar la suma de **dos racionales positivos;** o bien, hallar la suma de **dos racionales negativos;** o bien, hallar la suma de **un racional positivo y un negativo.**

A continuación estudiaremos por separado los tres casos.

1. Adición de racionales positivos.

Usted ya conoce este caso. Ya sabe encontrar la suma de dos o más racionales positivos cualesquiera.

A fin de facilitar el estudio de los otros casos de adición vamos a utilizar aquí la ilustración a base de recorridos que vimos en el párrafo anterior. Por ejemplo, consideremos la siguiente adición:

$$3.6 + 5.8 = 9.4$$

Podemos pensar que esta adición corresponde a la siguiente situación:

Partiendo de un cierto punto, Juan hace un recorrido de 3.6 metros a la derecha y a continuación hace otro recorrido de 5.8 metros en la misma dirección (a la derecha). De esa manera, Juan recorre en total 9.4 metros a la derecha de su punto de partida.

Esta situación puede ilustrarse con flechas en la siguiente forma:

La flecha azul representa el primer recorrido (3.6) y la flecha roja representa el segundo recorrido (5.8). Con los dos recorridos juntos, Juan se encuentra 9.4 metros a la derecha del punto de partida.

Ejemplo. La adición $4.7 + 2.9 = 7.6$ puede ilustrarse con flechas en la siguiente forma:

Ejemplo. La adición $\frac{11}{3} + \frac{8}{3} = \frac{19}{3}$ puede ilustrarse así:

Ejercicio 1. En cada inciso encuentre la suma y luego ilustre con flechas la adición, tal como se hizo en los ejemplos anteriores.

a) $\frac{3}{4} + \frac{9}{4} =$

b) $\frac{7}{3} + \frac{6}{3} =$

c) $4.8 + 7.3 =$

d) $2.9 + 5.7 =$

e) $8.4 + 5.3 =$

2. Adición de racionales negativos

Consideremos la siguiente situación:

Juan parte de un cierto punto y recorre 6 metros a la izquierda. A continuación recorre otros 8 metros en la misma dirección (izquierda). Al finalizar esos dos recorridos se encuentra 14 metros a la izquierda de su punto de partida.

En lo anterior hemos ilustrado la adición

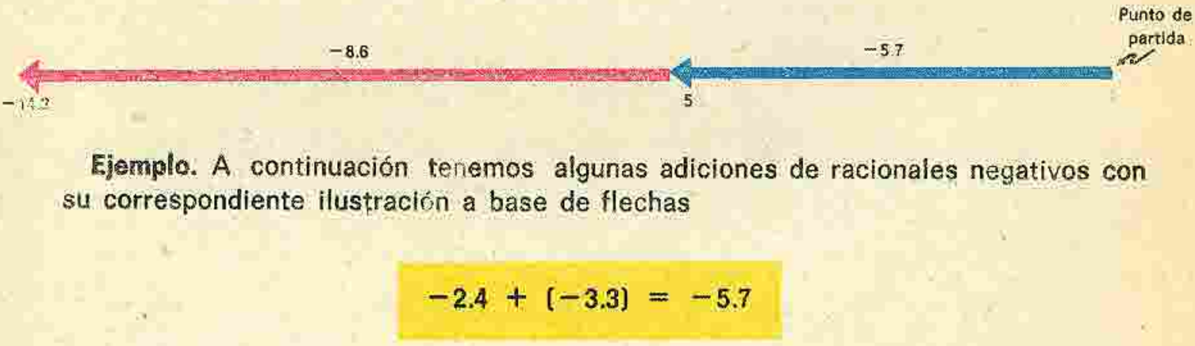
$$-6 + (-8) = -14$$

Veamos otro ejemplo de adición de racionales negativos:

$$-5.7 + (-8.6) = -14.3$$

Esta adición podría corresponder a la siguiente situación:

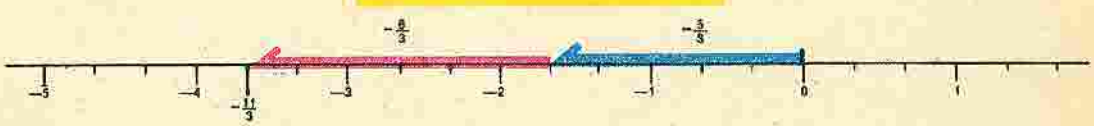
Juan recorre 5.7 metros hacia la izquierda de un cierto punto y posteriormente recorre 8.6 metros en la misma dirección. Al final de sus dos recorridos se encuentra 14.3 metros a la izquierda de su punto de partida.



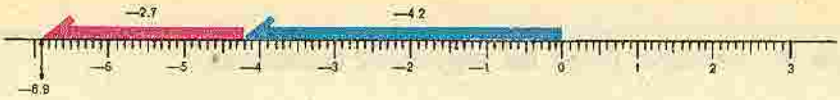
Ejemplo. A continuación tenemos algunas adiciones de racionales negativos con su correspondiente ilustración a base de flechas

$$-2.4 + (-3.3) = -5.7$$

$$-\frac{5}{3} + \left(-\frac{6}{3}\right) = -\frac{11}{3}$$



$$-4.2 + (-2.7) = -6.9$$



Ejercicio 2. En cada inciso se indican recorridos que Juan hace a partir de cierto punto. Complete la tabla como se hace en a).

	Número de metros recorridos a la izquierda			Adición asociada a los recorridos efectuados.
	Primero	Después	Total	
a)	5	4	9	$-5 + (-4) = -9$
b)	10	12		
c)	34	19		
d)	8.3	9.5		
e)	15.6	10.7		
f)	17.4	26.8		
g)	$\frac{15}{6}$	$\frac{23}{6}$		
h)	$\frac{34}{9}$	$\frac{47}{9}$		

Ejercicio 3. Efectúe las siguientes adiciones de números racionales negativos. Imagine cada adición como recorridos hacia la izquierda e ilústrela con flechas.

a) $-10 + (-3) =$ ____ b) $-8 + (-4) =$ ____

c) $-2 + (-1) =$ ____ d) $-12 + (-7) =$ ____

e) $-\frac{4}{2} + (-\frac{7}{2}) =$ ____ f) $-6.2 + (-4.5) =$ ____

g) $-8.0 + (-2.7) = \square$

h) $-19.5 + (-23.7) = \square$

i) $-542.6 + (-208.3) = \square$

j) $(-5.487) + (-38.25) = \square$

Ejercicio 4. Resuelva usted las siguientes ecuaciones:

a) $8 + \square = 10$

b) $-8 + \square = -10$

c) $12 + \square = 16$

d) $-12 + \square = -16$

e) $9.6 + \square = 12.7$

f) $-9.6 + \square = -12.7$

g) $\frac{2}{3} + \square = \frac{7}{3}$

h) $-\frac{2}{3} + \square = -\frac{7}{3}$

i) $\frac{5}{9} + \square = \frac{19}{9}$

j) $-\frac{5}{9} + \square = -\frac{19}{9}$

k) $13.4 + \square = 28.9$

l) $-13.4 + \square = -28.9$

m) $\square + (-7) = -25$

n) $\square + (-3.4) = -12.7$

o) $-4.65 + \square = -15.70$

p) $-6.12 + \square = -13.2$

Observación: Habrá usted notado que al efectuar la adición con racionales negativos, aplicamos nuestros conocimientos sobre la adición de positivos. Por ejemplo,

a) Para hallar la suma de -37 y -12, pensamos en la adición $37 + 12 = 49$, y escribimos $-37 + (-12) = -49$

b) Si deseamos hallar la suma de -32.8 y -17.5, pensamos en la adición $32.8 + 17.5 = 50.3$ y escribimos $-32.8 + (-17.5) = -50.3$

Ejercicio 5. Efectúe las siguientes adiciones de racionales negativos.

a) $-675 + (-535) = \square$

b) $-14.87 + (-45.94) = \square$

c) $-232.7 + (-514.5) = \square$

d) $-\frac{2}{3} + (-\frac{15}{9}) = \square$

e) $-\frac{5}{4} + (-\frac{11}{3}) = \square$

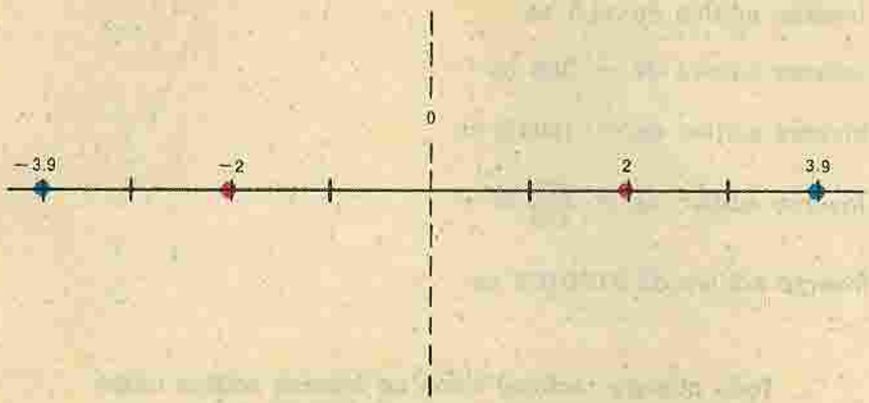
f) $-506.8 + (-305.1) = \square$

g) $-495 + (-268.7) = \square$

3. Adición de un racional positivo y un negativo.

En el estudio de este caso de adición vamos a emplear nuestro conocimiento de los dos casos anteriores, además de una propiedad que analizaremos a continuación.

Observemos la siguiente ilustración:

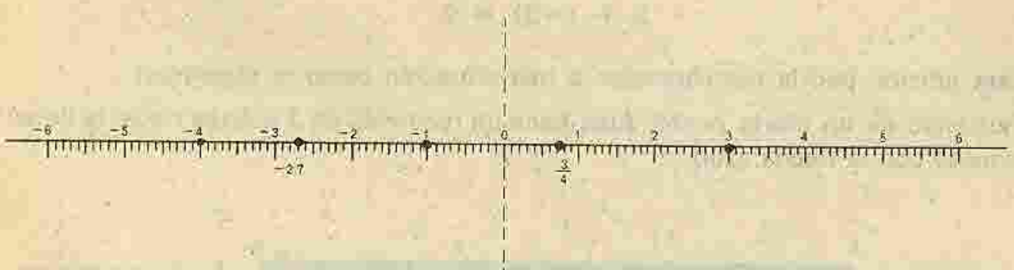


En esta ilustración hemos marcado con color algunos puntos. Si doblamos nuestra hoja por la línea punteada, ¿qué ocurre con los puntos rojos?; ¿cómo quedan los puntos azules?

En este caso se dice que los dos puntos rojos son **simétricos** con respecto a la línea punteada. También los dos puntos azules son simétricos, pues al efectuar el doblez de la hoja esos puntos coinciden.

De los números 2 y −2 se dice que son **inversos aditivos.** Esto es, 2 es el inverso aditivo de −2 y, viceversa, −2 es el inverso aditivo de 2. Lo mismo se puede decir de los números 3.9 y −3.9. Ellos son inversos aditivos.

Ejercicio 6. Observe la ilustración y luego complete las expresiones. (Si lo desea, doble la hoja por la línea punteada).



a) Los números 3 y ____ son inversos aditivos.

b) Los números −4 y ____ son inversos aditivos.

c) El inverso aditivo de $\frac{3}{4}$ es ____

d) El número -2.7 es el inverso aditivo de

e) Los números -1 y son inversos aditivos.

Ejercicio 7. Complete las siguientes expresiones:

a) El inverso aditivo de -7.5 es

b) El inverso aditivo de 11.5 es

c) El inverso aditivo de -300 es

d) El inverso aditivo de -1000.5 es

e) El inverso aditivo de $-\frac{227}{115}$ es

f) El inverso aditivo de 3 080.075 es

Todo número racional tiene un inverso aditivo único.

La nueva propiedad que encontramos en la adición de racionales, y que vamos a utilizar para resolver nuestro tercer caso de adición, es la siguiente:

Si se suma un número racional con su inverso aditivo, el resultado de esa adición es cero.

(Más adelante volveremos a mencionar esta importante propiedad).

Ejemplo. -3 es el inverso aditivo de 3 y la suma de estos dos números es cero.

$$3 + (-3) = 0$$

Esta adición podría corresponder a una situación como la siguiente:

Partiendo de un cierto punto, Juan hace un recorrido de 3 metros hacia la derecha. (Ilustrado con la flecha azul).

A continuación efectúa un recorrido de 3 metros hacia la izquierda. (Ilustrado con la flecha roja).

Al finalizar esos dos recorridos, Juan se encuentra a cero metros de su punto de partida. Es decir, regresó al mismo punto donde había empezado.

Ejemplo. El inverso aditivo de -4.6 es el número 4.6, y la suma de estos dos números es cero.

$$-4.6 + 4.6 = 0$$

Podemos ilustrar esta adición en la siguiente forma:

(Primero hacemos un recorrido de 4.6 metros hacia la izquierda (flecha azul), y luego hacemos un recorrido de 4.6 metros hacia la derecha (flecha roja). Al final de los dos recorridos estamos en el punto de partida).

Ejercicio 8. Resuelva usted las siguientes ecuaciones:

a) $\square + 15 = 0$ b) $-12 + \square = 0$

c) $-\frac{4}{5} + \square = 0$ d) $18.3 + \square = 0$

e) $-6 + n = 0$ $n = \square$

f) $a + (-3.5) = 0$ $a = \square$

g) $43.2 + y = 0$ $y = \square$

h) $0 + x = 0$ $x = \square$

Hemos dicho antes que la adición de racionales en general tiene las mismas propiedades que la adición de racionales no negativos. Una de esas propiedades, que también vamos a utilizar en este tercer caso de adición, es la del elemento neutro y consiste en que

> Si r es un racional cualquiera, entonces
>
> $$r + 0 = r$$

Ejemplo.

a) $15 + 0 = 15$ b) $-8 + 0 = -8$

c) $0 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$ d) $0 + (-7) = -7$

e) $0 + -8.6 = -8.6$

Teniendo en mente lo que se ha visto en las páginas anteriores, podemos atacar el caso de adición que nos ocupa. Veamos los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1. ¿Cuál es la suma de -5 y 7?

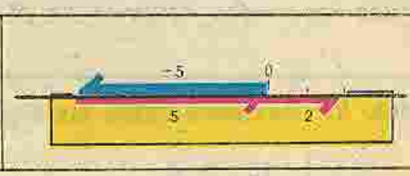
$$-5 + 7 = \square$$

Podríamos interpretar esta expresión en la forma siguiente:

(Se hace un recorrido de 5 metros hacia la izquierda de un cierto punto). Luego se hace un recorrido de 7 metros hacia la derecha. Después de estos dos recorridos, ¿a cuántos metros quedamos del punto de partida?

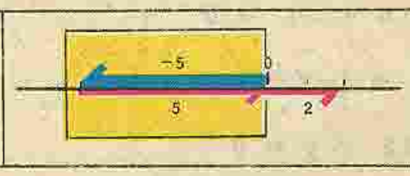
Como sabemos que 7 es igual a 5 + 2, podríamos expresar nuestra adición así:

$$-5 + \boxed{5 + 2} = \square$$



En virtud de la propiedad asociativa, podemos sumar primero el -5 y el 5.

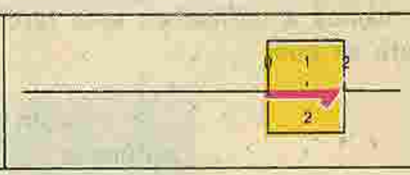
$$\boxed{-5 + 5} + 2 = \square$$



Ya que $-5 + 5 = 0$, nuestra adición queda como $0 + 2 = 2$.

Es decir,

$$-5 + 7 = \boxed{2}$$



Ejemplo 2. ¿Cuál es la suma de 5 y -8?

$$5 + (-8) = \square$$

(Se hace un recorrido de 5 metros hacia la derecha de un cierto punto y a continuación se hace un recorrido de 8 metros hacia la izquierda. ¿En dónde quedamos después de realizar esos dos recorridos?).

Expresamos al -8 como $-5 + (-3)$, pues -8 es igual a $-5 + (-3)$. De esa manera, nuestra adición quedará como

$$5 + (-5) + (-3)$$

Aplicamos la propiedad asociativa y sumamos primero el 5 y el -5.

$$5 + (-5) + (-3) = \square$$

Como $5 + (-5) = 0$, nuestra adición quedará así: $0 + (-3) = -3$. Esto es,

$$5 + (-8) = -3$$

Ejemplo 3. ¿Cuál es la suma de 8 y -3?

$$8 + (-3) =$$

Como $8 = 5 + 3$, podemos escribir

$$5 + 3 + (-3) =$$

Ya que $3 + (-3) = 0$, nuestra adición será $5 + 0 = 5$

Esto es,

$$8 + (-3) = 5$$

Ejemplo 4. ¿Cuál es la suma de -6 y 4?

$-6 + 4 =$	

Ya que $-6 = -2 + (-4)$, escribimos

$-2 + (-4) + 4 =$	

Como $-4 + 4 = 0$, nuestra adición será $-2 + 0 = -2$. Esto es,

$-6 + 4 = -2$	

Ejercicio 9. Anote los números que faltan en los siguientes desarrollos. Observe el inciso resuelto.

a) $8 + (-6) = 2 + 6\ (-6)$
$= 2 + 0$
$= 2$

Por consiguiente, $8 + (-6) = 2$

b) $12 + (-5) =$ ____ $+ 5 + (-5)$
$=$ ____ $+$ ____
$=$ ____

Por lo tanto, $12 + (-5) =$ ____

c) $28 + (-15) =$ ____ $+ 15 + (-15)$
$=$ ____ $+$ ____
$=$ ____

Por consiguiente, $28 + (-15) =$ ____

d) $26 + (-39) = 26 + -26 +$ ____
$=$ ____ $+$ ____
$=$ ____

Por lo tanto, $26 + (-39) =$ ____

e) $18 + (-43) = 18 + (-18) + \square$

$= \square + \square$

$= \square$

Por consiguiente, $18 + (-43) = \square$

f) $-47 + 14 = \square + (-14) + 14$

$= \square + \square$

$= \square$

Por consiguiente, $-47 + 14 = \square$

g) $-35 + 68 = -35 + 35 + \square$

$= \square + \square$

$= \square$

Por lo tanto, $-35 + 68 = \square$

h) $-78 + 52 = \square + (-52) + 52$

$= \square + \square$

$= \square$

Por lo tanto, $-78 + 52 = \square$

i) $-19 + 46 = -19 + 19 + \square$

$= \square + \square$

$= \square$

Por consiguiente, $-19 + 46 = \square$

j) $78 + (-182) = 78 + (-78) + \square$

$= \square + \square$

$= \square$

Por lo tanto, $78 + (-182) = \square$

Observación. Hasta aquí hemos trabajado con números tales que al efectuar la adición podemos "adivinar" fácilmente la solución.

Habrá usted notado, en los ejercicios anteriores, que al sumar un racional positivo y un negativo la dificultad mayor estriba en descomponer uno de los sumandos (el que indica un recorrido mayor) en otros dos sumandos, de manera que uno de éstos anule al sumando que indica el recorrido menor.

Seguramente ha visto que, de hecho, al hacer esa descomposición se aplica la sustracción. Por ejemplo, para sumar los números 574 y (-213), procedemos así:

$$574 + (-213) = \square$$

El problema principal consiste en descomponer 574 en dos sumandos, de manera que uno de ellos sea 213 (Este sumando sumado con (-213) dará cero). El otro sumando se puede calcular fácilmente así: $574 - 213 = 361$.

Tendremos entonces, que

$$574 + (-213) = 361 + 213 + (-213) = 361 + 0 = 361$$

Veamos otro ejemplo:

$$37.5 + (-50.8) = \qquad$$

Aquí debemos descomponer a -50.8 (que representa el recorrido más largo) en dos sumandos, uno de los cuales debe ser -37.5.

El otro sumando lo calculamos así:

Pensamos en la sustracción $50.8 - 37.5 = 13.3$

y escribimos: $-50.8 = (-37.5) + (-13.3)$

Con esto tenemos que

$$37.5 + (-50.8) = 37.5 + (-37.5) + (-13.3) = 0 + (-13.3) = -13.3$$

Ejercicio 10. Efectúe las siguientes adiciones en su cuaderno.

a) $325 + (-58) =$ 　　 b) $867 + (-412) =$

c) $1\,796 + (-815) =$ 　　 d) $18\,064 + (-12\,085) =$

e) $(-468) + 306 =$ 　　 f) $(-1\,561) + 801 =$

g) $(-12\,600) + 9\,506 =$ 　　 h) $718 + (-315) =$

i) $78 + (-425) =$ 　　 j) $(-84) + 1\,230 =$

Anteriormente hemos usado expresiones como $r + s$ para indicar sumas de racionales no negativos. Ahora, cuando consideremos que la r y la s representan números racionales cualesquiera, usaremos también la expresión $r + s$ para indicar la suma de esos dos racionales cualesquiera. Así, por ejemplo, la expresión $r + s$ indicará la suma de -4 y 2 en el caso de que r sea -4 y s sea 2. Esa misma expresión será igual a $-1.5 + (-2.3) = -3.8$ cuando $r = -1.5$ y $s = -2.3$

Si consideramos que $r = 2.9$ y $s = -1.3$, entonces $r + s = 1.6$; si $r = 2.3$ y $s = -6.2$, entonces $r + s = -3.9$; etc.

Ejercicio 11. Tal como se hace en a), diga usted qué número representa la expresión $a + b$ al sustituir las letras por los valores que se indican.

a) Si $a = 4.5$ y $b = -9.8$, entonces $a + b = -5.3$

$$a + b = 4.5 + (-9.8) = -5.3$$

b) Si $a = -19.6$ y $b = 23.9$, entonces $a + b =$

c) Si $a = 36.4$ y $b = -23.0$, entonces $a + b =$

d) Si $a = -69.07$ y $b = 47.9$, entonces $a + b =$

e) Si $a = -18.3$ y $b = -14.6$, entonces $a + b =$

f) Si $a = -27.2$ y $b = -6.8$, entonces $a + b =$

g) Si $a = 36.9$ y $b = 74.6$, entonces $a + b =$

h) Si $a = -38.7$ y $b = -22.9$, entonces $a + b =$

i) Si $a = 48.3$ y $b = -14.7$, entonces $a + b =$

j) Si $a = -12.8$ y $b = 0$, entonces $a + b =$

4. Propiedades de la adición de racionales.

Por la forma en que se define la adición de números racionales, tal operación tiene las mismas propiedades que la adición de racionales no negativos. (Esto se puede demostrar rigurosamente; pero aquí no lo haremos). Y, según hemos visto, además de esas propiedades, tiene otra nueva. Veamos el siguiente cuadro:

Propiedades de la adición	Si a, b, c son racionales no negativos,	Si r, s, t son racionales cualesquiera,
Conmutativa	$a + b = b + a$	$r + s = s + r$
Asociativa	$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(r + s) + t = r + (s + t)$
Elemento neutro	$a + 0 = a$	$r + 0 = r$
Inversos aditivos		Al sumar r con su inverso aditivo, se obtiene cero

Usando las propiedades anteriores, podemos encontrar la suma de cualquier número de sumandos. Por ejemplo, ¿cuál es la suma de 5, -8, 13, -2, y -12?

$$5 + (-8) + 13 + (-2) + (-12) = \square$$

Nos conviene sumar por separado los positivos y los negativos.

$$5 + (-8) + 13 + (-2) + (-12) = 18 + -22$$

De esa manera nuestra adición se reduce a sumar dos sumandos, 18 y -22.

$$18 + (-22) = -4$$

Por consiguiente,

$$5 + (-8) + 13 + (-2) + (-12) = -4$$

Ejemplo. ¿Cuál es la suma de los números -7.6, 15.2, -2.3, -8 y 6.2?

$$-7.6 + 15.2 + (-2.3) + (-8) + 6.2 = -17.9 + 21.4 = 3.5$$

Ejemplo.

$$14.3 + 12 + (-12) + (-14.3) = 26.3 + -26.3 = 0$$

Ejercicio 12. Efectúe las siguientes adiciones en su cuaderno.

a) $18.467 + 52.611 =$ ▭

b) $12.1 + 15 + 18.6 =$ ▭

c) $3.4 + 18.25 + 6 =$ ▭

d) $-3 + (-8.5) =$ ▭

e) $-147 + (-203.6) =$ ▭

f) $-10.6 + (-15) + (-5.3) =$ ▭

g) $-312 + (-506) + (-186.9) =$ ▭

h) $15 + (-29) =$ ▭

i) $-12 + 34 + (-20) =$ ▭

j) $14 + (-28) + 32.8 + (-12.5) =$ ▭

k) $468 + 0 =$ ▭

l) $-912 + 0 =$ ▭

m) $13 + (-13) + 567 =$ ▭

n) $-908 + 1\,574 + 908 =$ ▭

o) $1\,706 + (-14) + (-1\,706) + 14 + 18 =$ ▭

Ejercicio 13. Calcule el valor de la expresión $a + b + c + d$ para los valores de a, b, c y d que se indican en cada inciso.

a) $a = 5$, $b = 2$, $c = 7$, $d = -12$

b) $a = 1$, $b = 1.5$, $c = -2$, $d = -3.6$

c) $a = -\frac{2}{3}$, $b = -\frac{3}{5}$, $c = \frac{1}{3}$, $d = -\frac{5}{3}$

d) $a = 13.2$, $b = -17.8$, $c = 14$, $d = 1.7$

e) $a = -8.3$, $b = -11.7$, $c = -6.2$, $d = 0$

f) $a = 7.3$, $b = -2.8$, $c = -7.3$, $d = -7.3$

V

Sustracción de números racionales.

1. Una regla para efectuar sustracciones de números racionales.

En cursos anteriores aprendimos a efectuar sustracciones con números racionales positivos. ¿Recuerda usted que para ello era necesario que el sustraendo fuera menor o igual que el minuendo?

Ahora vamos a efectuar sustracciones con números racionales tanto positivos como negativos y veremos que, al manejar estos números, no es necesario que el sustraendo sea menor o igual que el minuendo.

"Efectuar una sustracción" significa encontrar la diferencia cuando se conocen el minuendo y el sustraendo. (Recuerde usted que la diferencia es el número que sumado con el sustraendo da el minuendo).

La sustracción de números racionales se indica como en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1.

$$\underset{\text{minuendo}}{\underset{\uparrow}{-3}} \quad - \quad \underset{\text{sustraendo}}{\underset{\uparrow}{5}} \quad = \quad \underset{\text{diferencia}}{\underset{\uparrow}{\square}}$$

(Hay que encontrar la diferencia entre los números -3 y 5)

Ejemplo 2.

$$12 \quad - \quad (-7) \quad = \quad \square$$

(Buscamos la diferencia entre los números 12 y -7)

Ejemplo 3.

$$-7 \quad - \quad (-12) \quad = \quad \square$$

(Queremos saber cuál es la diferencia entre los números -7 y -12).

Observe usted que en estos dos últimos ejemplos hemos puesto entre paréntesis el sustraendo. Esto se hace así, para evitar que se confundan los signos, el que indica la sustracción $12 - (-7)$ y el que indica que el sustraendo es un número negativo $12 - (-7)$.

Para efectuar una sustracción de números racionales cualesquiera aplicamos la siguiente regla:

La diferencia entre dos números racionales se encuentra sumando al minuendo el inverso aditivo del sustraendo.

Esta regla no fue inventada arbitrariamente. Se creó de tal modo que al utilizarla para efectuar una sustracción, siguiera subsistiendo aquella propiedad que estudiamos antes, y que se enuncia así:

Al sumar la diferencia con el sustraendo, el resultado que se obtiene es el minuendo.

Ejemplo 1. Efectuemos la sustracción. $7 - (-5) = \boxed{}$

Como aquí el sustraendo es -5 y su inverso aditivo es 5, para hallar la diferencia sumaremos $7 + 5 = 12$

Por lo tanto,

$$7 - (-5) = 12$$

Note usted que, efectivamente la diferencia es 12 porque al sumar 12 más -5, obtenemos el minuendo 7.

Ejemplo 2. Efectuemos la sustracción. $-8 - 7 = \boxed{}$

Aquí el sustraendo es 7 y su inverso aditivo es -7. Así que para hallar la diferencia sumamos $-8 + (-7) = -15$

Por lo tanto,

$$-8 - 7 = -15$$

Observe que

$$\underbrace{-15}_{\text{minuendo}} + \underbrace{7}_{\text{sustraendo}} = \underbrace{-8}_{\text{diferencia}}$$

Ejemplo 3. Efectuemos la sustracción. $-15 - (-21) = \boxed{}$

Puesto que aquí el inverso aditivo del sustraendo es 21, hallamos la diferencia sumando $-15 + 21 = 6$

En consecuencia, tenemos que

$$-15 - (-21) = 6$$

y, efectivamente, 6 más -21 es igual a -15. Esto es, diferencia más sustraendo es igual a minuendo.

Veamos otras sustracciones más, efectuadas de acuerdo con la regla.

Ejemplo.

a) $2.3 - (-4.9) = 2.3 + 4.9 = 7.2$

b) $-11.9 - 17 = -11.9 + (-17) = -28.9$

c) $-.9 - (-.3) = -.9 + .3 = -.6$

Ejercicio 1. Tal como se hace en a), efectúe usted las siguientes sustracciones y compruebe que la diferencia sumada con el sustraendo da el minuendo.

a) $12 - (-8) = 12 + 8 = 20$

Comprobación $20 + (-8) = 12$

b) $25 - (-13) = \_\_\_ + \_\_\_ = \_\_\_$

Comprobación__________

c) $17 - (-23) = \_\_\_ + \_\_\_ = \_\_\_$

Comprobación__________

d) $23 - (-42) = \_\_\_ + \_\_\_ = \_\_\_$

Comprobación__________

e) $3.17 - (-28.2) = \_\_\_ + \_\_\_ = \_\_\_$

Comprobación__________

f) $3.5 - (-2.8) = \_\_\_ + \_\_\_ = \_\_\_$

Comprobación__________

g) $-18 - 7 = \_\_\_ + \_\_\_ =$

Comprobación__________

h) $-36 - 49 = \_\_\_ + \_\_\_ = \_\_\_$

Comprobación__________

i) $-3.7 - 18.6 = \square + \square = \square$

Comprobación ______________

j) $-\frac{7}{8} - \frac{17}{8} = \square + \square = \square$

Comprobación ______________

k) $-\frac{12}{3} - \frac{5}{9} = \square + \square = \square$

Comprobación ______________

l) $-7 - (-28) = \square + \square = \square$

Comprobación ______________

m) $-25 - (-10) = \square + \square = \square$

Comprobación ______________

n) $-3.9 - (-7.2) = \square + \square = \square$

Comprobación ______________

o) $-17.42 - (-10.05) = \square + \square = \square$

Comprobación ______________

p) $-\frac{3}{10} - (-.7) = \square + \square = \square$

Comprobación ______________

q) $-\frac{12}{8} - (-8) = \square + \square = \square$

Comprobación ______________

r) $-8 - 0 = \square + \square = \square$

Comprobación ______________

s) $-3.8 - 0 = \square + \square = \square$

Comprobación ______________

t) $-\frac{3}{7} - 0 = \square + \square = \square$

Comprobación ______________

u) $0 - \frac{3}{7} = \square + \square = \square$

Comprobación ______________

v) $0 - (-3.9) = \square + \square = \square$

Comprobación ______________

w) $0 - (-17.2) = \square + \square = \square$

Comprobación ______________

Ya se habrá usted dado cuenta que al aplicar nuestra regla para efectuar sustracciones, **cualquier sustracción de números racionales es posible** y no importa que el minuendo sea mayor, o menor, o igual que el sustraendo. Esto no ocurría con los racionales no negativos, pues con esos números no era posible efectuar sustracciones como 13 — 52 = ______ y 80 — 98 = ______, en las que el sustraendo era mayor que el minuendo. Ahora podemos ver que cuando se presenta un caso así, la diferencia siempre es un número negativo.

Ejemplo.

a) $13 - 52 = 13 + (-52) = -39$

b) $45 - 107 = 45 + (-107) = -62$

d) $3.75 - 296 = 3.75 + (-296) = -292.25$

c) $5.7 - 10.9 = 5.7 + (-10.9) = -5.2$

Ejercicio 2. Efectúe usted las siguientes sustracciones.

a) $2 - 25 =$ ______

b) $36 - 78 =$ ______

c) $41 - 125 =$ ______

d) $0 - 1 =$ ______

e) $.3 - 1.5 =$ ______

f) $.65 - 8 =$ ______

g) $36.2 - 96.8 =$ ______

h) $11.3 - 56.75 =$ ______

i) $25.3 - 357 =$ ______

j) $1 - 1\,000 =$ ______

k) $25 - 37.5 =$ ______

l) $.18 - 32 =$ ______

m) $0 - .12 =$ ______

n) $.1 - 5.9 =$ ______

Desde luego, nuestra regla de sustracción también es aplicable a los casos que estudiamos con racionales no negativos; es decir, los casos en que se restan dos números positivos y el sustraendo es menor o igual que el minuendo.

Ejemplo.

a) $13 - 9 = 4$

$13 - 9 = 13 + (-9) = 4$

b) $28.5 - 6.3 = 22.2$

$28.5 - 6.3 = 28.5 + (-6.3) = 22.2$

c) $\frac{12}{5} - \frac{3}{5} = \boxed{\frac{9}{5}}$

$$\frac{12}{5} - \frac{3}{5} = \frac{12}{5} + \boxed{\frac{(-3)}{5}} = \boxed{\frac{9}{5}}$$

Ejercicio 3. Tal como se hizo en los ejemplos anteriores, efectúe las siguientes sustracciones en dos formas, la que usted sabe desde la escuela primaria y la que estudiamos en este libro.

a) $23 - 5 = \square$ b) $35 - 15 = \square$ c) $27 - 6 = \square$

d) $100 - 10 = \square$ e) $2.8 - 1.3 = \square$ f) $5.9 - .7 = \square$

g) $93.5 - 18.3 = \square$ h) $46 - 1.8 = \square$ i) $36.9 - 8 = \square$

j) $\frac{15}{3} - \frac{4}{3} = \square$ k) $\frac{17}{9} - \frac{4}{9} = \square$ l) $\frac{3}{4} - \frac{1}{3} = \square$

¿Son diferentes sus resultados al efectuar las sustracciones en las dos formas?

2. Notación para el inverso aditivo de un número racional.

Durante el desarrollo de nuestros estudios matemáticos hemos empleado, en muchas ocasiones, letras del alfabeto castellano para representar números. Ahora nos pondremos de acuerdo en lo siguiente:

Si a representa un número racional cualquiera, entonces el inverso aditivo de ese número se denotará con $-a$.

Esto es, si el número 8 se denota con la letra x, por ejemplo, entonces el inverso aditivo de 8 lo denotaremos con $-x$. Así, el símbolo $-x$ querrá decir -8.

Si n representa al número 1.3, entonces $-n$ representará al número -1.3.

Si r nombra al número -9, entonces $-r$ nombrará al número 9. ¿Usted encuentra ilógico esto? (Recuerde que $-r$ sólo es una notación para el inverso aditivo del número que represente la r.)

Si la letra a denota al número -34, entonces el símbolo $-a$ representará al número 34.

Ejercicio 4. Complete usted las siguientes expresiones.

a) Si $a = 3$, entonces $-a =$ ____

b) Si $p = .5$, entonces $-p =$ ____

c) Si $t = 3.007$, entonces $-t =$ ____

d) Si $w = -3$, entonces $-w =$ ____

e) Si $x = -\frac{1}{10}$, entonces $-x =$ ____

f) Si $y = -.001$, entonces $-y =$ ____

g) Si $n = -.1$, entonces $-n =$ ____

h) Si $-b = 3.6$, entonces $b =$ ____

i) Si $-d = -1.8$, entonces $d =$ ____

j) Si $-u = -3.6$, entonces $u =$ ____

k) Si $-z = 1$, entonces $z =$ ____

l) Si $-r = 0$, entonces $r =$ ____

m) Si m es un número racional positivo, entonces $-m$ es un ______________.

n) Si x es un racional negativo, entonces $-x$ es un ______________________.

o) Si p representa al cero, entonces $-p$ es igual a _______________.

Ejercicio 5. Complete usted la siguiente tabla.

x	-1.5	-1		0	5	1	
$-x$			$.5$				-1.5

3. La definición de sustracción.

Anteriormente hemos efectuado sustracciones con la regla que se expresó más o menos así: "Para encontrar la diferencia entre dos números racionales, se suma al minuendo el inverso aditivo del sustraendo".

Ahora, si empleamos la notación de los inversos aditivos, podemos expresar la sustracción de racionales en la siguiente forma:

Si a y b son dos números racionales cualesquiera, entonces la diferencia $a - b$ se encuentra sumando $a + (-b)$.

En símbolos,

$$a - b = a + (-b)$$

Esta última expresión, $a - b = a + (-b)$, es considerada por algunas personas como "la definición de sustracción".

Más adelante nos encontramos expresiones como $x - 3$, $m - .7$, $y - (-\frac{1}{3})$, etc., con las cuales se indica alguna sustracción. Si aplicamos la definición que acabamos de ver, podemos interpretar esas expresiones como sumas.

$$x - 3 = x + (-3)$$

$$m - .7 = m + (-.7)$$

$$y - (-\frac{1}{3}) = y + \frac{1}{3}$$

Ejercicio 6. Tal como se hizo con las expresiones anteriores, interprete cada sustracción como una suma. (Aplique la definición de sustracción).

a) $x - 5 =$ ______ b) $m - 7 =$ ______

c) $r - 1 =$ ______ d) $s - \frac{1}{5} =$ ______

e) $t - \frac{3}{4} =$ ______ f) $u - \frac{2}{5} =$ ______

g) $v - .7 =$ ______ h) $x - .01 =$ ______

i) $d - 3.7 =$ ______ j) $e - (-12) =$ ______

k) $f - (-\frac{1}{5}) =$ ______ l) $h - (-.2) =$ ______

m) $m - (-1) =$ ______ n) $p - 0 =$ ______

Ejercicio 7. Complete las siguientes igualdades usando la definición de sustracción y la notación del inverso aditivo.

a) $a - b =$ ______ b) $r - p =$ ______

c) $x - y =$ ______ d) $d - f =$ ______

e) $r - s =$ ______ f) $t - w =$ ______

g) $a - a =$ ______ h) $c - c =$ ______

Ejercicio 8. Complete las siguientes igualdades usando la definición de sustracción.

a) $r + (-m) =$ ______ b) $x + (-t) =$ ______

c) $p + (-q) =$ ______ d) $a + (-b) =$ ______

e) $z + (-w) =$ ______ f) $w + (-w) =$ ______

Ejercicio 9. Complete las siguientes oraciones

a) Si m es un número racional, entonces la expresión $m + (-m)$ denota al número ______.

b) Por la propiedad conmutativa de la adición tenemos que la expresión $-m + m$ también denota al número ______.

c) Como $m + (-m)$ es igual a $m - m$, entonces esta última expresión también denota al número ______.

h) $4^{-1} = (-\frac{2}{3})^{-2} =$ [illegible]

m) $a^0 = (-1) =$ [illegible]

Ejercicio 4. Compruebe las siguientes igualdades usando la definición de exponente y la propiedad distributiva [illegible]

a) $x \cdot x =$ [illegible]   b) $x \cdot x \cdot x =$ [illegible]

c) $x = x \cdot x$ [illegible]   d) [illegible]

e) [illegible]   f) [illegible]

g) [illegible]   h) [illegible]

Ejercicio 5. Compruebe las siguientes igualdades usando la definición de [illegible]

a) [illegible]   b) $x = (-1)$ [illegible]

c) [illegible]   d) [illegible]

e) $y^{-2}(1-4)$ [illegible]   f) [illegible]

Ejercicio 6. Complete las siguientes oraciones

a) Si a^n es un número racional, entonces la potencia a^{-n} es igual al inverso de ______

b) La propiedad [illegible] de la potencia [illegible] que la expresión ______

c) [illegible] ______

VI

Ecuaciones.

1. Resolución de ecuaciones con números racionales.

En el curso anterior estudiamos un procedimiento para resolver ecuaciones como

$$x + 5 = 8 \quad \text{y} \quad m - 13 = 7$$

en las que la solución es un número racional no negativo, y vimos que cierto tipo de ecuaciones como

$$r + 15 = 6$$

no podían resolverse con los racionales estudiados en ese curso. Ahora sabemos que las ecuaciones de este tipo tienen como solución un racional negativo; pero no conocemos un procedimiento sistemático para hallar dicha solución. En lo que sigue estudiaremos un procedimiento para resolver ecuaciones de ese tipo y otras como

$$x + (-12) = -8.5 \quad \text{y} \quad n - (-2) = -7$$

en las que aparecen números racionales cualesquiera.

Empezaremos haciendo un repaso de las ideas que adquirimos en el primer curso, y que vamos a utilizar aquí:

1. Son ecuaciones las expresiones como

$$x + 8.5 = 2 \quad \text{y} \quad n - 23.1 = -4$$

en las que hay, cuando menos, un número desconocido. (La letra que representa a ese número desconocido recibe el nombre de incógnita).

2. Se llama solución de una ecuación el número que, al sustituir a la incógnita, hace cierta la expresión de igualdad.

Ejemplo.

El número -3.5 **es solución** de la ecuación $x + (-2.5) = -6$	El número -10 **no es solución** de la ecuación $x + (-2.5) = -6$
Porque $-3.5 + (-2.5)$ **es** igual a -6	Porque $-10 + (-2.5)$ **no es** igual a -6

8 es solución de $p - (-5) = 13$	0 no es solución de $p - (-5) = 13$
Porque $8 - (-5) = 13$	Porque $0 - (-5) \neq 13$

3. Para indicar que -2.5 es la solución de la ecuación $x + (-2.5) = -6$, se escribe

$$x = -2.5$$

Para indicar que 8 es la solución de la ecuación $p - (-5) = 13$, se escribe

$$p = 8$$

Ejercicio 1. En cada inciso se dan una ecuación y dos números. Uno de ellos es la solución de la ecuación. Llene cada cuadrito con el número adecuado.

a) $\boxed{m + (-2) = 7}$ $\boxed{-5}$ $\boxed{9}$

$m =$

b) $\boxed{n + (-7) = -15}$ $\boxed{-8}$ $\boxed{8}$

$n =$

c) $\boxed{p + (2.3) = -1.8}$ $\boxed{-4.1}$ $\boxed{4.1}$

$p =$

d) $\boxed{q + (-8.2) = 2.6}$ $\boxed{-10.8}$ $\boxed{10.8}$

$q =$

e) $\boxed{r - 7 = 12.5}$ $\boxed{19.5}$ $\boxed{-19.5}$

$r =$

f) $\boxed{-5 + s = -16}$ $\boxed{11}$ $\boxed{-11}$

$s =$

g) $\boxed{-12 = -7 + t}$ $\boxed{19}$ $\boxed{-5}$

$t =$

h) $\boxed{-.2 = u - (-.2)}$ $\boxed{0}$ $\boxed{-.4}$

$u =$

4. Hay muchas ecuaciones que tienen la misma solución. Por ejemplo, $x + 3 = -12$ y $a + 8 = -7$ tienen la misma solución. Esta solución es el número -15.

5. Si se sabe que varias ecuaciones tienen la misma solución, basta con resolver una para tener resueltas todas.

6. Las expresiones como $x = -3$ y $8 = n$ son ecuaciones simples en las que la solución se ve inmediatamente.

7. Las ecuaciones tienen ciertas propiedades que se utilizan en el procedimiento de resolución. Una de esas propiedades es la siguiente:

Si sumamos un mismo número a los dos miembros de una ecuación dada, obtenemos otra ecuación que tiene la misma solución.

Ejemplo.

a) Si tenemos la ecuación $m + (-2) = 7$ y le sumamos a ambos miembros el número 5, obtenemos la ecuación

$$m + (-2) + 5 = 7 + 5$$

que en forma simplificada es

$$m + 3 = 12$$

Esta nueva ecuación y la ecuación original tienen la misma solución. Esta solución es el número 9:

$$9 + (-2) = 7 \text{ y } 9 + 3 = 12$$

b) Si sumamos -6 a ambos miembros de la ecuación $n + (-7) = -15$, obtenemos la ecuación.

$$n + (-7) + (-6) = -15 + (-6)$$

o sea,

$$n + (-13) = -21$$

Las ecuaciones $n + (-7) = -15$ y $n + (-13) = -21$ tienen la misma solución y ésta es -8 porque

$$-8 + (-7) = -15 \text{ y } -8 + (-13) = 21$$

Ejercicio 2. En cada inciso se indica una ecuación y su solución. Forme una nueva ecuación siguiendo las instrucciones que se dan y compruebe que esa nueva ecuación tiene la misma solución que la ecuación original.

a) $x + 1.4 = -3$ Solución: $x = -1.6$

Sumar a ambos miembros de la ecuación el número -2.

b) $x + 7 = -1$ Solución: $x = -8$

Sumar a ambos miembros de la ecuación el número 10.

c) $m + (-3.2) = 2.7$ Solución: $m = 5.9$

Sumar 1 a ambos miembros de la ecuación.

d) $r + 7 = -9.2$ Solución: $r = -16.2$

Sumar -5 a ambos miembros de la ecuación.

e) $-13 = t + (-6.2)$ Solución: $t = -6.8$

Sumar a los dos miembros el número 6.2

f) $n + 14.8 = 2.5$ Solución: $n = -12.3$

Sumar a los dos miembros el número -14.8

g) $18 = r + (-11)$ Solución: $r = 29$

Sumar a los dos miembros el número 11.

Note usted que en los últimos tres incisos del ejercicio anterior se sumó a los dos miembros de cada ecuación el inverso aditivo del número que acompaña a la incógnita. Y al hacer esto se llegó a una ecuación simple, cuya solución se ve de inmediato. Esto nos sugiere un procedimiento para resolver ecuaciones como ésas. Veamos los siguientes ejemplos.

Ejemplo. Resolvamos la ecuación $x + 4 = -6$

Primero sumamos a los dos miembros de la ecuación el inverso aditivo de 4:

$$x + 4 = -6 \quad \longleftarrow \text{ecuación original}$$

$$x + 4 \boxed{+ (-4)} = -6 \boxed{+ (-4)}$$

Así obtenemos una nueva ecuación que tendrá la misma solución que la ecuación original:

$$x + \underbrace{4 + (-4)}_{0} = \underbrace{-6 + (-4)}_{-10}$$

$$x + 0 = -10$$

$$\boxed{x = -10} \quad \longleftarrow \text{nueva ecuación}$$

En esta nueva ecuación se ve de inmediato que la solución es el número -10. Por consiguiente, la ecuación original está resuelta. Su solución es el número -10. Y podemos ver que así es porque

$$\boxed{-10} + 4 = -6$$

Ejemplo. Resolvamos la ecuación $-12 = m + (-5)$.

$$-12 = m + (-5) \quad \longleftarrow \text{ecuación original}$$

$$-12 \boxed{+ 5} = m + (-5) \boxed{+ 5}$$

$$-7 = m + 0$$

$$\boxed{-7 = m} \quad \longleftarrow \text{nueva ecuación}$$

Esta nueva ecuación tiene por solución al número -7. Por lo tanto, la solución de la ecuación original, $-12 = m + (-5)$, es el número -7.

Comprobación: $-12 = \boxed{-7} + (-5)$

Ejemplo. Resolvamos la ecuación $n - (-2) = -7$

En virtud de que $n - (-2)$ es igual a $n + 2$ (por definición de sustracción), podemos escribir nuestra ecuación así:

$$n + 2 = -7$$

y luego la resolvemos como ya sabemos:

$$n + 2 = -7$$

$$n + 2 \boxed{+ (-2)} = -7 \boxed{+ (-2)}$$

$$n + 0 = -9$$

$$\boxed{n = -9}$$

La solución de la ecuación $n - (-2) = -7$ es $n = -9$

Comprobación: $\boxed{-9} - (-2) = \boxed{-9} + 2 = -7$

Ejemplo. Consideremos la ecuación $x - 2.5 = 6.4$

Por definición de sustracción, $x - 2.5$ es lo mismo que $x + (-2.5)$. Así que podemos escribir la ecuación como

$$x + (-2.5) = 6.4$$

y luego procedemos a resolverla:

$$x + (-2.5) = 6.4$$

$$x + \underbrace{(-2.5) \boxed{+ 2.5}} = 6.4 \boxed{+ 2.5}$$

$$x + 0 = 8.9$$

$$\boxed{x = 8.9}$$

La solución de la ecuación original es el número 8.9

Comprobación: $\boxed{8.9} - 2.5 = \boxed{8.9} + (-2.5) = 6.4$

Ejercicio 3. Aplicando el procedimiento visto en los ejemplos anteriores, resuelva usted las siguientes ecuaciones en su cuaderno. (Compruebe su solución en cada caso).

a) $x + 6 = 10$

b) $y + 43 = 72$

c) $100 = n + 100$

d) $t + 1.8 = 6.4$

e) $\frac{7}{4} = h + \frac{3}{4}$

f) $i + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$

g) $x + 8.5 = 3.4$

h) $51 = n + 59.6$

i) $m + .7 = .1$

j) $r + 1.2 = .9$

k) $y + 145 = 82.7$

l) $2.6 = z + 8.8$

m) $r + 13 = 0$

n) $n + 3.7 = 0$

o) $a + (-5) = 12$

p) $x + (-3.2) = 84$

q) $b + (-7) = -19$

r) $d + (-13.6) = -20$

s) $n - 2 = 15.5$

t) $13 = r - 8.2$

u) $s - 6 = 8$

v) $t - 2.6 = -10$

w) $p - 9 = -2.2$

x) $w - 3.5 = -2$

2. Resolución de problemas por medio de ecuaciones.

Ya antes hemos dicho que existen muchos métodos para resolver problemas, y que uno de estos métodos se basa en el empleo de ecuaciones.

Algunos problemas complicados se resuelven más fácilmente si utilizamos para ello nuestro conocimiento de las ecuaciones. A fin de que usted se familiarice con el método, lo invitamos a que practique resolviendo los siguientes ejercicios.

Ejercicio 4. Encuentre la ecuación que corresponda a cada problema; resuélvala y dé la respuesta de acuerdo con la pregunta.

a) Si a un número se le suma -37 se obtiene por resultado 23. ¿Cuál es el número?

Ecuación: $x + (-37) = 23$ Solución: $x = 60$

Respuesta. El número es 60

b) Si a un número se le resta 35 el número que se obtiene es -6 ¿Cuál es el número?

Ecuación: Solución:

Respuesta. ______

c) Si a un número se le suma -12 el resultado es 26. ¿Cuál es el número?

Ecuación: Solución:

Respuesta. ______

d) Si a un número se le resta -6 el resultado es 10. ¿Cuál es el número?

Ecuación: Solución:

Respuesta. ______

e) Si a un número se le suma -7 el resultado es -7. ¿Cuál es el número?

Ecuación: Solución:

Respuesta. ______

f) Si a un número se le resta -3 el resultado es -10. ¿Cuál es el número?

Ecuación: Solución:

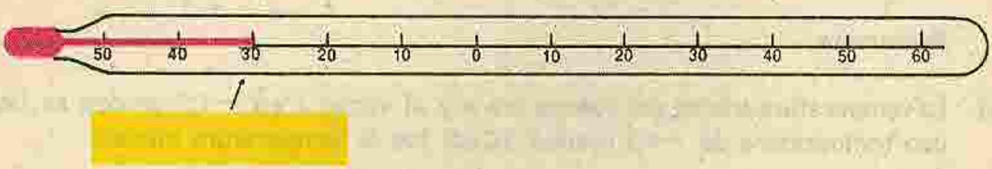
Respuesta. ____

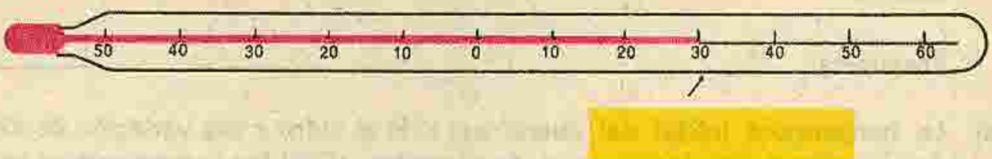
g) Si a un número se le resta -13 el número que resulta es 0. ¿Cuál es el número?

Ecuación: Solución:

Respuesta. ____

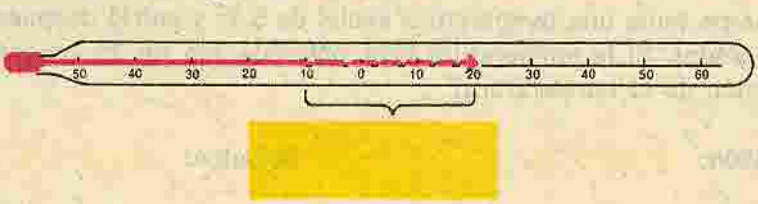
Es práctica común considerar positivas las temperaturas sobre cero y negativas las temperaturas bajo cero.



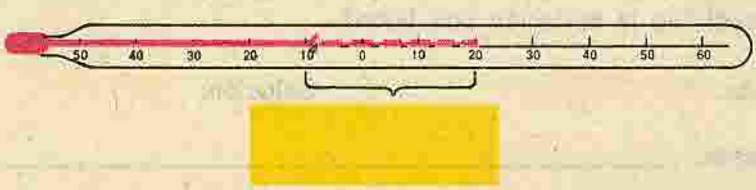


También se acostumbra denotar las variaciones de temperatura en racionales positivos y negativos, como se hace en los siguientes ejemplos.

Ejemplo. Si la temperatura *aumenta* desde -10 grados hasta 20 grados, se dice que sufre una *variación de 30 grados*.



Ejemplo. Si la temperatura disminuye desde 20 grados hasta -10 grados, se dice que hay una variación de -30 grados.



En los problemas del siguiente ejercicio adoptaremos esta convención.

Ejercicio 5. Los siguientes problemas se refieren a las temperaturas de un cuerpo que se estudia en el laboratorio. Encuentre la ecuación que se adapta a cada problema; resuélvala y luego dé la respuesta correspondiente.

a) A partir de una temperatura *x* se observa una variación de -37 grados. Si la temperatura final obtenida fue de 32 grados, ¿Cuál era la temperatura de *x*?

Ecuación: ______ Solución: ______

Respuesta. ______________________________

b) La temperatura inicial del cuerpo era *m*. Después hubo una variación de 8.3 grados y se llegó a la temperatura de -5.2 grados.
¿Cuál fue el valor de *m*?

Ecuación: ______ Solución: ______

Respuesta. ______________________________

c) La temperatura inicial del cuerpo era *s* y al variar *s* en -1.5 grados se llegó a una temperatura de -4.3 grados. ¿Cuál fue la temperatura inicial?

Ecuación: ______ Solución: ______

Respuesta. ______________________________

d) La temperatura inicial del cuerpo era *r*. Si al sufrir *r* una variación de 12 grados se obtuvo una temperatura de 40 grados, ¿Cuál fue la temperatura inicial?

Ecuación: ______ Solución: ______

Respuesta. ______________________________

e) El cuerpo tenía una temperatura inicial de 5.3° y sufrió después una variación de *x* grados. Si la temperatura final obtenida fue de 25 grados, ¿cuál fue la variación de la temperatura?

Ecuación: ______ Solución: ______

Respuesta. ______________________________

f) La temperatura inicial del cuerpo fue de -7.5 grados y luego sufrió una variación de *x* grados. Si se sabe que la temperatura final fue de -1.3 grados, ¿cuál fue la variación que hubo?

Ecuación: ______ Solución: ______

Respuesta. ______________________________

VIII

Multiplicación de números racionales.

Usted ya estudió la adición y la sustracción de números racionales y aprendió algunas cosas acerca de estos números. En esta sección continuaremos con nuestro aprendizaje al estudiar la multiplicación de números racionales.

Tal como lo hemos hecho anteriormente, indicaremos aquí la multiplicación de dos números racionales, *a* y *b*, en las siguientes formas:

$a \times b = \square$; o bien, $a \cdot b = \square$; o bien, $(a)\,(b) = \square$; o bien $ab = \square$

Además, seguiremos empleando las palabras **factor** y **producto** para referirnos a los números que intervienen en una multiplicación.

$$\underbrace{2}_{\text{factor}} \cdot \underbrace{5}_{\text{factor}} = \underbrace{10}_{\text{producto}}$$

Para facilitar nuestro estudio, distinguiremos los siguientes casos de multiplicación: 1. *multiplicación de dos factores positivos;* 2. *Multiplicación de un factor positivo y un factor negativo;* 3. *Multiplicación de dos factores negativos.*

1. Multiplicación de dos factores positivos.

Desde tiempo atrás usted sabe multiplicar dos o más números racionales positivos. Repase sus conocimientos en los siguientes ejemplos y ejercicios

Ejemplo.

a) Para multiplicar $\frac{3}{5}$ por $\frac{2}{7}$ procederemos así:

$$\frac{3}{5} \times \frac{2}{7} = \frac{3 \times 2}{5 \times 7} = \boxed{\frac{6}{35}}$$

b) Para multiplicar $\frac{4}{10}$ por 7 procedemos así:

$$\frac{4}{10} \times 7 = \frac{4 \times 7}{10} = \boxed{\frac{28}{10}}$$

c) Para multiplicar 3.42 por 9.2 procedemos así:

$$\begin{array}{r} 3.42 \\ \times \quad 9.2 \\ \hline 684 \\ 30\,78 \\ \hline 31.464 \end{array}$$

Ejercicio 1. Efectúe las siguientes multiplicaciones.

a) $\frac{3}{8} \times \frac{5}{6} =$ ______

b) $\frac{7}{4} \times \frac{1}{5} =$ ______

c) $\frac{32}{20} \times \frac{3}{2} =$ ______

d) $\frac{5}{4} \times \frac{18}{3} =$ ______

e) $\frac{25}{16} \times \frac{4}{5} =$ ______

f) $\frac{35}{70} \times \frac{12}{6} =$ ______

g) $5 \times \frac{2}{8} =$ ______

h) $\frac{7}{9} \times 4 =$ ______

i) $13 \times \frac{5}{17} =$

j) $\frac{85}{100} \times 3 =$

Ejercicio 2. Efectúe las siguientes mutliplicaciones en su cuaderno.

a) $\begin{array}{r} 15.8 \\ \times\ 6 \\ \hline \end{array}$

b) $\begin{array}{r} 75.32 \\ \times\ 3 \\ \hline \end{array}$

c) $\begin{array}{r} 14.2 \\ \times\ 5.6 \\ \hline \end{array}$

d) $\begin{array}{r} 58.5 \\ \times\ .9 \\ \hline \end{array}$

e) $\begin{array}{r} 45.6 \\ \times\ .25 \\ \hline \end{array}$

f) $\begin{array}{r} 2.34 \\ \times\ 4.5 \\ \hline \end{array}$

g) $\begin{array}{r} 2.65 \\ \times\ .96 \\ \hline \end{array}$

h) $\begin{array}{r} 50.26 \\ \times\ .85 \\ \hline \end{array}$

i) $\begin{array}{r} .94 \\ \times\ .65 \\ \hline \end{array}$

j) $\begin{array}{r} 65.43 \\ \times\ 8.74 \\ \hline \end{array}$

2. Multiplicación de un factor positivo y un factor negativo.

La multiplicación de números racionales se efectúa de acuerdo con ciertas reglas. A continuación enunciamos la que se aplica para el caso de multiplicación que ahora nos ocupa.

El producto de dos números es negativo cuando uno de los factores es positivo y el otro es negativo.

Una multiplicación de un factor positivo por un factor negativo, se efectúa como si los dos factores fueran positivos y después se aplica la regla enunciada arriba. Por ejemplo, a) Ya que $(5)(4) = 20$, entonces, $(5)(-4) = -20$. b) Ya que, $2 \cdot 7 = 14$, entonces, $(-2)(7) = -14$

Veamos algunas multiplicaciones de este tipo.

Ejemplo.

a) $(\frac{2}{5})(-\frac{8}{3}) = -\frac{2 \cdot 8}{5 \cdot 3} = -\frac{16}{15}$

b) $(-\frac{4}{7})(\frac{3}{8}) = -\frac{4 \cdot 3}{7 \cdot 8} = -\frac{12}{56}$

c) $5.6 \times (-8) = -44.8$

$$\begin{array}{r} 5.6 \\ \times\ 8 \\ \hline 44.8 \end{array}$$

d) $(-12.5) \times 4.6 = -57.50$

$$\begin{array}{r} 12.5 \\ \times\ 4.6 \\ \hline 750 \\ 500 \\ \hline 57.50 \end{array}$$

Ejercicio 3. Efectúe las siguientes multiplicaciones. Observe que en todas ellas hay un factor positivo y un factor negativo.

a) $(3)(-8) =$

b) $(5)(-12) =$

c) $(4)(-16) =$

d) $(50)(-6) =$

e) $(-2)(13) =$

f) $(-7)(4) =$

g) $(-12)(10) =$

h) $(-908)(3) =$

i) $(\frac{3}{8})(-\frac{5}{6}) =$

j) $(\frac{7}{10})(-\frac{6}{2}) =$

k) $(\frac{12}{15})(-\frac{2}{3}) =$

l) $(\frac{15}{20})(-\frac{4}{7}) =$

m) $(-\frac{5}{9})(\frac{3}{4}) =$

n) $(-\frac{8}{15})(\frac{3}{4}) =$

o) $(-13.2)(3) =$

p) $(-12)(5.5) =$

q) $(20.3)(-4) =$

r) $(5.9)(-4) =$

s) $(2.6)(-3.5) =$

t) $(1.5)(-4.8) =$

u) $(-1)(18.3) =$

v) $(1.48)(-1) =$

3. Multiplicación de dos factores negativos.

Una multiplicación de dos números racionales negativos se efectúa como si los factores fueran positivos y se toma en cuenta la regla que enunciamos a continuación:

El producto de dos factores negativos es un número positivo.

Por ejemplo, ya que 4 por 7 es 28, entonces el producto de -4 por -7 también es 28. Esto es,

$$(-4)\ (-7) = 28$$

Ejemplo.

a) $$\left(-\frac{5}{3}\right)\left(-\frac{4}{7}\right) = \frac{5 \cdot 4}{3 \cdot 7} = \frac{20}{21}$$

b) $(-8.6)\ (-2.5) = 21.50$

$$\boxed{\begin{array}{r} 8.6 \\ \times\ 2.5 \\ \hline 4\,30 \\ 17\,2 \\ \hline 21.50 \end{array}}$$

c) $(-405)\ (-.6) = 243$

Ejercicio 4. Efectúe las siguientes multiplicaciones en su cuaderno. (Observe que en todas ellas los dos factores son negativos).

a) $(-5)\ (-18) =$

b) $(-8)\ (-35) =$

c) $(-50)\ (-612) =$

d) $\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{40}{5}\right) =$

e) $\left(-\frac{13}{15}\right)\left(-\frac{2}{3}\right) =$

f) $(-5.8)\ (-2) =$

g) $(-4)\ (-2.5) =$

h) $(-70)\ (-3.6) =$

4. Propiedades de la multiplicación de racionales.

Las reglas que se utilizan en la multiplicación de números racionales no fueron establecidas arbitrariamente. Se crearon de modo tal que la operación tuviera las mismas propiedades que la multiplicación de racionales no negativos. Esto es, la multiplicación efectuada de acuerdo con esas reglas tiene propiedad conmutativa, propiedad asociativa, propiedad distributiva, etcétera. Veamos algunos ejemplos de cada una de las propiedades.

Propiedad conmutativa. *Si* **a** *y* **b** *son números racionales, al multilpicar* **a** *por* **b** *obtenemos el mismo resultado que al multiplicar* **b** *por* **a**

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$$

Trabajando de acuerdo con nuestras reglas de multiplicación, vemos que esta propiedad se cumple para racionales en general pues, por ejemplo,

a) $(-7)\ (5) = -35$

y

$(5)\ (-7) = -35$

Esto es,

$$(-7)\ (5) = (5)\ (-7)$$

b) $(-2.5)\ (-4) = 10$

y

$(-4)\ (-2.5) = 10$

Esto es,

$$(-2.5)\ (-4) = (-4)\ (-2.5)$$

Propiedad asociativa. *Si* **a, b** *y* **c** *son números racionales, al multiplicar* **a · b** *por* **c** *se otiene el mismo resultado que al multiplicar* **a** *por* **b · c**

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a}\ (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$$

Al aplicar nuestras reglas de multiplicación, encontramos que esta propiedad se cumple. Por ejemplo,

a) Si consideramos los factores -2, 5 y 4 vemos que

$$(-2)\ (5)\ (4) = (-10)\ (4) = -40$$

y también

$$(-2)\ (5)\ (4) = (-2)\ (20) = -40$$

Esto es,

$$(-2)\ (5)\ (4) = (-2)\ (5)\ (4)$$

b) Si tomamos los factores -3, -5 y -4, vemos que

$$(-3)(-5)(-4) = (15)(-4) = -60$$

y

$$(-3)(-5)(-4) = (-3)(20) = -60$$

Esto es,

$$[(-3)(-5)](-4) = (-3)[(-5)(-4)]$$

Propiedad del elemento neutro. *Si* **a** *es un número racional, al multiplicarlo por* **1** *el resultado es el mismo* **a**

$$\mathbf{1 \cdot a = a}$$

Aplicamos nuestras reglas y vemos efectivamente que, por ejemplo,

a) $(1)(-3.5) = -3.5$

b) $(1)(4.67) = 4.67$

c) $(-8)(1) = -8$

d) $(2.96)(1) = 2.96$

Propiedad distributiva. *Si* **a**, **b** *y* **c** *son números racionales, al multiplicar* **a** *por* **b + c**, *obtenemos el mismo resultado que al sumar* **a · b** *más* **a · c**

$$\mathbf{a(b + c) = a \cdot b + a \cdot c}$$

Ejemplo. Multipliquemos 5 por $-3 + 7$.

Puesto que $-3 + 7 = 4$, el resultado de esta multiplicación es 20.

$$(5)(-3 + 7) = (5)(4) = 20$$

Aplicando nuestras reglas de multiplicación encontramos que se cumple la propiedad distributiva.

$$(5)(-3 + 7) = (5)(-3) + (5)(7) =$$

$$= -15 + 35 = 20$$

Esto es,

$$(5)(-3 + 7) = (5)(-3) + (5)(7)$$

Ejemplo. Multipliquemos -4 por $-5 + 8$.

Como $-5 + 8 = 3$, el resultado de la multiplicación es -12.

$$(-4)(-5+8) = (-4)(3) = \boxed{-12}$$

Si aplicamos las reglas de multiplicación, encontramos que se cumple la propiedad distributiva:

$$(-4)(-5+8) = (-4)(-5) + (-4)(8)$$
$$= 20 + (-32) = 12$$

Esto es,

$$(-4)(-5+8) = (-4)(-5) + (-4)(8)$$

Ejercicio 5. Aplicando la propiedad distributiva, efectúe en su cuaderno las siguientes multiplicaciones.

a) $(7)(-6+8) =$

b) $(5)(10+(-3)) =$

c) $(12)(-3+(-2)) =$

d) $(20)(-8+(-2)) =$

e) $(-5)(4+3) =$

f) $(-2)(-15+18) =$

g) $(-4)(-2+(-8)) =$

h) $(-10)(-9+(-6)) =$

i) $(-40)(-10+5) =$

j) $(-12)(-5+15) =$

Propiedad del cero en la multiplicación. *Si* **a** *es un número racional, al multiplicarlo por* **cero** *el resultado es* **cero.**

$$\mathbf{a} \cdot 0 = 0$$

Si aplicamos las reglas de multiplicación y la propiedad distributiva, vemos que esta propiedad se cumple.

Ejemplo.

a) $(3)(-2+2) = (3)(-2) + (3)(2) = -6 + 6 = \boxed{0}$

Por otra parte, como $-2 + 2$ es cero, tenemos que

$$(3)(-2+2) = (3)(0) = \boxed{0}$$

Por consiguiente,

$$(3)(0) = \boxed{0}$$

b) $(-7)(-3+3) = (-7)(-3) + (-7)(3) = 21 + (-21) = \boxed{0}$

Pero $-3 + 3$ es cero. Entonces, nuestra multiplicación $(-7)(-3 + 3)$ es

$$(-7)(0) = \boxed{0}$$

Propiedad de los inversos multiplicativos.

¿Recuerda usted en qué consiste esta propiedad cuando se manejan sólo números racionales positivos?

Según aprendimos antes, todo número racional positivo r tiene un inverso multiplicativo $\frac{1}{r}$ con la propiedad de que al multiplicar r por $\frac{1}{r}$ el resultado que se obtiene es 1.

Ejemplo.

a) Puesto que $6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{6}{6} = \boxed{1}$, decimos que $\frac{1}{6}$ es el inverso multiplicativo de 6

b) $\frac{3}{5}$ es el inverso multiplicativo de $\frac{5}{3}$ porque $\frac{5}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{15}{15} = 1$

c) Los números $\frac{4}{10}$ y $\frac{10}{4}$ son inversos multiplicativos y $\frac{4}{10} \cdot \frac{10}{4} = \frac{40}{40} = 1$

En general, si encontramos que el producto de dos números a y b, positivos, es el número 1, entonces podemos afirmar que esos dos números a y b son inversos multiplicativos entre sí.

Ejemplo.

a) $\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3} = \frac{12}{12} = \boxed{1}$ Entonces, $\frac{3}{4}$ y $\frac{4}{3}$ son inversos multiplicativos.

b) $\frac{12}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{12}{12} = \boxed{1}$ Entonces, $\frac{12}{4}$ y $\frac{1}{3}$ son inversos multiplicativos.

c) $(2.5)(.4) = \boxed{1.00}$ Entonces, 2.5 y .4 son inversos multiplicativos.

d)
$$\begin{array}{r} 1.25 \\ \times\ .8 \\ \hline \boxed{1.000} \end{array}$$
Entonces, 1.25 y .8 son inversos multiplicativos.

Note usted que en estos dos últimos incisos hemos usado la notación decimal; pero también podíamos haber usado la notación en fracciones, en la siguiente forma:

c) $\frac{25}{10} \cdot \frac{10}{25} = \frac{250}{250} = 1$ (Véase que $\frac{25}{10} = 2.5$ y $\frac{10}{25} = .4$)

d) $\frac{125}{100} \cdot \frac{100}{125} = \frac{250}{250} = 1$ (Véase que $\frac{125}{100} = 1.25$ y $\frac{100}{125} = .8$)

Ahora bien, ¿cualquier número negativo tendrá también su inverso multiplicativo? Según recordamos, los números racionales negativos fueron creados a partir de los positivos, de modo que para cada uno de estos se inventó uno de aquellos. Así por ejemplo, para 5 se creó el -5; para 2.8 se creó el -2.8; etc.

Siguiendo esta idea, y recordando que el producto de dos números negativos es un número positivo, podemos encontrar inversos multiplicativos de racionales negativos. Por ejemplo.

a) el inverso multiplicativo de 5 es $\frac{1}{5}$ pues $(5 \cdot \frac{1}{5} = 1)$

el inverso multiplicativo de -5 será $-\frac{1}{5}$ porque $((-5)\ (-\frac{1}{5}) = 1)$

b) el inverso multiplicativo de $\frac{3}{4}$ es $\frac{4}{3}$ pues $(\frac{3}{4}\ \frac{4}{3} = 1)$

el inverso multiplicativo de $-\frac{3}{4}$ será $-\frac{4}{3}$ porque $((-\frac{3}{4})\ (-\frac{4}{3}) = 1)$

c) el inverso multiplicativo de 2.5 es .4 pues $((2.5)\ (.4) = 1)$

el inverso multiplicativo de -2.5 será $-.4$ porque $((-2.5)\ (-.4) = 1)$

Ejercicio 6. Complete usted la siguiente tabla de inversos multiplicativos.

	Número	Inverso multiplicativo	Comprobación
a)	7	$\frac{1}{7}$	$7 \cdot \frac{1}{7} = 1$
b)	-7	$-\frac{1}{7}$	$(-7)\ (-\frac{1}{7}) = 1$
c)	2		$(2)\ (\quad) = 1$
d)	-2		$(-2)\ (\quad) = 1$
e)		$-\frac{3}{8}$	$(\quad)\ (-\frac{3}{8}) = 1$
f)	$-\frac{4}{5}$		$(-\frac{4}{5})\ (\quad) = 1$
g)	$-.2$		$(-.2)\ (\quad) = 1$

Como puede usted darse cuenta, cada número negativo tiene su inverso multiplicativo y este inverso es también un número negativo.

Podemos decir entonces, que, con la excepción del cero, **todo número racional tiene su inverso multiplicativo.** Esto es, si **a** es un número racional cualquiera, existe otro racional **b** con la propiedad de que al multiplicar **a** por **b**, el resultado que se obtiene es 1.

Ejemplo.

a) $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = 1$. b) $(-\frac{5}{8})(-\frac{8}{5}) = 1$

c) $(-\frac{3}{4})(-\frac{4}{3}) = 1$ d) $(-26)(-\frac{1}{26}) = 1$

Una notación para el inverso multiplicativo de un número racional

La comunicación de ideas entre los seres humanos es muy sencilla cuando éstos se ponen primero de acuerdo en el significado que tendrá cada uno de los símbolos y sonidos que van a utilizar en su expresión oral y escrita. Nosotros ya nos hemos puesto de acuerdo en el significado que tienen las expresiones como $-a$, $-x$, $-n$, etcétera Ahora, que estamos estudiando la multiplicación, hagamos el siguiente convenio:

> **Si a representa un número racional diferente de cero, entonces el inverso multiplicativo de ese número se denota como $\frac{1}{a}$**

Tomando en cuenta este convenio, sabemos qué significado tienen las expresiones como $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{n}$, etcétera.

Ejemplo.

a) Si x es el número 5, entonces la expresión $\frac{1}{x}$ representa al número $\frac{1}{5}$

b) si n es el número $\frac{3}{4}$, entonces la expresión $\frac{1}{n}$ representa al número $\frac{4}{3}$.

c) Si b es el número -8, entonces $\frac{1}{b}$ es el número $-\frac{1}{8}$

d) Si a es el número $-\frac{3}{10}$, entonces $\frac{1}{a}$ es el número $-\frac{10}{3}$

Ejercicio 7. Complete las siguientes expresiones, de acuerdo con su conocimiento de los inversos multiplicativos.

a) Si $x = 3$, entonces $\frac{1}{x} =$ ____

b) Si $n = 18$, entonces $\frac{1}{n} =$ ____

c) Si $r = \frac{2}{3}$, entonces $\frac{1}{r} =$

d) Si $a = \frac{5}{9}$, entonces $\frac{1}{a} =$

e) Si $y = -2$, entonces $\frac{1}{y} =$

f) Si $g = -\frac{6}{7}$, entonces $\frac{1}{g} =$

g) Si $h = -\frac{12}{35}$, entonces $\frac{1}{h} =$

h) Si $\frac{1}{a} = 7$, entonces $a =$

i) Si $\frac{1}{x} = -4$, entonces $x =$

j) Si $\frac{1}{n} = -\frac{11}{8}$, entonces $n =$

k) Si $\frac{1}{k} = -\frac{25}{3}$, entonces $k =$

Ahora podemos indicar la propiedad de los inversos multiplicativos en la siguiente forma:

Si a es un número racional, distinto de cero, entonces

$$a \cdot \frac{1}{a} = 1$$

Esta forma de indicar la propiedad de los inversos multiplicativos nos sugiere lo siguiente:

Puesto que el cociente de la división 1 entre a $(1 \div a)$ es el número que al multiplicarse por a nos da 1, tenemos que $\frac{1}{a}$ es precisamente ese número

Es decir,

$$1 \div a = \frac{1}{a}.$$

De acuerdo con esto, podemos calcular el inverso multiplicativo de un número racional dividiendo 1 entre dicho número racional.

Ejemplo.

a) inverso multiplicativo de .5 es 2. pues

$$1 \div .5 = 2$$

b) El inverso multiplicativo 2 . 5 es . 4,es

$$1 \div 2.5 = .4$$

5. Uso de las propiedades de la multiplicación.

El conocimiento de las propiedades de la multiplicación nos ayuda a efectuar con más comodidad esta operación. Sobre todo en aquellos casos en los que hay más de dos factores. Por ejemplo, efectuemos la multiplicación

$$(\frac{3}{4})\ (8)\ (-5)\ (\frac{4}{3})\ (-\frac{1}{5}) = \boxed{}$$

Por las propiedades conmutativa y asociativa, y el elemento neutro, podemos considerar esa multiplicación así:

$$\underbrace{(\frac{3}{4})\ (\frac{4}{3})}_{(1)}\ \underbrace{(-5)\ (-\frac{1}{5})}_{(1)}\ \underset{(8)}{(8)} = \underset{\boxed{8}}{\boxed{8}}$$

Ejemplo. Efectuemos la multiplicación

$$(-6)\ (13)\ (\frac{1}{6})\ (-2)\ (0) = \boxed{}$$

Por la propiedad asociativa y por la propiedad del cero, podemos considerar nuestra multiplicación así:

$$(-6)\ (13)\ (\frac{1}{6})\ (-2)\ \cdot 0 = \boxed{0}$$

Ejercicio 8. Efectúe las siguientes multiplicaciones aplicando las propiedades que convengan en cada caso.

a) $(2)\ (-48)\ (5) = \boxed{}$

b) $(-6)\ (7)\ (-5) = \boxed{}$

c) $(.5)\ (13)\ (-4) = \boxed{}$

d) $(-12)\ (5)\ (-12) = \boxed{}$

e) $(-\frac{1}{3})\ (12)\ (-3)\ (.6) = \boxed{}$

f) $(-4)\ (-4)\ (-4)\ (-4)\ (-4) = \boxed{}$

g) $(-5)\ (.7)\ (-2)\ (-9) = \boxed{}$

h) $(\frac{3}{8})\ (428)\ (\frac{8}{3})\ (-2) = \boxed{}$

i) $(-6)\ (125)\ (10)\ (-\frac{1}{6}) =$

j) $(-\frac{5}{7})\ (34)\ (-\frac{7}{5})\ (-10) =$

k) $(2.5)\ (.4)\ (-8)\ (-1.2) =$

l) $(2.9)\ (-5)\ (x)\ (0) =$

m) $(-3)\ (-8)\ (a)\ (-\frac{1}{3}) =$

n) $(a)\ (x)\ (n)\ (-7.1)\ (0) =$

o) $(\frac{x}{8})\ (-4.5)\ (\frac{8}{x})\ (2) =$

Ejercicio 9. Antes hemos dicho que expresiones como $a \cdot b =$ ___ indican la multiplicación de los números que representan las letras a y b. De acuerdo con esa idea complete las siguientes expresiones. (Observe los incisos resueltos).

a) Si $a = 8$ y $b = -2.5$, entonces $ab = 8 \cdot (-2.5) = -20$

b) Si $a = 3$, $b = 5$ y $c = \frac{1}{15}$, entonces $abc =$

c) Si $x = -18$ y $a = -5$, entonces $ax =$

d) Si $x = 6$, $y = -1$ y $b = \frac{1}{6}$, entonces $bxy =$

e) Si $n = -\frac{1}{3}$, $x = -6$ y $a = -3$, entonces $anx =$

$(-3)\ (-\frac{1}{3})\ (-6) = -6$

f) Si $a = 15$, $b = -819$ y $c = 0$, entonces $abc =$

g) Si $x = 3.6$, $y = -5$ y $a = 1$, entonces $axy =$

h) Si $a = -25.4$ y $b = 3.5$, entonces $ab =$

i) Si $r = 405.6$ y $s = -10$, entonces $rs =$

j) Si $a = 3$ y $b = -2$, entonces $abb =$

k) Si $n = -5.4$, entonces $nnn =$

6. El número -1 en la multiplicación de racionales.

Cuando se multiplica un número racional por -1, el producto resultante tiene una característica muy especial. trate usted de descubrir esa característica en los productos del ejercicio siguiente.

Ejercicio 10. Efectúe las multiplicaciones que se indican.

a) $(-1)(4) =$ ___ b) $(-1)(7) =$ ___

c) $(-1)(-9) =$ ___ d) $(-1)(-3.7) =$ ___

e) $(-1)\left(\frac{2}{3}\right) =$ ___ f) $(-1)\left(-\frac{7}{4}\right) =$ ___

g) $(-1)(-17.5) =$ ___ h) $(-1)(8.4) =$ ___

i) $(-1)(5.34) =$ ___ j) $(-1)(-43.9) =$ ___

Como puede usted observar, en cada inciso del ejercicio anterior el producto obtenido es el inverso aditivo del factor que se multiplicó por -1.

Esto mismo ocurre con cualquier racional distinto de cero. Y se puede expresar este hecho diciendo que:

Si a es un número racional, diferente de cero, entonces

$$-1 \cdot a = -a$$

Lo anterior nos proporciona un nuevo simbolismo para el inverso aditivo de un número.

Ejemplo

a) Si a es el número 3, entonces $-1 \cdot a$ nos representará al número -3

b) Si $x = 8$, entonces $-1 \cdot x = -8$

c) Si $n = -4$, entonces $-1 \cdot n = 4$

Ejercicio 11. Considerando el hecho de que $-1 \cdot a = -a$, complete las siguientes expresiones.

a) $-1 \cdot 14 =$ ___ b) $-1 \cdot y =$ ___

c) $-1 \cdot p =$ ___ d) $q(-1) =$ ___

e) $z\,(-1) =$

f) $-5 =$

g) $-\frac{3}{4} =$

h) $-b =$

i) $-d =$

j) $-r =$

k) $-a =$

l) $-x =$

Ejercicio 12. Resuelva las siguientes ecuaciones pensando en que $-1 \cdot a = -a$

a) $-1 \cdot x = -12$

$x =$

b) $-1 \cdot 8 = a$

$a =$

c) $-1 \cdot y = 16$

$y =$

d) $q\,(-1) = 1$

$q =$

e) $-1\,(-1.3) = b$

$b =$

f) $3.7\,(-1) = z$

$z =$

VIII

Potenciación de números racionales.

En ocasiones se presentan algunas multiplicaciones como

$$(-4)\ (-4) = 16$$

$$(7)\ (7)\ (7) = 343$$

$$(-2.5)\ (-2.5)\ (-2.5) = -15.625$$

Tal como lo hicimos antes con racionales positivos, aquí también usaremos la notación de potencias para esos casos.

$$(-4)^2 = 16$$

$$7^3 = 343$$

$$(-2.5)^3 = -15.625$$

1. Potencias de números racionales.

Recordemos que se usan las palabras **base** y **exponente** para designar a los números que intervienen en una notación de potencias.

$$(-4)^2$$

exponente

base

Ejercicio 1. Tal como se hace en los primeros incisos, efectúe las multiplicaciones y luego complete las expresiones de potencias.

a) $(-3)(-3)(-3)(-3) = 81$ $\qquad (-3)^4 = 81$

b) $(-2)(-2)(-2) = -8$ $\qquad (-2)^3 = -8$

c) $(-10)(-10) =$ ____ $\qquad (-10)^2 =$ ____

d) $(-5)(-5) =$ ____ $\qquad (-5)^2 =$ ____

e) $(-3)(-3)(-3) =$ ____ $\qquad$ ____ $= -27$

f) $(-2.5)(-2.5) =$ ____ $\qquad (-2.5)^2 =$ ____

g) $(-12)(-12) =$ ____ $\qquad$ ____ $= 144$

h) $(.6)(.6) =$ ____ $\qquad$ ____ $= .36$

i) $(-.4)(-.4) =$ ____ $\qquad (-.4)^2 =$ ____

Ejercicio 2. Complete las igualdades, tal como se hace en a)

a) $(-7)^2 = 49$ $\qquad$ b) $(-5)^3 =$ ____

c) $(-2)^4 =$ ____ $\qquad$ d) $(-2.5)^2 =$ ____

e) $(-1.5)^3 =$ ____ $\qquad$ f) $(-4)^3 =$ ____

g) $(-3)^4 =$ ____ $\qquad$ h) $(-4.2)^2 =$ ____

i) $(8)^2 =$ ____ $\qquad$ j) $(1.2)^2 =$ ____

k) $(-8)^2 =$ ____ $\qquad$ l) $(-1.2)^2 =$ ____

m) $0^2 =$ ____

Observación. Como puede usted notar en este último ejercicio, **el cuadrado de cualquier número racional, excepto el cero, siempre es un número positivo.** En cambio, no ocurre lo mismo con el cubo.

Ahora bien, ¿qué significa la expresión x^2? ¿Y la expresión x^3?

La expresión x^2 nos indica que un número racional x se eleva al cuadrado. Así, por ejemplo, si $x = 3$, entonces $x^2 = 3 \cdot 3 = 9$; o bien, si $x = -.5$, entonces $x^2 = (-.5)(-.5) = .25$; etcétera.

La expresión x^3 nos representa el cubo de un número x. De modo que si $x = -2$, entonces $x^3 = (-2)(-2)(-2) = -8$; si $x = 1.1$, entonces, $a^3 = (1.1)(1.1)(1.1) = 1.331$, etcétera.

Ejercicio 3. Tomando en cuenta lo que acabamos de ver, complete las siguientes expresiones.

a) Si $x = 3$, entonces $x^3 =$

b) Si $m = -.1$, entonces $m^2 =$

c) Si $r = 3.2$, entonces $r^2 =$

d) Si $t = -10$, entonces $t^3 =$

e) Si $w = -\frac{1}{2}$, entonces $w^2 =$

f) Si $y = -\frac{1}{3}$, entonces $y^3 =$

g) Si $n = 0$, entonces $n^3 =$

h) Si $z = -1$, entonces $z^4 =$

Ejercicio 4. Observe bien las siguientes tablas y anote los datos que faltan en cada una de ellas.

a)

m	1	3	5	−1	−3	−5
m^3		27				

b)

t	$\frac{1}{2}$	.2	.1	$-\frac{1}{2}$	−.2	−.1
t^2						

c)

w	2	4	6	−2	−4	
w^3						−125

d)

x	1			−3	−2	−.3
x^2		25	100			

Ejercicio 5. Tal como se hace en el inciso a), encuentre la multiplicación con la que se puede expresar cada uno de los números indicados en notación de potencias.

a) $5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5$

b) $7^3 =$

c) $8^4 =$

d) $10^5 =$

e) $m^2 =$

f) $x^4 =$

g) $x^3 =$

h) $m^4 =$

i) $y^5 =$

j) $z^6 =$

Ejercicio 6. Tal como se hace en a), exprese en notación de potencias las siguientes multiplicaciones.

a) $3 \cdot 3 = 3^2$

b) $(5)\,(5)\,(5) =$

c) $n \cdot n =$

d) $a\,a\,a =$

e) $x\,x\,x\,x =$

f) $m\,m\,m\,m =$

g) $y\,y\,y\,y\,y =$

h) $r\,r\,r\,r\,r\,r =$

IX

Expresiones algebraicas.

A estas alturas ya tenemos bastantes conocimientos acerca de los números racionales y las operaciones que se pueden efectuar con ellos. También sabemos manejar expresiones como $a + b$, $5x$, $-8ab$, $n - y$, x^2, etcétera, en las que las letras representan números racionales.

En este capítulo vamos a dedicarnos al estudio de ese tipo de expresiones a las que se da el nombre de **expresiones algebraicas.**

1. Valor numérico.

Si sabemos qué número o números representan las letras que hay en una expresión algebraica, podemos saber qué número representa toda la expresión. Por ejemplo, si a es el número 8 y b es el número -6, entonces la expresión $a + b$ representa al número 2 porque

$$a + b = 8 + (-6) = 2$$

En este caso se dice que 2 es el **valor numérico** de la expresión algebraica $a + b$

Ejemplo.

a) Si $a = 5$ y $b = -2$, entonces el valor numérico de la expresión $-3ab$ es el número 30, porque $-3ab = (-3)(5)(-2) = (-15)(-2) = 30$

b) Si $x = 2$ y $y = 3$, entonces la expresión $-5x^2y$ tiene valor numérico -60 porque $-5x^2y = (-5)(2)^2(3) = -5(4)(3) = -5(12) = -60$

Ejercicio 1. Encuentre el valor numérico de cada expresión algebraica. (Observe que todas indican multiplicación).

a) Si $m = 2$ entonces $-2m =$

b) Si $r = -5$ entonces $4r =$

c) Si $p = -7$ entonces $-7p =$

d) Si $b = -10$ entonces $2b^2 =$

e) Si $a = -1$ entonces $-3a^3 =$

f) Si $m = 2$ y $n = -8$, entonces $-2mn =$

g) Si $r = -5$ y $s = 0$, entonces $-7rs =$

h) Si $p = -2$ y $q = -5$, entonces $-pq =$

i) Si $a = 2$ y $b = -1$, entonces $-2a^2b =$

j) Si $a = 2$ y $b = -5$, entonces $3a^2b^2 =$

Ejercicio 2. Complete usted las siguientes tablas.

a)

a	2	-1	-3	$-.5$
$-3a^2$				

b)

m	$\frac{1}{2}$	3	.2	-3
$5m^3$				

c)

r	-2	3	-3	$\frac{1}{2}$
s	1	5	-5	$-\frac{1}{3}$
$-2rs$				

d)

x	-5	3	-2	$.5$
y	-1	2	-3	$.2$
$-xy^2$				

A menudo nos encontramos con expresiones algebraicas que indican la suma de productos como los que vimos en el ejercicio anterior.

Ejemplo.

a) La expresión $-3a^2 + 2a$ indica la suma de $-3a^2$ con $2a$.

b) Para indicar la suma de los productos $-2a^2$, $5a$ y $-3a^3$ se emplea la expresión

$$-2a^2 + 5a - 3a^2$$

o bien, la expresión

$$-2a^2 + 5a + (-3a^2)$$

c) La expresión $2r^2 + 2rm - 5r$ nos indica la suma de $2r^2$, $2rm$ y $-5r$.

Ahora bien, si queremos calcular el valor de expresiones como esas, podemos proceder como en los siguientes ejemplos

Ejemplo. ¿Cuál es el valor de la expresión $-3a^2 + 2a$ cuando a es igual a 2?

Para encontrar el valor sustituimos la a por el número 2 y efectuamos las operaciones que se indican en la expresión:

$$\begin{aligned} &-3a^2 + 2a = \\ &= -3(2)^2 + 2(2) = \\ &= -3(4) + 2 \cdot 2 = \\ &= -12 + 4 = \boxed{-8} \end{aligned}$$

Así encontramos que si $a = 2$, entonces el valor numérico de la expresión $-3a^2 + 2a$ es el número -8.

Ejemplo. Si $a = -2$, ¿cuál es el valor numérico de la expresión $-2a^2 + 5a - 3a^2$?

Hagamos la sustitución de a por su valor.

$$\begin{aligned} &-2a^2 + 5a - 3a^2 = \\ &= -2(-2)^2 + 5(-2) - 3(-2)^2 = \\ &= -2(4) + (-10) - 3(4) = \\ &= -8 + (-10) - 12 = \\ &= -8 + (-10) + (-12) = \boxed{-30} \end{aligned}$$

Respuesta. Cuando a vale -2, el valor de $-2a^2 + 5a - 3a^2$ es el número -30.

Ejercicio 3. Encuentre el valor numérico de las siguientes expresiones. (Trabaje en su cuaderno).

a) Si $a = 5$, entonces $5a - 3a + 2a =$

b) Si $m = -2$, entonces $-2m - 3m + 5m =$

c) Si $r = 3$, entonces $-7r - r + 5 + r =$

d) Si $s = -1$, entonces $-5s - s + 3s - 2s =$

e) Si $b = 3$, entonces $3b^2 - 2b + 5 =$

f) Si $c = .1$, entonces $-3c^2 + 2c - 5 =$

g) Si $a = 2$ y $b = -3$, entonces $3ab - 2a + 2b =$

h) Si $p = -1$ y $q = 2$, entonces $-2p^2q + 2pq^2 - 3pq =$

i) Si $m = 5$, $n = -2$ y $p = -1$, entonces

$$-2mn + 5np - 3mnp =$$

Ejercicio 4. Complete usted las siguientes tablas. (Haga las operaciones necesarias en su cuaderno).

a)

a	-1	$.5$	2	-3
$3a - 2a + 5$				

b)

b	0	-1	1	3
$-2b^2 + b - 5$				

m	1	2	-3	4
n	-1	2	3	-4
$-2mn^2 + 3mn^2$				

2. Expresiones algebraicas que tienen el mismo valor numérico.

Observe usted las siguientes expresiones algebraicas

a) $5a + 2a + 3a$ b) $8a + 6a - 4a$

c) $10a$ d) $19a - 9a$

Si consideramos que en ellas la a representa al -2, encontramos que *todas tienen el mismo valor numérico.*

a) $5a + 2a + 3a = 5(-2) + 2(-2) + 3(-2)$

$$= -10 + (-4) + (-6) = -20$$

b) $8a + 6a - 4a = 8a + 6a + (-4)a = 8(-2) + 6(-2) + (-4)(-2)$

$$= -16 + (-12) + 8 = -20$$

c) $10a = 10(-2) = -20$

d) $19a - 9a = 19a + (-9)a = 19(-2) + (-9)(-2)$

$$= -38 + 18 = -20$$

Si en estas expresiones sustituyéramos la a por cualquier otro número racional, siempre obtendríamos resultados iguales. Es decir, siempre encontraríamos que todas esas expresiones tienen el mismo valor numérico. (Como ejercicio, sustituya la a por dos números que usted elija arbitrariamente y vea qué valor tienen las expresiones en cada caso).

Ya con anterioridad hemos manejado expresiones algebraicas que tienen el mismo valor numérico. Por ejemplo, sabemos que $a + b$ y $b + a$ dan el mismo resultado cuando sustituimos la a y la b por números cualesquiera. Para indicar este hecho hemos usado el signo $=$ en la siguiente forma:

$$a + b = b + a$$

De igual manera, cuando tengamos dos expresiones que tienen el mismo valor numérico, usaremos el signo $=$ para indicarlo. Así, en las expresiones algebraicas a), b), c) y d) dadas al principio de este párrafo, podríamos escribir, por ejemplo,

$$5a + 2a + 3a = 8a + 6a - 4a$$

$$19a - 9a = 10a$$

En el manejo que a continuación haremos de las expresiones algebraicas nos interesará básicamente "transformar" una expresión en otra, de tal manera que ambas tengan el mismo valor numérico. Y siempre que hagamos una "transformación" de ese tipo nos apoyaremos en las propiedades de las operaciones.

3. Simplificación de expresiones algebraicas.

Cuando tenemos una expresión como

$$5x + 3x + 2x$$

podemos simplificarla haciendo uso de la propiedad distributiva, pues ocurre que

$$5x + 3x + 2x = (5 + 3 + 2)x$$

y como $(5 + 3 + 2)x = 10x$, concluimos que

$$5x + 3x + 2x = 10x$$

Si en estas expresiones sustituyéramos la x por un número cualquiera, encontraríamos que las dos tienen el mismo valor numérico. Por ejemplo, si $x = .4$, entonces

$$5x + 3x + 2x = 5(.4) + 3(.4) + 2(.4) = 2.0 + 1.2 + .8 = 4.0$$

y

$$10x = 10(.4) = 4.0$$

(Observe que es más fácil manejar la expresión $10x$ que la expresión original $5x + 3x + 2x$).

Ejemplo. Simplifiquemos la expresión

$$4a - 5a + 7a + 2a$$

Por la propiedad distributiva tenemos que

$$4a - 5a + 7a + 2a = (4 - 5 + 7 + 2)a = 8a$$

o bien, aplicando la definición de sustracción al término $-5a$,

$$4a + (-5a) + 7a + 2a = (4 + (-5) + 7 + 2)a = 8a$$

Por lo tanto,

$$4a - 5a + 7a + 2a = 8a$$

La expresión $8a$ es más simple que la expresión $4a - 5a + 7a + 2a$ y ambas toman el mismo valor numérico al sustituir la a por un número cualquiera.

Algunas personas llaman **"reducción de términos semejantes"** a una simplificación como las que hemos hecho.

Ejercicio 5. En cada inciso reduzca términos semejantes. Es decir, simplifique cada expresión usando la propiedad distributiva.

a) $6t + 9t$
b) $7a + 8a + 4a$
c) $38b + 15b + 19b$
d) $17x - 10x$
e) $8r + 3r - 17r$
f) $-9v - 18v + 4v$
g) $5.1y + 3.2y - 19.3y$
h) $8.7d - 17.3d + 27.5d$
i) $-7w - 2.7w + 5.3w$
j) $19.6q + 8.3q - 9.2q - 8q$
k) $-7y^2 + 12y^2 - 9y^2$
l) $12x^2 - 3x^2 + 15x^2$
m) $17a^3 - 6a^3 - 9a^3$
n) $3.4c^3 + 2.6c^3 - 4.7c^3$
o) $12.4z^2 - 8.3z^2 + z^2$
p) $9.1p^2 - p^2 + 4p^2 - 3.4p^2$

Observe usted que después de simplificar una expresión, podemos encontrar más fácilmente su valor numérico correspondiente, al sustituir la letra por algún número determinado.

Por ejemplo, si deseamos hallar el valor de la expresión

$$5x + 3x + 9x - 2x - 11x$$

cuando $x = -5$, primero reducimos términos semejantes,

$$5x + 3x + 9x - 2x - 11x = 4x$$

y después sustituimos la x en la expresión más simple.

$$4x = 4(-5) = -20$$

Así vemos que el valor de la expresión $5x + 3x + 9x - 2x - 11x$ es -20, cuando x se sustituye por el -5. (Si tiene usted alguna duda, haga la sustitución de la x por el -5 en la expresión citada).

Ejercicio 6. Calcule el valor de cada expresión, de acuerdo con el valor que se da a la letra en cada inciso.

a) Si $t = -3$, entonces $-4t + 6t + 9t =$ ☐
b) Si $q = 2$, entonces $12q - 15q - q =$ ☐
c) Si $r = -1$, entonces $8r + r - 17r =$ ☐
d) Si $x = -2$, entonces $2.3x + 6.8x - 7.2x =$ ☐
e) Si $y = 1.5$, entonces $5.4y - 3.4y + 7.5y =$ ☐
f) Si $a = 3$, entonces $-4.6a + 3.1a - 4.9a + 2.8a =$ ☐
g) Si $w = -4$, entonces $2w - 18.3w + 10.3w =$ ☐

h) Si $b = 2.5$, entonces $5b - 14b + 7.3b - 8b =$ $\boxed{}$

i) Si $d = 3.5$, entonces $-2.1d + 8.1d - 7d + 14d =$ $\boxed{}$

j) Si $f = \frac{3}{4}$, entonces $14f + 12f - 18f - 6f =$ $\boxed{}$

Es muy común encontrar expresiones algebraicas en las que aparecen dos o más letras. Por ejemplo,

$$a + b$$

Como en general se considera que dos letras distintas representan números distintos, no hay una expresión algebraica más simple que podamos sustituir por $a + b$. También suele decirse que a y b no son términos semejantes.

Una expresión como

$$x^2 + x$$

tampoco puede simplificarse porque, en general, x^2 y x representan dos números distintos. Por ejemplo, si $x = -3$, entonces $x^2 = 9$. Así es que x^2 y x no son términos semejantes y, por lo tanto, no pueden reducirse.

Una expresión como

$$4a + 8b + 6a + 7b$$

en la que aparecen dos literales, sí puede simplificarse porque $4a$ y $6a$ son términos semejantes, y también lo son $8b$ y $7b$.

Para simplificar esta expresión aplicamos primero la propiedad conmutativa.

$$4a + 8b + 6a + 7b = 4a + 6a + 8b + 7b$$

y luego las propiedades asociativa y distributiva.

$$\begin{aligned}(4a + 6a) + (8b + 7b) &= (4 + 6)\,a + (8 + 7)\,b \\ &= 10a + 15b\end{aligned}$$

Esta expresión $10a + 15b$ es la más simple porque $10a$ y $15b$ no son términos semejantes y, en consecuencia, no se pueden reducir. Por lo tanto,

$$4a + 8b + 6a + 7b = 10a + 15b$$

Ejemplo. La expresión

$$3x^2 + 15x^2 + 4x - 10x$$

sí puede simplificarse en la siguiente forma:

$$\begin{aligned}(3x^2 + 15x^2) + (4x - 10x) &= (3 + 15)\,x^2 + (4 - 10)\,x \\ &= 18x^2 + (-6x) \\ &= 18x^2 - 6x\end{aligned}$$

Esta expresión, $18x^2 - 6x$, es la más simple porque en ella no hay términos semejantes. Por lo tanto,

$$3x^2 + 15x^2 + 4x - 10x = 18x^2 - 6x$$

Note usted que en este ejemplo no hemos mencionado las propiedades que se utilizan en la simplificación. Sin embargo, no por eso hemos dejado de usarlas. Usted puede trabajar así en la resolución de sus ejercicios. Pero no olvide que en la simplificación de expresiones se usan propiedades conocidas, aunque no se dé el nombre de cada una de ellas.

Ejercicio 7. Simplifique las siguientes expresiones algebraicas.

a) $-6a + 9a - 12b + 4b =$

b) $2x + 5y - 9y - 7x + 6 =$

c) $4a - 7b + a - 6b - 8 =$

d) $t - 2r + 12 - 6t + 7r =$

e) $5a^3 + 12a^2 - 7a^2 + 18a^3 =$

f) $4x^2 + 3x - 5 - 6x^2 - 11x + 12 =$

g) $8ab + 15ab - 6x^3 + 19x^3 - 3 =$

h) $-6r^3 + 4r^2 + 2r - 7r^3 - 9r^2 + 10 =$

i) $6.3x^2y + 8.1xy^2 - 7.2xy^2 + 5.7x^2y =$

j) $4t^4 + 5t - 16t^3 + 14t^4 - 18t^3 - 17t - t^2 =$

4. Simplificación de algunas expresiones de multiplicación.

Con el conocimiento que tenemos acerca de la notación de potencias, y aplicando las propiedades de las operaciones con números racionales, podremos resolver fácilmente el problema de simplificar expresiones como

$$x^2 \cdot x^3 \quad \text{y} \quad 3a^2 \cdot (-5a^4)$$

en las que se indica el producto de algunas potencias.

Ejemplo. Simplifiquemos la expresión $x^2 \cdot x^3$

Como esta expresión indica la multiplicación de x^2 por x^3 y, según sabemos, $x^2 = xx$ y $x^3 = xxx$, entonces tenemos que $x^2 \cdot x^3 = (xx) \cdot (xxx) = xxxxx = x^5$

Es decir,

$$x^2 \cdot x^3 = x^5$$

Ejemplo. Simplifiquemos la expresión $m^5 \cdot m^4$

Aplicando el mismo procedimiento del ejemplo anterior, encontramos que

$$m^5 \cdot m^4 = (m\ m\ m\ m\ m)\ (m\ m\ m\ m) =$$
$$= m\ m\ m\ m\ m\ m\ m\ m\ m = m^9$$

Por lo tanto,

$$m^5 \cdot m^4 = m^9$$

Ejercicio 8. Simplifique las siguientes expresiones aplicando el procedimiento de los ejemplos anteriores. (Use su cuaderno). (Observe que en cada inciso las potencias tienen la misma base).

a) $x^2x^3 = \square$ b) $x^3x^3 = \square$ c) $y^2y^4 = \square$

d) $m^2m^2 = \square$ e) $n^3n^4 = \square$ f) $p^2p^4 = \square$

g) $r^5r^4 = \square$ h) $s \cdot s^3 = \square$ i) $c^4c = \square$

j) $t \cdot t^5 = \square$ k) $a^2a^3a^4 = \square$ l) $d^2d^2d^3 = \square$

m) $l^4l^2l^2 = \square$ n) $t^2t^3t^6 = \square$ o) $n^2n^3n^2n^4 = \square$

p) $n \cdot n^2n^3 = \square$

Ejercicio 9. Invente usted una regla que le permita simplificar rápidamente expresiones como las del ejercicio anterior.

Sugerencia: Observe usted el exponente del resultado y compárelo con los exponentes de los factores.

Ejemplo. Simplifiquemos la expresión

$$(5n^3)\ (-2n^4)$$

Para simplificar este producto podemos usar las propiedades conmutativa y asociativa.

$$\begin{aligned}(5)\ (n^3)\ (-2)\ (n^4) &= (5)\ (-2)\ (n^3)\ (n^4)\\ &= -10n^7\end{aligned}$$

Así vemos que

$$(5n^3)\ (-2n^4) = -10n^7$$

Ejemplo. Simplifiquemos la expresión

$$(-2n)\ (3n^2)\ (-5n^2)$$

Procedemos como en el ejemplo anterior

$$\begin{aligned}(-2)\ (n)\ (3)\ (n^2)\ (-5)\ (n^2) &= (-2)\ (3)\ (-5)\ (n)\ (n^2)\ (n^2)\\ &= 30n^5\end{aligned}$$

Así encontramos que

$$(-2n)\ (3n^2)\ (-5n^2) = 30n^5$$

Ejercicio 10. Simplifiquemos las siguientes expresiones

a) $(3m^2)\ (2m^2) =$

b) $(-2m)\ (3m^2 \times 2m) =$

c) $(-3x^2)\ (5x^3)\ (3x) =$

d) $(-3r)\ (2r^2)\ (5r^3) =$

e) $(-6m^3)\ (-2m^2)\ (-3m) =$

f) $(-2m)\ (-5m)\ (7m) =$

g) $-7\ (-2m)\ (3m^3) =$

h) $(5x)\ (-3x^3)\ (-9) =$

i) $(x)(3x^2) =$

j) $(-2m)(-m) =$

k) $(2x)(-3x)(x) =$

l) $(-5m^2)(3m)(-m) =$

m) $(-n)(-3n^2)(n) =$

n) $(-m)(m) =$

o) $(-m)(-m) =$

p) $(3m^2)(-2n)(5m^3)(2n) =$

q) $(-.5r^2)(2r)(-1.3r^3) =$

r) $(-a^3)(-.1a^2)(6a) =$

s) $(-2.3m^2n^2)(-1.2mn) =$

t) $(-\frac{1}{2}d^2)(\frac{1}{3}d^2)\,d^3 =$

u) $(-.5g^3)(-\frac{1}{2}g)(\frac{2}{5}g^2) =$

Entre las expresiones de multiplicación que nos vemos precisados a manejar, hay algunas como

$$4(2x + 5) \qquad \text{y} \qquad (x + 5)(x + 8)$$

(Observe que en estas expresiones hay factores que son sumas)

A continuación veremos cómo, aplicando la propiedad distributiva, se pueden encontrar otras expresiones algebraicas a partir de éstas.

Ejemplo. Consideremos la expresión $4(2x + 5)$

Aplicamos la propiedad distributiva y encontramos que

$$4(2x + 5) = 4(2x) + 4(5)$$
$$= 8x + 20$$

Por consiguiente,

$$4(2x + 5) = 8x + 20$$

(Observe que ya antes habíamos manejado expresiones como ésta, cuando estudiamos los números naturales y los racionales no negativos).

Ejemplo. Consideremos la expresión $-3(5y - 7)$

Por definición de sustracción, podemos escribir

$$-3(5y - 7) = -3(5y + (-7))$$

Y así, aplicando la propiedad distributiva, vemos que

$$-3(5y + 7)) = -3(5y) + (-3)(-7)$$

$$= -15y + 21$$

Por lo tanto,

$$-3(5y - 7) = -15y + 21$$

Ejemplo. Apliquemos la propiedad distributiva a la expresión $-5(4a^2 + 6b)$

$$-5(4a^2 + 6b) = (-5)(4a^2) + (-5)(6b)$$

$$= -20a^2 + (-30b)$$

$$= -20a^2 - 30b$$

Esto es,

$$-5(4a^2 + 6b) = -20a^2 - 30b$$

Ejemplo. Apliquemos la propiedad distributiva a la expresión $(3a^2 - 8)(7a)$

$$(3a^2 - 8)(7a) = (3a^2 + (-8))(7a)$$

$$= (3a^2)(7a) + (-8)(7a)$$

$$= 21a^3 + (-56a)$$

$$= 21a^3 - 56a$$

Encontramos que

$$(3a^2 - 8)(7a) = 21a^3 - 56a$$

En todos los ejemplos anteriores podemos observar que la expresión de la que partimos y la expresión a la que llegamos tienen el mismo valor numérico cuando en ellas se sustituye la letra por cualquier número dado.

Ejercicio 11. Use la propiedad distributiva para encontrar, en cada inciso, otra expresión que tenga el mismo valor numérico.

a) $7(6a + 5)$	b) $(3b^3 - 9)(8)$
c) $-4.2(5c^2 + 2)$	d) $-7.2(4x^4 - 3.5)$
e) $(x^3 + 2y)(5)$	f) $(2.5a^2 - 3b^3)(-8)$
g) $-3.1(4t^3 + 6.2r)$	h) $7.9(4z^4 - 6z^3)$
i) $(4x^2 + 7)(2x)$	j) $-6y^3(5y - 9)$
k) $7.1a^2(5a - 4)$	l) $(3t^2 + 5.2)(-8.5t^3)$
m) $12x^3(x^3 + 5y^2)$	n) $15q^3(3q^2 - 2r^4)$
o) $-10z(8w^5 - 2t^3)$	p) $-8r^3(6.5r + 4t^2)$
q) $(2a^4 + 4a^2)(-7a^3)$	r) $2a^3b(5ab^2 - 3b)$
s) $-3x^4(2x^3 - 6x^2 + 5)$	t) $.6a(.2a^4 + .4a^2 - a)$

Ejemplo. Consideremos ahora la expresión

$$(x + 5)(x + 8)$$

Si aplicamos la propiedad distributiva considerando primero la multiplicación de $x + 5$ por la suma de x y 8, tendremos lo siguiente:

$$(x + 5)(x + 8) = (x + 5)(x) + (x + 5)(8)$$

Si ahora aplicamos la propiedad distributiva a la última expresión obtenida, nos encontramos con que

$$(x + 5)x + (x + 5)(8) =$$

$$= (x)(x) + (5)(x) + (x)(8) + (5)(8) =$$

$$= x^2 + 5x + 8x + 40 = x^2 + 13x + 40$$

Por lo tanto,

$$(x + 5)(x + 8) = x^2 + 13x + 40$$

Por supuesto, también podíamos haber trabajado en esta otra forma:

$$(x + 5)(x + 8) = x(x + 8) + 5(x + 8)$$

$$= x\,x + x \cdot 8 + 5x + 5 \cdot 8$$

$$= x^2 + 8x + 5x + 40$$

$$= x^2 + 13x + 40$$

Ejercicio 12. Tal como se hizo en el ejemplo anterior, encuentre, en cada inciso, otra expresión que tenga el mismo valor numérico. (Trabaje en su cuaderno)

a) $(x + 1)(x + 3)$ b) $(a + 4)(a + 7)$

c) $(t + 6)(t + 5)$ d) $(y + 10)(y + 2)$

e) $(b + 8)(b + 9)$ f) $(d + .4)(d + .5)$

g) $(f + .1)(f + 5.2)$ h) $(h + \frac{1}{2})(h + \frac{3}{2})$

i) $(r + 5)(r + 4)$ j) $(2m + 3)(2n + 6)$

k) $(4m + 70)(4n + 4)$ l) $(3x + 2)(3x + 7)$

m) $(3y + 6)(y + 5)$ n) $(a + 2)(5a + 9)$

o) $(x + 3)^2$ (Recuerde usted que $(x + 3)^2 = (x + 3)(x + 3)$)

p) $(a + 5)^2$ q) $(b + 1)^2$

r) $(d + 6)^2$ s) $(t + 4)^2$

t) $(x + y)^2$ u) $(2x + 4)^2$

v) $(3y + 1)^2$ w) $(3a + 2b)^2$

También se nos pueden presentar expresiones como $(x + 5)(x - 2)$ o bien, como $(x - 3)(x - 7)$. Pero, con lo que sabemos de sustracción, y aplicando la distributividad, podemos manejarlas fácilmente. Observe usted los siguientes ejemplos.

Ejemplo. Tomemos la expresión $(x + 5)(x - 2)$

En vista de que $x - 2$ es igual que $x + (-2)$, por definición de sustracción, podemos escribir

$$\begin{aligned}(x + 5)(x + (-2)) &= x(x + (-2)) + 5(x + (-2)) \\ &= x \cdot x + x(-2) + 5x + 5(-2) \\ &= x^2 + (-2x) + 5x + (-10) \\ &= x^2 + 3x - 10\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$(x + 5)(x - 2) = x^2 + 3x - 10$$

Ejemplo. Tomemos la expresión $(x-3)(x-7)$

Como $x-3=x+(-3)$ y $x-7=x+(-7)$, escribimos

$$\begin{aligned}(x-3)(x-7) &= (x+(-3))(x+(-7))\\ &= x(x+(-7))+(-3)(x+(-7))\\ &= x^2+(-7x)+(-3x)+21\\ &= x^2+(-10x)+21\\ &= x^2-10x+21\end{aligned}$$

Esto es,

$$(x-3)(x-7)=x^2-10x+21$$

Ejercicio 13. Tal como se hizo en los ejemplos anteriores, encuentre expresiones que tengan el mismo valor que las expresiones dadas. (Trabaje en su cuaderno).

a) $(a+6)(a-4)$

b) $(y-5)(y+8)$

c) $(t+4)(t-6)$

d) $(x-10)(x+7)$

e) $(b-12)(b+1)$

f) $(q+2)(q-3)$

g) $(r-7)(r-3)$

h) $(y-5)(y-6)$

i) $(h-1)(h-8)$

j) $(k-6)(k-1.5)$

k) $(m-\frac{1}{2})(m-\frac{5}{2})$

l) $(3x-8)(3x+6)$

m) $(5a-3)(5a+8)$

n) $(4z+9)(z-5)$

o) $(6p-6)(2p-4)$

p) $(4x-3.6)(x-1.5)$

q) $(y-3)^2$

r) $(a-5)^2$

s) $(b-7)^2$

t) $(s-8)^2$

u) $(d-3.5)^2$

v) $(2k-5)^2$

w) $(6m-2n)^2$

x) $(7x-5y)^2$

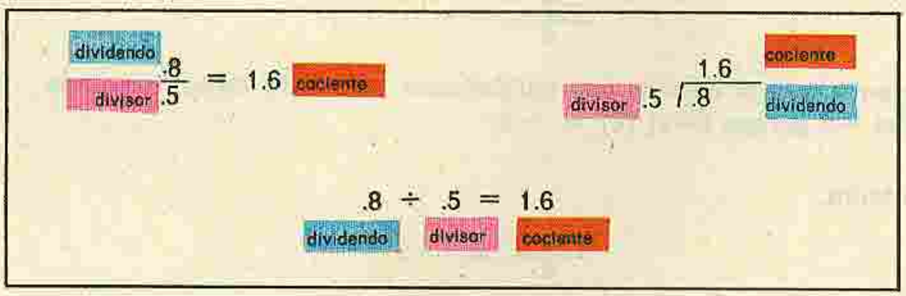
Todo el trabajo que hemos estado desarrollando en esta sección ha consistido en encontrar expresiones algebraicas que tienen el mismo valor numérico que otras expresiones dadas. En ocasiones, hemos hallado expresiones más sencillas en las que es más fácil calcular el valor numérico. Otras veces, la expresión obtenida no era más sencilla, sólo tenía una presentación diferente. De todas maneras, todo lo que aquí hemos aprendido nos es útil, ya sea en la resolución de algunos problemas prácticos o bien, en el desarrollo de nuevas ideas matemáticas.

Algunas personas llaman **Algebra elemental** a este manejo que hemos hecho de las expresiones algebraicas.

X

División de números racionales.

Usted ya ha efectuado divisiones de números racionales positivos. ¿Recuerda cómo se nombran los números que intervienen en una división? ¿Recuerda cuáles son las formas en que hemos indicado la división? Repasaremos esto en la siguiente ilustración.



Usted sabe que efectuar una división es hallar el cociente cuando se conocen el dividendo y el divisor.

1. Definición del cociente.

Al estudiar la división de racionales positivos aprendimos la siguiente propiedad:

Si se multiplica el cociente por el divisor, el resultado que se obtiene es el dividendo.

Basándonos en esta propiedad, caracterizamos el cociente en la siguiente forma:

En una división de números racionales, el cociente es el número que multiplicado por el divisor da el dividendo.

En la división de números racionales en general ocurre exactamente lo mismo. Esto es, *en una división de racionales cualesquiera, el cociente es el número que multiplicado por el divisor da como resultado el dividendo.*

Ejemplo 1. Dividamos -8 entre 4

$$\frac{-8}{4} = \boxed{}$$

El cociente será el número que multiplicado por 4 dé como resultado -8. Tal número es -2 porque $(-2)\,(4) = -8$.

Por lo tanto,

$$\frac{-8}{4} = \boxed{-2}$$

Ejemplo 2. Dividamos 12 entre -3.

$$\frac{12}{-3} = \boxed{}$$

Aquí el cociente será el número que multiplicado por -3 dé 12. Ese número es -4 porque $(-4)\,(-3) = 12$. Por lo tanto,

$$\frac{12}{-3} = \boxed{-4}$$

Ejemplo 3. Dividamos -18 entre -6.

$$\frac{-18}{-6} = \boxed{}$$

¿Qué número multiplicado por -6 nos da -18? El 3. Entonces el cociente que buscamos aquí es el número 3.

Esto es,

$$\frac{-18}{-6} = \boxed{3}$$

Como habrá usted notado en estos ejemplos, es fácil encontrar el cociente en una división cuando se conocen bien las reglas de la multiplicación.

Ejercicio 1. Encuentre el cociente en las siguientes divisiones.

a) $\frac{-15}{3} = \square$	b) $\frac{-10}{2} = \square$	c) $\frac{-20}{5} = \square$
d) $\frac{-30}{6} = \square$	e) $\frac{-7}{1} = \square$	f) $\frac{-25}{25} = \square$
g) $\frac{40}{-8} = \square$	h) $\frac{28}{-7} = \square$	i) $\frac{45}{-9} = \square$
j) $\frac{100}{-10} = \square$	k) $\frac{-27}{-9} = \square$	l) $\frac{-35}{-5} = \square$
m) $\frac{-54}{-9} = \square$	n) $\frac{-42}{-7} = \square$	o) $\frac{-33}{-11} = \square$

Las divisiones presentadas en este ejercicio son muy sencillas; pero hay otras que para efectuarlas nos exigen un esfuerzo mayor. Analice las que se dan a continuación.

Ejercicio 2. Efectúe las siguientes divisiones buscando el cociente entre los números que se dan. Complete la expresión en cada inciso, tal como se hace en a)

a) $\frac{23.8}{-6.8} = \boxed{-3.5}$

$\boxed{3.5}$ $\boxed{-3.5}$ $\boxed{4.6}$

El cociente es $\boxed{-3.5}$ porque $\boxed{(-3.5)} \times (-6.8) = 23.8$

b) $\frac{.21}{-.07} = \square$

$\boxed{.3}$ $\boxed{-3}$ $\boxed{3}$

El cociente es $\square$ porque $\square \times (-.07) = .21$

c) $\dfrac{\frac{3}{12}}{-\frac{1}{3}} = \square$

$\boxed{-\frac{4}{3}}$ $\boxed{\frac{4}{3}}$ $\boxed{-\frac{3}{4}}$

El cociente es $\square$ porque $\square \times (-\frac{1}{3}) = \frac{3}{12}$

d) $\frac{3}{-.5} = \square$

$\boxed{.6}$ $\boxed{-6}$ $\boxed{6}$

El cociente es $\square$ porque $\square \times (-.5) = 3$

e) $\frac{.5}{-10} = \square$

$\boxed{-.05}$ $\boxed{-.5}$ $\boxed{.05}$

El cociente es $\square$ porque $\square \times (-10) = .5$

f) $\dfrac{12}{-48} =$ ____

-2.5 $\quad .25 \quad$ $-.25$

El cociente es ____ porque ____ $\times (-48) = 12$

g) $\dfrac{19.22}{-6.2} =$ ____

-31 $\quad 3.1 \quad$ -3.1

El cociente es ____ porque ____ $\times (-6.2) = 19.22$

Según podemos observar, en todas las divisiones del ejercicio anterior el dividendo es un número positivo, el divisor es un número negativo y el cociente es número negativo. Podríamos indicar esto con el siguiente esquema:

$$\frac{\text{número positivo}}{\text{número negativo}} = \text{número negativo}$$

Esto es así debido a la propiedad de que

cociente	por	divisor	es igual a	dividendo
(número negativo)		(número negativo)		(número positivo)

Ejercicio 3. En cada inciso efectúe la división escogiendo el cociente entre los números que se dan y complete cada expresión.

a) $\dfrac{-1\,472}{46} =$ ____

-32 $\quad -3.2 \quad$ 32

El cociente es ____, porque ____ $\times 46 = -1\,472$

b) $\dfrac{-16.2}{18} =$ ____

$.9$ $\quad -.9 \quad$ $.09$

El cociente es ____, porque ____ $\times 18 = -16.2$

c) $\dfrac{-\frac{6}{20}}{\frac{3}{5}} =$ ____

$\frac{3}{4}$ $\quad -\frac{2}{4} \quad$ $-\frac{3}{4}$

El cociente es ____, porque ____ $\times \frac{3}{5} = -\frac{6}{20}$

d) $\dfrac{-10.5}{1.5} = \boxed{}$

$-.7$ $\qquad$ $-.07$ $\qquad$ -7

El cociente es ____, porque ____ $\times 1.5 = -10.5$

e) $\dfrac{-.001}{.1} = \boxed{}$

$-.1$ $\qquad$ -1 $\qquad$ $-.01$

El cociente es ____, porque ____ $\times .1 = -.001$

f) $\dfrac{-972}{36} = \boxed{}$

-27 $\qquad$ -2.7 $\qquad$ -270

El cociente es ____, porque ____ $\times 36 = -972$

En las divisiones de este ejercicio observamos que

$$\frac{\text{número negativo}}{\text{número positivo}} = \text{número negativo}$$

y sabemos que eso es así porque

cociente (negativo) por divisor (positivo) es igual a dividendo (negativo)

Ejercicio 4. En cada inciso efectúe la división escogiendo el cociente entre los números que se dan y complete la expresión.

a) $\dfrac{-.6}{-1.5} = \boxed{}$

$-.4$ $\qquad$ 4 $\qquad$ $.4$

El cociente es ____, porque ____ $\times (-1.5) = -.6$

b) $\dfrac{-700}{-35} = \boxed{}$

2 $\qquad$ 20 $\qquad$ -2

El cociente es ____, porque ____ $\times (-35) = -700$

c) $\dfrac{-.3}{-\frac{1}{2}} = \boxed{}$

$-\frac{3}{5}$ $\qquad$ $\frac{3}{5}$ $\qquad$ $\frac{5}{3}$

El cociente es ____, porque ____ $\times (-\frac{1}{2}) = -.3$

d) $\frac{-25}{-100} = \boxed{}$

4 $\qquad -\frac{1}{4}$ $\qquad \frac{1}{4}$

El cociente es $\boxed{}$, porque $\boxed{} \times (-100) = -25$

e) $\frac{-3.52}{-.1} = \boxed{}$

-3.52 $\qquad 35.2$ $\qquad 3.52$

El cociente es $\boxed{}$, porque $\boxed{} \times (-.1) = -3.52$

f) $\frac{-27}{-\frac{1}{3}} = \boxed{}$

81 $\qquad 8.1$ $\qquad 810$

El cociente es $\boxed{}$, porque $\boxed{} \times (-\frac{1}{3}) = -27$

En estas divisiones vemos que

$$\frac{\text{número negativo}}{\text{número negativo}} = \text{número positivo}$$

y ya sabemos que eso se debe a que

cociente (positivo)	por	divisor (negativo)	es igual a	dividendo (negativo)

En lo anterior podemos observar dos cosas: Una. Que para encontrar el cociente en una división de racionales cualesquiera, es necesario manejar los números como si fueran racionales positivos. Otra. Para saber si el cociente ha de ser positivo o negativo, basta considerar las conclusiones obtenidas en los últimos tres ejercicios.

Ejemplo 1. $\frac{-80}{32} = \boxed{}$

Primero pensamos en la división $80 \div 32 = \boxed{}$

$$\begin{array}{r} 2.5 \\ 32\,\overline{)\,80} \\ 160 \\ 0 \end{array}$$

Como el dividendo es negativo y el divisor es positivo, estamos seguros que el cociente ha de ser negativo. Entonces escribimos.

$$\frac{-80}{32} = -2.5$$

Ejemplo 2. $\dfrac{-\frac{3}{5}}{-\frac{2}{7}} = \boxed{}$

Pensamos en la división de $\frac{3}{5}$ entre $\frac{2}{7}$

$$\frac{3}{5} \div \frac{2}{7} = \frac{21}{10}$$

El cociente tiene que ser positivo porque el dividendo y el divisor son negativos. Entonces escribimos

$$\frac{-\frac{3}{5}}{-\frac{2}{7}} = \boxed{\frac{21}{10}}$$

Ejemplo 3. $\dfrac{.6}{-30} = \boxed{}$

Pensamos en dividir .6 entre 30

$$30 \overline{\smash{)}\,.6} \quad .02 \qquad 60 \qquad 0$$

Como sabemos que al dividir un número positivo entre un número negativo, obtenemos un número negativo, escribimos

$$\frac{.6}{-30} = \boxed{-.02}$$

Ejercicio 5. Efectúe las siguientes divisiones:

a) $\dfrac{-18.24}{7.6} = \boxed{}$ b) $\dfrac{14.84}{-2.8} = \boxed{}$ c) $\dfrac{-4.94}{-2.6} = \boxed{}$

d) $\dfrac{20.6}{-103} = \boxed{}$ e) $\dfrac{-50}{-125} = \boxed{}$ f) $\dfrac{-64}{320} = \boxed{}$

g) $\dfrac{-\frac{3}{5}}{-\frac{2}{7}} = \boxed{}$ h) $\dfrac{-\frac{2}{5}}{\frac{1}{2}} = \boxed{}$ i) $\dfrac{\frac{1}{10}}{-\frac{3}{4}} = \boxed{}$

j) $\dfrac{-3}{.6} = \boxed{}$ k) $\dfrac{1}{-.25} = \boxed{}$ l) $\dfrac{-1}{-1} = \boxed{}$

m) $\dfrac{1}{-1} = \boxed{}$ n) $\dfrac{0}{-3} = \boxed{}$ o) $\dfrac{-2}{10} = \boxed{}$

2. La división y los inversos multiplicativos.

Al estudiar en nuestro curso anterior la división de racionales positivos vimos que para efectuarla podían usarse dos procedimientos, el que aprendimos en la escuela primaria y el que utiliza la idea del inverso multiplicativo.

Ejemplo. Dividamos $\frac{3}{4}$ entre $\frac{2}{3}$ siguiendo esos dos procedimientos.

Primer procedimiento:

$$\frac{\frac{3}{4}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} = \boxed{\frac{9}{8}}$$

Segundo procedimiento:

$$\frac{\frac{3}{4}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{4} \times \frac{3}{2} = \boxed{\frac{9}{8}}$$

Este segundo procedimiento consiste en *multiplicar el dividendo por el inverso multiplicativo del divisor.*

Con ambos procedimientos se obtiene el mismo resultado. Por ello se puede emplear indistintamente cualquiera de ellos. ¿Ocurrirá lo mismo en la división de racionales en general? Veamos los siguientes ejemplos en los que se utilizan los dos procedimientos.

Ejemplo

a) $$\frac{-\frac{2}{3}}{\frac{3}{4}} = \boxed{}$$

Usando el procedimiento conocido, encontramos que:

$$\frac{-\frac{2}{3}}{\frac{3}{4}} = \boxed{-\frac{8}{9}}$$

Multiplicando el dividendo por $\frac{4}{3}$, que es el inverso multiplicativo del divisor: encontramos que:

$$\frac{-\frac{2}{3}}{\frac{3}{4}} = -\frac{2}{3} \times \frac{4}{3} = \boxed{-\frac{8}{9}}$$

b) $$\frac{-2.8}{-.5} = \boxed{}$$

Con el procedimiento conocido tenemos que:

$$\frac{-2.8}{-.5} = \boxed{5.6}$$

Ahora, puesto que el inverso multiplicativo de $-.5$ es -2, efectuamos la división multiplicando -2.8 por -2 y encontramos que:

$$\frac{-2.8}{-.5} = (-2.8)(-2) = \boxed{5.6}$$

Lo que vemos en estos ejemplos ocurre siempre. Esto es, cada vez que efectuamos una división de racionales con esos dos procedimientos, obtenemos el mismo resultado.

El hecho anterior nos permite, usando la notación del inverso multiplicativo, definir la división de racionales en la siguiente forma:

Si *a* y *b* son números racionales cualesquiera, con *b* diferente de cero, entonces la división de *a* entre *b* se efectúa multiplicando *a* por $\frac{1}{b}$.

En símbolos,

$$\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$$

Muchas divisiones de números racionales se efectúan con más facilidad aplicando la definición anterior. Sobre todo, cuando dudamos si el cociente será un número positivo o si será un número negativo.

Ejercicio 6. Efectúe usted las siguientes divisiones multiplicando el dividendo por el inverso multiplicativo del divisor.

a) $\dfrac{\frac{3}{5}}{-\frac{2}{7}} = \frac{3}{5} \times \boxed{} = \boxed{}$

El inverso multiplicativo de $-\frac{2}{7}$ es $\boxed{}$

b) $\dfrac{-\frac{1}{3}}{\frac{3}{4}} = -\frac{1}{3} \times \boxed{} = \boxed{}$

El inverso multiplicativo de $\frac{3}{4}$ es $\boxed{}$

c) $\dfrac{-9}{-25} = -9 \times \boxed{} = \boxed{}$

El inverso multiplicativo de -25 es $\boxed{}$

d) $\dfrac{-49}{-4} = -49 \times \boxed{} = \boxed{}$

El inverso multiplicativo de -4 es $\boxed{}$

e) $\dfrac{-\frac{3}{8}}{-\frac{6}{15}} = -\dfrac{3}{8} \times \boxed{} = \boxed{}$

El inverso multiplicativo de $-\dfrac{6}{15}$ es $\boxed{}$

f) $\dfrac{-\frac{7}{5}}{-6} = -\dfrac{7}{5} \times \boxed{} = \boxed{}$

El inverso multiplicativo de -6 es $\boxed{}$

g) $\dfrac{-9}{\frac{15}{2}} = -9 \times \boxed{} = \boxed{}$

El inverso multiplicativo de $\dfrac{15}{2}$ es $\boxed{}$

Ejercicio 7. Complete las siguientes expresiones considerando que

$a \div b = a \cdot \dfrac{1}{b}$ (Las letras representan números racionales distintos de cero).

a) $\dfrac{3}{x} = \boxed{3 \cdot \frac{1}{x}}$ b) $\dfrac{n}{y} = \boxed{}$

c) $\dfrac{x}{b} = \boxed{}$ d) $\dfrac{a}{t} = \boxed{}$

e) $\dfrac{-p}{r} = \boxed{}$ f) $\dfrac{k}{-m} = \boxed{}$

g) $\dfrac{x^2}{a} = \boxed{}$ h) $\dfrac{n^2}{b} = \boxed{}$

i) $\dfrac{-x}{y^2} = \boxed{}$ j) $\dfrac{r}{a^2} = \boxed{}$

k) $\dfrac{m \cdot m \cdot m}{x \cdot x} = \boxed{}$ l) $\dfrac{r \cdot r}{b \cdot b \cdot b} = \boxed{}$

Ejercicio 8. Considerando que $\dfrac{a}{b} = a \cdot \dfrac{1}{b}$ escriba como cociente cada uno de los productos siguientes. (Las letras representan racionales distintos de cero).

a) $x \cdot \dfrac{1}{a} = \boxed{\frac{x}{a}}$ b) $r \cdot \dfrac{1}{k} = \boxed{}$

c) $y \cdot \dfrac{1}{b} = \boxed{}$ d) $\dfrac{1}{n} \cdot x = \boxed{}$

e) $a \cdot \frac{1}{y} =$

f) $\frac{1}{x} \cdot t =$

g) $-n \cdot \frac{1}{x} =$

h) $r \cdot \frac{1}{-s} =$

i) $x^2 \cdot \frac{1}{n} =$

j) $a \cdot a \frac{1}{x} =$

k) $-a \cdot \frac{1}{-r} =$

l) $-b^3 \cdot \frac{1}{-x} =$

m) $r \cdot r \cdot r \cdot \frac{1}{a \cdot a} =$

n) $x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot \frac{1}{y \cdot y \cdot y} =$

XI

Ecuaciones.

1. Resolución de ecuaciones

En lo que sigue vamos a aplicar muchos de los conocimientos que hemos adquirido hasta aquí, a fin de resolver ecuaciones como

$6x = -3$	$\dfrac{x}{-7} = 6$	$2.7y = -9.45$	$\dfrac{-4.94}{t} = -3.8$

en las que intervienen multiplicaciones y divisiones de números racionales.

Antes que nada recordemos que resolver una ecuación es encontrar el número que al sustituirse por la incógnita hace cierta la igualdad.

Ejemplo.

La solución de $6x = -3$

es $-.5$

Porque $6(-.5) = -3$

La solución de $\dfrac{x}{-7} = 6$

es -42

Porque $\dfrac{-42}{-7} = 6$

En la ecuación $2.7y = -9.45$

la solución es $y = -3.5$

Porque $2.7(-3.5) = -9.45$

En la ecuación $\dfrac{-4.94}{t} = -3.8$

encontramos que $t = 1.3$

porque $\dfrac{-4.94}{1.3} = -3.8$

Recordemos también que cuando varias ecuaciones tienen la misma solución, basta con resolver una para tenerlas resueltas todas. (De preferencia, hay que resolver la más sencilla).

En el procedimiento que se sigue para resolver ecuaciones donde aparecen multiplicaciones o divisiones de números racionales, se utiliza constantemente la siguiente propiedad:

Si se multiplican o dividen los dos miembros de una ecuación por un mismo número distinto de cero, se forma otra ecuación que tiene la misma solución que la ecuación original.

Ejemplo. La ecuación $5y = -20$, tiene como solución al número -4.

a) Si multiplicamos sus dos miembros por 3.5, obtenemos la ecuación.

$$17.5y = -70$$

cuya solución también es -4, porque

$$17.5(-4) = -70$$

b) Si dividimos entre 10 los dos miembros de la ecuación $5y = -20$, obtenemos la ecuación

$$\frac{5y}{10} = -2$$

cuya solución también es -4, porque

$$\frac{5(-4)}{10} = \frac{-20}{10} = -2$$

Ejercicio 1. En cada una de las siguientes ecuaciones haga lo que se indica, y compruebe que la nueva ecuación tiene la misma solución que la ecuación original.

a) $\frac{x}{.5} = -8$ Solución: $x = -4$

Multiplique ambos miembros por 2

b) $-18y = 45$ Solución: $y = -2.5$

Divida entre 9 los dos miembros

c) $-2.3r = -13.8$ Solución: $r = 6$

Divida ambos miembros entre -2.3

d) $\frac{4}{9}z = -\frac{28}{45}$ Solución: $z = -\frac{7}{5}$

Multiplique por $\frac{9}{4}$ los dos miembros

Al estudiar los números racionales no negativos, en el curso anterior, aprendimos que

Si un número *a* se multiplica por un número *b*, distinto de cero, y ese producto se divide entre el mismo número *b*, el resultado es el número *a*.

$$a \cdot b \div b = a$$

Lo mismo ocurre con los números racionales en general. Esto es,

> Si a y b son dos números racionales cualesquiera, con $b \neq 0$, entonces
>
> $$\frac{a \cdot b}{b} = a$$

Ejemplo.

a) La expresión $\frac{4.5 \times (-3)}{-3}$ indica que el resultado de multiplicar $4.5 \times (-3)$ se tiene que dividir entre -3. Esto es,

$$\frac{4.5 \times (-3)}{-3} = \frac{-13.5}{-3} = 4.5$$

b) $$\frac{-6.2 \times 4}{4} = \frac{-24.8}{4} = -6.2$$

c) $$\frac{3.8 \times \left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{3.8}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{1.9}{\frac{1}{2}} = 1.9 \times 2 = 3.8$$

También sabemos que, al manejar números racionales no negativos,

Si un número a se divide entre un número b, distinto de cero, y ese cociente se multiplica por b, el resultado que se obtiene es el número a

$$(a \div b) \cdot b = a$$

Con números racionales en general sucede exactamente lo mismo. Esto es,

> **Si a y b son dos racionales cualesquiera, con $b \neq 0$, entonces**
>
> $$\frac{a}{b} \cdot b = a$$

Ejemplo.

a) La expresión $\frac{-12.4}{-4}(-4)$ indica que el resultado de dividir -12.4 entre -4 se debe multiplicar por -4. Esto es,

$$\frac{-12.4}{-4}(-4) = 3.1 \times -4 = -12.4$$

b) $\dfrac{57.6}{-4.8}\,(-4.8) = (-12)\cdot(-4.8) = 57.6$

c) $\dfrac{.4}{\frac{1}{3}}\cdot\left(\frac{1}{3}\right) = 1.2\cdot\left(\frac{1}{3}\right) = \dfrac{1.2}{3} = .4$

Ejercicio 2. Aplique las propiedades vistas en las páginas anteriores y simplifique las siguientes expresiones. (Las letras representan números racionales distintos de cero).

a) $\dfrac{7.9 \times 9.6}{9.6} = \boxed{}$

b) $\dfrac{-6.8 \times 5.2}{5.2} = \boxed{}$

c) $\dfrac{-7.5}{-5}\cdot(-5) = \boxed{}$

d) $\dfrac{18.9}{-9}\cdot(-9) = \boxed{}$

e) $\dfrac{-5.4 \times a}{a} = \boxed{}$

f) $\dfrac{-16.3}{h}\cdot(h) = \boxed{}$

g) $\dfrac{(x)(7.9)}{7.9} = \boxed{}$

h) $\dfrac{y}{-6.3}\cdot(-6.3) = \boxed{}$

i) $\dfrac{-3r}{-3} = \boxed{}$

j) $-2\cdot\dfrac{m}{-2} = \boxed{}$

k) $\dfrac{a\cdot r}{a} = \boxed{}$

l) $\dfrac{m}{n}\cdot n = \boxed{}$

Aplicando adecuadamente las propiedades que acabamos de ver, podemos resolver aquellas ecuaciones donde aparecen multiplicaciones o divisiones de números racionales.

Ejemplo. Consideremos la ecuación $12x = -84$

Tomamos la ecuación y dividimos sus dos miembros entre 12.

$$12x = -84$$ ecuación original

$$\frac{12x}{12} = \frac{-84}{12}$$

Como $\dfrac{12x}{12} = x$ y $\dfrac{-84}{12} = -7$, encontramos que

$$x = -7$$ nueva ecuación

Esta nueva ecuación tiene la misma solución que la ecuación original. Por lo tanto, en $12x = -84$ la solución es $x = -7$

Comprobación. $12 \cdot (-7) = -84$

Desde luego, a esta misma ecuación, $12x = -84$, la podemos resolver también así:

Tomamos la ecuación y multiplicamos sus dos miembros por $\frac{1}{12}$

$$12x = -84$$ ecuación original

$$\left(\frac{1}{12}\right)(12x) = \left(\frac{1}{12}\right)(-84)$$

Como $\left(\frac{1}{12}\right) \cdot (12 \cdot x) = 1 \cdot x$ y $\frac{1}{12} \cdot (-84) = \frac{-84}{12}$, tenemos que

$$1 \cdot x = \frac{-84}{12}$$

o sea,

$$x = -7$$ nueva ecuación

Ejercicio 3. Resuelva las siguientes ecuaciones aplicando el procedimiento que le parezca más cómodo. Compruebe sus soluciones.

a) $8y = -29.6$ b) $-5.3t = -37.1$

c) $\frac{3}{5}r = \frac{2}{7}$ d) $-\frac{1}{4}s = -\frac{3}{5}$

e) $-12.4w = 64.48$ f) $9.1m = -7.28$

g) $-\frac{5}{7}n = -\frac{1}{2}$ h) $-7.2d = 29.52$

i) $-1x = -4.8$ j) $-1s = \frac{3}{5}$

k) $4.7z = -15.04$ l) $-7y = 87.5$

m) $q(-4.9) = 28.91$ n) $r \cdot \frac{7}{9} = -\frac{10}{45}$

o) $s(-17.5) = 1$ p) $-8.6x = 0$

Todas las ecuaciones del ejercicio anterior son "de multiplicación". Veamos ahora cómo se resuelven las "de división".

Ejemplo. Consideremos la ecuación $\frac{n}{-3.7} = 18$

Para resolverla primero multiplicamos sus dos miembros por -3.7

$$\frac{n}{-3.7} = 18$$ ecuación original

$$\frac{n}{-3.7} \cdot (-3.7) = 18 \cdot (-3.7)$$

Como $\frac{n}{-3.7}(-3.7) = n$ y $18(-3.7) = -66.6$, encontramos que

$$n = -66.6$$ nueva ecuación

Así que la solución de nuestra ecuación original es el número -66.6

Comprobación. $\frac{-66.6}{-3.7} = 18$

Ejercicio 4. Tal como se hizo en el ejemplo anterior, resuelva usted las siguientes ecuaciones. Compruebe sus resultados.

a) $\frac{v}{5.8} = -.4$

b) $\frac{y}{-6.4} = 1.2$

c) $\frac{q}{\frac{3}{5}} = -\frac{4}{7}$

d) $\frac{q}{4.3} = -2.4$

e) $\frac{x}{7.2} = -.8$

f) $\frac{m}{-5.7} = -12.1$

g) $\frac{t}{4.8} = -7$

h) $\frac{z}{-5} = .8$

i) $\frac{r}{-.7} = -12.8$

j) $\frac{z}{-\frac{3}{7}} = 0$

Entre algunas de las ecuaciones de división, aparece la incógnita en el divisor. Veamos cómo se pueden resolver.

Ejemplo. Consideremos la ecuación

$$\frac{15.6}{t} = 2.6$$ ecuación original

A partir de ésta podemos encontrar otra ecuación que tenga la misma solución y que ya sepamos resolver. Para hacerlo multiplicamos ambos miembros de la ecuación por t:

$$\frac{15.6}{t} \cdot t = (2.6)\,t$$

Como $\frac{15.6}{t} \cdot t = 15.6$, tenemos ahora la ecuación

$$15.6 = 2.6\,(t)$$

que también se puede expresar así:

$$2.6\,t = 15.6$$

y que puede resolverse con el procedimiento conocido:

$$2.6\,t = 15.6$$

$$\frac{2.6\,t}{2.6} = \frac{15.6}{2.6}$$

$$t = 6$$

Así encontramos que 6 es la solución de la ecuación original.

Comprobación. $\frac{15.6}{6} = 2.6$

Ejercicio 5. Resuelva las siguientes ecuaciones. Compruebe la solución de cada una de ellas.

a) $\frac{24}{y} = -3$

b) $\frac{-63}{t} = -9$

c) $\frac{-36}{p} = 12$

d) $\frac{23.2}{x} = -4$

e) $\frac{21.6}{y} = 3.6$

f) $\frac{-11.52}{z} = -4.8$

g) $\frac{-9.84}{t} = 12.3$

h) $\frac{13.68}{r} = -1.9$

i) $\frac{-33.6}{s} = -7$

j) $\frac{53.38}{q} = -15.7$

Con los mismos procedimientos que utilizamos para resolver ecuaciones simples de "sumar", "restar", "multiplicar" y "dividir", podemos resolver también ecuaciones más complicadas.

Ejemplo. Tomemos la ecuación $7.6 - x = -4.8$

Para resolverla primero sumamos a sus dos miembros el inverso aditivo de 7.6

$$\cancel{7.6} - x + (-\cancel{7.6}) = -4.8 + (-7.6)$$

Así obtenemos

$$-x = -12.4$$

Ahora multiplicamos por -1 los dos miembros de esta ecuación y tenemos que

$$(-1)(-x) = (-1)(-12.4)$$

$$x = 12.4$$

Comprobación. $7.6 - 12.4 = 7.6 + (-12.4) = -4.8$

Ejercicio 6. Resuelva las siguientes ecuaciones tal como se hizo en el ejemplo anterior. Compruebe sus soluciones.

a) $17.9 - x = 9.6$ b) $-18.9 - y = 7.4$

c) $23.7 - t = -8.4$ d) $-16.9 - r = -9.4$

e) $-x + 4.1 = -8.7$ f) $-q - 6.9 = 19.7$

Ejemplo. Para resolver la ecuación

$$3.6x + 2.8 = -5.84$$

Primero sumamos -2.8 a sus dos miembros

$$3.6x + \cancel{2.8} + (-\cancel{2.8}) = -5.84 + (-2.8)$$

Así obtenemos la ecuación

$$3.6x = -8.64$$

Luego dividimos entre 3.6 los dos miembros

$$\frac{\cancel{3.6}x}{\cancel{3.6}} = \frac{-8.64}{3.6}$$

Y así vemos que

$$x = -2.4$$

Comprobación. $3.6(-2.4) + 2.8 = -8.64 + 2.8 = -5.84$

Ejercicio 7. Resuelva las siguientes ecuaciones y compruebe sus soluciones.

a) $5x + 9 = -11$ b) $-4y + 2 = -14$

c) $-2a - 5 = -21$

d) $\frac{b}{4} - 2 = -7$

e) $4.7d + 6.8 = -21.4$

f) $-5.6f - 2.9 = -24.18$

g) $-7.1g + 5.76 = 36.29$

h) $\frac{h}{-5.8} - 7.2 = -14$

i) $\frac{m}{3.7} + 12.7 = 4.2$

j) $-7.8q + 5.34 = -14.94$

k) $\frac{38.72}{r} + 6.8 = -5.3$

l) $\frac{-33.75}{k} - 14.5 = 23$

m) $\frac{12.78}{n} - 17.6 = -38.9$

n) $\frac{82.56}{i} + 23.9 = 6.7$

o) $7.8p + 28.86 = 0$

p) $\frac{t}{5.7} - 4.9 = 0$

q) $3(x - 5) + 2 = 5$

r) $-6(2y + 3) + 7 = 1$

s) $7 + 4(2 - x) = -9$

t) $12.3 - 5.1(t - 2) = 5.16$

Hay ecuaciones que nos pueden parecer más complicadas y, sin embargo, no lo son. Observe cuidadosamente los siguientes ejemplos.

Ejemplo.

a) $12h + 10h + 45.7 = -79.7$

Como $12h + 10h = (12 + 10)h = 22h$, podemos escribir la ecuación original en la siguiente forma

$$22h + 45.7 = -79.7$$

y luego procedemos a resolverla

$$22h + 45.7 = -79.7$$

$$22h + 45.7 + (-45.7) = -79.7 + (-45.7)$$

$$22h = -125.4$$

$$\frac{22h}{22} = \frac{-125.4}{22}$$

$$h = -5.7$$

La solución de la ecuación original es -5.7

Comprobación:

$$12\,(-5.7) + 10\,(-5.7) + 45.7 = -68.4 + (-5.7) + 45.7 = -79.7$$

b) $5\,(k - 7) - 8\,(k + 2) + 96 = 24$

Como $5\,(k - 7) = 5k - 35$ y $-8\,(k + 2) = -8k - 16$, podemos escribir la ecuación así:

$$5k - 35 + (-8k) + (-16) + 96 = 24$$

y luego, puesto que $5k + (-8k) = -3k$ y $-35 + (-16) + 96 = 45$, escribimos

$$-3k + 45 = 24$$

Ahora procedemos a la resolución

$$-3k + 45 = 24$$

$$-3k + 45 + (-45) = 24 + (-45)$$

$$-3k = -21$$

$$\frac{-3k}{-3} = \frac{-21}{-3}$$

$$k = 7$$

Comprobación. $5\,(7 - 7) - 8\,(7 + 2) + 96 =$

$$= 5 \times 0 - 8 \times 9 + 96 = 0 - 72 + 96 = 24$$

c) $7\,(n - 2.7) + 22.7 - 19n = -28.6 + 6\,(4.2 + n)$

$$7n - 18.9 + 22.7 - 19n = -28.6 + 25.2 + 6n$$

$$-12n + 3.8 = -3.4 + 6n$$

Aquí sumamos $-6n$ a los dos miembros de la ecuación para que la incógnita quede sólo en el primer miembro.

$$-12n + 3.8 + (-6n) = -3.4 + \cancel{6}n + (-\cancel{6}n)$$

$$-18n + 3.8 = -3.4$$

$$-18n + 3.8 + (-3.8) = -3.4 + (-3.8)$$

$$-18n = -7.2$$

$$\frac{-18n}{-18} = \frac{-7.2}{-18}$$

$$n = .4$$

Comprobación. Haga usted la comprobación en su cuaderno, como ejercicio.

Ejercicio 8. Resuelva usted las siguientes ecuaciones en su cuaderno y compruebe sus soluciones.

a) $2y + 7y = 37.8$

b) $-5t + 8t = -8.4$

c) $6r = 15r + 45.9$

d) $8.5v - 17.3v = -58.96$

e) $23.1x + 25.2 = 19.5x$

f) $4.9z + 46.44 + 3.7z = 0$

g) $-25.8a + 87.2 = -14.9a$

h) $1.7p - 23.5p - 54.5 = 0$

i) $14q - 27q = 72.8$

j) $-57d + 40.8 = -69d$

k) $-8k + 5k - 12.7 = -37.9$

l) $9.7i - 18.4 - 2.3i = -55.4$

m) $23.15 - 23.6j = -10.9j - 34$

n) $-53.8 + 17.5m = 4.8m + 22.4$

o) $3(x - 5) + 5(x + 8) - 1 = 0$

p) $-6(4 - y) + 2(y + 3) - 18 = 4$

q) $-2.3(h - 4) - 58.6 - 9.8h = 16.8 - 5.7(6 + h)$

r) $3.6(5 - u) + 17.8 - 12.6u = 7.1(u - 2) - 136.4$

s) $4x + 73 = -5(3x - 7)$

t) $5(2a + 3) - 4(3a - 2) - 17 = -7a + 2(4a - 9) + 27$

2. Resolución de problemas por medio de ecuaciones.

Algunos de los problemas que se dan en el siguiente ejercicio son muy sencillos, y tal vez usted los quiera resolver mentalmente. Sin embargo, le sugerimos que realice el ejercicio en la forma que se pide, pues se trata de que practique la resolución de problemas por medio de ecuaciones; procedimiento que es muy útil, sobre todo cuando los problemas a resolver resultan algo complicados.

Ejercicio 9. Encuentre una ecuación para cada uno de los siguientes problemas; resuélvala y luego dé la respuesta correspondiente.

a) El triple de un número, aumentado en 18.5 es −19.6 ¿Cuál es ese número?

Ecuación: Solución:

Respuesta. __________

b) Si al doble de un número se le resta −16.7, el resultado es 7.1 ¿Cuál es ese número?

Ecuación: Solución:

Respuesta. __________

c) Si al cuádruplo de un número se le resta 17.8, se obtiene −68.6 ¿Cuál es ese número?

Ecuación: Solución:

Respuesta. __________

d) Si a cierto número se le suma su doble y luego se le resta 14.8, el resultado es −32.5 ¿Cuál es ese número?

Ecuación: Solución:

Respuesta. __________

e) Si al quíntuplo de un número se le suma 27.6, el resultado es el triple del número. ¿Cuál es ese número?

Ecuación: Solución:

Respuesta. __________

f) La suma de dos enteros consecutivos es −113 ¿Cuáles son dichos números? (Recuerde que si n es un número entero, su consecutivo es $n + 1$).

Ecuación: Solución:

Respuesta. __________

g) La suma de dos enteros impares consecutivos es -72. ¿Cuáles son esos dos números? (Recuerde que si x es un número impar, su consecutivo impar es $x + 2$)

Ecuación: Solución:

Respuesta. ____

h) Halle dos pares consecutivos tales que el doble del menor menos el quíntuplo del mayor sea -148 (Si p es un número par, $p + 2$ es su consecutivo par).

Ecuación: Solución:

Respuesta. ____

i) Halle cuatro enteros consecutivos tales que su suma sea -58.

Ecuación: Solución:

Respuesta. ____

j) La suma de dos pares consecutivos es -90 ¿Cuáles son dichos números?

Ecuación: Solución:

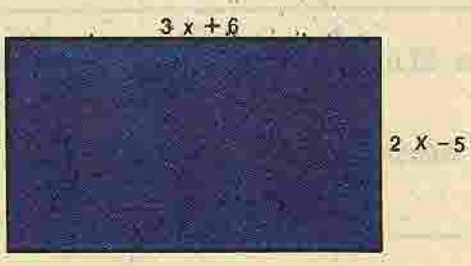
Respuesta. ____

k) Halle dos números consecutivos tales que el triple del mayor, menos el doble del menor, sea 36.

Ecuación: Solución:

Respuesta. ____

l) El perímetro del rectángulo que se muestra abajo es 84 metros. ¿Cuánto mide de largo y cuánto de ancho?

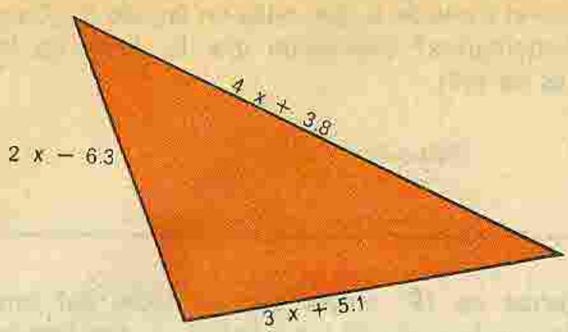


Ecuación:

Solución:

Respuesta. ____

m) El perímetro del triángulo que se muestra en seguida es de 87.2 centímetros. ¿Cuánto mide cada uno de sus lados?

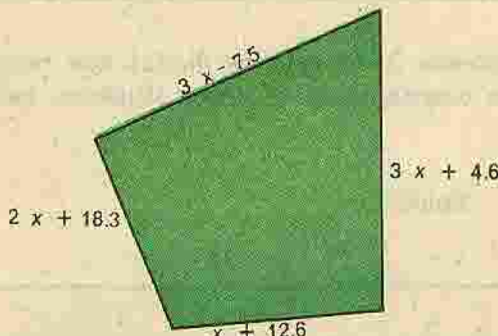


Ecuación:

Solución:

Respuesta. ____________________

n) Un terreno como el que se muestra en la figura tiene un perímetro de 256.6 metros. ¿Cuál es la medida de cada uno de sus lados?

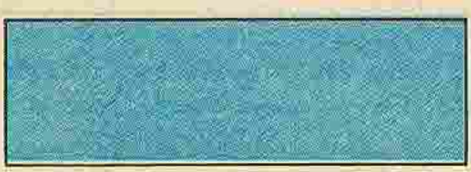


Ecuación:

Solución:

Respuesta. ____________________

o) El largo de un rectángulo es el triple de lo que mide el ancho. Si el perímetro del rectángulo es de 59.2 centímetros, ¿cuánto mide de largo y cuánto de ancho?

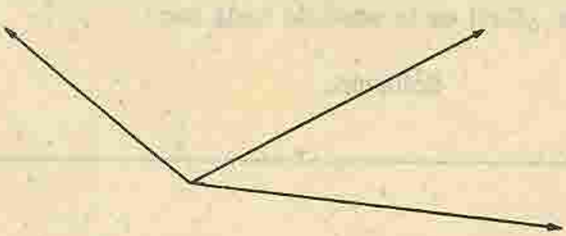


Ecuación:

Solución:

Respuesta. ____________________

p) La suma de las medidas de dos ángulos adyacentes es 147°. Si uno de ellos es 28° menor que el cuádruplo del otro, ¿cuántos grados mide cada uno?



Ecuación:

Solución:

Respuesta. ____________________

q) Un ángulo A mide 26° menos que el triple de lo que mide un ángulo B. ¿Cuánto medirán los ángulos A y B si son suplementarios? (Recuerde que la suma de las medidas de dos ángulos suplementarios es 180).

Ecuación: Solución:

Respuesta. ______________________________

r) Uno de dos ángulos complementarios es 18° mayor que el doble del otro. ¿Cuánto mide cada ángulo? (Recuerde que la suma de las medidas de dos ángulos complementarios es 90).

Ecuación: Solución:

Respuesta. ______________________________

s) Un hombre a los 65 años de edad necesita 2 400 calorías diarias que representan el 80% de las calorías que necesitaba cuando tenía 16 años. ¿Cuántas calorías necesitaba a los 16 años de edad?

Ecuación: Solución:

Respuesta. ______________________________

t) Se hace un examen a un grupo y salen reprobados 6 alumnos, que representan el 12.5% del grupo. ¿Cuántas personas forman ese grupo?

Ecuación: Solución:

Respuesta. ______________________________

u) Al aumentarle el sueldo a un obrero le faltan 246.75 pesos para obtener el doble de su sueldo original. Si recibe $ 3 466.15 en su nuevo sueldo, ¿cuál era su sueldo antes del aumento?

Ecuación: Solución:

Respuesta. ______________________________

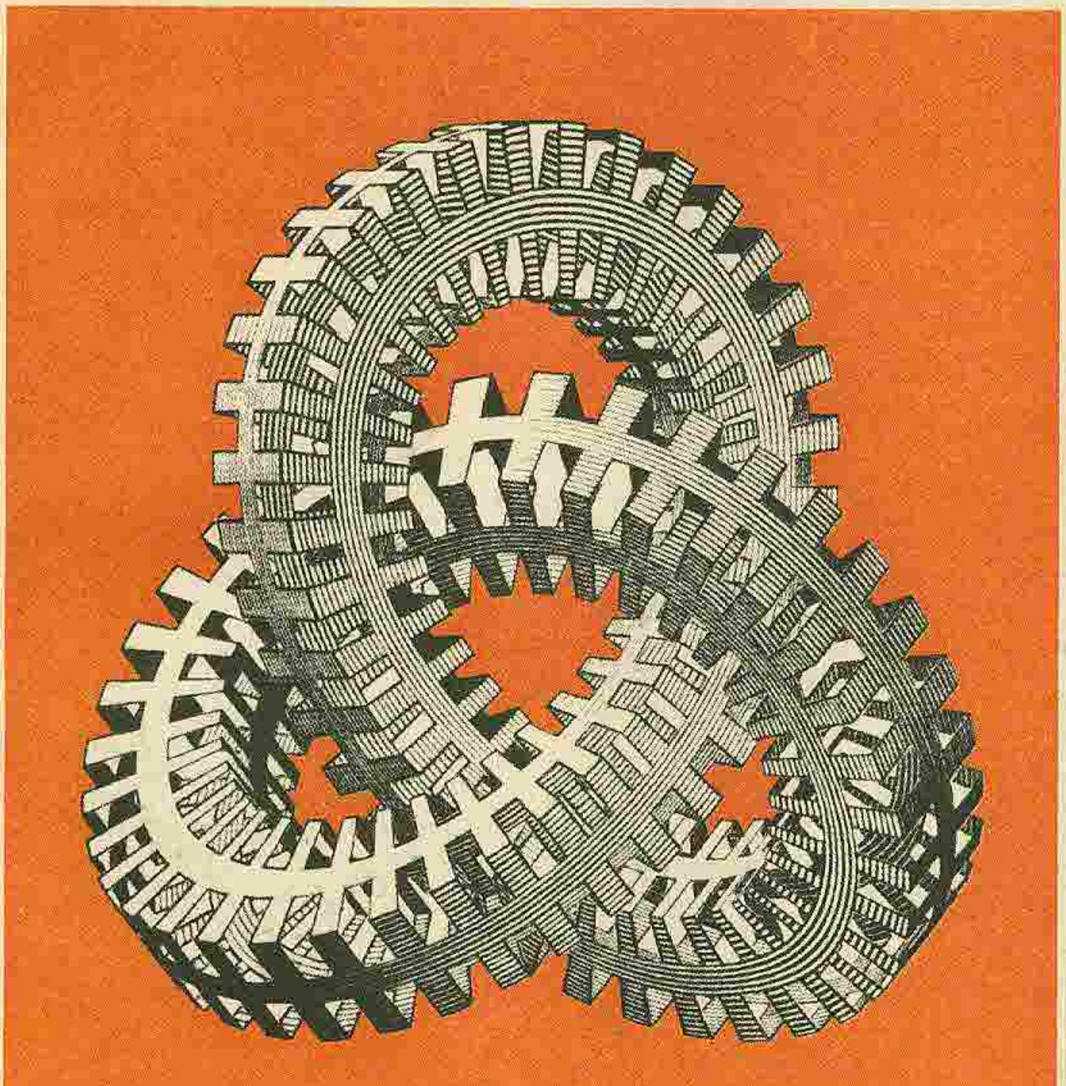
v) Luz María tiene 9 años más que la mitad de la edad de Jorge. Si sumamos las edades de ambos, la suma es 51 años. ¿Cuál es la edad de cada uno?

Ecuación: Solución:

Respuesta. ______________________________

Capítulo segundo

Los números reales

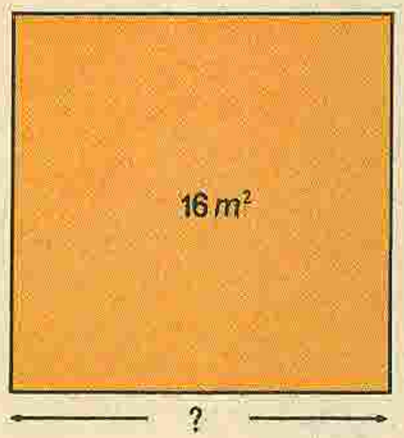


Raíz cuadrada

1. Raíces cuadradas positivas.

Hasta ahora hemos calculado el área de un cuadrado conociendo la medida de uno de sus lados. También el problema inverso se presenta frecuentemente. Veamos en qué consiste dicho problema.

Problema. ¿Cuánto mide cada uno de los lados de un cuadrado que tiene un área de 16 metros cuadrados?



El problema se puede resolver si recordamos que el área de un cuadrado se calcula elevando al cuadrado la medida de uno de sus lados. Con esto en mente y puesto que conocemos el área y desconocemos el lado, podemos plantear así el problema:

$$\boxed{}^2 = 16$$

(¿Qué número elevado al cuadrado es igual a 16?).

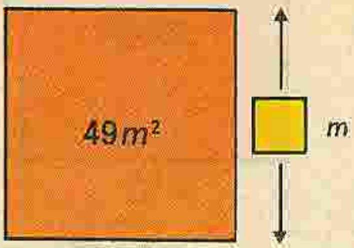
Con la experiencia adquirida hasta este momento podemos calcular mentalmente el resultado. Este es 4, porque

$$4^2 = 16$$

El cuadrado mide entonces 4 metros por lado.

Ejercicio 1. Calcule usted el lado de los siguientes cuadrados cuya área se indica.

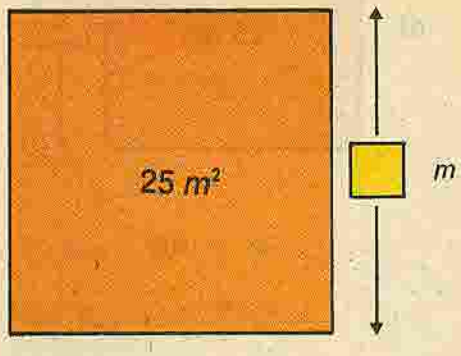
a)



$\square^2 = 49$

¿Qué número elevado al cuadrado es 25?

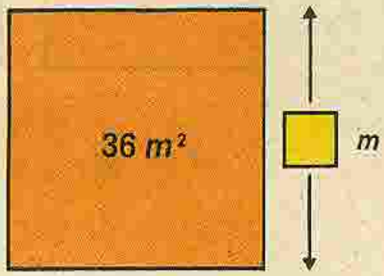
b)



$\square^2 = 25$

¿Qué número elevado al cuadrado es igual a 49?

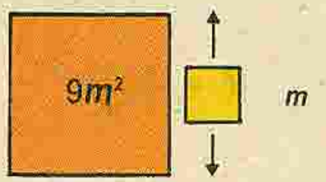
c)



$\square^2 = 36$

¿Qué número elevado al cuadrado es 36?

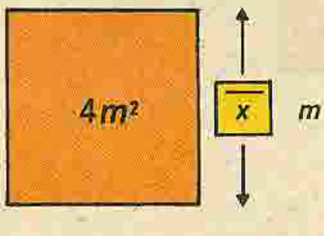
d)



$\square^2 = 9$

¿Qué número elevado al cuadrado es 9?

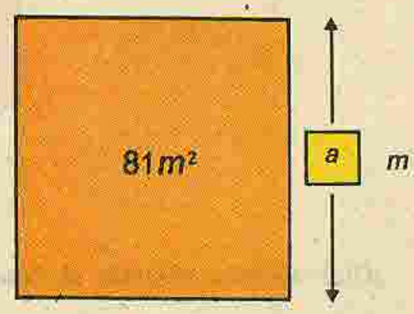
e)



$x^2 = 4$

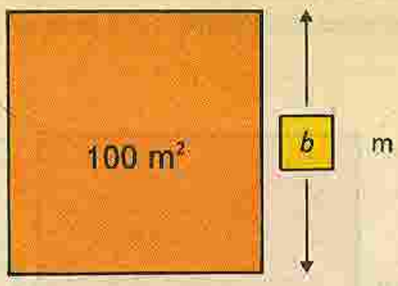
$x = \square$

f)



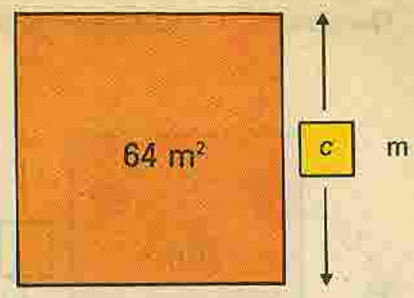
$a^2 = 81$

$a = \square$

g) 

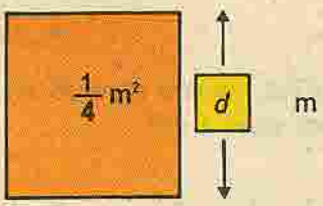
$b^2 = 100$

$b = $ ____

h) 

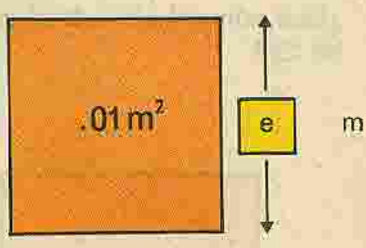
$c^2 = 64$

$c = $ ____

i) 

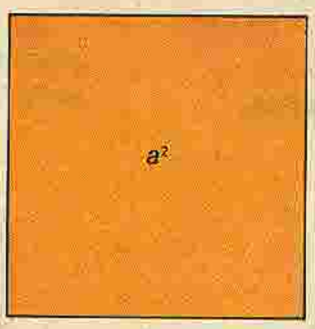
$d^2 = \frac{1}{4}$

$d = $ ____

j) 

$e^2 = .01$

$e = $ ____

k) 

$\underline{\qquad}^2 = a^2$

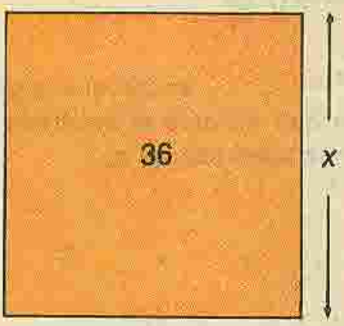
¿Qué número elevado al cuadrado es a^2?

En la práctica se presentan muchos problemas que, como en el caso de los ejercicios que acaba usted de realizar, requieren para su resolución encontrar un número que elevado al cuadrado sea igual a un número dado.

Es conveniente llamar de una manera especial a la solución de tales problemas. Observe usted el siguiente ejemplo.

Ejemplo.

a)



$$x^2 = 36$$

¿Qué número elevado al cuadrado es igual a 36?

Calculando mentalmente el número sabemos que $x = 6$. A este número 6, que elevado al cuadrado es igual a 36, lo llamaremos **"la raíz cuadrada de 36".**

De esta manera, cuando hablemos de "la raíz cuadrada de 36" estaremos hablando de un número que elevado al cuadrado es 36.

La expresión "la raíz cuadrada de 36" se puede simbolizar así: $\sqrt{36}$ y como la raíz cuadrada de 36 es 6, podemos escribir:

$$\sqrt{36} = 6$$

En esta forma, cuando queramos referirnos a "la raíz cuadrada de 36", escribiremos $\sqrt{36}$ o, simplemente, 6.

Ejercicio 2. Complete usted las siguientes expresiones.

a) Como $20^2 = 400$, entonces la raíz cuadrada de 400 es __________

b) Como $30^2 = 900$, entonces la raíz cuadrada de 900 es __________

c) Como $(\frac{3}{4})^2 = \frac{9}{16}$, entonces la raíz cuadrada de $\frac{9}{16}$ es __________

d) Como $(.3)^2 = .09$, entonces la raíz cuadrada de .09 es __________

e) Como $125^2 = 15\,625$, entonces la raíz cuadrada de 15 625 es__________

f) Como $35^2 = 1\,225$, entonces $\sqrt{1\,225}$ es igual a __________

g) Como $3.2^2 = 10.24$, entonces $\sqrt{10.24} =$ ______

h) Como $126^2 = 15\,876$ entonces $\sqrt{15\,876} =$ ______

i) Como $(\frac{3}{5})^2 = \frac{9}{25}$ entonces $\sqrt{\frac{9}{25}} =$ ______

Con expresiones como $\sqrt{q} =$ ______, en las que q es un número positivo, indicamos que se busca un número que elevado al cuadrado dé por resultado el número q. Es decir, que se busca la raíz cuadrada de q.

Ejemplo.

$\sqrt{36} =$ ______

¿Cuál es la raíz cuadrada de 36?

¿Qué número elevado al cuadrado es igual a 36?

Ejercicio 3. En cada inciso complete las siguientes igualdades con alguno de los números que se muestran abajo.

a) $\sqrt{2\,025} =$ ______ (¿Cuál es la raíz cuadrada de 2 025?)

1) 45 2) 4.5 3) 450

b) $\sqrt{121} =$ ______ (¿Cuál es el número que elevado al cuadrado da 121?

1) 1.1 2) 111 3) 11

c) $\sqrt{\frac{1}{64}} =$ ______ (¿Cuál es la raíz cuadrada de $\frac{1}{64}$?)

1) 8 2) $\frac{1}{22}$ 3) $\frac{1}{8}$

d) $\sqrt{.0009} =$ ______ (¿Qué número elevado al cuadrado da .0009?)

1) .3 2) .03 3) .003

e) $\sqrt{.25} =$ ______ (¿Cuál es la raíz cuadrada de .25?)

1) 5 2) $\frac{5}{10}$ 3) .05

f) $\sqrt{13.69} =$ (¿Qué número al cuadrado da 13.69?

1) .37 2) 37 3) 3.7

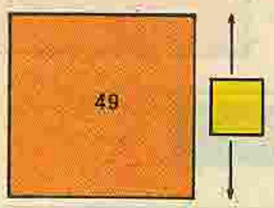
g) $\sqrt{2.25} =$ (¿Qué número da 2.25 al elevarlo al cuadrado?)

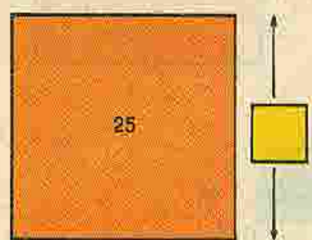
1) 5 2) 15 3) 1.5

h) $\sqrt{a^2} =$ (¿Qué número es la raíz cuadrada de a^2?)

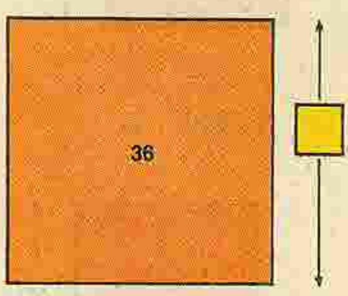
1) a 2) a^2 3) $\sqrt{a}$

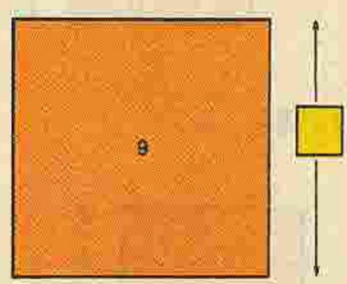
Ejercicio 4. En cada inciso anote los números que faltan en los cuadritos de color.

a) 

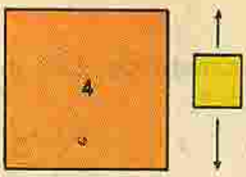
b) 

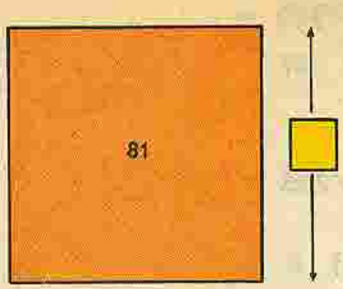
$\sqrt{} =$ $\sqrt{} =$

c) 

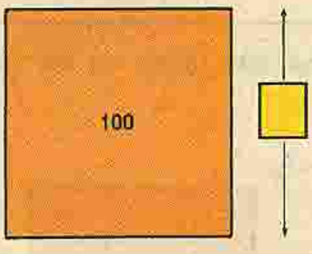
d) 

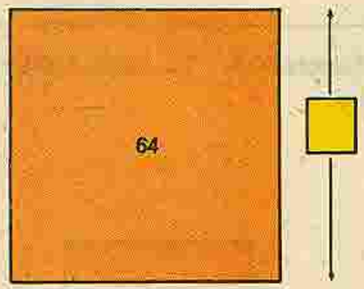
$\sqrt{} =$ $\sqrt{} =$

e) 

f) 

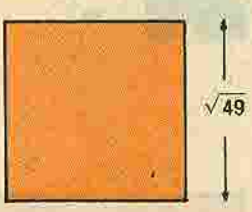
$\sqrt{\square} = \square$ $\qquad$ $\sqrt{\square} = \square$

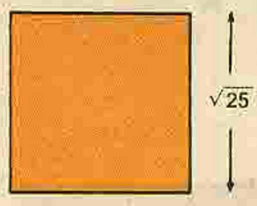
g) 

h) 

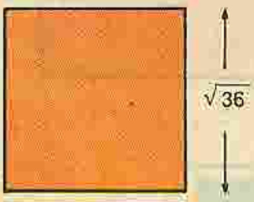
$\sqrt{\square} = \square$ $\qquad$ $\sqrt{\square} = \square$

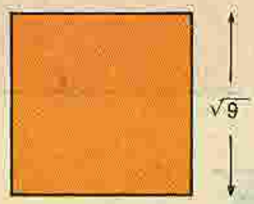
Ejercicio 5. Calcule el área de los siguientes cuadrados.

a) 

b) 

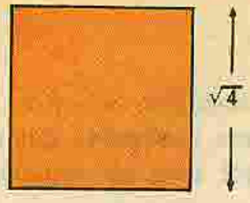
$(\sqrt{49})^2 = \square$ $\qquad$ $(\sqrt{25})^2 = \square$

c) 

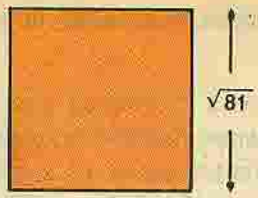
d) 

$(\sqrt{36})^2 = \square$ $\qquad$ $(\sqrt{9})^2 = \square$

e)



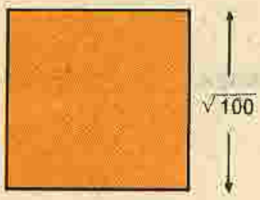
f)



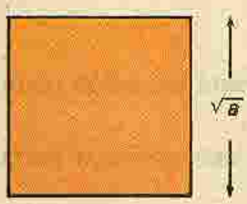
$(\sqrt{4})^2 =$

$(\sqrt{81})^2 =$

g)



h)



$(\sqrt{100})^2 =$

$(\sqrt{a})^2 =$

2. Raíces cuadradas negativas.

Las raíces cuadradas que hasta el momento hemos manejado han sido las medidas de algunos cuadrados, y por lo tanto, han sido números racionales positivos. Ahora nos plantearemos el siguiente problema que requiere para su solución tomar en cuenta también los números racionales negativos.

Problema: ¿Qué número elevado al cuadrado es igual a 81?

La ecuación que asociamos a este problema es la siguiente:

$$\square^2 = 81$$

Para esta ecuación podemos encontrar dos soluciones.

$\boxed{9}$ es una solución porque $9^2 = 9 \cdot 9 = 81$

$\boxed{-9}$ es otra solución porque $(-9)^2 = (-9)(-9) = 81$

Anteriormente hemos llamado a 9 "la raíz cuadrada de 81". Ahora al número -9 lo llamaremos **la raíz cuadrada negativa de 81.**

El símbolo que hemos usado para la expresión "la raíz cuadrada de 81" es $\sqrt{81}$. Ahora, para la expresión "la raíz cuadrada negativa de 81" usaremos el símbolo $-\sqrt{81}$.

De esta manera, para referirnos a "la raíz cuadrada negativa de 81" escribiremos $-\sqrt{81}$ o bien, simplemente, -9.

Ejercicio 6. Complete usted las siguientes expresiones.

a) La raíz cuadrada negativa de 100 es $\square$ porque $\square^2 = 100$

b) La raíz cuadrada negativa de 25 es $\square$ porque $\square^2 = 25$

c) La raíz cuadrada negativa de 16 es $\square$ porque $\square^2 = 16$

d) La raíz cuadrada negativa de 9 es $\square$ porque $\square^2 = 9$

e) La raíz cuadrada negativa de 1 es $\square$ porque $\square^2 = 1$

f) La raíz cuadrada negativa de .01 es $\square$ porque $\square^2 = .01$

Con expresiones como $-\sqrt{q} = \square$, en las que q es un número positivo, indicamos que se busca un *número negativo* que elevado al cuadrado de por resultado q. Es decir, indicamos que se busca la raíz cuadrada negativa de q.

Ejercicio 7. En cada inciso, complete las igualdades eligiendo entre los números que se indican.

a) $\sqrt{25} =$ ___ $\qquad -\sqrt{25} =$ ___

(¿Qué número positivo elevado al cuadrado da 25?) (¿Qué número negativo elevado al cuadrado da 25?)

.5 $\quad$ −.5 $\quad$ 5 $\quad$ −5

b) $\sqrt{.09} =$ ___ $\qquad -\sqrt{.09} =$ ___

(¿Qué número positivo elevado al cuadrado da .09?) (¿Qué número negativo elevado al cuadrado da .09?)

−.3 $\quad$ −.03 $\quad$ .3 $\quad$ .03

c) $\sqrt{.36} =$ ___ $\qquad -\sqrt{.36} =$ ___

(¿Qué número positivo elevado al cuadrado da .36? (¿Qué número negativo elevado al cuadrado da .36?

.6 $\quad$ .06 $\quad$ −.6 $\quad$ −.06

d) $\sqrt{.0081} =$ ___ $\qquad -\sqrt{.0081} =$ ___

(¿Qué número positivo elevado al cuadrado da .0081?) (¿Qué número negativo elevado al cuadrado da .0081?)

.9 $\quad$ −.9 $\quad$ .09 $\quad$ −.09

e) $\sqrt{\frac{1}{64}} =$ ___ $\qquad -\sqrt{\frac{1}{64}} =$ ___

(¿Qué número positivo elevado al cuadrado da $\frac{1}{64}$?) (¿Qué número negativo elevado al cuadrado da $\frac{1}{64}$?)

$\frac{1}{8}$ $\quad$ $-\frac{1}{8}$ $\quad$ $\frac{8}{8}$ $\quad$ $-\frac{8}{8}$

f) $\sqrt{12.25} =$ ___ $\qquad -\sqrt{12.25} =$ ___

(¿Qué número positivo elevado al cuadrado da 12.25?) (¿Qué número negativo elevado al cuadrado da 12.25?)

.35 $\quad$ −.35 $\quad$ 3.5 $\quad$ −3.5

g) $\sqrt{\frac{121}{49}} = $ ☐ $\qquad -\sqrt{\frac{121}{49}} = $ ☐

(¿Qué número positivo elevado al cuadrado da $\frac{121}{49}$?)

(¿Qué número negativo elevado al cuadrado da $\frac{121}{49}$?)

$\frac{7}{11}$ $\qquad \frac{11}{7}$ $\qquad -\frac{11}{7}$ $\qquad -\frac{7}{11}$

Observación. Hasta aquí hemos estado manejando números positivos y números negativos que elevados al cuadrado dan como resultado un número positivo. Nos falta considerar al número cero, que es muy especial.

En virtud de que $0^2 = 0 \cdot 0 = 0$, convendremos en que **"la raíz cuadrada de cero"** es cero y también **"la raíz cuadrada negativa de cero"** es cero.

$$\sqrt{0} = 0$$

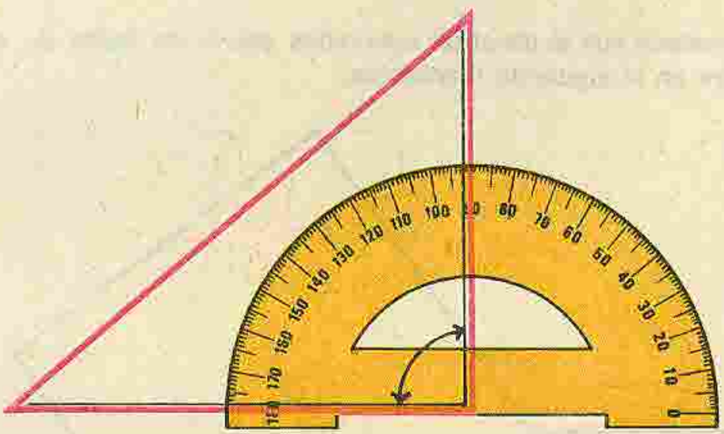
$$-\sqrt{0} = 0$$

II

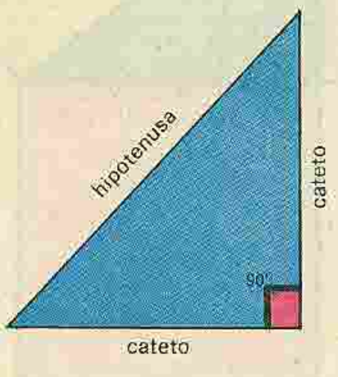
El teorema de Pitágoras

A continuación vamos a estudiar un poco sobre triángulos rectángulos. En este estudio tendremos que utilizar muchas de las ideas que hemos ido adquiriendo en páginas anteriores. Entre éstas se encuentra la de "raíces cuadradas".

Se llama triángulo rectángulo aquel que tiene un ángulo que mide 90°. Por ejemplo, el que dibujamos a continuación es un triángulo rectángulo.

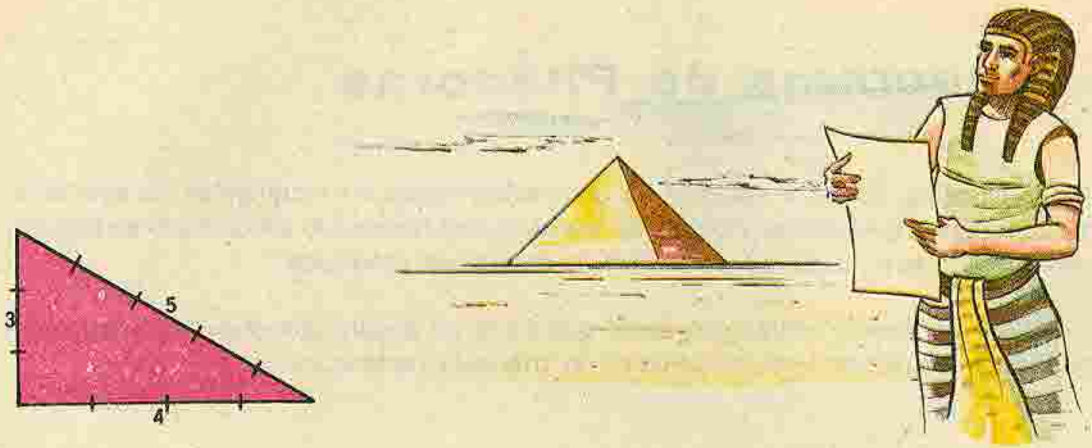


En un triángulo rectángulo los lados reciben nombres especiales:

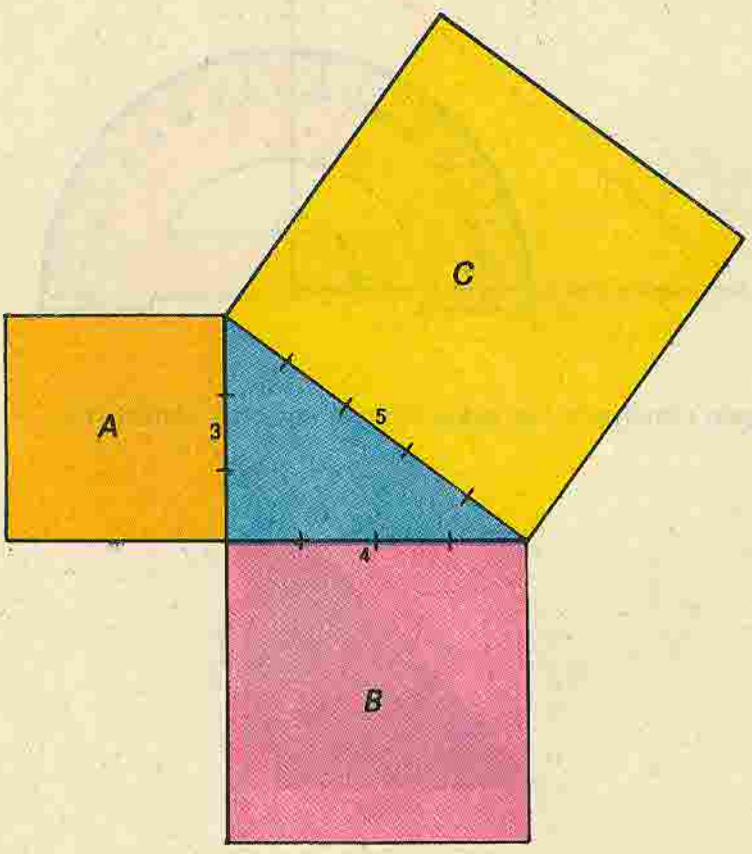


(Note usted que los catetos son los lados que forman el ángulo recto)

Desde la antigüedad el hombre se ha fijado en los triángulos rectángulos y sus propiedades. Por ejemplo, los egipcios observaron que si un triángulo tiene las medidas 3, 4 y 5 en sus lados, dicho triángulo es rectángulo.



Observaron también que al construir cuadrados sobre los lados de ese triángulo, como se muestra en la siguiente ilustración,



ocurre que el área del cuadrado C es la suma de las áreas de los cuadrados A y B.

Efectivamente así es, pues

el área del cuadrado A es $3^2 = 9$ unidades cuadradas

el área del cuadrado B es $4^2 = 16$ unidades cuadradas

el área del cuadrado C es $5^2 = 25$ unidades cuadradas

y se tiene que

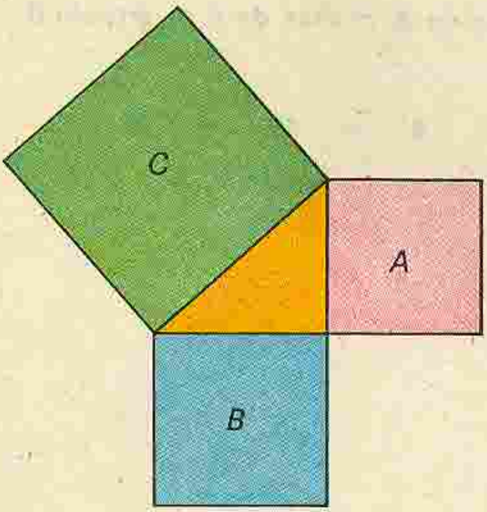
área de A + área de B = área de C

$9 + 16 = 25$

1. El teorema de Pitágoras.

Los griegos, en sus estudios matemáticos, encontraron que lo anterior ocurre no sólo en ese triángulo de los egipcios, sino en cualquier triángulo rectángulo, no importa cuáles sean las medidas de sus lados. Expresaron esto así:

En todo triángulo rectángulo, el cuadrado construido sobre la hipotenusa tiene un área que es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos.

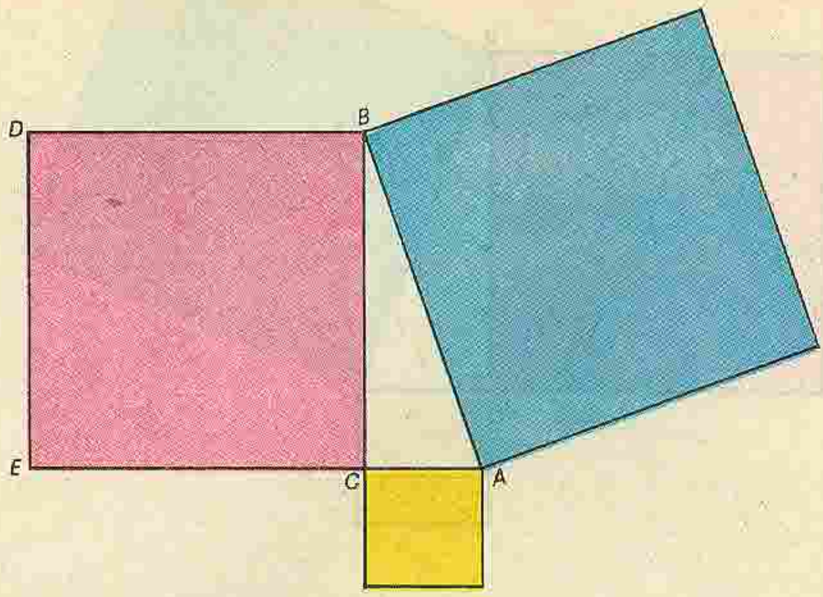


área de C = área de A + área de B

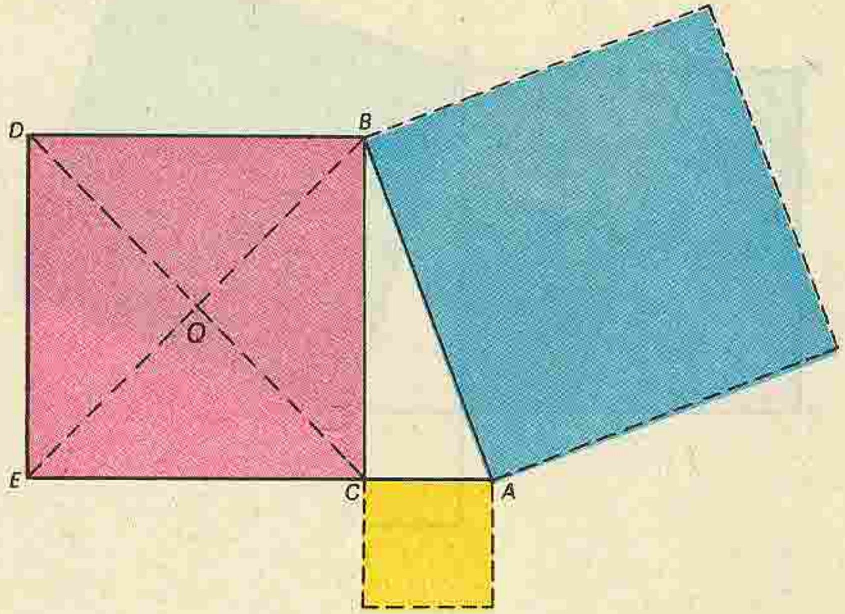
La afirmación anterior recibe el nombre de **Teorema de Pitágoras**, precisamente porque fue Pitágoras de Samos el matemático griego que demostró que es verdad lo que en ella se dice. A continuación mostramos geométricamente el significado de este teorema. Conviene que usted realice este trabajo paso a paso en una hoja de papel.

1. Trazamos cualquier triángulo rectángulo ABC.

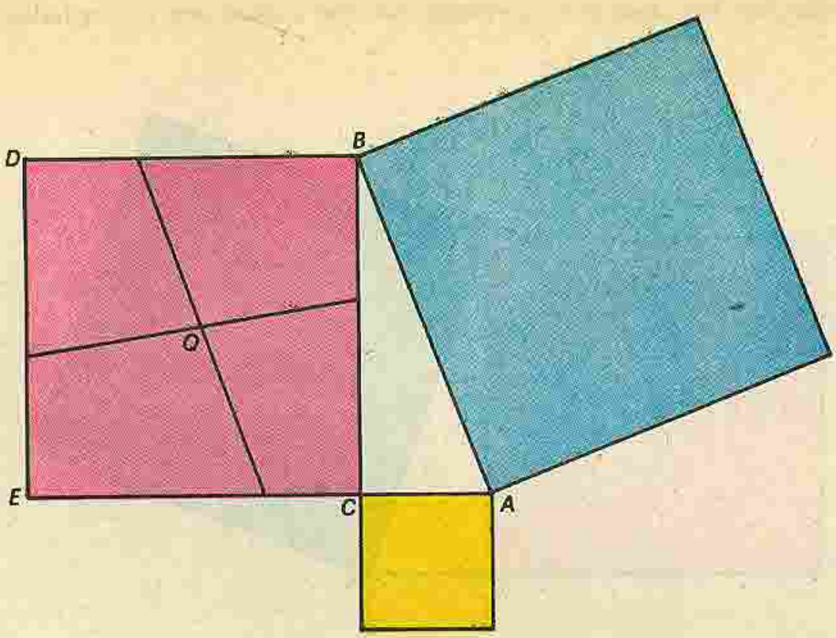
2. Construimos los cuadrados correspondientes a cada uno de los lados del triángulo *ABC*.



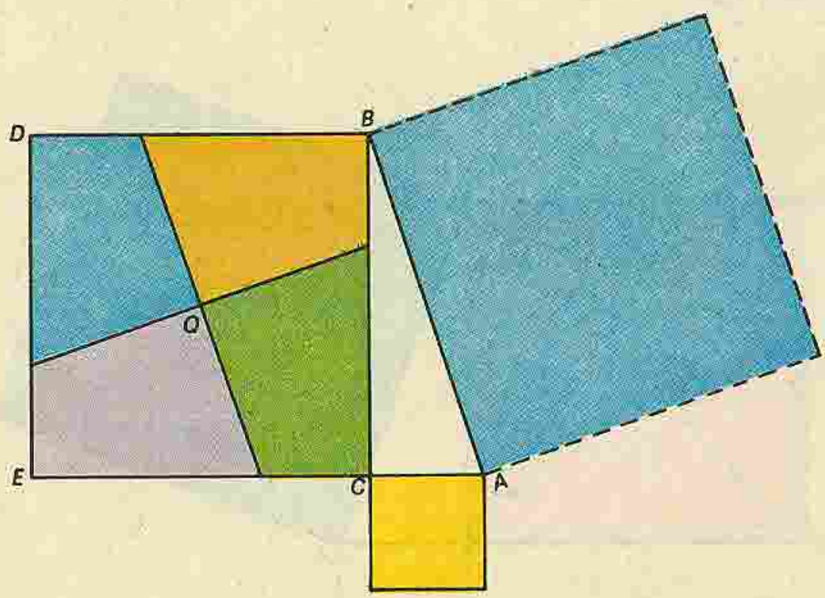
3. Buscamos el centro del cuadrado *BDEC*. (Dicho punto es la intersección de las diagonales *BE* y *CD*).



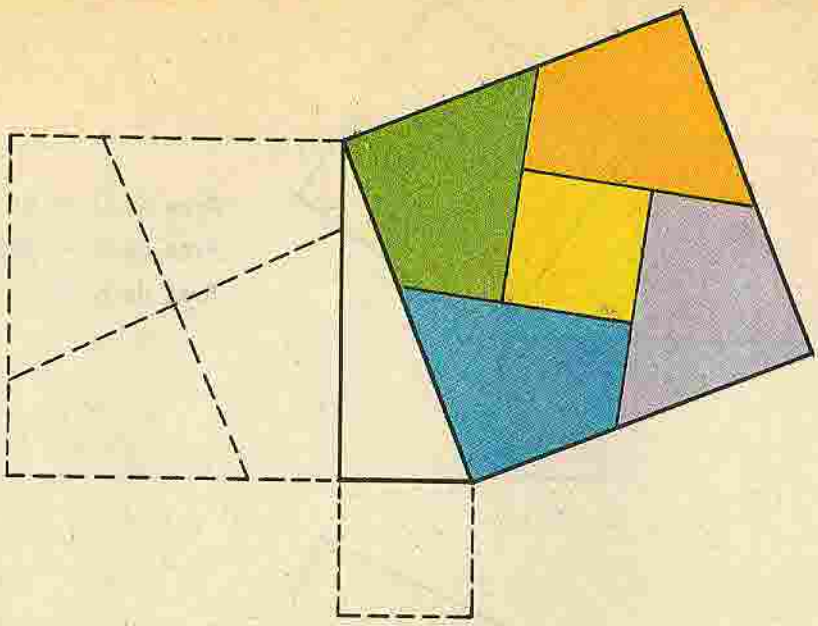
4. Por el centro encontrado, trazamos una paralela y una perpendicular a la hipotenusa *AB*.



Con esto determinamos cuatro regiones en el cuadrado *BDEC*.



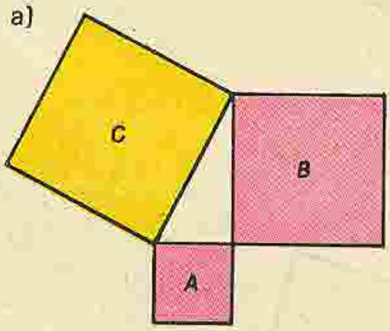
5. Recortamos las cuatro regiones formadas en el cuadrado *BDEC*, además del cuadrado construido sobre el cateto *AC*, y colocamos todos esos recortes sobre el cuadrado grande.



6. Con esto nos convencemos de que el cuadrado construido sobre la hipotenusa ocupa la misma área que los dos cuadrados construidos sobre los catetos. (¿Obtuvo usted igual resultado con su triángulo rectángulo?)

Ejercicio 1. Observe usted la figura mostrada en cada inciso y, aplicando su conocimiento del teorema de Pitágoras, encuentre la medida que falta. (Todos los triángulos dibujados son triángulos rectángulos).

a)

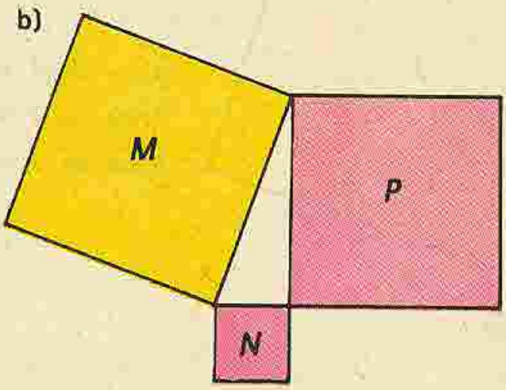


Area del cuadrado A = 9

Area del cuadrado B = 16

Area del cuadrado C =

b)

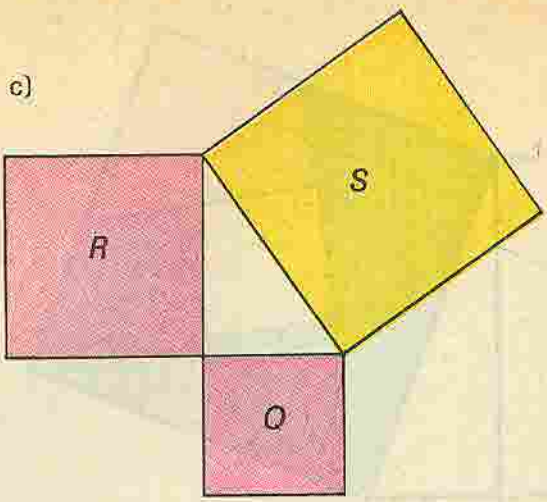


Area de P = 576

Area de N = 49

Area de M =

c)

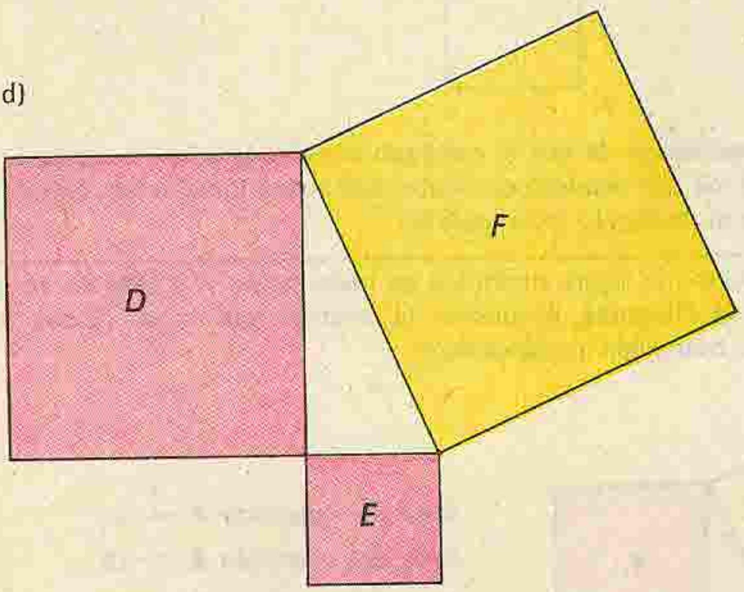


Area de Q = 64

Area de R = 225

Area de S =

d)

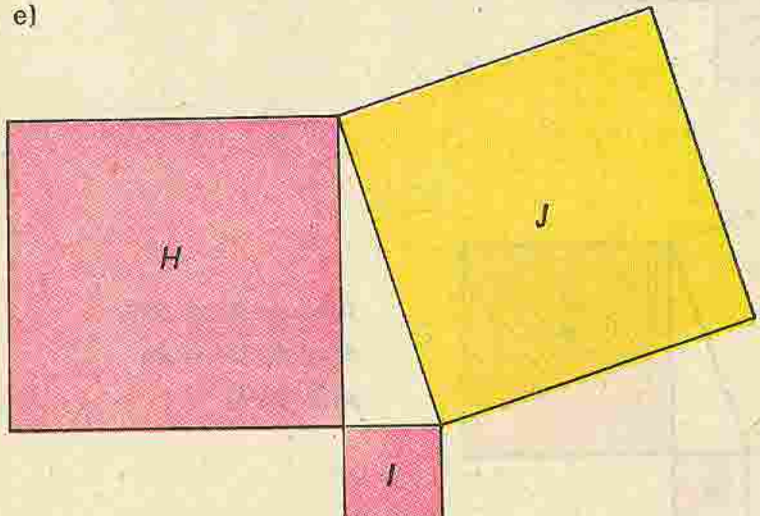


Area de E = $\frac{1}{16}$

Area de D = $\frac{1}{4}$

Area de F =

e)

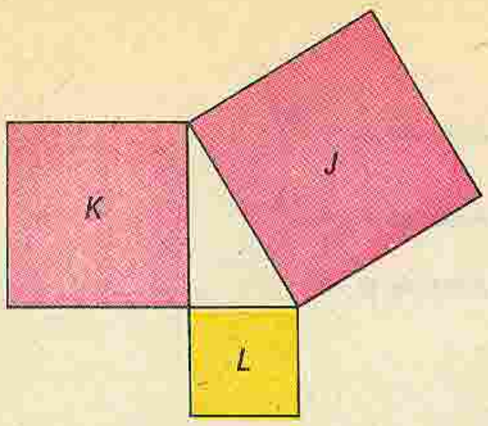


Area de H = 14.44

Area de I = 7.29

Area de J =

El teorema de Pitágoras nos permite calcular fácilmente el siguiente problema:



Si el área de J es 169 unidades cuadradas y el área de K es 144 unidades cuadradas ¿Cuál es el área de L?

Resolución:

Sabemos que:

Area de J = área de K + área de L

Por lo tanto, si restamos al área de J el área de K, obtendremos el área de L.

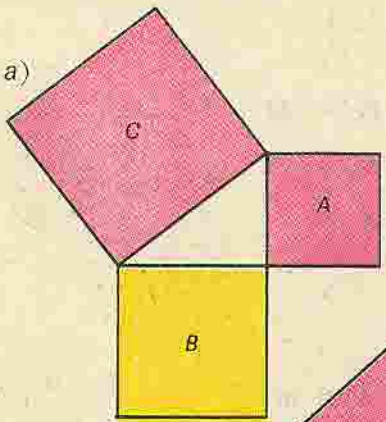
Area de L = área de J − área de K.

Area de L = 169 − 144 = 25

Respuesta. El área de L es 25 unidades cuadradas.

Ejercicio 2. Encuentre el área que se pide en cada inciso.

a)

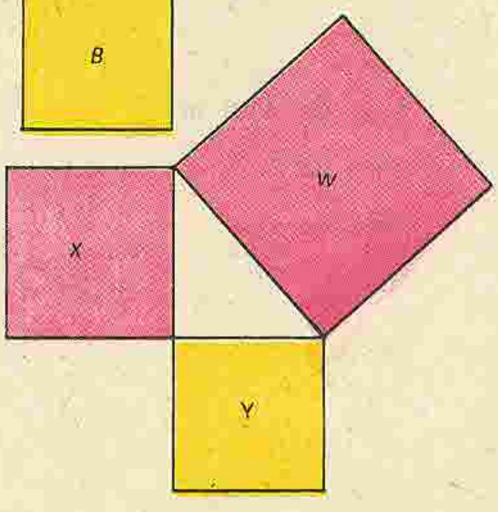


Area del cuadrado C = 25

Area del cuadrado A = 9

Area del cuadrado B =

b)

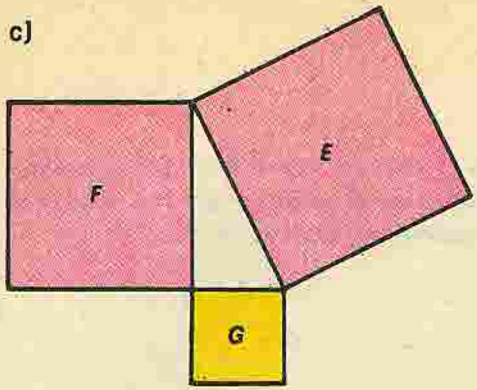


Area de W = 2 025

Area de X = 676

Area de Y =

c)

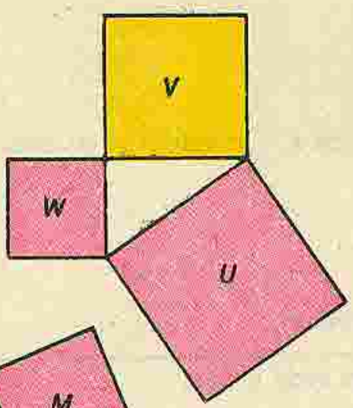


Area de $E = \frac{49}{4}$

Area de $F = \frac{16}{4}$

Area de $G =$

d)

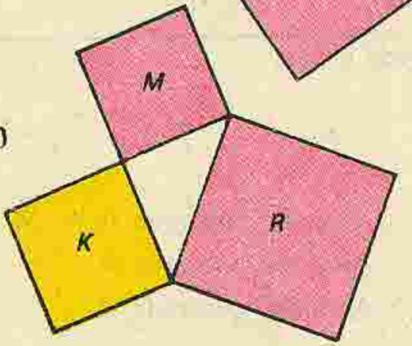


Area de $U = 27.04$

Area de $W = 7.84$

Area de $V =$

e)

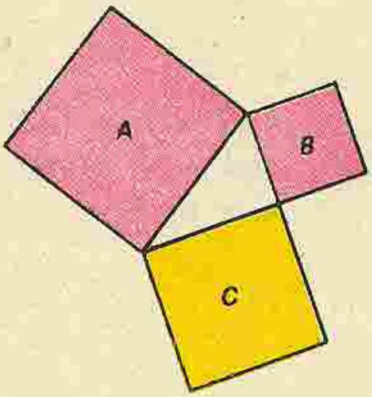


Area de $R = .81$

Area de $M = .36$

Area de $K =$

f)



Area de $A = m$

Area de $B = n$

Area de $C =$

Para realizar los siguientes ejercicios necesitará usted saber rápidamente cuál es el cuadrado de un número dado, o bien, la raíz cuadrada de algunos números. A fin de facilitar su trabajo le anotamos a continuación una tabla de cuadrados de números naturales, que usted podrá consultar cada vez que sea necesario. Es muy fácil hacer consultas en esta tabla. Por ejemplo, si queremos saber cuál es el cuadrado de 43, buscamos el 43 en la columna n. En el mismo renglón, y en la columna n^2 aparece el número 1 849, que es el cuadrado de 43.

n	n^2
43	1 849

Esto es,

$$43^2 = 1\,849$$

Ejemplo. Si queremos saber cuál es la raíz cuadrada de 6 561, buscamos el número que elevado al cuadrado es igual a 6 561. Por lo tanto, buscamos el número 6 561 en la columna n^2. En el mismo renglón, pero en la columna n, encontramos el número 81, que elevado al cuadrado da 6 561.

n	n^2
81	6 561

Así es que

$$\sqrt{6\,561} = 81$$

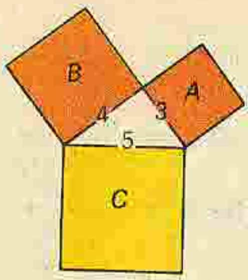
Tabla de cuadrados

$n \longleftrightarrow n^2$

n	n^2	n	n^2	n	n^2
1	1	34	1 156	67	4 489
2	4	35	1 225	68	4 624
3	9	36	1 296	69	4 761
4	16	37	1 369	70	4 900
5	25	38	1 444	71	5 041
6	36	39	1 521	72	5 184
7	49	40	1 600	73	5 329
8	64	41	1 681	74	5 476
9	81	42	1 764	75	5 625
10	100	43	1 849	76	5 776
11	121	44	1 936	77	5 929
12	144	45	2 025	78	6 084
13	169	46	2 116	79	6 241
14	196	47	2 209	80	6 400
15	225	48	2 304	81	6 561
16	256	49	2 401	82	6 724
17	289	50	2 500	83	6 889
18	324	51	2 601	84	7 056
19	361	52	2 704	85	7 225
20	400	53	2 809	86	7 396
21	441	54	2 916	87	7 569
22	484	55	3 025	88	7 744
23	529	56	3 136	89	7 921
24	576	57	3 249	90	8 100
25	625	58	3 364	91	8 281
26	676	59	3 481	92	8 464
27	729	60	3 600	93	8 649
28	784	61	3 721	94	8 836
29	841	62	3 844	95	9 025
30	900	63	3 969	96	9 216
31	961	64	4 096	97	9 409
32	1 024	65	4 225	98	9 604
33	1 089	66	4 356	99	9 801

Ejercicio 3. En los siguientes triángulos rectángulos se indican las medidas de los catetos. Encuentre el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa.

a)

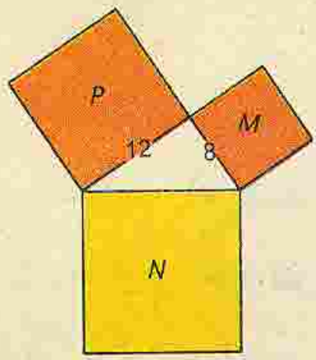


Area del cuadrado A = 3^2 = 9

Area del cuadrado B = 4^2 = 16

Area del cuadrado C = 9 + 16 = 25

b)

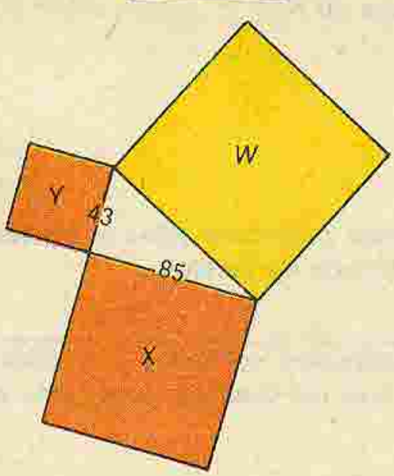


Area de M = ____^{2} = ____

Area de P = ____^{2} = ____

Area de N = ____ + ____ = ____

c)

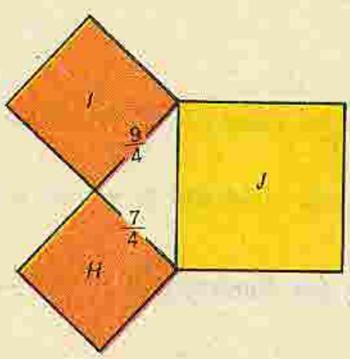


Area de X = ____^{2} = ____

Area de Y = ____^{2} = ____

Area de W = ____ + ____ = ____

d)

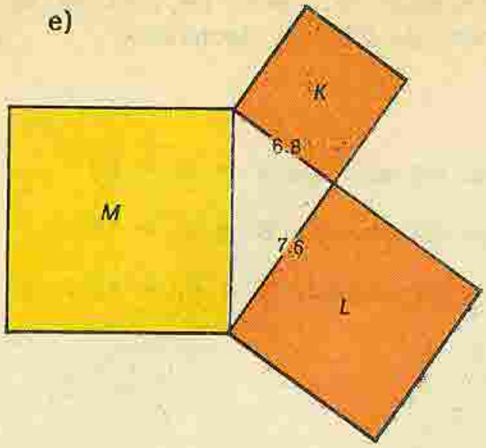


Area de H = ____^{2} = ____

Area de I = ____^{2} = ____

Area de J = ____ + ____ = ____

e)

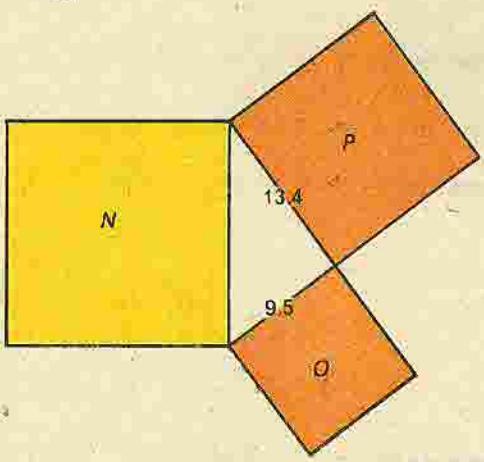


Area de K = $\square^2$ = $\square$

Area de L = $\square^2$ = $\square$

Area de M = $\square$ + $\square$ = $\square$

f)



Area de O = $\square^2$ = $\square$

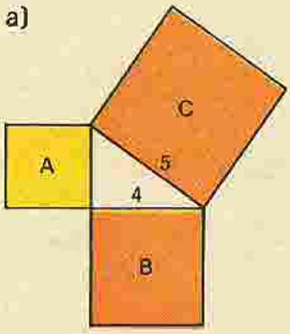
Area de P = $\square^2$ = $\square$

Area de N = $\square$ + $\square$ = $\square$

En un triángulo rectángulo el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las medidas de los catetos.

Ejercicio 4. En los siguientes triángulos rectángulos se indica la medida de un cateto y de la hipotenusa. Encuentre usted el área del cuadrado construido sobre el otro cateto.

a)

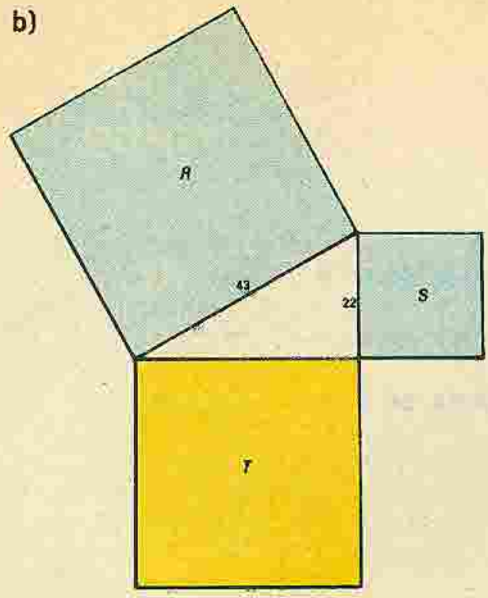


Area del cuadrado C = $5^2 = 25$

Area del cuadrado B = $4^2 = 16$

Area del cuadrado A = $25 - 16 = 9$

b)

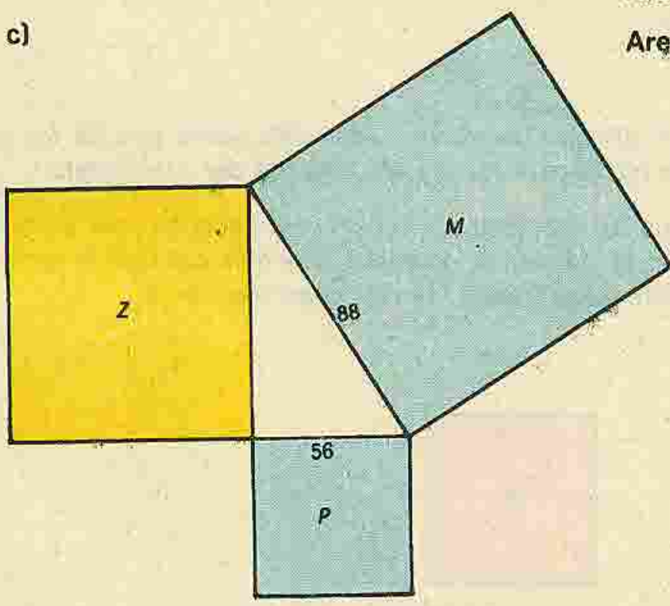


Area de R = $\square^2$ = $\square$

Area de S = $\square^2$ = $\square$

Area de T = = $\square$

c)

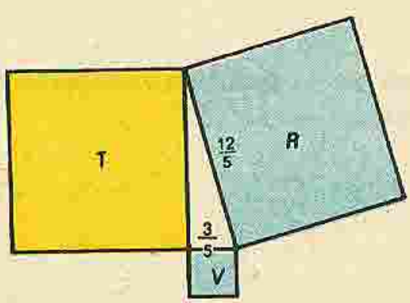


Area de M = $\square^2$ = $\square$

Area de P = $\square^2$ = $\square$

Area de Z = $\square$ = $\square$

d)

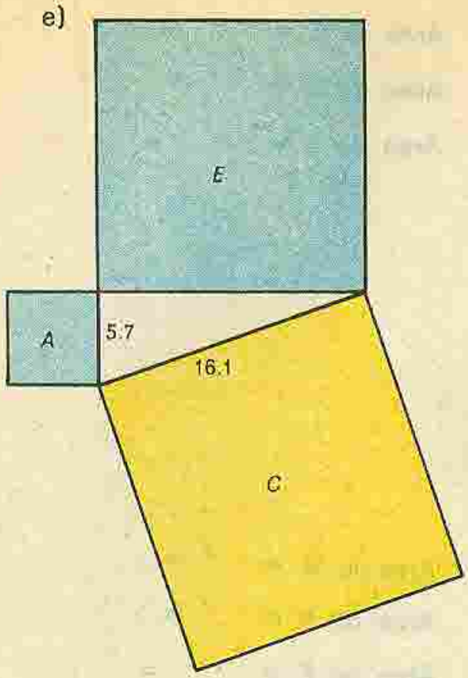


Area de R = $\square^2$ = $\square$ =

Area de V = $\square^2$ = $\square$

Area de T = $\square$ = $\square$

e)



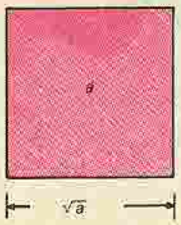
Area de C = $\square^2$ = $\square$

Area de A = $\square^2$ = $\square$

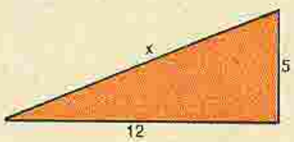
Area de E = $\square$ = $\square$

En un triángulo rectángulo el área del cuadrado construido sobre uno de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa menos el cuadrado del otro cateto.

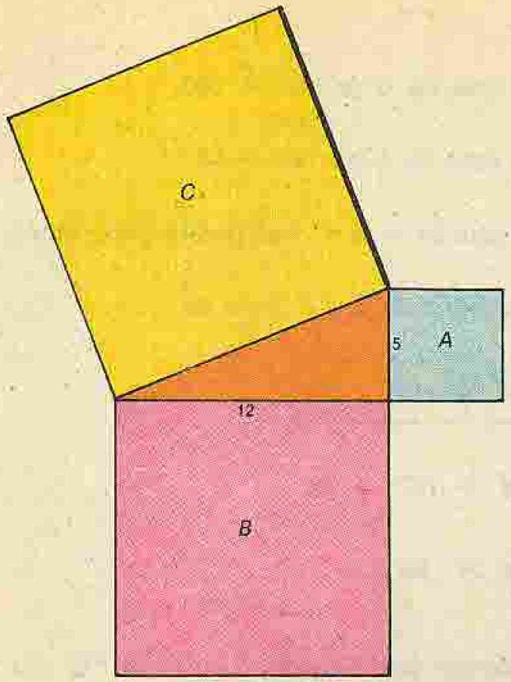
Para resolver problemas como los siguientes, necesitamos recordar que si tenemos un cuadrado cuya área es el número *a*, entonces podemos calcular la medida de uno de sus lados simplemente encontrando "la raíz cuadrada" de *a*.



Problema. ¿Cuál es la medida de la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 5 y 12 unidades, respectivamente?



Resolución. Primero construimos cuadrados sobre los lados del triángulo.



El área del cuadrado A es $5^2 = 25$

El área del cuadrado B es $12^2 = 144$

El área del cuadrado C es x^2 y es la suma de las áreas de A y B.

Esto es,

$$x^2 = 25 + 144$$

$$x^2 = 169$$

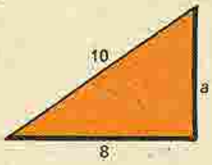
Ahora, para saber qué número es x (el lado del cuadrado C) buscamos la raíz cuadrada de 169.

$$x = \sqrt{169}$$

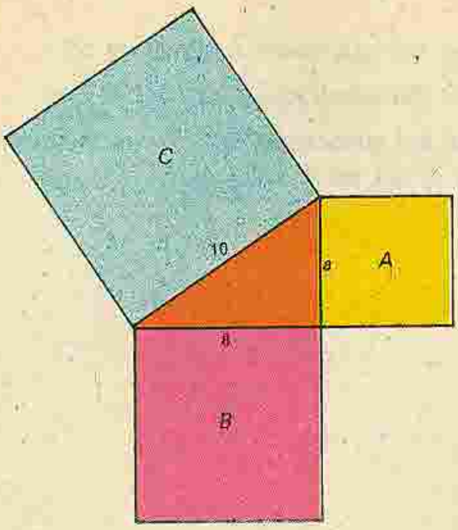
$$x = 13$$

Respuesta. La hipotenusa de ese triángulo mide 13 unidades.

Problema. Si la hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 10 unidades y un cateto mide 8 unidades, ¿cuánto mide el otro cateto?



Resolución. Si construimos los cuadrados sobre los lados del triángulo, encontramos que



El área de C es $10^2 = 100$

El área de B es $8^2 = 64$

El área de A es a^2, y es la diferencia entre las áreas de C y B. Esto es,

$$\boxed{a^2 = 10^2 - 8^2}$$

$$a^2 = 100 - 64$$

$$a^2 = 36$$

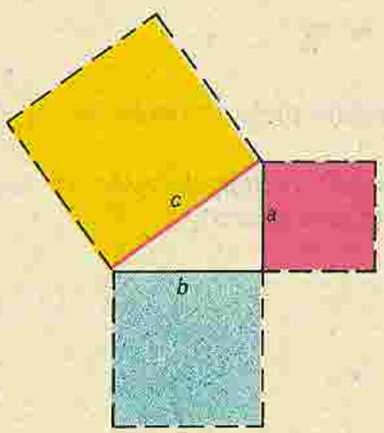
Ahora, para encontrar la medida de a, el cateto desconocido, buscamos "la raíz cuadrada" de 36.

$$\boxed{\begin{aligned} a &= \sqrt{36} \\ a &= 6 \end{aligned}}$$

Respuesta. El otro cateto de ese triángulo mide 6 unidades.

Ejercicio 5. Encuentre la medida que falta en cada uno de los siguientes triángulos rectángulos.

a)

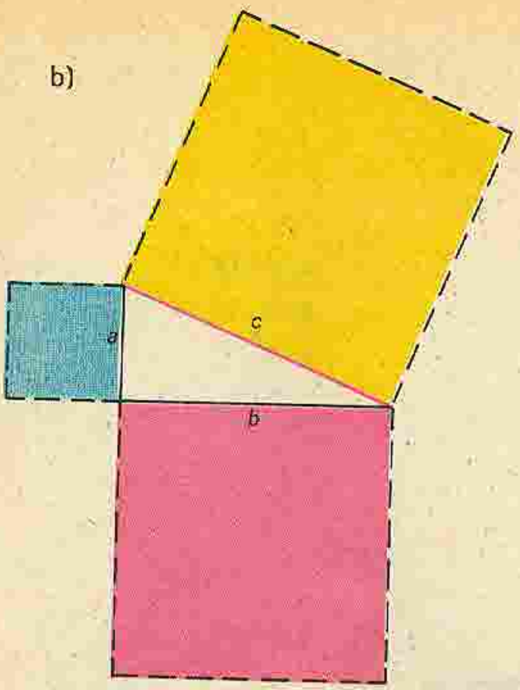


$a = 3$

$b = 4$

$c =$

b)

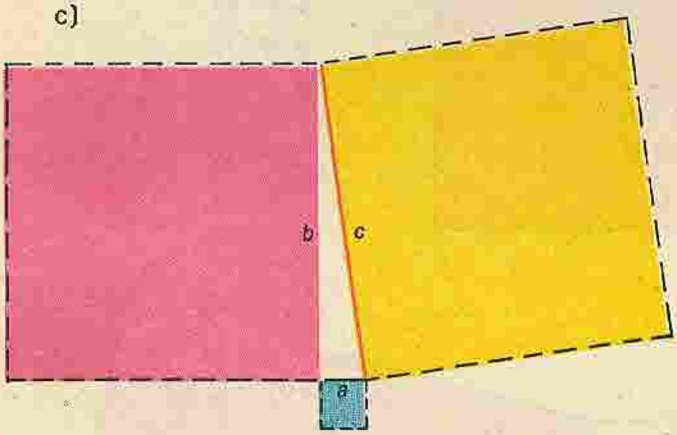


$a = 5$

$b = 12$

$c =$

c)

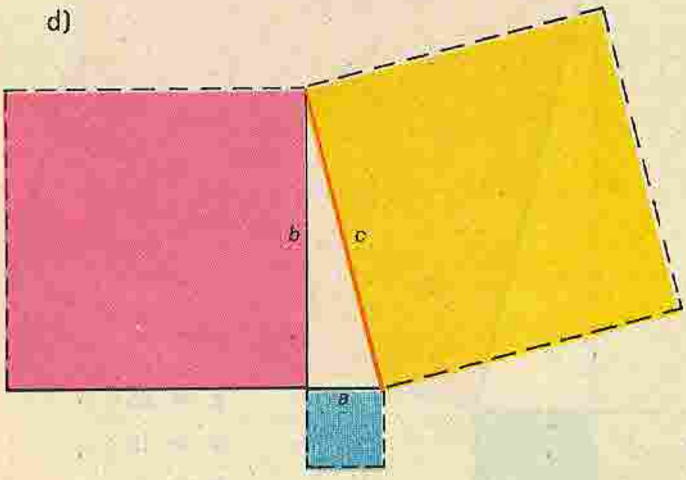


$a = 9$

$b = 40$

$c =$

d)

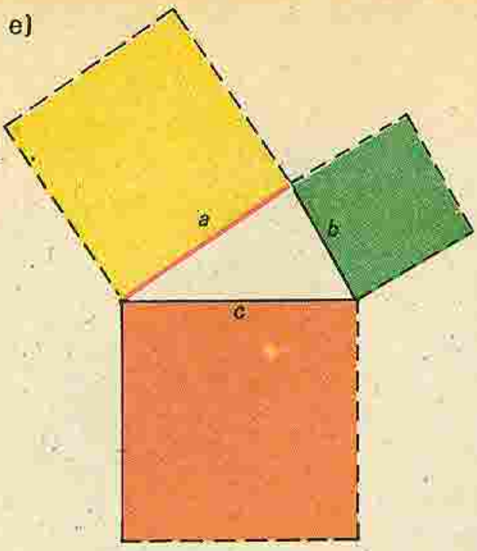


$a = 13$

$b = 84$

$c =$

e)

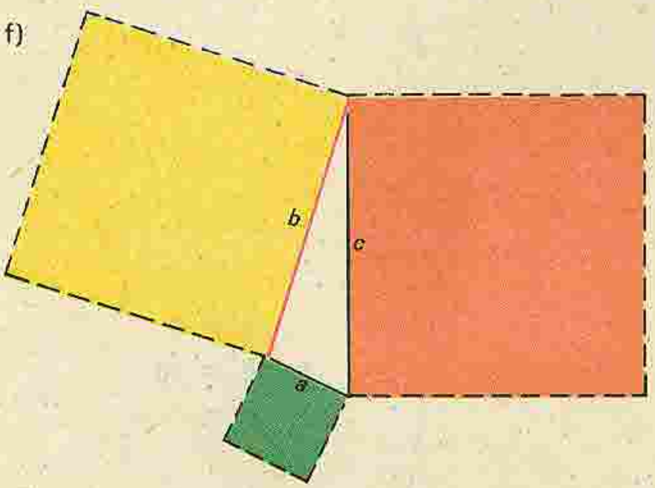


$c = 17$

$b = 15$

$a =$

f)

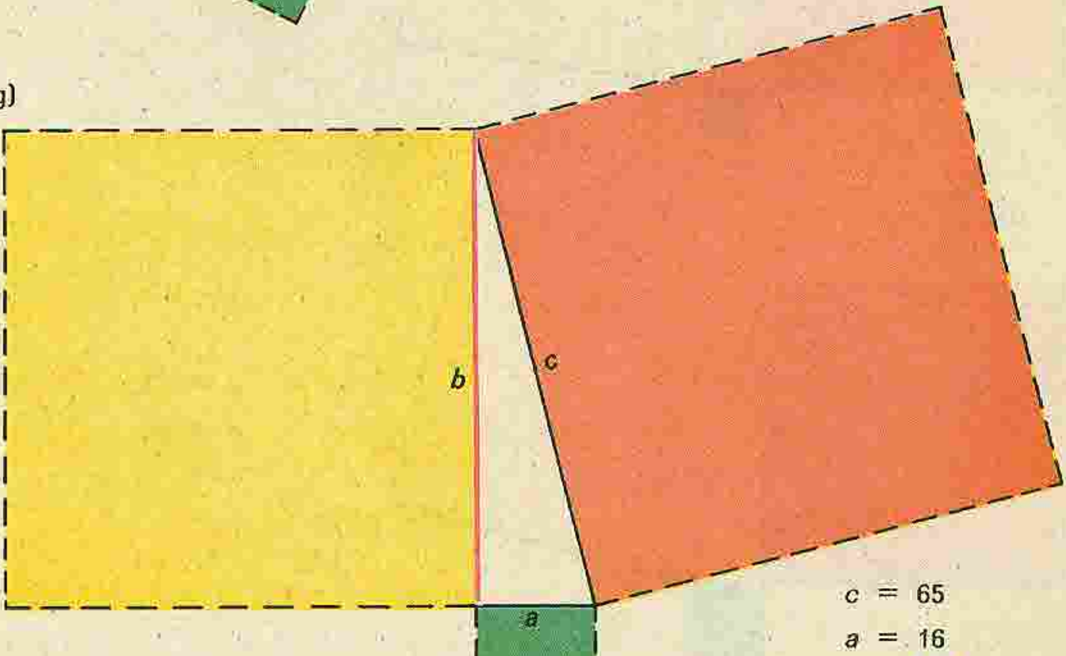


$c = 37$

$a = 12$

$b =$

g)

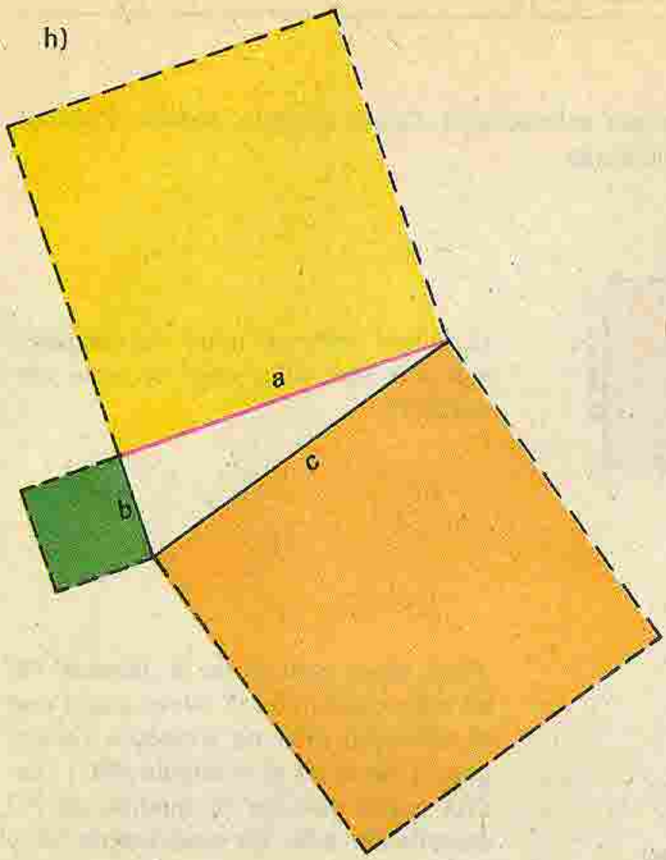


$c = 65$

$a = 16$

$b =$

h)

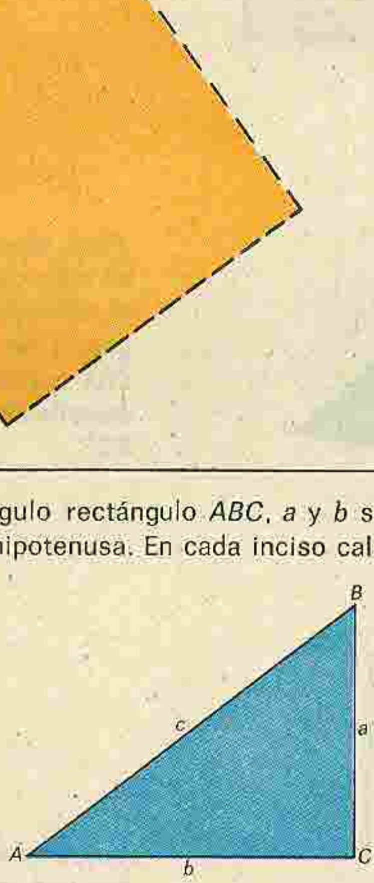


$c = 75$

$b = 21$

$a =$

Ejercicio 6. En el triángulo rectángulo ABC, a y b son las medidas de los catetos y c es la medida de la hipotenusa. En cada inciso calcule la medida que falta.



a) $a = 4$, $b = 7.5$, $c =$

b) $a = 30$, $b = 40$, $c =$

c) $a = 16$, $b = 63$, $c =$

d) $a = 11$, $b =$, $c = 61$

e) $a =$, $b = 24$, $c = 25$

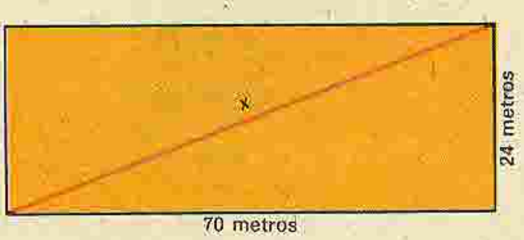
f) $a =$, $b = 35$, $c = 37$

g) $a =$, $b = 84$, $c = 85$

2. Problemas

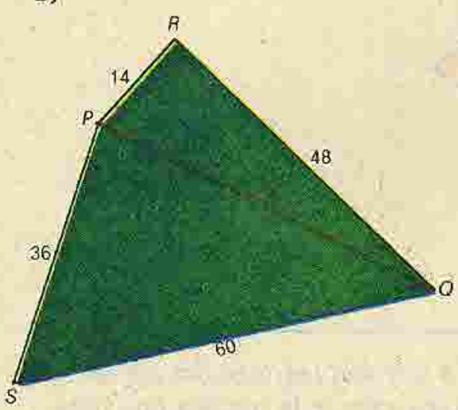
El teorema de Pitágoras tiene diversas aplicaciones. Como ejemplo, analice y resuelva cada uno de los siguientes problemas.

a)



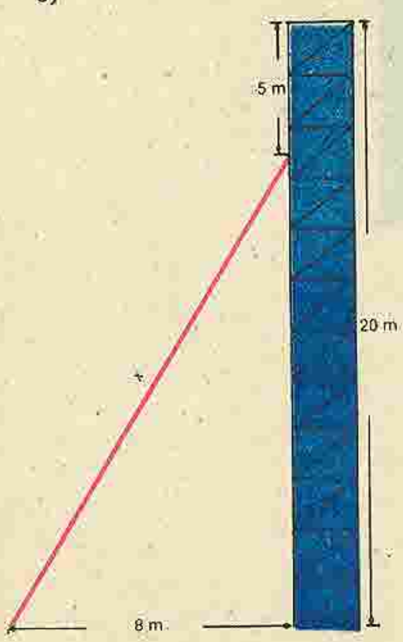
¿Cuántos metros mide la diagonal, marcada con color rojo, en este rectángulo?

b)



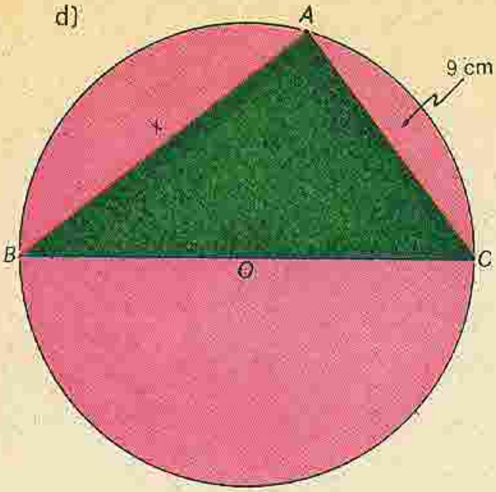
¿Cuál es la medida de la diagonal PQ en este cuadrilátero? (Note usted que el triángulo PRQ es triángulo rectángulo, y no lo es el triángulo PSQ) ¿Podría usted calcular la medida de PQ conociendo sólo las medidas de PS y SQ?

c)



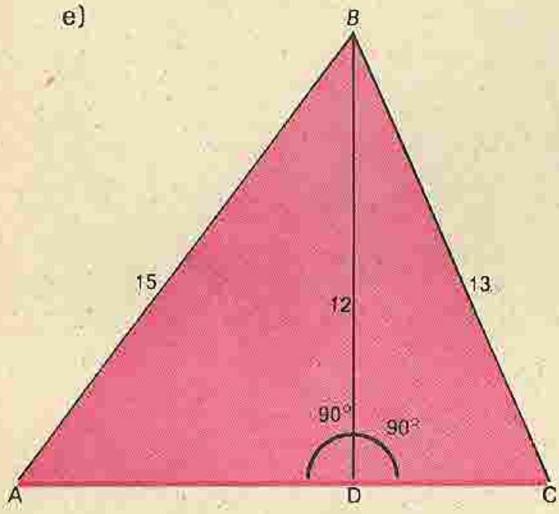
Una antena de radio se encuentra sobre una torre de 20 metros de altura. ¿Cuánto medirá un tirante de acero que se engancha a 5 metros de la punta de la torre y queda, en su otro extremo, alejado 8 metros de la base de la torre?

d)



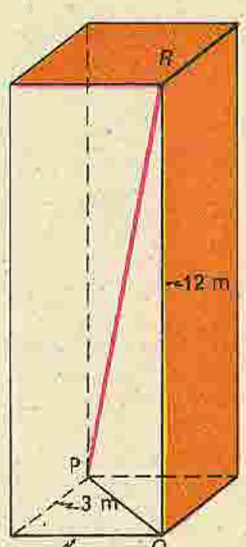
En una circunferencia, cuyo diámetro mide 15 cm, se inscribe un triángulo rectángulo que tiene un cateto de 9 cm. ¿Cuál es la medida del otro cateto?

e)



¿Cuál es la medida de *AC* en esta figura? (Se sabe que los triángulos *BDA* y *BDC* son triángulos rectángulos).

f)



¿Cuánto mide la diagonal, marcada en rojo, en este paralelepípedo? (Sugerencia: Encuentre primero la medida de *PQ*).

III

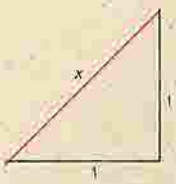
La raíz cuadrada de 2.

1. El número $\sqrt{2}$.

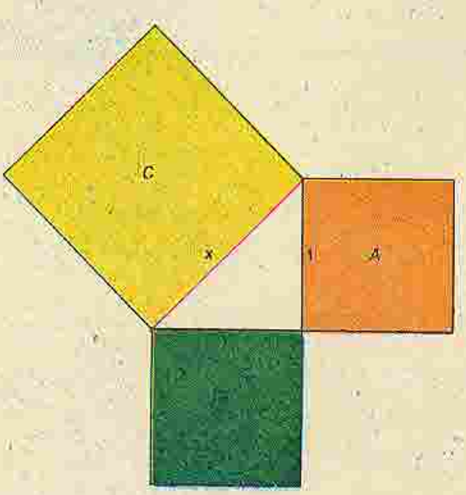
Al aplicar el teorema de Pitágoras a cierto triángulo rectángulo, los griegos sufrieron un terrible golpe a sus conceptos matemáticos, porque ellos pensaban (quizá usted también hasta este momento lo piense) que los números racionales son suficientes para indicar la medida de cualquier segmento.

El problema que conmocionó a los griegos fue el siguiente:

¿Cuál es la medida de la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 1 unidad cada uno?



Al construir cuadrados sobre los tres lados de ese triángulo encontraron que



el área del cuadrado A es $1^2 = 1$

el área del cuadrado B es $1^2 = 1$

el área del cuadrado C es x^2 y es la suma de las áreas de A y B.

Esto es,

$$x^2 = 1^2 + 1^2$$
$$x^2 = 1 + 1$$
$$x^2 = 2$$

Puesto que el área del cuadrado C es 2, para saber la medida de x había que encontrar "la raíz cuadrada" de 2.

Aquí fue donde los griegos tuvieron la gran dificultad, porque hasta ese momento creían que para indicar medidas de segmentos bastaba con tener los números racionales y descubrieron que estaban equivocados, pues no había ningún número racional que fuera "la raíz cuadrada" de 2. Es decir, hallaron que ningún número racional elevado al cuadrado da como resultado el número 2.

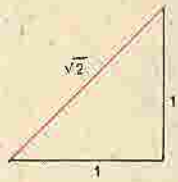
Sin embargo, ellos querían dar la medida de ese segmento, cuya existencia era innegable.

A fin de poder indicar la medida de la hipotenusa de ese triángulo, los griegos tuvieron que aceptar, a partir de ese momento, que "la raíz cuadrada" de 2 era un número, (aunque no racional como los que ellos manejaban).

Nosotros simbolizaremos a este número simplemente como $\sqrt{2}$.

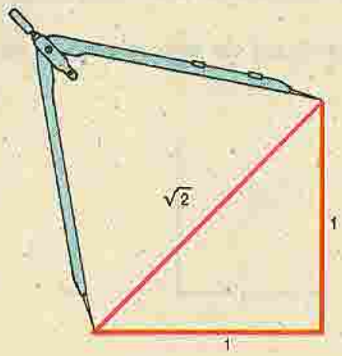
De esa manera queda resuelto el problema y se puede dar la siguiente respuesta:

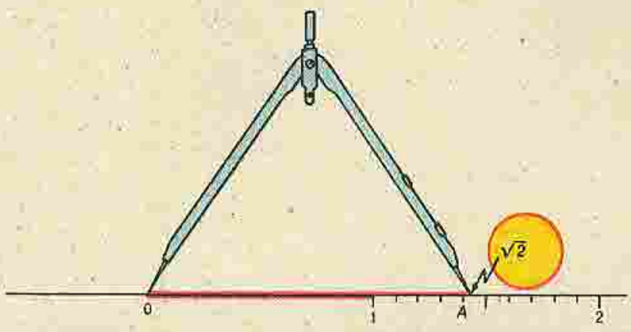
Respuesta. La medida de la hipotenusa de ese triángulo es $\sqrt{2}$.



2. Aproximación racional del número $\sqrt{2}$.

Hasta este momento tenemos marcados únicamente segmentos racionales en la regla que usamos para medir. Es decir, sólo hemos señalado segmentos cuyas medidas son números racionales. Ahora marcaremos, en dicha regla, el segmento que mide $\sqrt{2}$.





Sabemos que no hay ningún segmento racional que sea congruente con el segmento $\overline{OA}$ (cuya medida es $\sqrt{2}$). Sin embargo, notamos que el segmento que mide **1.4** es el que está más cerca de ser congruente con $\overline{OA}$.

Podemos decir entonces que

$\sqrt{2}$ es aproximadamente igual a 1.4

Si dividimos en centésimos la unidad en nuestra regla, encontramos que

$\sqrt{2}$ es aproximadamente igual a **1.41**

Si dividimos la unidad en milésimos, hallaremos una mayor aproximación a $\sqrt{2}$. Encontraremos que

$\sqrt{2}$ es aproximadamente igual a 1.414

Así podríamos continuar indefinidamente y nunca hallaríamos un segmento racional que fuera congruente con $\overline{OA}$; pero obtendríamos aproximaciones racionales a $\sqrt{2}$, cada vez más finas.

Ejercicio 1.

a) Tomando como unidad el decímetro, trace en una hoja de papel un triángulo rectángulo cuyos catetos midan una unidad.

b) Mida la hipotenusa de ese triángulo aproximando su medida hasta décimos de unidad. (Note usted que el centímetro es la décima parte de la unidad considerada).

c) Aproxime hasta centésimos la medida de esa hipotenusa. (Observe que un milímetro es la centésima parte del decímetro que se ha tomado como unidad).

Algunas aproximaciones racionales a $\sqrt{2}$ son las siguientes:

1.4
1.41
1.414
1.4142
1.41421
1.414213
1.4142135

En cursos de matemáticas más avanzadas, se demuestra que al buscar aproximaciones racionales para $\sqrt{2}$ se obtiene una **notación decimal que no es periódica y tiene un número infinito de cifras** después del punto decimal. Esto se indica en la siguiente forma:

$$\sqrt{2} = 1.4\ldots$$

o bien,

$$\sqrt{2} = 1.41\ldots$$

o bien,

$$\sqrt{2} = 1.4142135\ldots$$

(En estas expresiones los tres puntos suspensivos indican que se puede continuar indefinidamente la escritura de cifras).

A expresiones como éstas se les llama **decimales infinitos no periódicos.**

Soluciones a los Ejercicios y Problemas

Capítulo primero

Los números racionales

I. Los números racionales no negativos

(No tiene ejercicios).

II. Números racionales no negativos y segmentos de recta.

2. Segmentos congruentes.

Ejercicio 1.

Son congruentes con $\overline{AB}$ los segmentos $\overline{IJ}$ y $\overline{GH}$.

Ejercicio 2.

a) Sí es congruente $\overline{IJ}$ con $\overline{AB}$.

b) Sí es congruente $\overline{AB}$ con $\overline{IJ}$.

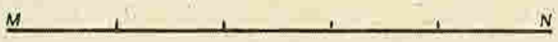
c) Sí lo son, $\overline{RS}$ es congruente con $\overline{DE}$.

3. Subdivisión de un segmento en segmentos congruentes.

Ejercicio 3.

a) 

b) 

c) 

d) 

4. Números racionales como medidas de segmentos.

Ejercicio 4.

a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

f) 

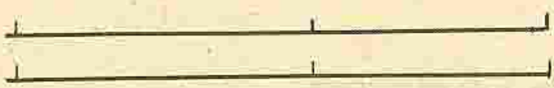
Ejercicio 5.

a) 

Sí son congruentes.

b) 

Sí son congruentes.

c) 

Sí son congruentes.

Ejercicio 6.

a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

Los segmentos no son congruentes.

Ejercicio 7.

a) El segmento $\overline{OC}$ mide 6.3 unidades.

b) $\overline{AB}$ mide 10.5 unidades.

c) $\overline{AB}$ mide 5 unidades.

d) $\overline{OA}$ mide 5.6 unidades.

e) $\overline{OB}$ mide 7.6 unidades.

f) $\overline{AB}$ mide 5.5 unidades.

Ejercicio 8.

a) 

b) 

Ejercicio 9.

a) Este segmento mide 6.5 cm.

b) Este segmento mide 8 cm.

c) Este segmento mide 2.9 cm.

d) Este segmento mide 2 pulgadas y $\frac{8}{16}$ de pulgada.

e) Este segmento mide $1\frac{4}{16}$ pulgadas.

---

5. Uso de la regla en la medición de segmentos.

(No hay ejercicios)

III. El conjunto de los números racionales.

---

1. Los números racionales negativos.

Ejercicio 1.

a) -2.5 b) -12.83 c) $-\frac{2}{5}$

d) -4.05 e) -25.2 f) 7

g) 2.5 h) $\frac{5}{8}$ i) 28.3

2. Una ilustración de los números racionales.

Ejercicio 2.

a) 5 

b) -3 

c) -2.5 

d) 2.4 

e) -1.8 

IV. Adición de números racionales

1. Adición de racionales positivos.

Ejercicio 1.

a) $\frac{12}{4}$ 

b) $\frac{13}{3}$ 

c) 12.1 

d) 8.6 

e) 13.7 

2. Adición de racionales negativos.

Ejercicio 2.

	No. de metros recorridos a la izquierda			Adición asociada a los recorridos efectuados
	Primero	Después	Total	
a)	5	4	9	$-5 + (-4) = -9$
b)	10	12	22	$-10 + (-12) = -22$
c)	34	19	53	$-34 + (-19) = -53$
d)	8.3	9.5	17.8	$-8.3 + (-9.5) = -17.8$
e)	15.6	10.7	26.3	$-15.6 + (-10.7) = -26.3$
f)	17.4	26.8	44.2	$-17.4 + (-26.8) = -44.2$
g)	$\frac{15}{6}$	$\frac{23}{6}$	$\frac{38}{6}$	$-\frac{15}{6} + (-\frac{23}{6}) = -\frac{38}{6}$
h)	$\frac{34}{9}$	$\frac{47}{9}$	$\frac{81}{9}$	$-\frac{34}{9} + (-\frac{47}{9}) = -\frac{81}{9}$

Ejercicio 3.

a) -13 b) -12 c) -3 d) -19 e) $-\frac{11}{2}$

f) -10.7 g) -10.7 h) -43.2 i) -750.9 j) -43.737

Ejercicio 4.

a) 2 b) -2 c) 4 d) -4

e) 3.1 f) -3.1 g) $\frac{5}{3}$ h) $-\frac{5}{3}$

i) $\frac{14}{9}$ j) $-\frac{14}{9}$ k) 15.5 l) -15.5

m) -18 n) -9.3 o) -11.05 p) -7.08

Ejercicio 5.

a) $-1\,210$ b) -60.81 c) -747.2

d) $-\frac{21}{9}$ e) $-\frac{59}{12}$ f) -811.9

g) $-\ 763.7$

3. Adición de un racional positivo y un negativo.

Ejercicio 6.

a) -3 b) 4 c) $-\frac{3}{4}$

d) 2.7 e) 1

Ejercicio 7.

a) 7.5 b) -11.5 c) 300

d) 1000.5 e) $\frac{227}{115}$ f) $-3\,080.075$

Ejercicio 8.

a) -15 b) 12 c) $\frac{4}{5}$ d) -18.3

e) $n = 6$ f) $a = 3.5$ g) $y = -43.2$ h) $x = 0$

Ejercicio 9.

b) $12 + (-5) = 7 + 5 + (-5) = 7 + 0 = 7$

Por lo tanto, $12 + (-5) = 7$

c) $28 + (-15) = 13 + 15 + (-15) = 13 + 0 = 13$

Por consiguiente, $28 + (-15) = 13$

d) $26 + (-39) = 26 + (-26) + (-13) = 0 + (-13) = -13$

Por lo tanto, $26 + (-39) = -13$

e) $18 + (-43) = 18 + (-18) + (-25) = 0 + (-25) = -25$

Por consiguiente, $18 + (-43) = -25$

f) $-47 + 14 = -33 + (-14) + 14 = -33 + 0 = -33$

Por consiguiente, $-47 + 14 = -33$

g) $-35 + 68 = -35 + 35 + 33 = 0 + 33 = 33$

Por lo tanto, $-35 + 68 = 33$

h) $-78 + 52 = -26 + (-52) + 52 = -26 + 0 = -26$

Por lo tanto, $-78 + 52 = -26$

i) $-19 + 46 = -19 + 19 + 27 = 0 + 27 = 27$

Por consiguiente, $-19 + 46 = 27$

j) $78 + (-182) = 78 + (-78) + -104 = 0 + (-104) = -104$

Por lo tanto, $78 + (-182) = -104$

Ejercicio 10.

a) 267	b) 455	c) 981	d) 5 979
e) -162	f) -760	g) $-3\,094$	h) 403
i) -347	j) 1 146		

Ejercicio 11.

b) 4.3	c) 13.4	d) -21.17
e) -32.9	f) -34	g) 111.5
h) -61.6	i) 33.6	j) -12.8

4. Propiedades de la adición de racionales.

Ejercicio 12.

a) 71.078	b) 45.7	c) 27.65	d) -11.5
e) -350.6	f) -30.9	g) $-1\,004.9$	h) -14
i) 2	j) 6.3	k) 468	l) -912
m) 567	n) 1 574	o) 18	

Ejercicio 13.

a) 2	b) -3.1	c) $-\frac{39}{15}$
d) 11.1	e) -26.2	f) -10.1

V. Sustracción de números racionales.

1. Una regla para efectuar sustracciones de números racionales.

Ejercicio 1.

	Comprobación
b) $25 - (-13) = 25 + 13 = 38$	$38 + (-13) = 25$
c) $17 - (-23) = 17 + 23 = 40$	$40 + (-23) = 17$

Comprobación

d) $23 - (-42) = 23 + 42 = 65$ $\qquad 65 + (-42) = 23$

e) $3.17 - (-28.2) = 3.17 + 28.2 = 31.37$ $\qquad 31.37 + (-28.2) = 3.17$

f) $3.5 - (-2.8) = 3.5 + 2.8 = 6.3$ $\qquad 6.3 + (-2.8) = 3.5$

g) $-18 - 7 = -18 + (-7) = -25$ $\qquad -25 + 7 = -18$

h) $-36 - 49 = -36 + (-49) = -85$ $\qquad -85 + 49 = -36$

i) $-3.7 - 18.6 = -3.7 + (-18.6) = -22.3$ $\qquad -22.3 + 18.6 = -3.7$

j) $-\frac{7}{8} - \frac{17}{8} = -\frac{7}{8} + (-\frac{17}{8}) = -\frac{24}{8}$ $\qquad -\frac{24}{8} + \frac{17}{8} = -\frac{7}{8}$

k) $-\frac{12}{3} - \frac{5}{9} = -\frac{36}{9} + (-\frac{5}{9}) = -\frac{41}{9}$ $\qquad -\frac{41}{9} + \frac{5}{9} = -\frac{36}{9} = -\frac{12}{3}$

l) $-7 - (-28) = -7 + 28 = 21$ $\qquad 21 + (-28) = -7$

m) $-25 - (-10) = -25 + 10 = -15$ $\qquad -15 + (-10) = -25$

n) $-3.9 - (-7.2) = -3.9 + 7.2 = 3.3$ $\qquad 3.3 + (-7.2) = -3.9$

o) $-17.42 - (-10.05) = -17.42 + 10.05 = -7.37$

$-7.37 + (-10.05) = -17.42$

p) $-\frac{3}{10} - (-.7) = -.3 + .7 = .4$ $\qquad .4 + (-.7) = -.3$

q) $-\frac{12}{8} - (-8) = -\frac{12}{8} + 8 = \frac{52}{8}$ $\qquad \frac{52}{8} + (-8) = -\frac{12}{8}$

r) $-8 - 0 = -8 + 0 = -8$ $\qquad -8 + 0 = -8$

s) $-3.8 - 0 = -3.8 + 0 = -3.8$ $\qquad -3.8 + 0 = -3.8$

t) $-\frac{3}{7} - 0 = -\frac{3}{7} + 0 = -\frac{3}{7}$ $\qquad -\frac{3}{7} + 0 = -\frac{3}{7}$

u) $0 - \frac{3}{7} = 0 + (-\frac{3}{7}) = -\frac{3}{7}$ $\qquad -\frac{3}{7} + \frac{3}{7} = 0$

v) $0 - (-3.9) = 0 + 3.9 = 3.9$ $\qquad 3.9 + (-3.9) = 0$

w) $0 - (-17.2) = 0 + 17.2 = 17.2$ $\qquad 17.2 + (-17.2) = 0$

Ejercicio 2.

a) -23	b) -42	c) -84
d) -1	e) -1.2	f) -7.35
g) -60.6	h) -45.45	i) -331.7
j) -999	k) -12.5	l) -31.82
m) $-.12$	n) -5.8	

Ejercicio 3.

a) 18 b) 20 c) 21 d) 90

e) 1.5 f) 5.2 g) 75.2 h) 44.2

i) 28.9 j) $\frac{11}{3}$ k) $\frac{13}{9}$ l) $\frac{5}{12}$

En las dos formas se obtiene el mismo resultado.

2. Notación para el inverso aditivo de un número racional.

Ejercicio 4.

a) -3 b) $-.5$ c) -3.007 d) 3

e) $\frac{1}{10}$ f) .001 g) .1 h) -3.6

i) 1.8 j) 3.6 k) -1 l) 0

m) Número racional negativo

n) Número racional positivo

o) Cero.

Ejercicio 5.

x	-1.5	-1	$-.5$	0	5	1	1.5
$-x$	1.5	1	.5	0	-5	-1	-1.5

3. La definición de sustracción.

Ejercicio 6.

a) $x + (-5)$ b) $m + (-7)$

c) $r + (-1)$ d) $s + (-\frac{1}{5})$

e) $t + (-\frac{3}{4})$ f) $u + (-\frac{2}{5})$

g) $v + (-.7)$ h) $x + (-.01)$

i) $d + (-3.7)$ j) $e + 12$

k) $f + \frac{1}{5}$ l) $h + .2$

m) $m + 1$ n) $p + 0$

Ejercicio 7.

a) $a + (-b)$ b) $r + (-p)$

c) $x + (-y)$ d) $d + (-f)$

e) $r + (-s)$ f) $t + (-w)$

g) $a + (-a)$ h) $c + (-c)$

Ejercicio 8.

a) $r - m$ b) $x - t$

c) $p - q$ d) $a - b$

e) $z - w$ f) $w - w$

Ejercicio 9.

a) cero b) cero c) cero

VI. Ecuaciones

1. Resolución de ecuaciones con números racionales.

Ejercicio 1.

a) $m = 9$ b) $n = -8$ c) $p = -4.1$

d) $q = 10.8$ e) $r = 19.5$ f) $s = -11$

g) $t = -5$ h) $u = -.4$

Ejercicio 2.

a) $x + (-3.4) = -5$ b) $x + 17 = 9$

c) $m + (-2.2) = 3.7$ d) $r + 2 = -14.2$

e) $-6.8 = t$ f) $n = -12.3$

g) $29 = r$

Ejercicio 3.

a) $x = 4$	b) $y = 29$	c) $n = 0$
d) $t = 4.6$	e) $h = 1$	f) $i = \frac{1}{2}$
g) $x = -5.1$	h) $n = -8.6$	i) $m = -.6$
j) $r = -.3$	k) $y = -62.3$	l) $z = -6.2$
m) $r = -13$	n) $n = -3.7$	o) $a = 17$
p) $x = 87.2$	q) $b = -12$	r) $d = -6.4$
s) $n = 17.5$	t) $r = 21.2$	u) $s = 14$
v) $t = -7.4$	w) $p = 6.8$	x) $w = 1.5$

2. Resolución de problemas por medio de ecuaciones.

Ejercicio 4.

Ecuación:	Solución:	Respuesta:
b) $x - 35 = -6$	$x = 29$	El número es 29.
c) $x + (-12) = 26$	$x = 38$	El número es 38.
d) $x - (-6) = 10$	$x = 4$	El número es 4.
e) $x + (-7) = -7$	$x = 0$	El número es 0.
f) $x - (-3) = -10$	$x = -13$	El número es -13.
g) $x - (-13) = 0$	$x = -13$	El número es -13.

Ejercicio 5.

Ecuación:	Solución:	Respuesta:
a) $x + (-37) = 32$	$x = 69$	69 grados
b) $m + 8.3 = -5.2$	$m = -13.5$	-13.5 grados
c) $s + (-1.5) = -4.3$	$s = -2.8$	-2.8 grados

d) $r + 12 = 40$ $\quad r = 28 \quad$ 28 grados

e) $5.3 + x = 25$ $\quad x = 19.7 \quad$ 19.7 grados

f) $-7.5 + x = -1.3$ $\quad x = 6.2 \quad$ 6.2 grados

VII. Multiplicación de números racionales

1. Multiplicación de dos factores positivos.

Ejercicio 1.

a) $\frac{15}{48}$ b) $\frac{7}{20}$ c) $\frac{96}{40}$ d) $\frac{90}{12}$

e) $\frac{100}{80}$ f) $\frac{420}{420}$ g) $\frac{10}{8}$ h) $\frac{28}{9}$

i) $\frac{65}{17}$ j) $\frac{255}{100}$

Ejercicio 2.

a) 94.8 b) 225.96 c) 79.52

d) 52.65 e) 11.4 f) 10.53

g) 2.544 h) 42.721 i) .611

j) 571.8582

2. Multiplicación de un factor positivo y un factor negativo.

Ejercicio 3.

a) -24 b) -60 c) -64 d) -300

e) -26 f) -28 g) -120 h) $-2\,724$

i) $-\frac{15}{48}$ j) $-\frac{42}{20}$ k) $-\frac{24}{45}$ l) $-\frac{60}{140}$

m) $-\frac{15}{36}$ n) $-\frac{24}{60}$ o) -39.6 p) -66

q) -81.2 r) -23.6 s) -9.1 t) -7.2

u) -18.3 v) -1.48

3. Multiplicación de dos factores negativos.

Ejercicio 4.

a) 90 b) 280 c) 30 600 d) $\frac{40}{15}$

e) $\frac{26}{45}$ f) 11.6 g) 10 h) 252

4. Propiedades de la multiplicación de racionales.

Ejercicio 5.

a) $7(-6 + 8) = -42 + 56 = 14$

b) $5(10 + (-3)) = 50 + (-15) = 35$

c) $12(-3 + (-2)) = -36 + (-24) = -60$

d) $20(-8 + (-2)) = -160 + (-40) = -200$

e) $-5(4 + 3) = -20 + (-15) = -35$

f) $-2(-15 + 18) = 30 + (-36) = -6$

g) $-4(-2 + (-8)) = 8 + 32 = 40$

h) $-10(-9 + (-6)) = 90 + 60 = 150$

i) $-40(-10 + 5) = 400 + (-200) = 200$

j) $-12(-5 + 15) = 60 + (-180) = -120$

Ejercicio 6.

	Número	Inverso multiplicativo	Comprobación
c)	2	$\frac{1}{2}$	$(2)\left(\frac{1}{2}\right) = 1$
d)	-2	$-\frac{1}{2}$	$(-2)\left(-\frac{1}{2}\right) = 1$
e)	$-\frac{8}{3}$	$-\frac{3}{8}$	$\left(-\frac{8}{3}\right)\left(-\frac{3}{8}\right) = 1$
f)	$-\frac{4}{5}$	$-\frac{5}{4}$	$\left(-\frac{4}{5}\right)\left(-\frac{5}{4}\right) = 1$
g)	$-.2$	-5	$(-.2)(-5) = 1$

Ejercicio 7.

a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{18}$ c) $\frac{3}{2}$ d) $\frac{9}{5}$

e) $-\frac{1}{2}$ f) $-\frac{7}{6}$ g) $-\frac{35}{12}$ h) $\frac{1}{7}$

i) $-\frac{1}{4}$ j) $-\frac{8}{11}$ k) $-\frac{3}{25}$

5. Uso de las propiedades de la multiplicación.

Ejercicio 8.

a) -480 b) 210 c) -26

d) 720 e) 7.2 f) $-1\,024$

g) -63 h) -856 i) $1\,250$

j) -340 k) 9.6 l) 0

m) $-8a$ n) 0 o) -9

Ejercicio 9.

b) 1 c) 90 d) -1 f) 0

g) -18 h) -88.9 i) $-4\,056$ j) 12

k) -157.464

6. El número -1 en la multiplicación de racionales.

Ejercicio 10.

a) -4 b) -7 c) 9 d) 3.7

e) $-\frac{2}{3}$ f) $\frac{7}{4}$ g) 17.5 h) -8.4

i) -5.34 j) 43.9

Ejercicio 11.

a) -14 b) $-y$ c) $-p$ d) $-q$

e) $-z$ f) $-1 \cdot 5$ g) $-1 \cdot \frac{3}{4}$ h) $-1 \cdot b$

i) $-1 \cdot d$ j) $-1 \cdot r$ k) $-1 \cdot a$ l) $-1 \cdot x$

Ejercicio 12.

a) $x = 12$ b) $a = -8$ c) $y = -16$

d) $q = -1$ e) $b = 1.3$ f) $z = -3.7$

VIII. Potenciación de números racionales.

1. Potencias de números racionales

Ejercicio 1.

c) 100, 100 d) 25, 25 e) -27, $(-3)^3$

f) 6.25, 6.25 g) 144, $(-12)^2$ h) .36, $(.6)^2$

i) .16, .16

Ejercicio 2.

b) -125 c) 16 d) 6.25

e) -3.375 f) -64 g) 81

h) 17.64 i) 64 j) 1.44

k) 64 l) 1.44 m) 0

Ejercicio 3.

a) 27 b) .01 c) 10.24

d) $-1\,000$ e) $\frac{1}{4}$ f) $-\frac{1}{27}$

g) 0 h) 1

Ejercicio 4.

a)

m	1	3	5	-1	-3	-5
m^3	1	27	125	-1	-27	-125

b)

t	$\frac{1}{2}$	.2	.1	$-\frac{1}{2}$	$-.2$	$-.1$
t^2	$\frac{1}{4}$	.04	.01	$\frac{1}{4}$	.04	.01

c)

w	2	4	6	-2	-4	-5
w^3	8	64	216	-8	-64	-125

d)

x	1	5	10	-3	-2	$-.3$
x^2	1	25	100	9	4	.09

Ejercicio 5.

b) $7 \cdot 7 \cdot 7$ c) $8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8$ d) $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$

e) $m\ m$ f) $x\ x\ x\ x$ g) $x\ x\ x$

h) $m\ m\ m\ m$ i) $y\ y\ y\ y\ y$ j) $z\ z\ z\ z\ z\ z$

Ejercicio 6.

b) 5^3 c) n^2 d) a^3 e) x^4

f) m^4 g) y^5 h) r^5

IX. Expresiones algebraicas

1. Valor numérico.

Ejercicio 1.

a) -4 b) -20 c) 49 d) 200

e) 3 f) 32 g) 0 h) -10

i) 8 j) 300

Ejercicio 2.

a)

a	2	-1	-3	$-.5$
$-3a^2$	-12	-3	-27	$-.75$

b)

m	$\frac{1}{2}$	3	.2	-3
$5m^3$	$\frac{5}{8}$	135	.04	-135

c)

r	-2	3	-3	$\frac{1}{2}$
s	1	5	-5	$-\frac{1}{3}$
$-2rs$	4	-30	-30	$\frac{1}{3}$

d)

x	-5	3	-2	.5
y	-1	2	-3	.2
$-xy^2$	5	-12	18	$-.02$

Ejercicio 3.

a) 20 b) 0 c) -16

d) 5 e) 26 f) -4.83

g) -28 h) -6 i) 0

Ejercicio 4.

a)

a	-1	.5	2	-3
$3a - 2a + 5$	4	5.5	7	2

b)

b	0	-1	1	3
$-2b^2 + b - 5$	-5	-8	-6	-20

c)

m	1	2	-3	4
n	-1	2	3	-4
$-2mn^2 + 3mn^2$	1	8	-27	64

2. Expresiones algebraicas que tienen el mismo valor numérico.

(No hay ejercicios.)

3. Simplificación de expresiones algebraicas

Ejercicio 5.

a) $15t$ b) $19a$ c) $72b$

d) $7x$ e) $-6r$ f) $-23v$

g) $-11y$ h) $18.9d$ i) $-4.4w$

j) $10.7q$ k) $-4y^2$ l) $24x^2$

m) $2a^3$ n) $1.3c^3$ o) $5.1z^2$

p) $8.7p^2$

Ejercicio 6.

a) -33 b) -8 c) 8

d) -3.8 e) 14.25 f) -10.8

g) 24 h) -24.25 i) 45.5

j) $\frac{3}{2}$

Ejercicio 7.

a) $3a - 8b$ b) $-5x - 4y + 6$

c) $5a - 13b - 8$ d) $-5t + 5r + 12$

e) $23a^3 + 5a^2$ f) $-2x^2 - 8x + 7$

g) $23ab + 13x^3 - 3$ h) $-13r^3 - 5r^2 + 2r + 10$

i) $12x^2y + .9xy^2$ j) $18t^4 - 34t^3 - t^2 - 12t$

4. Simplificación de algunas expresiones de multiplicación.

Ejercicio 8.

a) x^5 b) x^6 c) y^6 d) m^4

e) n^7 f) p^6 g) r^9 h) s^4

i) c^5 j) t^6 k) a^9 l) d^7

m) l^8 n) t^{11} o) n^{11} p) n^6

Ejercicio 9.

La regla podría ser la siguiente:

"Cuando se multiplican potencias de la misma base, hay que sumar los exponentes". Así el resultado será una potencia cuya base es la misma que la de los factores y cuyo exponente es la suma de los exponentes de éstos.

Ejercicio 10.

a) $6m^4$ b) $-12m^4$ c) $-45x^6$

d) $-30r^6$ e) $-36m^6$ f) $70m^3$

g) $42m^4$ h) $135x^4$ i) $3x^3$

j) $2m^2$ k) $-6x^3$ l) $15m^4$

m) $3n^4$ n) $-m^2$ o) m^2

p) $-60m^5n^2$ q) $1.3r^6$ r) $.6a^6$

s) $2.76m^3n^3$ t) $-\frac{1}{6}d^7$ u) $.1g^6$

Ejercicio 11.

a) $42a + 35$

b) $24b^3 - 72$

c) $-21c^2 - 8.4$

d) $-28.8x^4 + 25.2$

e) $5x^3 + 10y$

f) $-20a^2 + 24b^3$

g) $-12.4t^3 - 19.22r$

h) $31.6z^4 - 47.4z^3$

i) $8x^3 + 14x$

j) $-30y^4 + 54y^3$

k) $35.5a^3 - 28.4a^2$

l) $-25.5t^5 - 44.2t^3$

m) $12x^6 + 60x^3y^2$

n) $45q^5 - 30q^3r^4$

o) $-80zw^5 + 20zt^3$

p) $-52r^4 - 32r^3t^2$

q) $-14a^7 - 28a^5$

r) $10a^4b^3 - 6a^3b^2$

s) $-6x^7 + 18x^6 - 15x^4$

t) $.12a^5 + .24a^3 - .6a^2$

Ejercicio 12.

a) $(x + 1)(x + 3) = (x + 1)x + (x + 1)3$
$= x^2 + x + 3x + 3$
$= x^2 + 4x + 3$

b) $(a + 4)(a + 7) = (a + 4)a + (a + 4)7$
$= a^2 + 4a + 7a + 28$
$= a^2 + 11a + 28$

c) $(t + 6)(t + 5) = (t + 6)t + (t + 6)5$
$= t^2 + 6t + 5t + 30$
$= t^2 + 11t + 30$

d) $(y + 10)(y + 2) = y(y + 2) + 10(y + 2)$
$= y^2 + 2y + 10y + 20$
$= y^2 + 12y + 20$

e) $(b + 8)(b + 9) = b(b + 9) + 8(b + 9)$
$= b^2 + 9b + 8b + 72$
$= b^2 + 17b + 72$

f) $(d + .4)(d + .5) = d(d + .5) + .4(d + .5)$
$= d^2 + .5d + .4d + .2$
$= d^2 + .9d + .2$

g) $(f + .1)(f + 5.2) = (f + .1)f + (f + .1)5.2$

$= f^2 + .1f + 5.2f + .52$

$= f^2 + 5.3f + .52$

h) $(h + \frac{1}{2})(h + \frac{3}{2}) = (h + \frac{1}{2})h + (h + \frac{1}{2})\frac{3}{2}$

$= h^2 + \frac{1}{2}h + \frac{3}{2}h + \frac{3}{4}$

$= h^2 + 2h + \frac{3}{4}$

i) $(r + 5)(r + 4) = (r + 5)r + (r + 5)4$

$= r^2 + 5r + 4r + 20$

$= r^2 + 9r + 20$

j) $(2m + 3)(2m + 6) = (2m + 3)2m + (2m + 3)6$

$= 4m^2 + 6m + 12m + 18$

$= 4m^2 + 18m + 18$

k) $(4m + 70)(4n + 4) = (4m + 70)4n + (4m + 70)4$

$= 16mn + 280n + 16m + 280$

l) $(3x + 2)(3x + 7) = (3x + 2)3x + (3x + 2)7$

$= 9x^2 + 6x + 21x + 14$

$= 9x^2 + 27x + 14$

m) $(3y + 6)(y + 5) = 3y(y + 5) + 6(y + 5)$

$= 3y^2 + 15y + 6y + 30$

$= 3y^2 + 21y + 30$

n) $(a + 2)(5a + 9) = a(5a + 9) + 2(5a + 9)$

$= 5a^2 + 9a + 10a + 18$

$= 5a^2 + 19a + 18$

o) $(x + 3)^2 = (x + 3)(x + 3)$

$= (x + 3)x + (x + 3)3$

$= x^2 + 3x + 3x + 9$

$= x^2 + 6x + 9$

p) $(a + 5)^2 = (a + 5)(a + 5)$

$= (a + 5)a + (a + 5)5$

$= a^2 + 5a + 5a + 25$

$= a^2 + 10a + 25$

q) $(b + 1)^2 = (b + 1)(b + 1)$

$= b(b + 1) + 1(b + 1)$

$= b^2 + b + b + 1$

$= b^2 + 2b + 1$

r) $(d + 6)^2 = (d + 6)(d + 6)$

$= d(d + 6) + 6(d + 6)$

$= d^2 + 6d + 6d + 36$

$= d^2 + 12d + 36$

s) $(t + 4)^2 = (t + 4)(t + 4)$

$= (t + 4)t + (t + 4)4$

$= t^2 + 4t + 4t + 16$

$= t^2 + 8t + 16$

t) $(x + y)^2 = (x + y)(x + y)$

$= x(x + y) + y(x + y)$

$= x^2 + xy + xy + y^2$

$= x^2 + 2xy + y^2$

u) $(2x + 4)^2 = (2x + 4)(2x + 4)$

$= 2x(2x + 4) + 4(2x + 4)$

$= 4x^2 + 8x + 8x + 16$

$= 4x^2 + 16x + 16$

v) $(3y + 1)^2 = (3y + 1)(3y + 1)$

$= (3y + 1)3y + (3y + 1)1$

$= 9y^2 + 3y + 3y + 1$

$= 9y^2 + 6y + 1$

w) $(3a + 2b)^2 = (3a + 2b)(3a + 2b)$

$= 3a(3a + 2b) + 2b(3a + 2b)$

$= 9a^2 + 6ab + 6ab + 4b^2$

$= 9a^2 + 12ab + 4b^2$

Ejercicio 13.

a) $(a + 6)(a - 4) = (a + 6)(a + (-4))$

$= (a + 6)a + (a + 6)(-4)$

$= a^2 + 6a + (-4a) + (-24)$

$= a^2 + 2a - 24$

b) $(y - 5)(y + 8) = (y + (-5))(y + 8)$

$= y(y + 8) + (-5)(y + 8)$

$= y^2 + 8y + (-5y) + (-40)$

$= y^2 + 3y - 40$

c) $(t + 4)(t - 6) = (t + 4)(t + (-6))$

$= t(t + (-6)) + 4(t + (-6))$

$= t^2 + (-6t) + 4t + (-24)$

$= t^2 - 2t - 24$

d) $(x - 10)(x + 7) = (x + (-10))(x + 7)$

$= x(x + 7) + (-10)(x + 7)$

$= x^2 + 7x + (-10x) + (-70)$

$= x^2 - 3x - 70$

e) $(b - 12)(b + 1) = (b + (-12))(b + 1)$

$= b(b + 1) + (-12)(b + 1)$

$= b^2 + b + (-12b) + (-12)$

$= b^2 - 11b - 12$

f) $(q + 2)(q - 3) = (q + 2)(q + (-3))$

$= (q + 2)q + (q + 2)(-3)$

$= q^2 + 2q + (-3q) + (-6)$

$= q^2 - q - 6$

g) $(r - 7)(r - 3) = (r + (-7))(r + (-3))$

$= (r + (-7))r + (r + (-7))(-3)$

$= r^2 + (-7r) + (-3r) + 21$

$= r^2 - 10r + 21$

h) $(y - 5)(y - 6) = (y + (-5))(y + (-6))$

$= y(y + (-6)) + (-5)(y + (-6))$

$= y^2 + (-6y) + (-5y) + 30$

$= y^2 - 11y + 30$

i) $(h - 1)(h - 8) = (h + (-1))(h + (-8))$

$= (h + (-1))h + (h + (-1))(-8)$

$= h^2 + (-h) + (-8h) + 8$

$= h^2 - 9h + 8$

j) $(k - 6)(k - 1.5) = (k + (-6))(k + (-1.5))$

$= k(k + (-1.5)) + (-6)(k + (-1.5))$

$= k^2 + (-1.5k) + (-6k) + 9$

$= k^2 - 7.5k + 9$

k) $(m - \frac{1}{2})(m - \frac{5}{2}) = (m + (-\frac{1}{2}))(m + (-\frac{5}{2}))$

$= m(m + (-\frac{5}{2})) + (-\frac{1}{2})(m + (-\frac{5}{2}))$

$= m^2 + (-\frac{5}{2}m) + (-\frac{1}{2}m) + \frac{5}{4}$

$= m^2 - 3m + \frac{5}{4}$

l) $(3x - 8)(3x + 6) = (3x + (-8))(3x + 6)$

$= (3x + (-8))3x + (3x + (-8))6$

$= 9x^2 + (-24x) + 18x + (-48)$

$= 9x^2 - 6x - 48$

m) $(5a - 3)(5a + 8) = (5a + (-3))(5a + 8)$

$= 5a(5a + 8) + (-3)(5a + 8)$

$= 25a^2 + 40a + (-15a) + (-24)$

$= 25a^2 + 25a - 24$

n) $(4z + 9)(z - 5) = (4z + 9)(z + (-5))$

$= (4z + 9)z + (4z + 9)(-5)$

$= 4z^2 + 9z + (-20z) + (-45)$

$= 4z^2 - 11z - 45$

o) $(6p - 6)(2p - 4) = (6p + (-6))(2p + (-4))$
$= 6p(2p + (-4)) + (-6)(2p + (-4))$
$= 12p^2 + (-24p) + (-12p) + 24$
$= 12p^2 - 36p + 24$

p) $(4x - 3.6)(x - 1.5) = (4x + (-3.6))(x + (-1.5))$
$= (4x + (-3.6))x + (4x + (-3.6))(-1.5)$
$= 4x^2 + (-3.6x) + (-6x) + 5.4$
$= 4x^2 - 9.6x + 5.4$

q) $(y - 3)^2 = (y - 3)(y - 3)$
$= (y + (-3))(y + (-3))$
$= (y + (-3))y + (y + (-3))(-3)$
$= y^2 + (-3y) + (-3y) + 9$
$= y^2 - 6y + 9$

r) $(a - 5)^2 = (a - 5)(a - 5)$
$= (a + (-5))a + (a + (-5))(-5)$
$= a^2 + (-5a) + (-5a) + 25$
$= a^2 - 10a + 25$

s) $(b - 7)^2 = (b - 7)(b - 7)$
$= (b + (-7))(b + (-7))$
$= b(b + (-7)) + (-7)(b + (-7))$
$= b^2 + (-7b) + (-7)b + 49$
$= b^2 - 14b + 49$

t) $(s - 8)^2 = (s + (-8))(s + (-8))$
$= (s + (-8))s + (s + (-8))(-8)$
$= s^2 + (-8s) + (-8s) + 64$
$= s^2 - 16s + 64$

u) $(d - 3.5)^2 = (d - 3.5)(d - 3.5)$
$= (d + (-3.5))(d + (-3.5))$
$= (d + (-3.5))d + (d + (-3.5))(-3.5)$
$= d^2 + (-3.5d) + (-3.5d) + 12.25$
$= d^2 - 7d + 12.25$

v) $(2k - 5)^2 = (2k - 5)(2k - 5)$
$= (2k + (-5))(2k + (-5))$
$= (2k + (-5))2k + (2k + (-5))(-5)$
$= 4k^2 + (-10k) + (-10k) + 25$
$= 4k^2 - 20k + 25$

w) $(6m - 2n)^2 = (6m - 2n)(6m - 2n)$

$= (6m + (-2n))(6m + (-2n))$

$= 6m(6m + (-2n)) + (-2n)(6m + (-2n))$

$= 36m^2 + (-12mn) + (-12mn) + 4n^2$

$= 36m^2 - 24mn + 4n^2$

x) $(7x - 5y)^2 = (7x - 5y)(7x - 5y)$

$= (7x + (-5y))(7x + (-5y))$

$= 7x(7x + (-5y)) + (-5y)(7x + (-5y))$

$= 49x^2 + (-35xy) + (-35xy) + 25y^2$

$= 49x^2 - 70xy + 25y^2$

X. División de números racionales

1. Definición del cociente.

Ejercicio 1.

a) -5 b) -5 c) -4 d) -5
e) -7 f) -1 g) -5 h) -4
i) -5 j) -10 k) 3 l) 7
m) 6 n) 6 o) 3

Ejercicio 2.

b) -3. El cociente es -3 porque $-3 \times (-.07) = .21$
c) $-\frac{3}{4}$. El cociente es $-\frac{3}{4}$ porque $(-\frac{3}{4})(-\frac{1}{3}) = \frac{3}{12}$
d) -6. El cociente es -6 porque $(-6)(-.5) = 3$
e) $-.05$. El cociente es $-.05$ porque $(-.05)(-10) = .5$
f) $-.25$. El cociente es $-.25$ porque $(-.25)(-48) = 12$
g) -3.1. El cociente es -3.1 porque $(-3.1)(-6.2) = 19.22$

Ejercicio 3.

a) -32. El cociente es -32, porque $-32 \times 46 = -1\,472$
b) $-.9$. El cociente es $-.9$, porque $(-.9) \times 18 = -16.2$
c) $-\frac{2}{4}$ El cociente es $-\frac{2}{4}$, porque $(-\frac{2}{4}) \times \frac{3}{5} = -\frac{6}{20}$
d) -7. El cociente es -7, porque $(-7) \times 1.5 = -10.5$
e) $-.01$. El cociente es $-.01$, porque $(-.01) \times .1 = -.001$
f) -27. El cociente es -27, porque $(-27) \times 36 = -972$

Ejercicio 4.

a) .4. El cociente es .4, porque $.4 \times (-1.5) = -.6$

b) 20. El cociente es 20, porque $20 \times (-35) = -700$

c) $\frac{3}{5}$. El cociente es $\frac{3}{5}$ porque $\frac{3}{5} \times (-\frac{1}{2}) = -.3$

d) $\frac{1}{4}$. El cociente es $\frac{1}{4}$, porque $\frac{1}{4} \times (-100) = -25$

e) 35.2. El cociente es 35.2, porque $35.2 \times (-.1) = -3.52$

f) 81. El cociente es 81, porque $81 \times (-\frac{1}{3}) = -27$

Ejercicio 5.

a) -2.4	b) -5.3	c) 1.9
d) $-.2$	e) $.4$	f) $-.2$
g) $\frac{21}{10}$	h) $-\frac{4}{5}$	i) $-\frac{4}{30}$
j) -5	k) -4	l) 1
m) -1	n) 0	o) $-.2$

2. La división y los inversos multiplicativos.

Ejercicio 6.

a) $\dfrac{\frac{3}{5}}{-\frac{2}{7}} = \frac{3}{5} \times -\frac{7}{2} = -\frac{21}{10}$

El inverso multiplicativo de $-\frac{2}{7}$ es $-\frac{7}{2}$

b) $\dfrac{-\frac{1}{3}}{\frac{3}{4}} = -\frac{1}{3} \times \frac{4}{3} = -\frac{4}{9}$

El inverso multiplicativo de $\frac{3}{4}$ es $\frac{4}{3}$

c) $\dfrac{-9}{-25} = -9 \times -.04 = .36$

El inverso multiplicativo de -25 es $-.04$

d) $\dfrac{-49}{-4} = -49 \times -.25 = 12.25$

El inverso multiplicativo de -4 es $-.25$.

e) $\dfrac{-\frac{3}{8}}{-\frac{6}{15}} = -\dfrac{3}{8} \times -\dfrac{15}{6} = \dfrac{45}{48}$

El inverso multiplicativo de $-\dfrac{6}{15}$ es $-\dfrac{15}{6}$

f) $\dfrac{-\frac{7}{5}}{-6} = -\dfrac{7}{5} \times (-\dfrac{1}{6}) = \dfrac{7}{30}$

El inverso multiplicativo de -6 es $-\dfrac{1}{6}$

g) $\dfrac{-9}{\frac{15}{2}} = -9 \times \dfrac{2}{15} = -\dfrac{18}{15}$

El inverso multiplicativo de $\dfrac{15}{2}$ es $\dfrac{2}{15}$

Ejercicio 7.

b) $n \cdot \dfrac{1}{y}$ c) $x \cdot \dfrac{1}{b}$ d) $a \cdot \dfrac{1}{t}$

e) $-p \cdot \dfrac{1}{r}$ f) $k \cdot \dfrac{1}{-m}$ g) $x^2 \cdot \dfrac{1}{a}$

h) $n^2 \cdot \dfrac{1}{b}$ i) $-x \cdot \dfrac{1}{y^2}$ j) $r \cdot \dfrac{1}{a^2}$

k) $m \cdot m \cdot m \cdot \dfrac{1}{x \cdot x}$ l) $r \cdot r \cdot \dfrac{1}{b \cdot b \cdot b}$

Ejercicio 8.

b) $\dfrac{r}{k}$ c) $\dfrac{y}{b}$ d) $\dfrac{x}{n}$

e) $\dfrac{a}{y}$ f) $\dfrac{t}{x}$ g) $\dfrac{-n}{x}$

h) $\dfrac{r}{-s}$ i) $\dfrac{x^2}{n}$ j) $\dfrac{a \cdot a}{x}$

k) $\dfrac{-a}{-r}$ l) $\dfrac{-b^3}{-x}$ m) $\dfrac{r \cdot r \cdot r}{a \cdot a}$

n) $\dfrac{x \cdot x \cdot x \cdot x}{y \cdot y \cdot y}$

XI. Ecuaciones

1. Resolución de ecuaciones.

Ejercicio 1.

a) $4x = -16$

b) $-2y = 5$

c) $r = 6$

d) $z = -\frac{7}{5}$

Ejercicio 2.

a) 7.9 b) −6.8 c) −7.5

d) 18.9 e) −5.4 f) −16.3

g) x h) y i) r

j) m k) r l) m

Ejercicio 3.

a)
$$8y = -29.6$$
$$\frac{8y}{8} = \frac{-29.6}{8}$$
$$y = -3.7$$

b)
$$-5.3t = -37.1$$
$$\frac{-5.3t}{-5.3} = \frac{-37.1}{-5.3}$$
$$t = 7$$

c)
$$\frac{3}{5}r = \frac{2}{7}$$
$$\frac{5}{3} \cdot \frac{3}{5}r = \frac{5}{3} \cdot \frac{2}{7}$$
$$1 \cdot r = \frac{10}{21}$$
$$r = \frac{10}{21}$$

d)
$$-\frac{1}{4}s = -\frac{3}{5}$$
$$-4 \cdot \left(-\frac{1}{4}s\right) = -4\left(-\frac{3}{5}\right)$$
$$1 \cdot s = \frac{12}{5}$$
$$s = \frac{12}{5}$$

e)
$$-12.4w = 64.48$$
$$\frac{-12.4w}{-12.4} = \frac{64.48}{-12.4}$$
$$w = -5.2$$

f)
$$9.1m = -7.28$$
$$\frac{9.1m}{9.1} = \frac{-7.28}{9.1}$$
$$m = -.8$$

g)
$$-\frac{5}{7}n = -\frac{1}{2}$$
$$\left(-\frac{7}{5}\right)\left(-\frac{5}{7}\right)n = \left(-\frac{7}{5}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)$$
$$1 \cdot n = \frac{7}{10}$$
$$n = \frac{7}{10}$$

h)
$$-7.2d = 29.52$$
$$\frac{-7.2d}{-7.2} = \frac{29.52}{-7.2}$$
$$d = -4.1$$

i) $-1x = -4.8$

$$\frac{-1x}{-1} = \frac{-4.8}{-1}$$

$$x = 4.8$$

j) $-1s = \frac{3}{5}$

$$\frac{-1s}{-1} = \frac{\frac{3}{5}}{-1}$$

$$s = -\frac{3}{5}$$

k) $4.7z = -15.04$

$$\frac{4.7z}{4.7} = \frac{-15.04}{4.7}$$

$$z = -3.2$$

l) $-7y = 87.5$

$$\frac{-7y}{-7} = \frac{87.5}{-7}$$

$$y = -12.5$$

m) $q\,(-4.9) = 28.91$

$$\frac{q\,(-4.9)}{-4.9} = \frac{28.91}{-4.9}$$

$$q = -5.9$$

n) $r \cdot \frac{7}{9} = -\frac{10}{45}$

$$r \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{9}{7} = -\frac{10}{45} \cdot \frac{9}{7}$$

$$r \cdot 1 = -\frac{90}{315}$$

$$r = -\frac{2}{7}$$

o) $s\,(-17.5) = 1$

$$\frac{s\,(-17.5)}{-17.5} = \frac{1}{-17.5}$$

$$s = -\frac{1}{17.5}$$

$$s = -\frac{10}{175}$$

p) $-8.6x = 0$

$$\frac{-8.6x}{-8.6} = \frac{0}{-8.6}$$

$$x = 0$$

Ejercicio 4.

a) $\frac{v}{5.8} = -.4$

$$\frac{v}{5.8}\ (5.8) = (-.4)\,5.8$$

$$v = -2.32$$

b) $\frac{y}{-6.4} = 1.2$

$$\frac{y}{-6.4}\,(-6.4) = 1.2\,(-6.4)$$

$$y = -7.68$$

c) $\frac{q}{\frac{3}{5}} = -\frac{4}{7}$

$$\frac{q}{\frac{3}{5}}\ \left(\frac{3}{5}\right) = \left(-\frac{4}{7}\right)\left(\frac{3}{5}\right)$$

$$q = -\frac{12}{35}$$

d) $\frac{q}{4.3} = -2.4$

$$\frac{q}{4.3}\ (4.3) = (-2.4)\ (4.3)$$

$$q = -10.32$$

e) $\frac{x}{7.2} = -.8$

$\frac{x}{7.2} \cdot 7.2 = (-.8)\,7.2$

$x = -5.76$

f) $\frac{m}{-5.7} = -12.1$

$\frac{m}{-5.7}(-5.7) = (-12.1)(-5.7)$

$m = 68.97$

g) $\frac{t}{4.8} = -7$

$\frac{t}{4.8}(4.8) = -7\,(4.8)$

$t = -33.6$

h) $\frac{z}{-5} = .8$

$\frac{z}{-5} \cdot (-5) = .8\,(-5)$

$z = -4$

i) $\frac{r}{-.7} = -12.8$

$\frac{r}{-.7}(-.7) = (-12.8)(-.7)$

$r = 8.96$

j) $\frac{z}{-\frac{3}{7}} = 0$

$\frac{z}{-\frac{3}{7}} \cdot \left(-\frac{3}{7}\right) = 0 \cdot \left(-\frac{3}{7}\right)$

$z = 0$

Ejercicio 5.

a) $\frac{24}{y} = -3$

$\frac{24}{y} \cdot y = (-3)\,y$

$24 = -3y$

$-3y = 24$

$\frac{-3y}{-3} = \frac{24}{-3}$

$y = -8$

b) $\frac{-63}{t} = -9$

$\frac{63}{t} \cdot t = (-9)\,t$

$-63 = -9t$

$-9t = -63$

$\frac{-9t}{-9} = \frac{-63}{-9}$

$t = 7$

c) $\frac{-36}{p} = 12$

$\frac{-36}{p} \cdot p = 12p$

$-36 = 12p$

$12p = -36$

$\frac{12p}{12} = \frac{-36}{12}$

$p = -3$

d) $\frac{23.2}{x} = -4$

$\frac{23.2}{x} \cdot x = (-4)\,x$

$23.2 = -4x$

$-4x = 23.2$

$\frac{-4x}{-4} = \frac{23.2}{-4}$

$x = -5.8$

e) $\frac{21.6}{y} = 3.6$

$\frac{21.6}{y} \cdot y = 3.6y$

$21.6 = 3.6y$

$3.6y = 21.6$

$\frac{3.6y}{3.6} = \frac{21.6}{3.6}$

$y = 6$

f) $\frac{-11.52}{z} = -4.8$

$\frac{-11.52}{z} \cdot z = (-4.8)\,z$

$-11.52 = -4.8z$

$-4.8z = -11.52$

$\frac{-4.8z}{-4.8} = \frac{-11.52}{-4.8}$

$z = 2.4$

g) $\frac{-9.84}{t} = 12.3$

$\frac{-9.84}{t} \cdot t = 12.3 \cdot t$

$-9.84 = 12.3t$

$12.3t = -9.84$

$\frac{12.3t}{12.3} = \frac{-9.84}{12.3}$

$t = -.8$

h) $\frac{13.68}{r} = -1.9$

$\frac{13.68}{r} \cdot r = (-1.9)\,r$

$13.68 = -1.9r$

$-1.9r = 13.68$

$\frac{-1.9r}{-1.9} = \frac{13.68}{-1.9}$

$r = -7.2$

i) $\frac{-33.6}{s} = -7$

$\frac{-33.6}{s} \cdot s = (-7)\,s$

$-33.6 = -7s$

$-7s = -33.6$

$\frac{-7s}{-7} = \frac{-33.6}{-7}$

$s = 4.8$

j) $\frac{53.38}{q} = -15.7$

$\frac{53.38}{q} \cdot q = (-15.7)\,q$

$53.38 = -15.7q$

$-15.7q = 53.38$

$\frac{-15.7q}{-15.7} = \frac{53.38}{-15.7}$

$q = -3.4$

Ejercicio 6.

a) $17.9 - x = 9.6$

$17.9 - x + (-17.9) = 9.6 + (-17.9)$

$-x = -8.3$

$x = 8.3$

b) $$-18.9 - y = 7.4$$
$$-18.9 - y + 18.9 = 7.4 + 18.9$$
$$-y = 26.3$$
$$y = -26.3$$

c) $$23.7 - t = -8.4$$
$$23.7 - t + (-23.7) = -8.4 + (-23.7)$$
$$-t = -32.1$$
$$t = 32.1$$

d) $$-16.9 - r = -9.4$$
$$-16.9 - r + 16.9 = -9.4 + 16.9$$
$$-r = 7.5$$
$$r = -7.5$$

e) $$-x + 4.1 = -8.7$$
$$-x + 4.1 + (-4.1) = -8.7 + (-4.1)$$
$$-x = -12.8$$
$$x = 12.8$$

f) $$-q - 6.9 = 19.7$$
$$-q + (-6.9) + 6.9 = 19.7 + 6.9$$
$$-q = 26.6$$
$$q = -26.6$$

Ejercicio 7.

a) $$5x + 9 = -11$$
$$5x + 9 + (-9) = -11 + (-9)$$
$$5x = -20$$
$$\frac{5x}{5} = \frac{-20}{5}$$
$$x = -4$$

b) $$-4y + 2 = -14$$
$$-4y + 2 + (-2) = -14 + (-2)$$
$$-4y = -16$$
$$\frac{-4y}{-4} = \frac{-16}{-4}$$
$$y = 4$$

c) $$-2a - 5 = -21$$
$$-2a + (-5) + 5 = -21 + 5$$
$$-2a = -16$$
$$\frac{-2a}{-2} = \frac{-16}{-2}$$
$$a = 8$$

d) $$\frac{b}{4} - 2 = -7$$
$$\frac{b}{4} + (-2) + 2 = -7 + 2$$
$$\frac{b}{4} = -5$$
$$\frac{b}{4}(4) = -5(4)$$
$$b = -20$$

e) $$4.7d + 6.8 = -21.4$$
$$4.7d + 6.8 + (-6.8) = -21.4 + (-6.8)$$
$$4.7d = -28.2$$
$$\frac{4.7d}{4.7} = \frac{-28.2}{4.7}$$
$$d = -6$$

f) $$-5.6f - 2.9 = -24.18$$
$$-5.6f + (-2.9) + 2.9 = -24.18 + 2.9$$
$$-5.6f = -21.28$$
$$\frac{-5.6f}{-5.6} = \frac{-21.28}{-5.6}$$
$$f = 3.8$$

g) $$-7.1g + 5.76 = 36.29$$
$$-7.1g + 5.76 + (-5.76) = 36.29 + (-5.76)$$
$$-7.1g = 30.53$$
$$\frac{-7.1g}{-7.1} = \frac{30.53}{-7.1}$$
$$g = -4.3$$

h) $$\frac{h}{-5.8} - 7.2 = -14$$
$$\frac{h}{-5.8} + (-7.2) + 7.2 = -14 + 7.2$$
$$\frac{h}{-5.8} = -6.8$$
$$\frac{h}{-5.8}(-5.8) = (-6.8)(-5.8)$$
$$h = 39.44$$

i) $$\frac{m}{3.7} + 12.7 = 4.2$$

$$\frac{m}{3.7} + 12.7 + (-12.7) = 4.2 + (-12.7)$$

$$\frac{m}{3.7} = -8.5$$

$$\frac{m}{3.7} \quad (3.7) = (-8.5)\ (3.7)$$

$$m = -31.45$$

j) $$-7.8q + 5.34 = -14.94$$

$$-7.8q + 5.34 + (-5.34) = -14.94 + (-5.34)$$

$$-7.8q = -20.28$$

$$\frac{-7.8q}{-7.8} = \frac{-20.28}{-7.8}$$

$$q = 2.6$$

k) $$\frac{38.72}{r} + 6.8 = -5.3$$

$$\frac{38.72}{r} + 6.8 + (-6.8) = -5.3 + (-6.8)$$

$$\frac{38.72}{r} = -12.1$$

$$\frac{38.72}{r} \cdot r = (-12.1)\,r$$

$$38.72 = -12.1r$$

$$\frac{38.72}{-12.1} = \frac{-12.1r}{-12.1}$$

$$-3.2 = r$$

l) $$\frac{-33.75}{k} - 14.5 = 23$$

$$\frac{-33.75}{k} + (-14.5) + 14.5 = 23 + 14.5$$

$$\frac{-33.75}{k} = 37.5$$

$$\frac{-33.75}{k} \cdot k = 37.5k$$

$$-33.75 = 37.5k$$

$$\frac{-33.75}{37.5} = \frac{37.5k}{37.5}$$

$$-.9 = k$$

m) $$\frac{12.78}{n} - 17.6 = -38.9$$

$$\frac{12.78}{n} + (-17.6) + 17.6 = -38.9 + 17.6$$

$$\frac{12.78}{n} = -21.3$$

$$\frac{12.78}{n} \cdot n = (-21.3)\,n$$

$$12.78 = -21.3n$$

$$\frac{12.78}{-21.3} = \frac{-21.3n}{-21.3}$$

$$\boxed{-.6 = n}$$

n) $$\frac{82.56}{i} + 23.9 = 6.7$$

$$\frac{82.56}{i} + 23.9 + (-23.9) = 6.7 + (-23.9)$$

$$\frac{82.56}{i} = -17.2$$

$$\frac{82.56}{i} \cdot i = (-17.2)\,i$$

$$82.56 = -17.2i$$

$$\frac{82.56}{-17.2} = \frac{-17.2i}{-17.2}$$

$$-4.8 = i$$

o) $$7.8p + 28.86 = 0$$

$$7.8p + 28.86 + (-28.86) = 0 + (-28.86)$$

$$7.8p = -28.86$$

$$\frac{7.8p}{7.8} = \frac{-28.86}{7.8}$$

$$p = -3.7$$

p) $$\frac{t}{5.7} - 4.9 = 0$$

$$\frac{t}{5.7} + (-4.9) + 4.9 = 0 + 4.9$$

$$\frac{t}{5.7} = 4.9$$

$$\frac{t}{5.7}\,(5.7) = (4.9)\,5.7$$

$$t = 27.93$$

q)
$$3(x - 5) + 2 = 5$$
$$3x - 15 + 2 = 5$$
$$3x - 13 = 5$$
$$3x + (-13) + 13 = 5 + 13$$
$$3x = 18$$
$$\frac{3x}{3} = \frac{18}{3}$$
$$x = 6$$

r)
$$-6(2y + 3) + 7 = 1$$
$$-12y + (-18) + 7 = 1$$
$$-12y + (-11) = 1$$
$$-12y + (-11) + 11 = 1 + 11$$
$$-12y = 12$$
$$\frac{-12y}{-12} = \frac{12}{-12}$$
$$y = -1$$

s)
$$7 + 4(2 - x) = -9$$
$$7 + 8 + (-4x) = -9$$
$$15 + (-4x) = -9$$
$$15 + (-4x) + (-15) = -9 + (-15)$$
$$-4x = -24$$
$$\frac{-4x}{-4} = \frac{-24}{-4}$$
$$x = 6$$

t)
$$12.3 - 5.1(t - 2) = 5.16$$
$$12.3 - 5.1t + 10.2 = 5.16$$
$$22.5 - 5.1t = 5.16$$
$$22.5 - 5.1t + (-22.5) = 5.16 + (-22.5)$$
$$-5.1t = -17.34$$
$$\frac{-5.1t}{-5.1} \qquad \frac{-17.34}{-5.1}$$
$$t = 3.4$$

Ejercicio 8.

a) $2y + 7y = 37.8$

$$9y = 37.8$$

$$\frac{9y}{9} = \frac{37.8}{9}$$

$$y = 4.2$$

b) $-5t + 8t = -8.4$

$$3t = -8.4$$

$$\frac{3t}{3} = \frac{-8.4}{3}$$

$$t = -2.8$$

c) $6r = 15r + 45.9$

$$6r + (-15r) = 15r + 45.9 + (-15r)$$

$$-9r = 45.9$$

$$\frac{-9r}{-9} = \frac{45.9}{-9}$$

$$r = -5.1$$

d) $8.5v - 17.3v = -58.96$

$$-8.8v = -58.96$$

$$\frac{-8.8v}{-8.8} = \frac{-58.96}{-8.8}$$

$$v = 6.7$$

e) $23.1x + 25.2 = 19.5x$

$$23.1x + 25.2 + (-19.5x) = 19.5x + (-19.5x)$$

$$3.6x + 25.2 = 0$$

$$3.6x + 25.2 + (-25.2) = 0 + (-25.2)$$

$$3.6x = -25.2$$

$$\frac{3.6x}{3.6} = \frac{-25.2}{3.6}$$

$$x = -7$$

f)
$$4.9z + 46.44 + 3.7z = 0$$
$$8.6z + 46.44 = 0$$
$$8.6z + 46.44 + (-46.44) = 0 + (-46.44)$$
$$8.6z = -46.44$$
$$\frac{8.6z}{8.6} = \frac{-46.44}{8.6}$$
$$z = -5.4$$

g)
$$-25.8a + 87.2 = -14.9a$$
$$-25.8a + 87.2 + 14.9a = -14.9a + 14.9a$$
$$-10.9a + 87.2 = 0$$
$$-10.9a + 87.2 + (-87.2) = 0 + (-87.2)$$
$$-10.9a = -87.2$$
$$\frac{-10.9a}{-10.9} = \frac{-87.2}{-10.9}$$
$$a = 8$$

h)
$$1.7p - 23.5p - 54.5 = 0$$
$$-21.8p - 54.5 = 0$$
$$-21.8p + (-54.5) + 54.5 = 0 + 54.5$$
$$-21.8p = 54.5$$
$$\frac{-21.8p}{-21.8} = \frac{54.5}{-21.8}$$
$$p = -2.5$$

i)
$$14q - 27q = 72.8$$
$$-13q = 72.8$$
$$\frac{-13q}{-13} = \frac{72.8}{-13}$$
$$q = -5.6$$

j)
$$-57d + 40.8 = -69d$$
$$-57d + 69d + 40.8 = -69d + 69d$$
$$12d + 40.8 = 0$$
$$12d + 40.8 + (-40.8) = 0 + (-40.8)$$
$$12d = -40.8$$
$$\frac{12d}{12} = \frac{-40.8}{12}$$
$$d = -3.4$$

k) $$-8k + 5k - 12.7 = -37.9$$

$$-3k - 12.7 = -37.9$$

$$-3k + (-12.7) + 12.7 = -37.9 + 12.7$$

$$-3k = -25.2$$

$$\frac{-3k}{-3} = \frac{-25.2}{-3}$$

$$k = 8.4$$

l) $$9.7i - 18.4 - 2.3i = -55.4$$

$$7.4i - 18.4 = -55.4$$

$$7.4i + (-18.4) + 18.4 = -55.4 + 18.4$$

$$7.4i = -37$$

$$\frac{7.4i}{7.4} = \frac{-37}{7.4}$$

$$i = -5$$

m) $$23.15 - 23.6j = -10.9j - 34$$

$$23.15 - 23.6j + 10.9j = -10.9j - 34 + 10.9j$$

$$23.15 - 12.7j = -34$$

$$23.15 - 12.7j + (-23.15) = -34 + (-23.15)$$

$$-12.7j = -57.15$$

$$\frac{-12.7j}{-12.7} = \frac{-57.15}{-12.7}$$

$$j = 4.5$$

n) $$-53.8 + 17.5m = 4.8m + 22.4$$

$$-53.8 + 17.5m + (-4.8m) = 4.8m + 22.4 + (-4.8m)$$

$$-53.8 + 12.7m = 22.4$$

$$-53.8 + 12.7m + 53.8 = 22.4 + 53.8$$

$$12.7m = 76.2$$

$$\frac{12.7m}{12.7} = \frac{76.2}{12.7}$$

$$m = 6$$

o) $3(x - 5) + 5(x + 8) - 1 = 0$

$$3x - 15 + 5x + 40 - 1 = 0$$
$$8x + 24 = 0$$
$$8x + 24 + (-24) = 0 + (-24)$$
$$8x = -24$$
$$\frac{8x}{8} = \frac{-24}{8}$$
$$x = -3$$

p) $-6(4 - y) + 2(y + 3) - 18 = 4$

$$-24 + 6y + 2y + 6 - 18 = 4$$
$$8y - 36 = 4$$
$$8y + (-36) + 36 = 4 + 36$$
$$8y = 40$$
$$\frac{8y}{8} = \frac{40}{8}$$
$$y = 5$$

q) $-2.3(h - 4) - 58.6 - 9.8h = 16.8 - 5.7(6 + h)$

$$-2.3h + 9.2 - 58.6 - 9.8h = 16.8 - 34.2 - 5.7h$$
$$-12.1h - 49.4 = -17.4 - 5.7h$$
$$-12.1h - 49.4 + 5.7h = -17.4 + (-5.7h) + 5.7h$$
$$-6.4h - 49.4 = -17.4$$
$$-6.4h + (-49.4) + 49.4 = -17.4 + 49.4$$
$$-6.4h = 32$$
$$\frac{-6.4h}{-6.4} = \frac{32}{-6.4}$$
$$h = -5$$

r) $3.6(5 - u) + 17.8 - 12.6u = 7.1(u - 2) - 136.4$

$$18 - 3.6u + 17.8 - 12.6u = 7.1u - 14.2 - 136.4$$
$$35.8 - 16.2u = 7.1u - 150.6$$
$$35.8 - 16.2u + (-7.1u) = 7.1u - 150.6 + (-7.1u)$$
$$35.8 + (-23.3u) = -150.6$$
$$35.8 + (-23.3u) + (-35.8) = -150.6 + (-35.8)$$
$$-23.3u = -186.4$$
$$\frac{-23.3u}{-23.3} = \frac{-186.4}{-23.3}$$
$$u = 8$$

s)
$$4x + 73 = -5(3x - 7)$$
$$4x + 73 = -15x + 35$$
$$4x + 73 + 15x = -15x + 35 + 15x$$
$$19x + 73 = 35$$
$$19x + 73 + (-73) = 35 + (-73)$$
$$19x = -38$$
$$\frac{19x}{19} = \frac{-38}{19}$$
$$x = -2$$

t)
$$5(2a + 3) - 4(3a - 2) - 17 = -7a + 2(4a - 9) + 27$$
$$10a + 15 - 12a + 8 - 17 = -7a + 8a - 18 + 27$$
$$-2a + 6 = a + 9$$
$$-2a + 6 + (-a) = a + 9 + (-a)$$
$$-3a + 6 = 9$$
$$-3a + 6 + (-6) = 9 + (-6)$$
$$-3a = 3$$
$$\frac{-3a}{-3} = \frac{3}{-3}$$
$$a = -1$$

2. Resolución de problemas por medio de ecuaciones.

Ejercicio 9.

a) Ecuación: $3x + 18.5 = -19.6$ Solución: $x = -12.7$
Respuesta. El número es -12.7.

b) Ecuación. $2x - (-16.7) = 7.1$ Solución: $x = -4.8$
Respuesta. El número es -4.8

c) Ecuación: $4x - 17.8 = -68.6$ Solución: $x = -12.7$
Respuesta. El número es -12.7

d) Ecuación: $x + 2x - 14.8 = -32.5$ Solución: $x = -5.9$
Respuesta. El número es -5.9

e) Ecuación: $5x + 27.6 = 3x$ Solución: $x = -13.8$
Respuesta. El número es -13.8

f) Ecuación: $x + x + 1 = -113$ Solución: $x = -57$
Respuesta. Los números son -57 y -56

g) Ecuación: $x + x + 2 = -72$ Solución: $x = -37$
Respuesta. Los números son -37 y -35.

h) Ecuación: $2p - 5(p + 2) = -148$ Solución: $p = 46$
Respuesta. Los números son 46 y 48.

i) Ecuación: $x + x + 1 + x + 2 + x + 3 = -58$ Solución: $x = -16$
Respuesta. Los números son -16, -15, -14 y -13.

j) Ecuación: $n + n + 2 = -90$ Solución: $n = -46$
Respuesta. Los números son -46 y -44.

k) Ecuación: $3(n + 1) - 2n = 36$ Solución: $n = 33$
Respuesta. Los números son 33 y 34.

l) Ecuación: $2(3x + 6) + 2(2x - 5) = 84$ Solución: $x = 8.2$
Respuesta. El rectángulo mide 30.6 metros de largo y 11.4 metros de ancho.

m) Ecuación: $4x + 3.8 + 2x - 6.3 + 3x + 5.1 = 87.2$
Solución: $x = 9.4$
Respuesta. Los lados miden: 41.4 cm, 12.5 cm y 33.3 cm.

n) Ecuación: $3x - 7.5 + 3x + 4.6 + x + 12.6 + 2x + 18.3 = 256.6$
Solución: $x = 25.4$ m.
Respuesta. Los lados del terreno miden 68.7 m, 80.8 m, 38 m y 69.1 m.

o) Ecuación: $2(x + 3x) = 59.2$ Solución: $x = 7.4$
Respuesta. El rectángulo mide 22.2 cm de largo y 7.4 cm de ancho.

p) Ecuación: $x + 4x - 28 = 147$ Solución: $x = 35$
Respuesta. Uno mide 35° y el otro 112°.

q) Ecuación: $3x - 26 + x = 180.$ Solución: $x = 51.5$
Respuesta. $\measuredangle A = 128.5°$ y $\measuredangle B = 51.5°$

r) Ecuación: $x + 2x + 18 = 90$ Solución: $x = 24$
Respuesta. Un ángulo mide 24° y el otro 66°.

s) Ecuación: $.8x = 2\,400$ Solución: $x = 3\,000$
Respuesta. A los 16 años necesitaba 3 000 calorías.

t) Ecuación: $.125x = 6$ Solución: $x = 48$
Respuesta. El grupo tiene 48 alumnos.

u) Ecuación: $2x - 246.75 = 3\,466.15$ Solución: $x = 1856.45$
Respuesta. Su sueldo antes del aumento era de \$ 1856.45.

v) Ecuación: $.5x + 9 + .x = 51$ Solución: $x = 28$
Respuesta. Luz María tiene 23 años y Jorge tiene 28 años.

CAPITULO SEGUNDO

Los números reales

I. Raíz cuadrada

1. Raíces cuadradas positivas.

Ejercicio 1.

a) $7^2 = 49$ b) $5^2 = 25$ c) $6^2 = 36$

d) $3^2 = 9$ e) $x = 2$ f) $a = 9$

g) $b = 10$ h) $c = 8$ i) $d = \frac{1}{2}$

j) $e = .1$ k) a

Ejercicio 2.

a) 20 b) 30 c) $\frac{3}{4}$

d) .3 e) 125 f) 35

g) $\sqrt{10.24} = 3.2$ h) $\sqrt{15\,876} = 126$ i) $\sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$

Ejercicio 3.

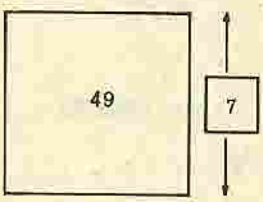
a) $\sqrt{2\,025} = 45$ b) $\sqrt{121} = 11$

c) $\sqrt{\frac{1}{64}} = \frac{1}{8}$ d) $\sqrt{.0009} = .03$

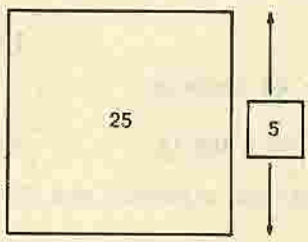
e) $\sqrt{.25} = \frac{5}{10}$ f) $\sqrt{13.69} = 3.7$

g) $\sqrt{2.25} = 1.5$ h) $\sqrt{a^2} = a$

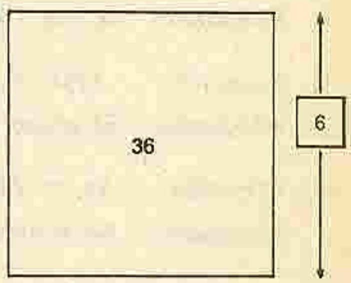
Ejercicio 4.

a)


$\sqrt{49} = 7$

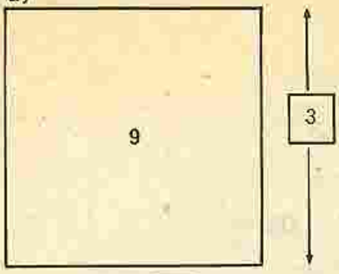
b)


$\sqrt{25} = 5$

c)


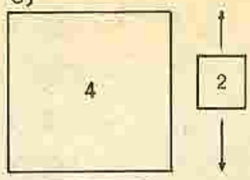
$\sqrt{36} = 6$

d)



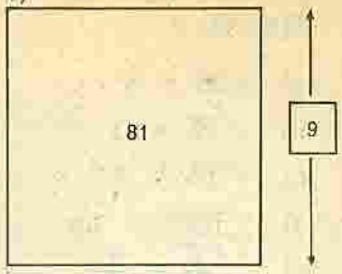
$\sqrt{9} = 3$

e)



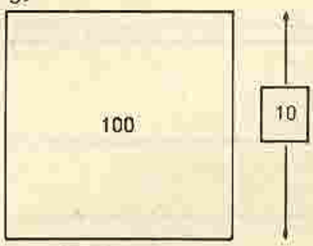
$\sqrt{4} = 2$

f)



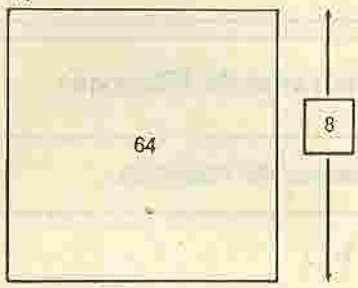
$\sqrt{81} = 9$

g)



$\sqrt{100} = 10$

h)



$\sqrt{64} = 8$

Ejercicio 5.

a) $(\sqrt{49})^2 = 49$ b) $(\sqrt{25})^2 = 25$ c) $(\sqrt{36})^2 = 36$

d) $(\sqrt{9})^2 = 9$ e) $(\sqrt{4})^2 = 4$ f) $(\sqrt{81})^2 = 81$

g) $(\sqrt{100})^2 = 100$ h) $(\sqrt{a})^2 = a$

2. Raíces cuadradas negativas.

Ejercicio 6.

a) La raíz cuadrada negativa de 100 es -10, porque $(-10)^2 = 100$

b) La raíz cuadrada negativa de 25 es -5 porque $(-5)^2 = 25$.

c) La raíz cuadrada negativa de 16 es -4, porque $(-4)^2 = 16$.

d) La raíz cuadrada negativa de 9 es -3, porque $(-3)^2 = 9$.

e) La raíz cuadrada negativa de 1 es -1 porque $(-1)^2 = 1$.

f) La raíz cuadrada negativa de .01 es $-.1$, porque $(-.1)^2 = .01$.

Ejercicio 7.

a) $\sqrt{25} = 5$ $\qquad -\sqrt{25} = -5$

b) $\sqrt{.09} = .3$ $\qquad -\sqrt{.09} = -.3$

c) $\sqrt{.36} = .6$ $\qquad -\sqrt{.36} = -.6$

d) $\sqrt{.0081} = .09$ $\qquad -\sqrt{.0081} = -.09$

e) $\sqrt{\frac{1}{64}} = \frac{1}{8}$ $\qquad -\sqrt{\frac{1}{64}} = -\frac{1}{8}$

f) $\sqrt{12.25} = 3.5$ $\qquad -\sqrt{12.25} = -3.5$

g) $\sqrt{\frac{121}{49}} = \frac{11}{7}$ $\qquad -\sqrt{\frac{121}{49}} = -\frac{11}{7}$

II. El Teorema de Pitágoras.

1. El Teorema de Pitágoras.

Ejercicio 1.

a) Area del cuadrado $C = 25$.

b) Area de $M = 625$.

c) Area de $S = 289$

d) Area de $F = \frac{5}{16}$

e) Area de $J = 21.73$

Ejercicio 2.

a) Area del cuadrado $B = 16$.

b) Area de $Y = 1\,349$

c) Area de $G = \frac{33}{4}$

d) Area de $V = 19.2$

e) Area de $K = .45$

f) Area de $C = m - n$

Ejercicio 3.

b) Area de $M = 8^2 = 64$

Area de $P = 12^2 = 144$

Area de $N = 64 + 144 = 208$

c) Area de $X = 85^2 = 7\,225$

Area de $Y = 43^2 = 1\,849$

Area de $W = 7\,225 + 1\,849 = 9\,074$

d) Area de $H = (\frac{7}{4})^2 = \frac{49}{16}$

Area de $I = (\frac{9}{4})^2 = \frac{81}{16}$

Area de $J = \frac{49}{16} + \frac{81}{16} = \frac{130}{16}$

e) Area de $K = 6.8^2 = 46.24$

Area de $L = 7.6^2 = 57.76$

Area de $M = 46.24 + 57.76 = 104$

f) Area de $O = 9.5^2 = 90.25$

Area de $P = 13.4^2 = 179.56$

Area de $N = 90.25 + 179.56 = 269.81$

Ejercicio 4.

b) Area de $R = 43^2 = 1\,849$

Area de $S = 22^2 = 484$

Area de $T = 1\,849 - 484 = 1\,365$

c) Area de $M = 88^2 = 7\,744$

Area de $P = 56^2 = 3\,136$

Area de $Z = 7\,744 - 3\,136 = 4\,608$

d) Area de $R = (\frac{12}{5})^2 = \frac{144}{25}$

Area de $V = (\frac{3}{5})^2 = \frac{9}{25}$

Area de $T = \frac{144}{25} - \frac{9}{25} = \frac{135}{25}$

e) Area de $C = 16.1^2 = 259.21$

Area de $A = 5.7^2 = 32.49$

Area de $E = 259.21 - 32.49 = 226.72$

Ejercicio 5.

a) $c = 5$ b) $c = 13$ c) $c = 41$

d) $c = 85$ e) $a = 8$ f) $b = 35$

g) $b = 63$ h) $a = 72$

Ejercicio 6.

a) $c = 8.5$ b) $c = 50$ c) $c = 65$

d) $b = 60$ e) $a = 7$ f) $a = 12$

g) $a = 13$

2. Problemas

a) La diagonal mide 74 metros.

b) La diagonal $\overline{PQ}$ mide 50 metros. No se puede calcular la medida de $\overline{PQ}$ con las medidas de $\overline{PS}$ y $\overline{SQ}$ usando el Teorema de Pitágoras, porque éste sólo se aplica a triángulos *rectángulos*.

c) El tirante de acero mide 17 metros.

d) El cateto $\overline{AB}$ mide 12 centímetros.

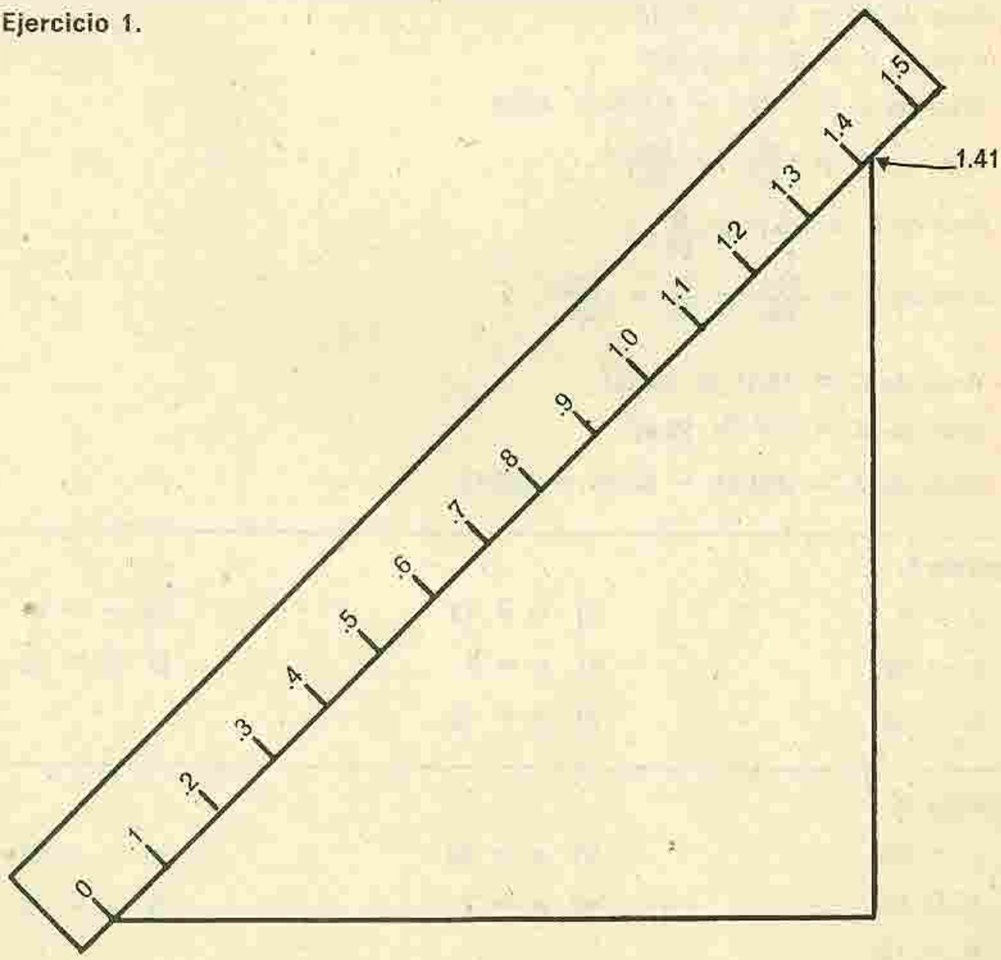
e) $\overline{AC}$ mide 14 unidades.

f) La diagonal marcada en rojo mide 13 metros.

III. La Raíz Cuadrada de 2.

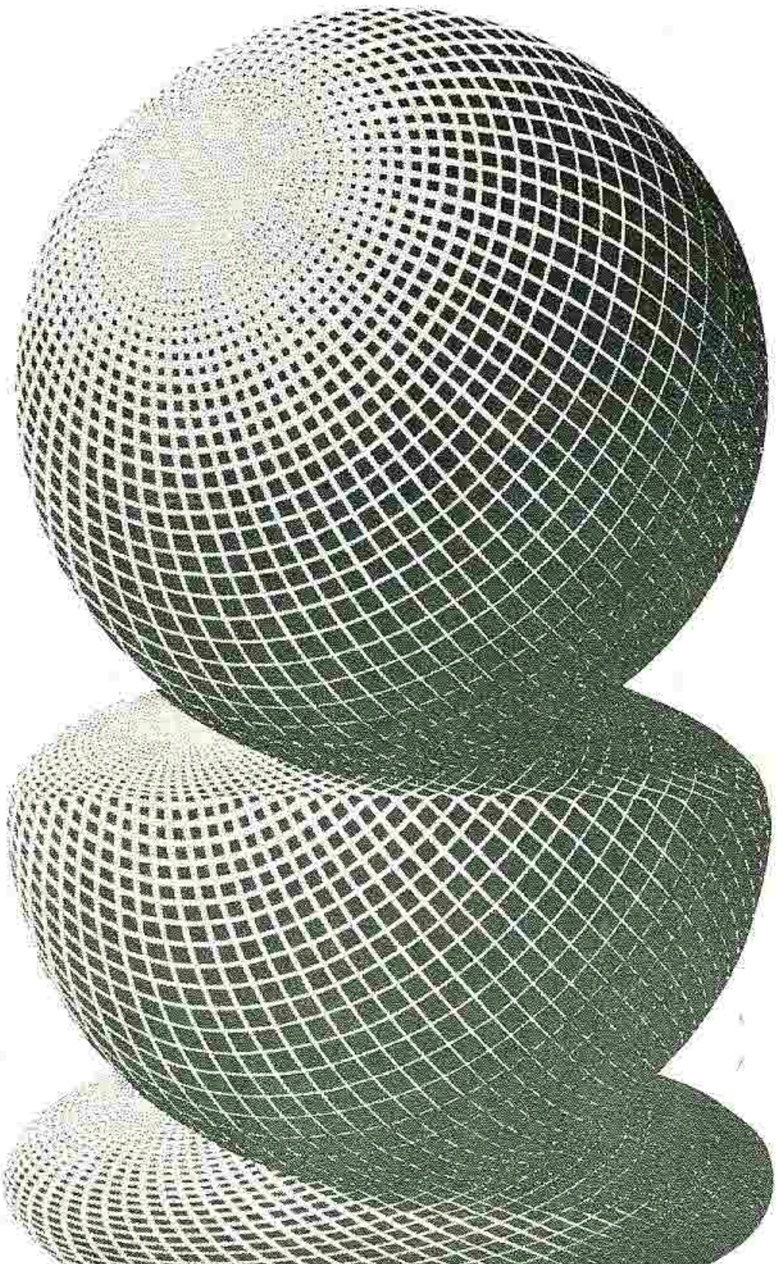
2. Aproximación racional del número $\sqrt{2}$.

Ejercicio 1.



Sexta impresión:

ESTA IMPRESION DE 100,000 EJEMPLARES SE TERMINO EN MAYO DE 1981, EN GRUPO EDITORIAL MEXICANO, S.A. NAUCALPAN, EDO. DE MEXICO.

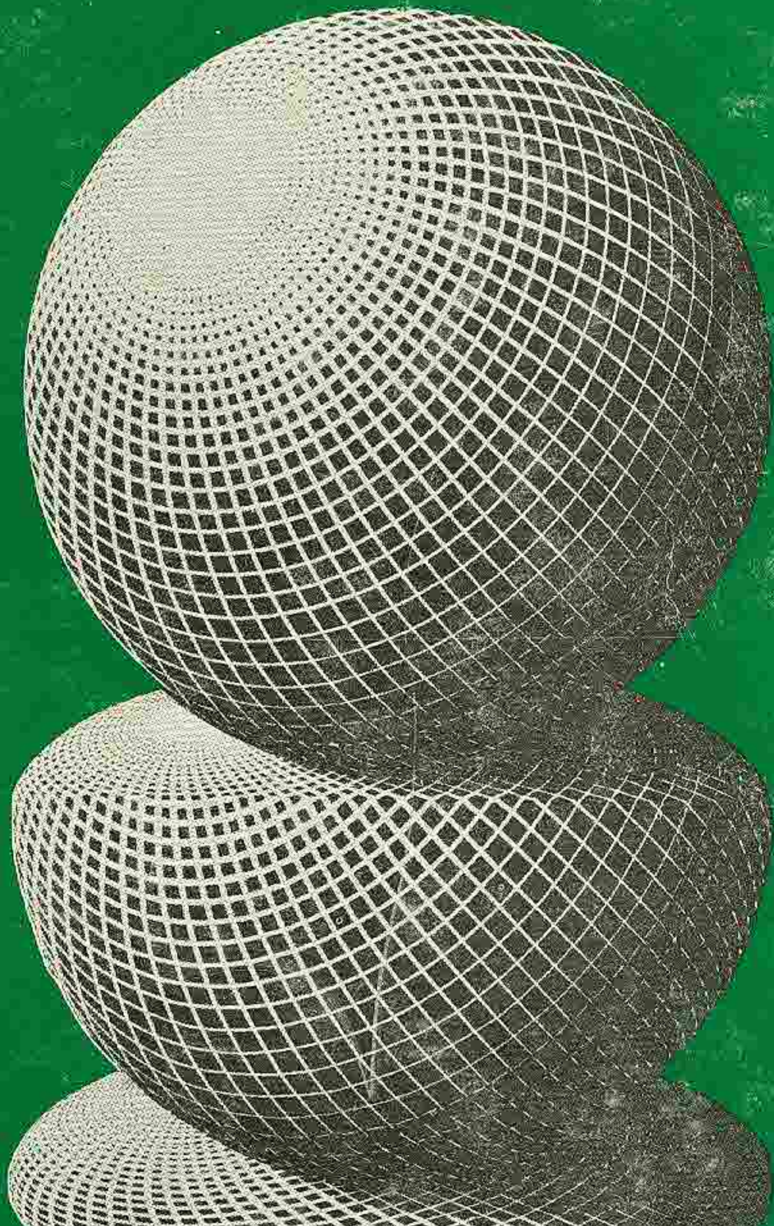


Segundo grado

MATEMATICAS

secundaria abierta

SEP



C. E. C. S. A.

Segunda parte

Este libro es parte del plan de secundaria abierta, que tiene por objeto acreditar la enseñanza media a sectores de la población que no han tenido oportunidad de ir a la escuela. Se publica dentro de un convenio establecido entre la Secretaría de Educación Pública y la Cámara Nacional de la Industria Editorial, para hacer llegar libros de calidad y a precios económicos a dichos sectores.

COMPAÑIA EDITORIAL CONTINENTAL, S. A.
MEXICO – ESPAÑA – ARGENTINA – CHILE – VENEZUELA
COLOMBIA

MIEMBRO DE LA CAMARA NACIONAL DE LA INDUSTRIA EDITORIAL
Registro Núm. 43

IMPRESO EN MEXICO PRINTED IN MEXICO

Segundo grado
MATEMATICAS
Segunda parte

SEP CONAFE CNIE CECSA

Autores: Dr. Humberto Cárdenas Trigos
Instituto de Matemáticas, UNAM

Profr. Miguel Angel Curiel Ariza
Secretaría de Educación Pública

Dr. Emilio Lluis Riera
Instituto de Matemáticas, UNAM

Profr. Fidel Peralta Corona
Secretaría de Educación Pública

Profr. Cuauhtémoc Tavera Guerrero
Secretaría de Educación Pública

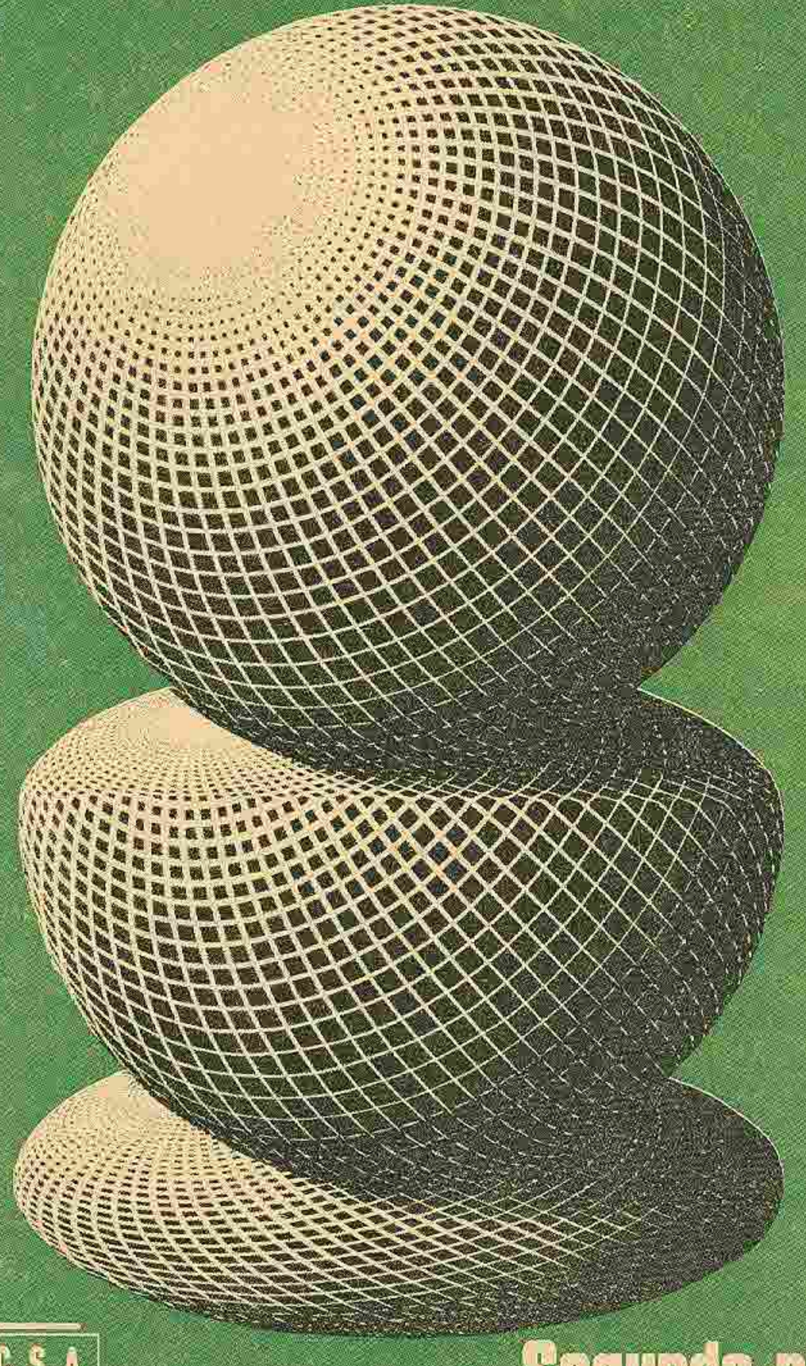
Profr. Elías V. Villar Quijano
Secretaría de Educación Pública

Dibujos de las páginas 239, 249, 261, 279, 281, 299, 311, 325, 327, 345, 371, 385, 405 de **M. C. Escher.**

Segundo grado

MATEMATICAS

secundaria abierta SEP



C. E. C. S. A.

Segunda parte

Indice

Capítulo cuarto

Geometría

I. Congruencia

II. Semejanza

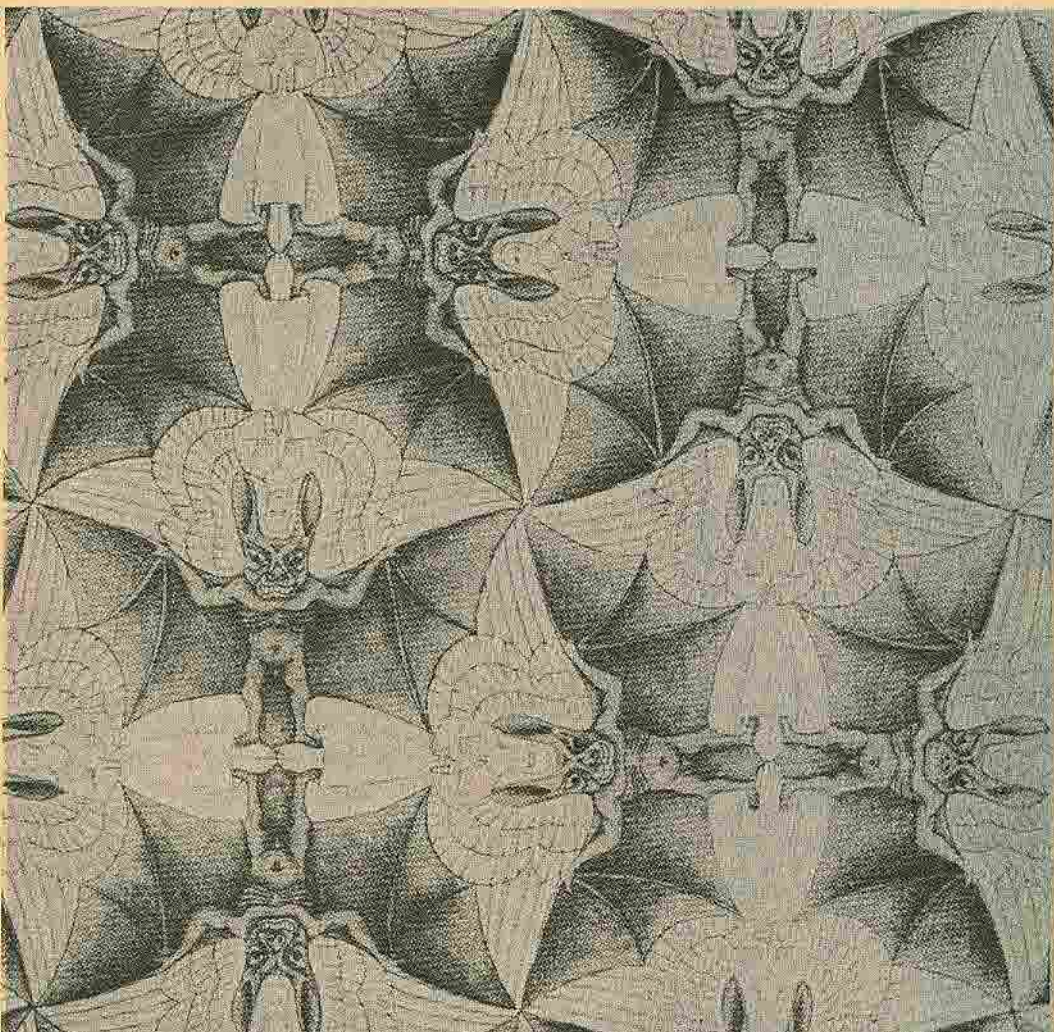
III. Polígonos regulares

IV. Area

Soluciones a los ejercicios y problemas

IV

Los números reales



1. Los números irracionales.

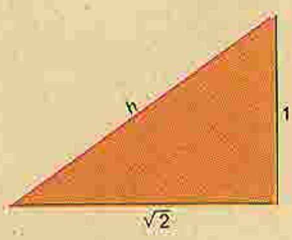
Además de $\sqrt{2}$, existen otros números que **no son racionales**, o sea, que no se pueden expresar con una fracción común o con un decimal periódico. A este tipo de números se les llama **números irracionales.**

A continuación trazaremos algunos segmentos cuyas medidas son números irracionales:

a) Trazamos un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 1 unidad cada uno.

Ya sabemos que $\sqrt{2}$ es un número irracional, porque no hay ningún racional que elevado al cuadrado sea 2.

b) Trazamos ahora un triángulo rectángulo, de modo que un cateto mida $\sqrt{2}$ y el otro cateto mida 1.



En este triángulo ocurre que

el área del cuadrado de lado 1 es $1^2 = 1$

el área del cuadrado de lado $\sqrt{2}$ es $(\sqrt{2})^2 = 2$*

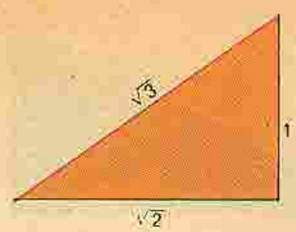
el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa es h^2

Por el teorema de Pitágoras tenemos que

$$\boxed{h^2 = 1 + 2 = 3}$$

La longitud de la hipotenusa es el número que elevado al cuadrado da 3. Ese número es la raíz cuadrada de 3, se le simboliza como $\sqrt{3}$ y es un irracional, porque no hay ningún racional que elevado al cuadrado sea 3.

* Recuerde que $\sqrt{2}$ es el número que elevado al cuadrado es igual a 2.



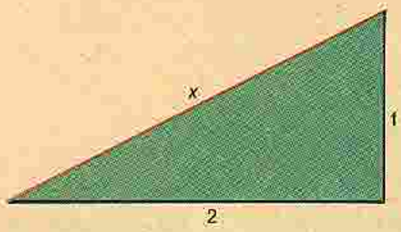
Ejercicio 1. Use su compás para localizar en la escala de abajo un segmento congruente con la hipotenusa del triángulo anterior. Encuentre una aproximación racional, hasta décimos, para $\sqrt{3}$.

$\sqrt{3}$ es aproximadamente igual a

El número $\sqrt{3}$ tiene una notación decimal que, como en todos los irracionales, es infinita y no periódica.

$$\boxed{\sqrt{3} = 1.732\ldots}$$

En el siguiente triángulo rectángulo, la medida de la hipotenusa también es un número irracional.



El área del cuadrado de lado 1 es $1^2 = 1$

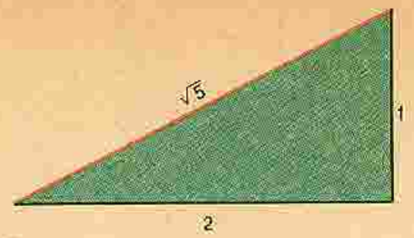
el área del cuadrado de lado 2 es $2^2 = 4$

el área del cuadrado de lado x es x^2 y, por el teorema de Pitágoras, ocurre que

$$\boxed{x^2 = 1 + 4 = 5}$$

x es el número que elevado al cuadrado da 5. O sea, es la raíz cuadrada de 5. Se le simboliza como $\sqrt{5}$ y se sabe que es irracional, porque no hay ningún racional que elevado al cuadrado sea 5.

Ejercicio 2. Encuentre en la escala de abajo una aproximación racional, hasta décimos, para $\sqrt{5}$.



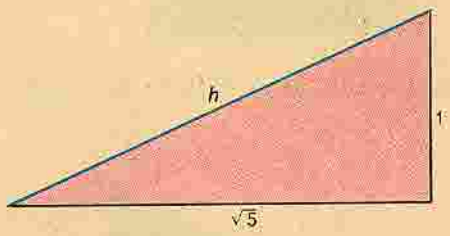
$\sqrt{5}$ es aproximadamente igual a

El número $\sqrt{5}$ tiene una notación decimal que es infinita y no periódica.

$$\boxed{\sqrt{5} = 2.236\ldots}$$

A los segmentos cuya medida es un número irracional les llamaremos **segmentos irracionales.**

En el siguiente triángulo rectángulo encontramos dos segmentos irracionales. Uno de ellos es la hipotenusa y el otro es el cateto que mide $\sqrt{5}$.



En este triángulo tenemos que

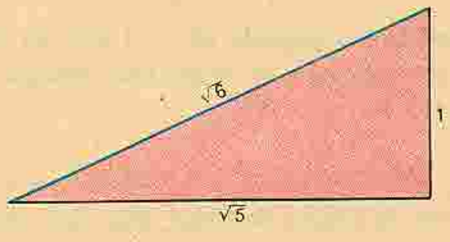
el área del cuadrado de lado 1 es $1^2 = 1$

el área del cuadrado de lado $\sqrt{5}$ es $(\sqrt{5})^2 = 5$*

el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa es h^2 y, por el teorema de Pitágoras,

$$\boxed{h^2 = 1 + 5 = 6}$$

La medida de la hipotenusa es el número h que elevado al cuadrado da 6. Es decir, es la raíz cuadrada de 6. Este número es irracional porque no hay ningún racional cuyo cuadrado sea 6. Se le simboliza como $\sqrt{6}$.



* Recuérdese que $\sqrt{5}$ es el número que elevado al cuadrado da 5.

Ejercicio 3. Encuentre en la escala de abajo una aproximación racional, hasta décimos, para $\sqrt{6}$.

$\sqrt{6}$ es aproximadamente igual a

El número $\sqrt{6}$ se puede expresar con un decimal infinito no periódico:

$$\boxed{\sqrt{6} = 2.449\ldots}$$

Los números irracionales son aquellos que se pueden expresar por medio de decimales infinitos no periódicos.

Sin embargo, los números irracionales no se encuentran sólo al medir los lados de un triángulo. Usted conoce, por ejemplo, el número irracional π (pi), que se obtiene al comparar la medida de una circunferencia cualquiera con su propio diámetro.

Algunas de las aproximaciones racionales para este número son las siguientes:

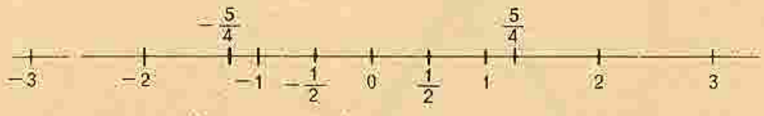
$\boxed{3.1}$, $\boxed{3.14}$, $\boxed{3.141}$, $\boxed{3.1415}$,

$\boxed{3.14159}$, $\boxed{3.141592}$, etc.

El decimal infinito no periódico que se utiliza para nombrar a π es el siguiente:

$$\boxed{3.14159\ldots}$$

Nosotros tenemos una recta en la que, de acuerdo con una unidad dada, hemos marcado segmentos que se asocian con números racionales



En esta misma recta podemos señalar segmentos que se asocian con números irracionales. (Recuerde que un segmento y un número se asocian cuando, de acuerdo con cierta unidad, el número es la medida del segmento). Por ejemplo, podemos marcar los segmentos correspondientes a $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ y π

¿Recuerda usted cómo se construyó el conjunto de los números racionales? Lo que se hizo entonces fue simplemente crear, para cada racional positivo, su correspondiente racional negativo.

Tal como hicimos antes con los números racionales, tomaremos ahora cada número irracional positivo para asociarle otro al que llamaremos su **irracional negativo** correspondiente.

Por ejemplo,

a $\sqrt{2}$ le asociaremos el irracional negativo $-\sqrt{2}$ (léase: "menos raíz cuadrada de 2")

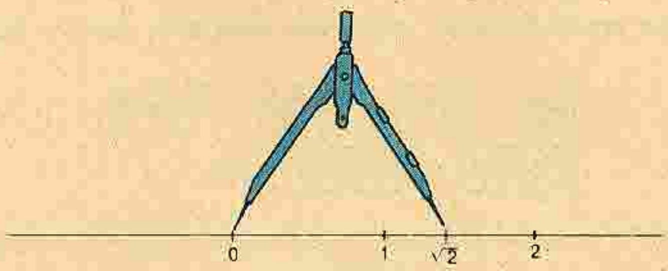
a $\sqrt{3}$ le asociaremos el irracional negativo $-\sqrt{3}$ ("menos raíz cuadrada de 3").

a π le asociaremos el irracional negativo $-\pi$ ("menos pi"), etcétera.

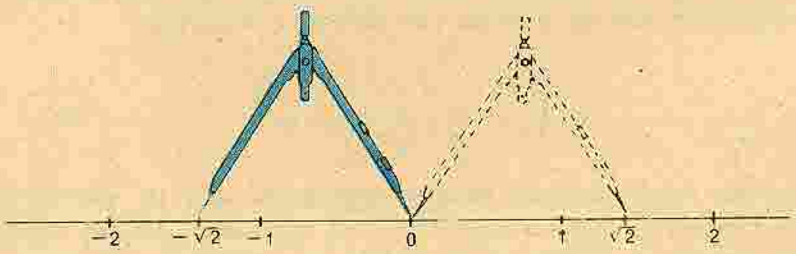
Ahora bien, si tenemos indicado algún número irracional positivo en una recta, podemos encontrar su correspondiente negativo utilizando un compás.

Ejemplo. Consideremos el número $\sqrt{2}$.

Con un compás tomamos la distancia que hay del punto 0 al punto $\sqrt{2}$.



Con esta abertura del compás marcamos hacia la izquierda de 0 el punto correspondiente a $-\sqrt{2}$



Ejercicio 4. Use un compás y marque en la recta de abajo los puntos correspondientes a los números $-\sqrt{3}$, $-\sqrt{5}$, $-\sqrt{6}$ y $-\pi$

Con los irracionales positivos y los irracionales negativos formamos un solo conjunto: el conjunto de los números irracionales.

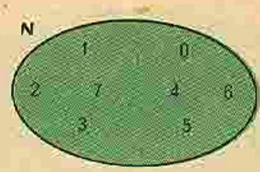
2. Los números reales.

Hasta este momento conocemos tres conjuntos de números: los naturales, los racionales y los irracionales. A continuación dibujaremos algunos diagramas referentes a estos conjuntos de números, y veremos qué relaciones hay entre ellos. Además, recordaremos algunas de sus propiedades.

Consideraremos primero el conjunto de los números naturales y el cero.

$$\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12,\ 13 \ldots\}$$

Llamaremos ***N*** a este conjunto, y lo representaremos con el siguiente diagrama:



Hemos aprendido que los números naturales se usan para contar y que siempre es posible efectuar adiciones y multiplicaciones con ellos. Esto es, **cualquier adición o multiplicación de números naturales puede resolverse con números naturales.** Sin embargo, hay sustracciones y divisiones de números naturales que no tienen solución en este conjunto.

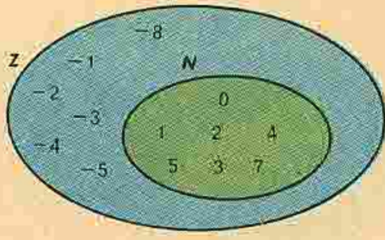
A estas alturas, en nuestro estudio, ya sabemos que todo número tiene su inverso aditivo. Podemos entonces formar un conjunto con todos los elementos de ***N*** y sus inversos aditivos.

$$\{0,\ 1,\ -1,\ 2,\ -2,\ 3,\ -3, \ldots\}$$

Se dice que este es el conjunto de los **números enteros**, y se le acostumbra denotar por **Z.** Así tenemos que

$$\mathbf{Z} = \{\ldots -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3, \ldots\}$$

Un diagrama para este conjunto podría ser el siguiente:



$\boxed{N \subset Z}$

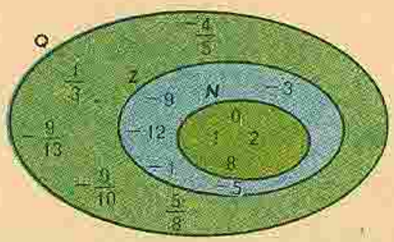
Note usted que ***N*** está incluido en **Z** porque todo elemento de ***N*** pertenece a **Z**. Esto es, todo número natural es también número entero.

Este conjunto **Z** tiene diversas aplicaciones en los estudios matemáticos; por eso lo hacemos notar aquí. Además ocurre que con números enteros siempre es posible efectuar *adiciones, multiplicaciones* **y sustracciones.**

Con los números naturales y los números enteros la humanidad ya estaba en posibilidad de resolver todos los problemas que implicaran la idea de contar. Pero no se podían resolver todos los problemas que implicaran mediciones.

A fin de resolver esta dificultad se crearon los números racionales y los números irracionales.

El conjunto **Q** de los números racionales es el conjunto de todos los números que se pueden nombrar por medio de fracciones.



N ⊂ Q

N ⊂ Z ⊂ Q

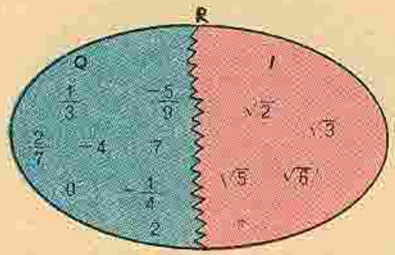
(**Z** es un subconjunto de **Q**, pues *todo número entero es también número racional* porque se puede expresar por medio de una fracción).

Con los elementos de este conjunto **Q** es posible efectuar cualquier *adición, sustracción, multiplicación* **o división** y se puede indicar, además, el resultado de muchas mediciones. Sin embargo, todavía no es posible resolver cualquier problema que implique medición, pues hay segmentos cuya medida no se puede dar con ningún número racional.

Según vimos antes, para resolver problemas que implican la medición de ciertos segmentos, se tuvo que crear el conjunto de los números irracionales. Si llamamos ***I*** a este conjunto y formamos un nuevo conjunto con sus elementos y los elementos de **Q**, tendremos lo que se llama **el conjunto R de los números reales.**

Un diagrama para **R** podría ser el siguiente:

Q ⊂ R



I ⊂ R

(Note usted que **Q** es subconjunto de **R** porque **todo número racional es número real.** *I* también es subconjunto de **R** porque **todo número irracional es número real).**

(Nótese además, que **Q** es ajeno a *I* porque no hay ningún número racional que sea irracional ni hay número irracional que pueda ser racional).

Con los elementos de este conjunto **R**, al igual que con los de **Q**, es posible efectuar cualquier adición, sustracción, multiplicación o división. Y las propiedades que tienen las operaciones al efectuarse con números reales, son las mismas que poseen las operaciones con números racionales. Repasémoslas en el siguiente cuadro.

Propiedades \ Operaciones	Adición	Multiplicación
	Si a, b, c son números reales, entonces,	
Conmutativa	$a + b = b + a$	$ab = ba$
Asociativa	$(a+b)+c = a+(b+c)$	$(ab)c = a(bc)$
Elemento neutro	$a + 0 = a$	$a1 = 1$
Inversos	$a + (-a) = 0$	$ab = 1$ $(a, b \neq 0)$
Distributiva	$a(b + c) = ab + ac$	

¿Recuerda usted que el manejo de expresiones algebraicas se hizo de acuerdo con las propiedades de las operaciones con racionales? (Eso hicimos cuando las letras de una expresión representaban números racionales).

Ahora bien, ¿cómo manejaría usted expresiones algebraicas en las que las letras representaran números reales?

En virtud de que las propiedades de las operaciones con reales son las mismas que las de racionales, podemos manejar expresiones algebraicas donde las letras representen números reales, exactamente en la misma forma que lo hemos hecho anteriormente al estudiar los números racionales.

Ejemplo. Si a es un número real cualquiera, entonces,

$$\boxed{3a + 2a - a = (3 + 2 - 1)a = 4a}$$

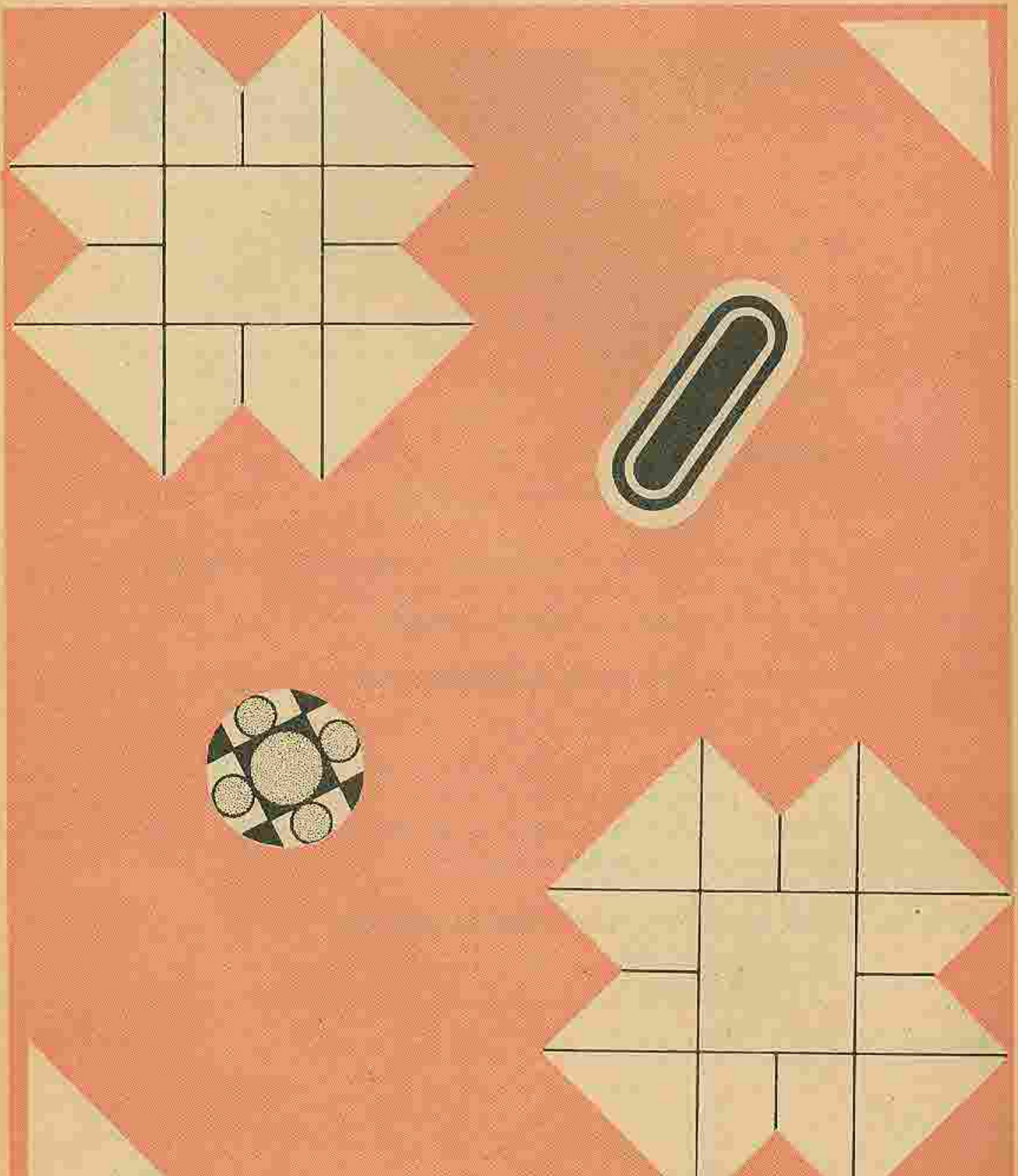
Ejemplo. Si a y n son números reales con $n \neq 0$, entonces,

$$\boxed{\frac{a}{n} = a \cdot \frac{1}{n}}$$

El conjunto de los números reales tiene además una propiedad muy importante, que no poseen los números racionales, y cuya existencia se puede demostrar. Esta propiedad consiste en lo siguiente:

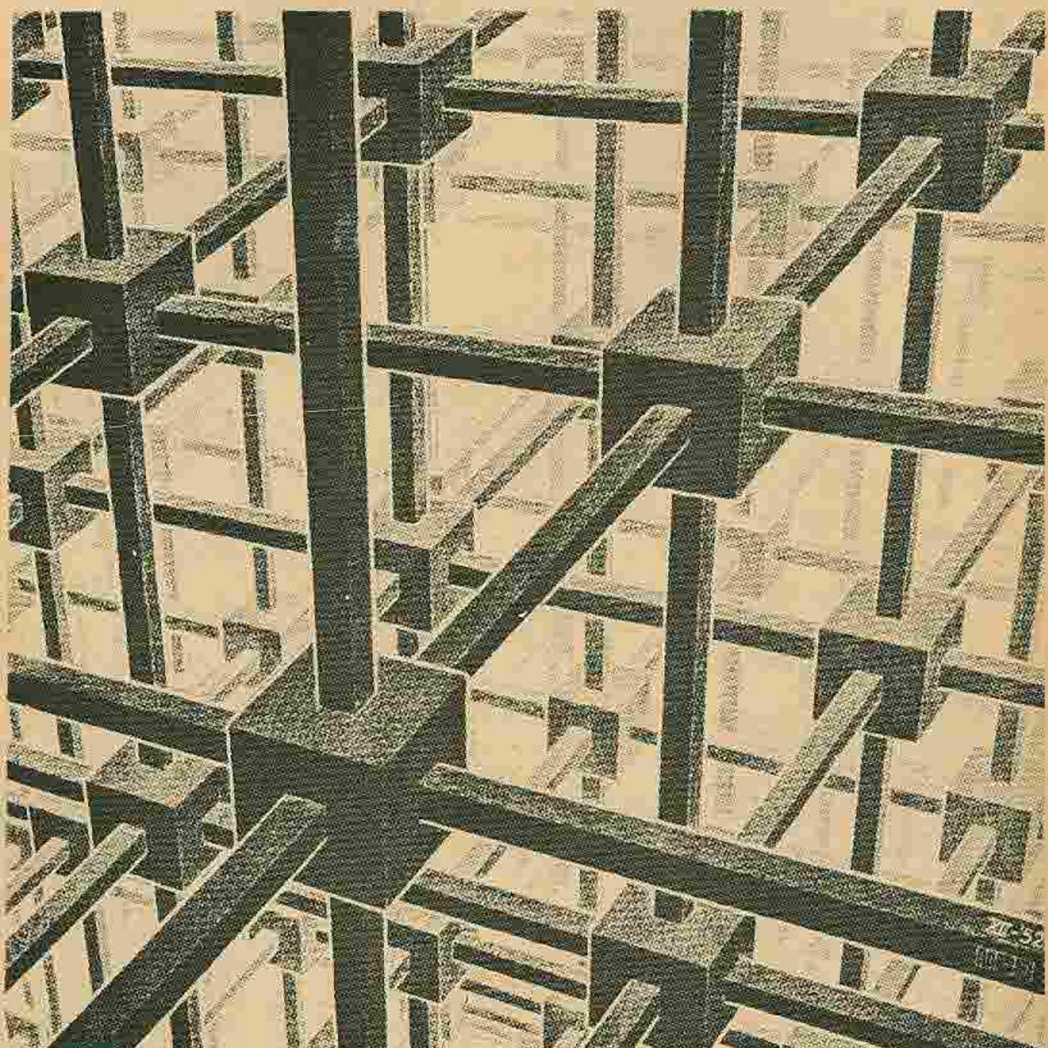
Dado un segmento unidad, para todo segmento de recta existe un número real que es su medida y para todo número real existe un segmento cuya medida es dicho número.

Por eso es que con números reales siempre es posible medir cualquier segmento de recta, pues si la medida no fuera algún racional, tendría que ser, necesariamente, un irracional.



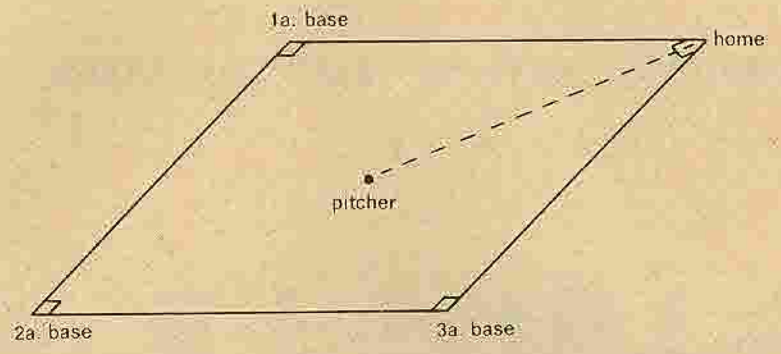
V

Distancia entre dos puntos

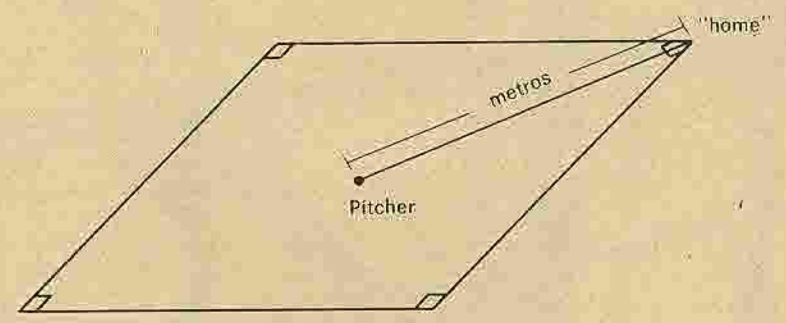


1. Definición de distancia.

¿Sabe usted cuál es la distancia que hay entre el "home" y el montículo del pítcher en un campo de beisbol?



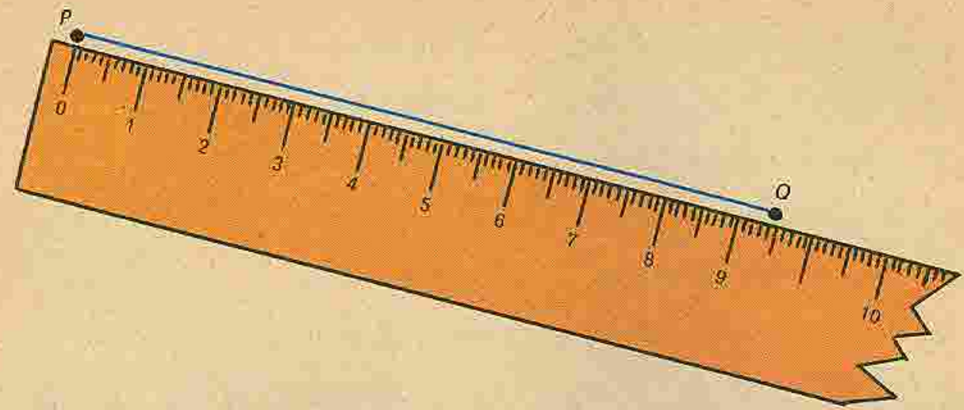
Para determinar esta distancia se traza un segmento, como se ve en la ilustración de abajo y luego se mide dicho segmento.



Si consideramos el metro como unidad de medida, la distancia entre el "home" y el montículo del pitcher es 19.09

¿Cuál es la distancia en centímetros que hay entre el punto P y el punto Q, dibujados a continuación?

Para saber cuál es la distancia entre P y Q, trazamos el segmento $\overline{PQ}$ y lo medimos.



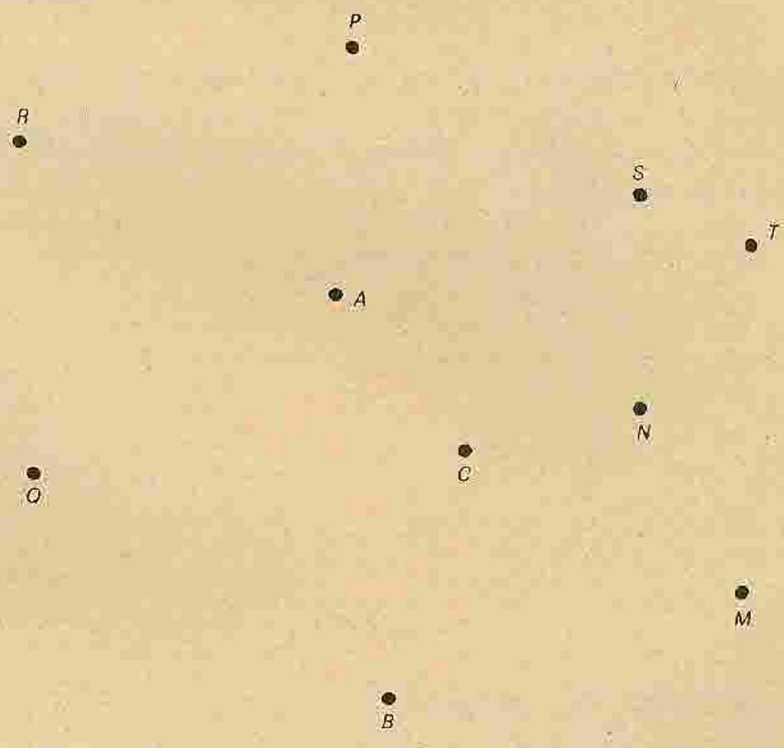
La distancia entre P y Q es de 9.5 centímetros.

Esta idea de distancia entre dos puntos es la que manejaremos en nuestro estudio de matemáticas. Para precisarla mejor, daremos la siguiente definición:

Definición. La distancia entre dos puntos A y B es la medida del segmento cuyos extremos son, precisamente, los puntos A y B.

Observación: En virtud de que, dada una unidad, la medida de un segmento, es siempre un número real, la distancia entre dos puntos cualesquiera siempre será un número real.

Ejercicio 1. Considere los puntos dibujados a continuación, y tomando como unidad el centímetro, diga usted cuál es la distancia entre los dos puntos que se indican en cada inciso.



a) La distancia entre P y Q es ______ centímetros

b) La distancia entre R y M es ______ centímetros

c) La distancia entre M y N es ______ centímetros

d) La distancia entre Q y S es ______ centímetros

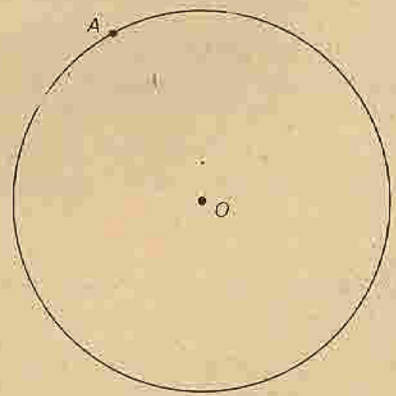
e) La distancia entre A y B es ______ centímetros

f) La distancia entre S y T es ______ centímetros

g) La distancia entre R y S es ______ centímetros

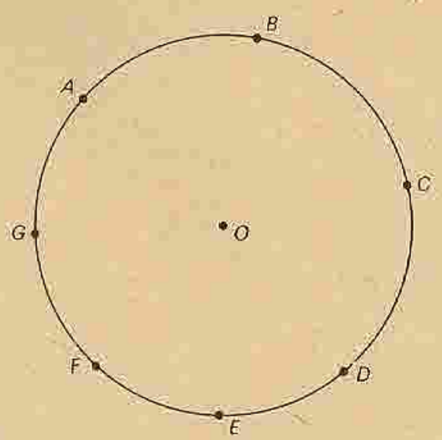
h) La distancia entre C y N es ______ centímetros

Ejercicio 2. Encuentre usted la distancia en milímetros que hay del punto O al punto A en la siguiente ilustración. Después marque otros diez puntos cuya distancia al punto O sea la misma que hay entre O y A.



¿Quedaron sobre la circunferencia todos los puntos que usted marcó?

Ejercicio 3. Trace usted, en la siguiente figura, los segmentos $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$, $\overline{OD}$, $\overline{OE}$, $\overline{OF}$, $\overline{OG}$, y mídalos en milímetros.

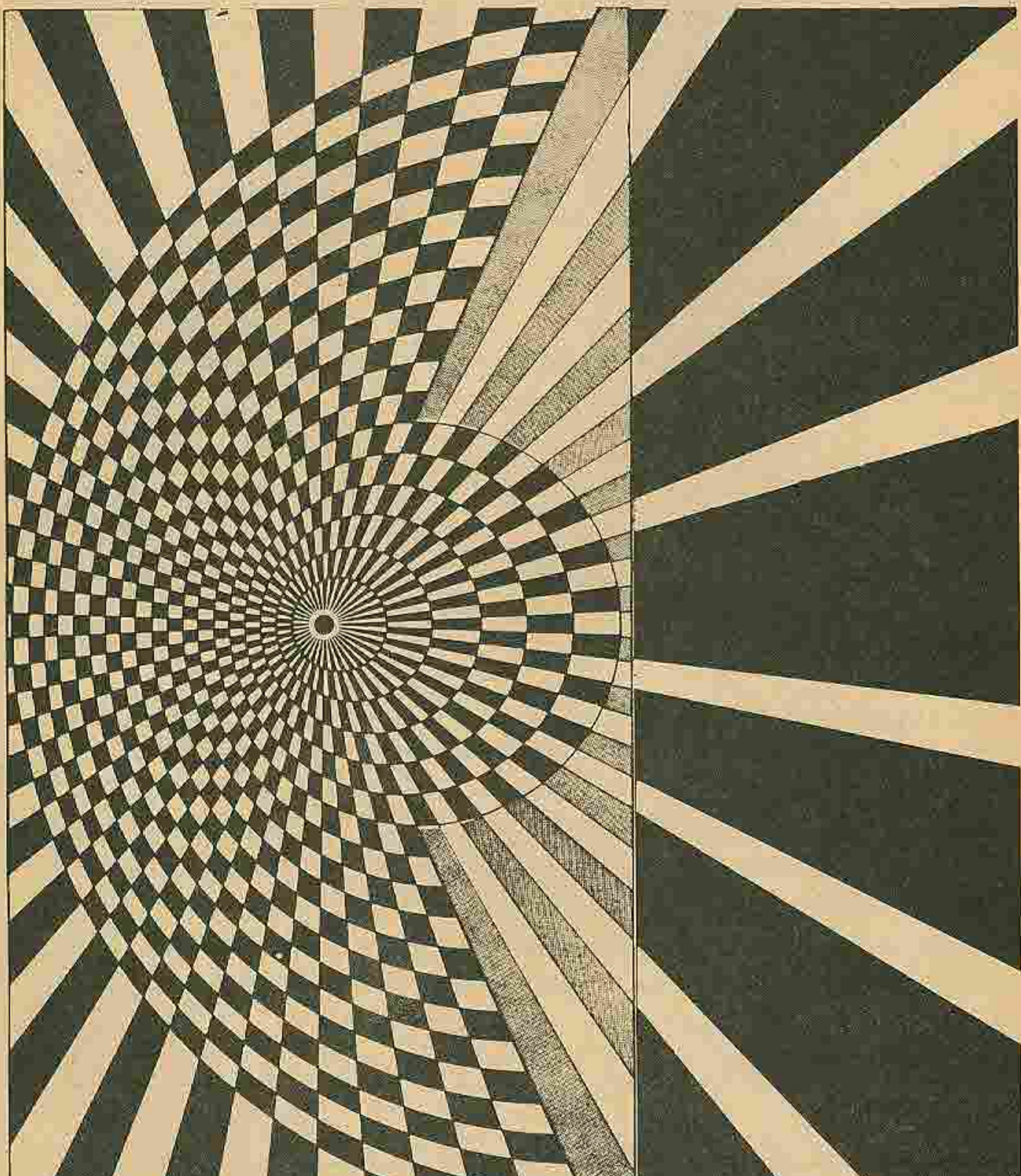


¿Miden lo mismo todos esos segmentos?

Esto significa que entre los puntos *A* y *O* hay la **misma distancia** que entre *B* y *O*, entre *C* y *O*, entre *D* y *O*, etcétera.

En casos como este se acostumbra decir que todos los puntos *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F* y *G* son **equidistantes** del punto *O*.

Los ejercicios anteriores nos sugieren que una circunferencia es el conjunto de todos los puntos que, de acuerdo con cierta unidad, son equidistantes a un punto dado, el cual recibe el nombre de centro. Así ocurre que todos los radios* que se pueden trazar en una circunferencia son congruentes. Esto es, tienen la misma medida.



* Recuerde usted que se llama radio de una circunferencia al segmento cuyos extremos son: el centro y algún otro punto de la circunferencia.

2. Coordenadas en una recta.

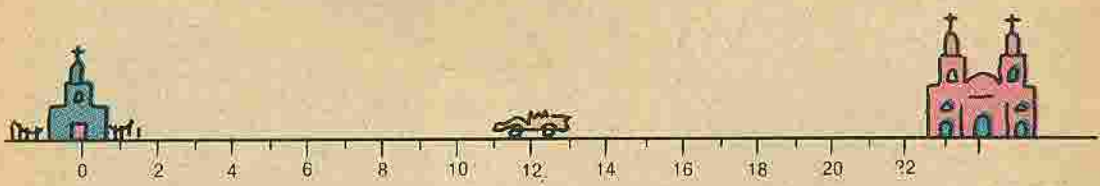
Para distinguir entre sí los puntos de una recta, hemos estado usando letras mayúsculas del alfabeto castellano. Ahora vamos a utilizar nuestra idea de distancia entre dos puntos para nombrar los puntos de una recta por medio de números.

Ejemplo.

Entre dos poblados unidos por una carretera recta ocurrió un accidente automovilístico.

Tizamán San Pedro

Para nombrar el punto en que ocurrió tal accidente se utilizan las marcas de kilometraje que hay en la carretera.



TIZAMAN SAN PEDRO

La distancia entre Tizamán y el punto del accidente es de 12 kilómetros. Así que podemos indicar claramente la situación, diciendo que el hecho ocurrió en el kilómetro 12.

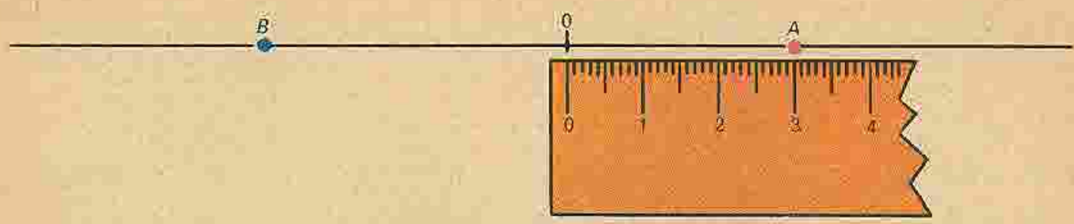
Esta forma de nombrar ese lugar de la carretera nos permite localizarlo rápida y fácilmente, pues sabemos que la carretera empieza en Tizamán, y sabemos que la unidad de medida que estamos considerando es el kilómetro.

De igual manera podemos nombrar con números los puntos de cualquier recta, si elegimos previamente una unidad y consideramos un punto inicial al cual le asociamos el cero.

Ejemplo. Observemos los puntos A y B de la siguiente recta:

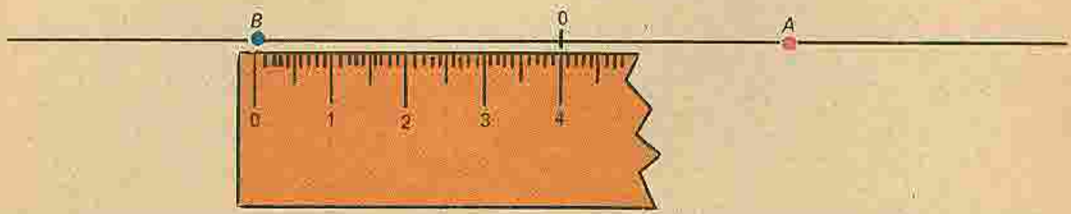
Marcamos un punto cualquiera en la recta y le asociamos el cero.

Ahora, si usamos como unidad el centímetro, medimos la distancia que hay entre este punto 0 y el punto A.



Tal distancia es de 3 centímetros. Por tanto, podemos nombrar al punto A con el número 3.

Al punto B lo podemos nombrar con el número -4 porque está *a la izquierda de cero* y la distancia que hay entre él y el punto cero es de 4 unidades.



Así podemos hablar del punto rojo diciendo indistintamente: "el punto A" o bien "el punto 3" y del punto azul podemos decir que es "el punto B" o que es el "punto -4".

Esto se puede indicar simbólicamente así:

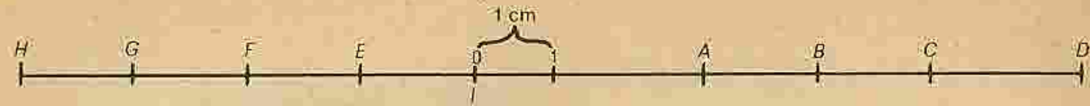
$$\boxed{A = (3)}$$

$$\boxed{B = (-4)}$$

Al número que usamos para nombrar un punto en una recta (donde se ha marcado el cero y el uno) se le denomina **coordenada** del punto. Por ejemplo las expresiones anteriores, $A = (3)$ y $B = (-4)$, indican que la coordenada del punto A es el número 3 y la coordenada del punto B es el número -4.

La recta en la que se han marcado algunos puntos con sus coordenadas correspondientes recibe el nombre de eje de coordenadas.

Ejercicio 4. Encuentre la coordenada de cada punto en el siguiente eje de coordenadas.

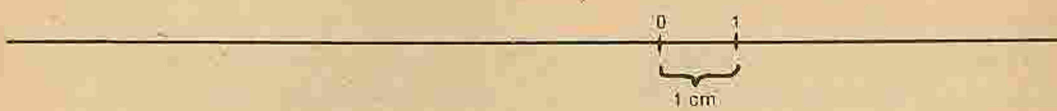


a) $A = (\quad)$ b) $B = (\quad)$ c) $C = (\quad)$

d) $D = (\quad)$ e) $E = (\quad)$ f) $F = (\quad)$

g) $G = (\quad)$ h) $H = (\quad)$ i) $I = (\quad)$

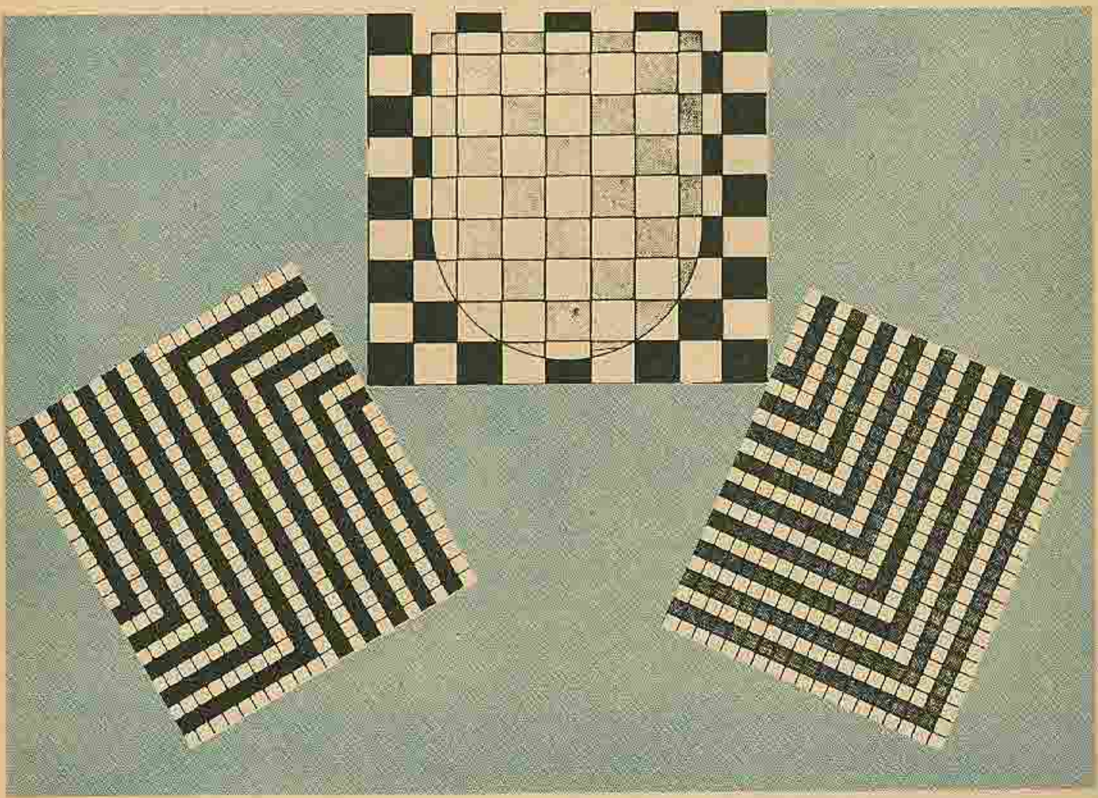
Ejercicio 5. Abajo se indican las coordenadas de varios puntos. Márquelos en el eje de coordenadas siguiente:



a) $M = (-3)$ b) $N = (4)$ c) $O = (-3.5)$

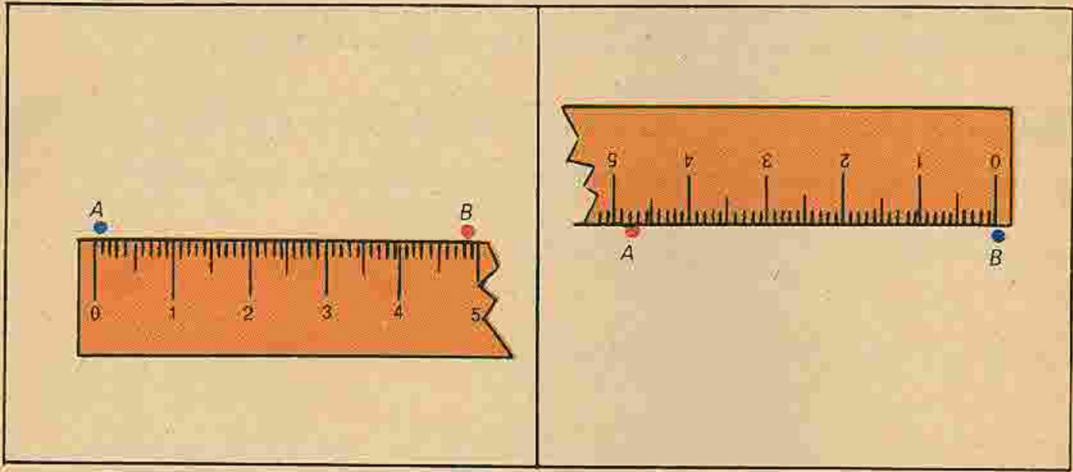
d) $P = = (-2.6)$ e) $Q = (1.9)$ f) $R = (1)$

g) $S = (-7.6)$ h) $T = (0)$ i) $U = (2.6)$



3. Distancia entre dos puntos nombrados por sus coordenadas.

En muchas ocasiones usted ha usado una regla para medir distancias entre puntos. Observe la siguiente ilustración y conteste la pregunta.



Si para medir la distancia que hay entre A y B colocamos la regla "de izquierda a derecha" y después la tomamos "de derecha a izquierda", ¿obtenemos medidas diferentes?

¿Cuál es la distancia que hay entre el punto $R = (-6)$ y el punto 0 en le siguiente eje de coordenadas?

Es claro que la distancia entre R y O es de 6 unidades, no importa que se mida "de izquierda a derecha" o "de derecha a izquierda".

¿Cuál es la distancia que hay entre los puntos $P = (-7)$ y $Q = (-2)$ en el siguiente eje de coordenadas?

La distancia entre P y Q es de 5 unidades y no importa que esta distancia se mida de "P hacia Q", o de "Q hacia P".

¿Qué distancia hay entre los puntos $R = (-4)$ y $S = (5)$, del siguiente eje de coordenadas?

La distancia entre R y S es de 9 unidades, no importa que se mida de "R hacia S" o de "S hacia R".

Como puede usted observar, la distancia entre dos puntos siempre se indica con un número positivo porque siempre es la medida de un segmento.

A continuación vamos a estudiar un procedimiento con el que se puede determinar la distancia que hay entre dos puntos, si se conocen sus respectivas coordenadas.

Empezaremos por denominar "distancia de un punto al origen", a aquella distancia que hay desde ese punto hasta el punto cuya coordenada es cero.

Ejercicio 6. Indique la distancia al origen, de cada uno de los siguientes puntos. (Si lo desea, puede representarlos en un eje de coordenadas en su cuaderno).

a) $A = (5)$ b) $B = (7)$ c) $C = (12)$

d) $D = (7.5)$ e) $E = (18.3)$ f) $F = (\frac{15}{2})$

g) $G = (\sqrt{2})$ h) $H = (\pi)$ i) $I = (\sqrt{5})$

Como puede usted observar, en el ejercicio anterior, *si la coordenada de un punto es positiva, entonces la distancia de ese punto al origen está dada por su misma coordenada.*

Ejercicio 7. Encuentre la distancia al origen de los siguientes puntos. (Si lo desea puede representarlos en un eje de coordenadas dibujado en su cuaderno).

a) $A = (-5)$ b) $B = (-7)$ c) $C = (-12)$

d) $D = (-7.5)$ e) $E = (-18.3)$ f) $F = (-\frac{15}{2})$

g) $G = (-\sqrt{2})$ h) $H = (-\pi)$ i) $I = (-\sqrt{5})$

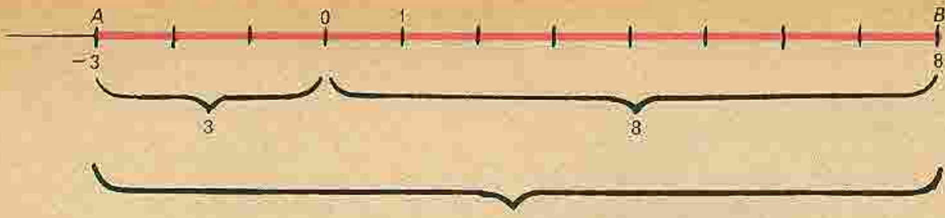
En este ejercicio habrá usted observado que *cuando es negativa la coordenada de un punto, la distancia de ese punto al origen está dada por el inverso aditivo de su coordenada.*

Sabiendo determinar la distancia de un punto al origen, en un eje de cordenadas, resulta fácil obtener la distancia entre dos puntos cualesquiera de dicho eje. Observe usted el siguiente ejemplo.

Ejemplo.

a) ¿Cuál es la distancia entre el punto $A = (-3)$ y el punto $B = (8)$?

La distancia de A al origen es 3; la distancia de B al origen es 8. La distancia de A a B la podemos obtener sumando las distancias de ellos al origen.

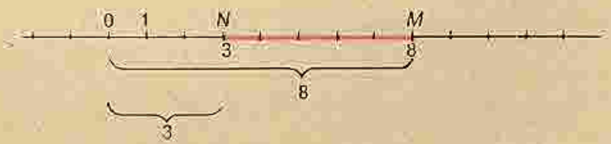


$$\boxed{3 + 8 = 11}$$

Lo anterior nos indica que la distancia de A a B es 11 unidades.

b) ¿Cuál es la distancia entre el punto $M = (8)$ y el punto $N = (3)$?

La distancia de M al origen es 8, la distancia de N al origen es 3.



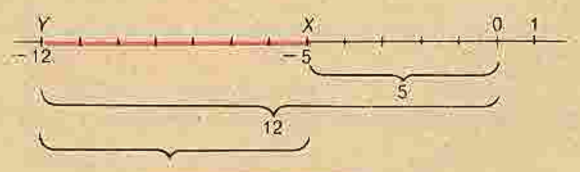
La distancia entre M y N puede calcularse ahora restando

$$8 - 3 = 5$$

La distancia entre M y N es de 5 unidades.

c) ¿Cuál es la distancia entre los puntos $X = (-5)$ y $Y = (-12)$?

La distancia de X al origen es 5, la distancia de Y al origen es 12.



$$\boxed{12 - 5 = 7}$$

La distancia entre X y Y puede calcularse también restando

$$\boxed{12 - 5 = 7}$$

La distancia entre X y Y es de 7 unidades.

Ejercicio 8. Calcule la distancia entre los dos puntos nombrados en cada inciso. Si tiene alguna duda localice cada par de puntos en un eje de coordenadas. (Las letras representan números positivos).

a) $C = (-8)$, $D = (15)$. La distancia entre C y D es

b) $Q = (-2.6)$, $B = (7.45)$. La distancia entre Q y B es

c) $R = (52)$, $W = (-15.8)$. La distancia entre R y W es

d) $T = (187.84)$, $V = (-20.47)$. La distancia entre T y V es

e) $N = (-15a)$, $R = (43a)$. La distancia entre N y R es

f) $A = (\pi)$, $D = (-2\pi)$. La distancia entre A y D es

g) $S = (2a)$, $T = (-5a)$. La distancia entre S y T es

h) $M = (15)$, $N = (3)$. La distancia entre M y N es

i) $R = (38.5)$, $K = (12.3)$. La distancia entre R y K es

j) $A = (187.9)$, $B = (1\,534.6)$. La distancia entre A y B es

k) $K = (2\,513)$, $L = (5.9)$. La distancia entre K y L es

l) $U = (5a)$, $E = (2a)$. La distancia entre U y E es

m) $N = (x)$, $C = (4.5x)$. La distancia entre N y C es

n) $C = (-3)$, $D = (-25)$. La distancia entre C y D es

o) $G = (-45)$, $H = (-182)$. La distancia entre G y H es

p) $E = (-2.5)$, $F = (-10.4)$. La distancia entre E y F es

q) $A = (-12.85)$, $P = (-50.43)$. La distancia entre A y P es

r) $T = (-7n)$, $Z = (-2n)$. La distancia entre T y Z es

VI

Desigualdades

1. Orden entre números reales.

Cuando estudiamos los números naturales aprendimos a ordenarlos. Es decir, si nos daban dos números naturales cualesquiera, podíamos indicar cuál era el mayor y cuál era el menor. Por ejemplo, considerados los números 8 y 2 afirmamos sin ningún titubeo que

$$8 > 2$$

("8 es mayor que 2")

o bien, para decirlo en otra forma; afirmamos que

$$2 < 8$$

("2 es menor que 8")

Si consideramos, como hasta aquí lo hemos hecho, ejes de coordenadas en los que el 1 está a la derecha del cero, vemos que el punto correspondiente a 8 queda a la derecha del punto correspondiente a 2

Esto mismo ocurre con cualquier par de números naturales a y b:

Si b **es mayor que** a, *entonces, en un eje de coordenadas el punto correspondiente a* b *queda* **a la derecha** *del punto correspondiente a* a.

$$\boxed{b > a}$$

o bien,

$$\boxed{a < b}$$

Para distinguir el orden entre dos números reales usaremos un eje de coordenadas y adoptaremos el mismo criterio que para naturales. Esto es,

Si **a** y **b** *son dos números reales cualesquiera, de tal modo que en un eje de coordenadas el punto* **b** *queda* **a la derecha** *del punto* **a**, *entonces* **b es mayor que a**. *(Y, por consiguiente podemos decir también que* **a es menor que b**).

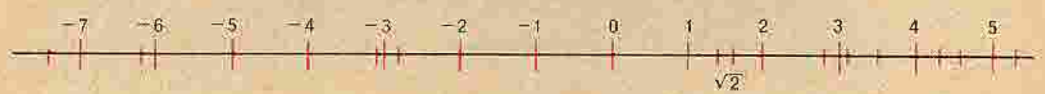
Ejemplo.

a) 
$8.6 > 3.5$ o bien, $3.5 < 8.6$

b) 
$3.14 > -6.8$ o bien, $-6.8 < 3.14$

c) 
$-1 > -10$ o bien, $-10 < -1$

Ejercicio 1. Observe el siguiente eje de coordenadas y, usando el criterio discutido, ponga en cada cuadrito el signo $<$ o el signo $>$, para indicar el orden entre los números que se mencionan.



a) -1 □ 3.5

b) 4.3 □ -7

c) -2.8 □ 1.6

d) $-\pi$ □ -7.4

e) -6.2 □ 4.6

f) π □ $-\pi$

g) -2 □ 2

h) 5.3 □ 2.8

i) $\sqrt{2}$ □ π

j) 0 □ -5

Ejercicio 2. Considerando los puntos marcados en el siguiente eje de coordenadas, anote en cada cuadrito el signo $<$ o el signo $>$ para indicar el orden entre los números.

a) a □ b

b) a □ d

c) b □ c

d) b □ d

e) c □ b

f) c □ d

g) d □ a

h) d □ b

Ejercicio 3. Escriba en cada cuadrito el símbolo $<$ o el símbolo $>$ para indicar el orden entre los números.

a) $-7 \ \square \ 2$

b) $4.5 \ \square \ 2.9$

c) $-3.7 \ \square \ -4.3$

d) $-2.7 \ \square \ 2.7$

e) $13.8 \ \square \ -46.7$

f) $-10.9 \ \square \ 20.3$

g) $-\frac{3}{2} \ \square \ -\frac{6}{5}$

h) $-37.2 \ \square \ -31.5$

i) $-20.4 \ \square \ -20.6$

j) $\frac{8}{10} \ \square \ -2.5$

k) $-\pi \ \square \ -\sqrt{6}$

l) $-\sqrt{9} \ \square \ 3$

m) $\sqrt{\frac{9}{25}} \ \square \ -\frac{3}{5}$

Ejercicio 4. Complete usted las oraciones de cada inciso.

a) Si a y b son dos números reales positivos y a está a la izquierda de b, entonces $a \ \square \ b$.

b) Si b es un número real positivo y a es un número real negativo, entonces $a \ \square \ b$.

Cualquier número real positivo es ______________________ que cualquier
(¿mayor o menor?)
número real negativo.

c) Si b es un número real positivo, entonces $b \ \square \ 0$.

Cero es ________ que cualquier número real positivo.

d) Si a es un número real negativo, entonces a ____ 0.

Cero es________ que cualquier número real negativo.

e) Si a y b son dos números reales negativos y b está a la derecha de a, entonces b ____ a

f) Si sabemos que a, b y c son números reales y sabemos que $a > b$ y $b > c$, podemos entonces concluir que a ____ c.

g) Si m, n y p son números reales y sabemos que $m < n$ y $n < p$, podemos entonces concluir que m ____ p.

En lo que sigue emplearemos expresiones como la siguiente:

$$3 < 5 < 7$$

Esta expresión es una forma abreviada de indicar que $3 < 5$ y que $5 < 7$. De esta manera la expresión debe leerse "3 es menor que 5, y 5 es menor que 7".

La expresión $-3 > -5 > -8$ es la forma abreviada de indicar que -3 es mayor que -5 y que -5 es mayor que -8.

Resulta útil mostrar en el eje de coordenadas los números que intervienen en una expresión como las que estamos tratando.

$$\boxed{3 < 5 < 7}$$

$$\boxed{-3 > -5 > -7}$$

$$\boxed{a > b > c}$$

$$m < n < p$$

Observamos que podemos interpretar la expresión $3 < 5 < 7$ diciendo que 5 "está entre" 3 y 7 y la expresión $-3 > -5 > -8$ diciendo que -5 "está entre" -3 y -8.

En general, si tenemos que $a > b > c$ podemos decir que b "está entre" a y c y si tenemos que $m < n < p$ podemos decir que n "está entre" m y p.

Ejercicio 5. Indique el orden de los tres números dados en cada inciso, anotándolos en los cuadritos correspondientes.

a) 8, -2, 5

☐ > ☐ > ☐

b) 3.5, 0, -8

☐ < ☐ < ☐

c) .3, .9, $-.4$

☐ > ☐ > ☐

d) 85, 8.5, .85

☐ < ☐ < ☐

e) $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$

☐ < ☐ < ☐

f) 2.5, 4.1, π

☐ > ☐ > ☐

Ejercicio 6. Complete las expresiones anotando en los cuadritos los números que se señalan en cada eje de coordenadas.

a) 

☐ > ☐ > ☐ ☐ está entre ☐ y ☐

b) 

☐ < ☐ < ☐ ☐ está entre ☐ y ☐

c) 

☐ > ☐ > ☐ ☐ está entre ☐ y ☐

d) 

☐ < ☐ < ☐ ☐ está entre ☐ y ☐

e) 

☐ < ☐ < ☐ ☐ está entre ☐ y ☐

2. Desigualdades.

En matemáticas, frecuentemente nos vemos en la necesidad de describir y manejar conjuntos de números. Anteriormente hemos aprendido a nombrar y representar algunos de esos conjuntos por medio de ciertos símbolos. Ahora vamos a utilizar también nuestra idea de "mayor que" y "menor que" para describir algunos conjuntos de números.

Ejemplo. Sabemos que el conjunto de los números reales mayores que 3 está formado con una infinidad de elementos. Tal conjunto se puede describir con la expresión

$$\boxed{x > 3}$$

Esta expresión es una **desigualdad** y en ella la x puede sustituirse por cualquier número real que sea mayor que 3. Así, x puede ser el número 8 porque $8 > 3$

x puede ser 18.7 porque 18.7 73;

x puede ser igual a $\frac{25}{3}$ porque $\frac{25}{3} > 3$;

x puede sustituirse por 234.9 porque $234.9 > 3$;

x podría ser 7.2 porque $7.2 > 3$;

x podría ser π porque $\pi > 3$; etcétera.

Por supuesto que en esta desigualdad la x no puede sustituirse por el 1, porque 1 no es mayor que 3.

Asimismo,

x no puede ser -18 porque -18 no es mayor que 3;

x no debe sustituirse por 2.7 porque 2.7 no es mayor que 3;

x no debe ser -1.7 porque -1.7 no es mayor que 3;

x no podría ser 0.5 porque 0.5 no es mayor que 3;

x no puede ser 3 porque 3 no es mayor que 3; etcétera.

3. Gráficas de desigualdades.

En un eje de coordenadas se puede mostrar gráficamente el conjunto descrito por la expresión $x > 3$. Basta con recordar que cualquier número mayor que 3 se localiza a la derecha del punto 3, en el eje de coordenadas. Así, la gráfica de nuestro conjunto es la que mostramos abajo en color rojo.

(Esta gráfica se prolonga indefinidamente hacia la derecha, pues el conjunto de números reales mayores que 3 es infinito).

Ya antes se dijo que el número 3 no está en el conjunto descrito porque 3 no es mayor que 3. Para hacer notar esto, en el eje de coordenadas, se dibujó una ruedita en el punto correspondiente al 3.

Ejemplo. El conjunto de números reales que son menores que -1 se puede describir con la desigualdad

$$\boxed{x < -1}$$

En esta desigualdad la x puede sustituirse por cualquier número que sea menor que -1. Por ejemplo,

$x = -1.5$ porque $-1.5 < -1$,

$x = -17.6$ porque $-17.6 < -1$,

$x = -63.2$ porque $-63.2 < -1$, etcétera.

Pero no puede sustituirse por ningún número que sea igual o mayor que -1. Por ejemplo,

$x \neq 0$ porque 0 no es menor que -1,

$x \neq 1$ porque 1 no es menor que -1,

$x \neq -1$ porque -1 no es menor que -1, etcétera.

La gráfica correspondiente al conjunto de números determinados por la expresión $x < -1$ es la que se muestra a continuación en color rojo.

La ruedita que vemos en el punto -1 nos indica que el -1 no es elemento de nuestro conjunto, porque -1 no es menor que -1. (Por supuesto que la gráfica se prolonga indefinidamente hacia la izquierda).

Ejercicio 7. Considere el conjunto de números reales determinado por la expresión $x > -5$; haga una gráfica de ese conjunto y luego, en cada inciso, diga si la x puede ser o no puede ser el número que se indica.

a) x puede ser el 2 b) x __________ el -1

c) x __________ el -5.6 d) x no puede ser el -12

e) x __________ el 0 f) x __________ el -7.3

g) x __________ el -4.7 h) x __________ el 6.3

i) x __________ el -5 j) x __________ el 5

Ejercicio 8. Considere el conjunto de números reales descrito por la expresión $y < 6$; haga la gráfica que corresponde a dicho conjunto y escriba en los cuadritos correspondientes el signo $=$ o el signo $\neq$ para indicar que el número dado, en cada inciso, puede o no puede sustituir a la y de la expresión.

a) y ☐ 8.3 b) y ☐ 17.9 c) y ☐ 3.4

d) y ☐ -6 e) y ☐ 12 f) y ☐ 0

g) y ☐ -1 h) y ☐ -17.8 i) y ☐ 6

Ejercicio 9. Muestre gráficamente, en su cuaderno, los conjuntos de númerso reales que se describen con las desigualdades siguientes:

a) $x > 2.5$ ¿pertenece 2.5 al conjunto?

b) $t > -3.4$ ¿pertenece -3.4 al conjunto?

c) $y < 0$ ¿pertenece 0 al conjunto?

d) $v < -4.2$ ¿pertenece -4.2 al conjunto?

e) $d > 0$ ¿pertenece 0 al conjunto?

f) $x < 1.7$ ¿pertenece 1.7 al conjunto?

Ejercicio 10. En cada inciso tenemos la gráfica de un conjunto de números reales. Describa cada uno de esos conjuntos por medio de una desigualdad, tal como se hace en a).

a)

$\boxed{x > -2}$

b)

☐

c) 

d) 

e) 

En ocasiones se habla de conjuntos de números como el siguiente: "Los números reales **mayores o iguales** a 2".

Este conjunto se puede describir brevemente con la siguiente desigualdad:

$$\boxed{x \geqq 2}$$

("x es un número mayor o igual que 2")

En esta expresión la x puede sustituirse por el número 5, o pòr el número 3, o por 17.4, o bien, por 3.8, o por π, etcétera. Pero, además, **también puede sustituirse por el número 2.**

El conjunto del cual estamos hablando puede representarse gráficamente de la siguiente manera:

(Observe usted que, como el número 2 también pertenece al conjunto, en el dibujo se ha coloreado el punto correspondiente al 2).

Conjuntos de puntos como éste reciben el nombre de **semirrectas** o **rayos.**

Ejemplo. La expresión

$$\boxed{m \leqq 9}$$

es una desigualdad que describe brevemente al "conjunto de números reales menores o iguales que 9".

La gráfica correspondiente a este conjunto es el rayo que dibujamos a continuación:

Como el punto 9 también pertenece a la gráfica, en el dibujo aparece coloreado.

Ejercicio 11. En una hoja de papel milimétrico dibuje las gráficas de los siguientes conjuntos. Diga cuáles son rayos y cuáles no.

a) $p \leqq -3$ b) $q > -2.5$ c) $s \geqq 4.2$

d) $r < 6.8$ e) $t \leqq 7.3$ f) $v \leqq 0$

g) $a \geqq \sqrt{2}$

También hay otros conjuntos de números que se pueden describir con expresiones como

$$\boxed{-2 < x < 5}$$

La expresión anterior describe al "conjunto de números que son mayores que -2 y menores que 5". Es decir, aquí la x puede sustituirse por cualquier número que "esté entre -2 y 5". Por ejemplo,

x puede ser 4.3 porque 4.3 "está entre -2 y 5";

x puede ser -1 porque -1 "está entre -2 y 5";

x puede ser 0 porque 0 "está entre -2 y 5"; etcétera.

Pero x no puede sustituirse por algún número que no esté entre -2 y 5. Por ejemplo,

x no puede ser -3 porque -3 "no está entre -2 y 5"

x no puede ser -2.7 porque -2.7 "no está entre -2 y 5"

x no puede ser 5.8 porque 5.8 "no está entre -2 y 5"

x no puede ser -2 porque -2 "no está entre -2 y 5"

x no puede ser 5 porque 5 "no está entre -2 y 5"

La gráfica correspondiente a este conjunto de números es la siguiente:

La raya de color representa a todos los números reales que son mayores que -2 y menores que 5; es decir, todos aquellos números que están entre -2 y 5. Como se hizo anteriormente, las rueditas que se dibujan en -2 y 5 indican que tanto -2 como 5 no pertenecen al conjunto.

Si deseamos incluir en nuestro conjunto los números -2 y 5, la expresión que debemos utilizar es la siguiente:

$$\boxed{-2 \leqq x \leqq 5}$$

(x es un número real mayor o igual que -2 y menor o igual que 5).

Y la gráfica del conjunto será la siguiente:

(En virtud de que -2 y 5 también pertenecen al conjunto, en la gráfica aparecen coloreados los puntos -2 y 5).

Como puede usted observar, este conjunto de puntos es un segmento cuyos extremos son el -2 y el 5.

Ejemplo. Con la expresión

$$12 > y > 0$$

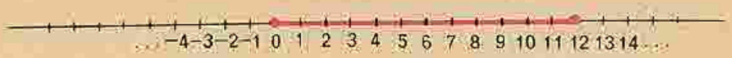
se describe al "conjunto de números que están entre 12 y 0"; es decir, aquellos números que son menores que 12, pero mayores que 0.

La gráfica que corresponde a este conjunto es la siguiente:

Si se desea incluir en el conjunto a los números 0 y 12, la expresión que debe utilizarse es la siguiente:

$$12 \geqq x \geqq 0$$

Así, la gráfica correspondiente al conjunto sería el segmento siguiente:



(Como 12 y 0 también pertenecen al conjunto, ellos son los extremos del segmento y en la gráfica aparecen coloreados).

Ejercicio 12. Dibuje en su cuaderno las gráficas de los siguientes conjuntos. Diga cuáles son segmentos y cuáles no.

a) $-5 < x < 6$ b) $2 \leqq t \leqq 7$

c) $-6 \leqq v \leqq -1$ d) $0 < y < 4.5$

e) $-4.5 < s < 0$ f) $\sqrt{2} \leqq a \leqq \pi$

Ejercicio 13. En cada inciso llene los cuadritos de tal manera que las expresiones resultantes describan a los conjuntos de puntos que se muestran.

a) 

$\square \leqq a \leqq \square$

b) 

$\square < t < \square$

c) 

$\square < p < \square$

d) 

___ $\leqq v \leqq$ ___

e) 

___ $< m <$ ___

f) 

-30 ___ x ___ 20

g) 

-4 ___ s ___ $\sqrt{2}$

h) 

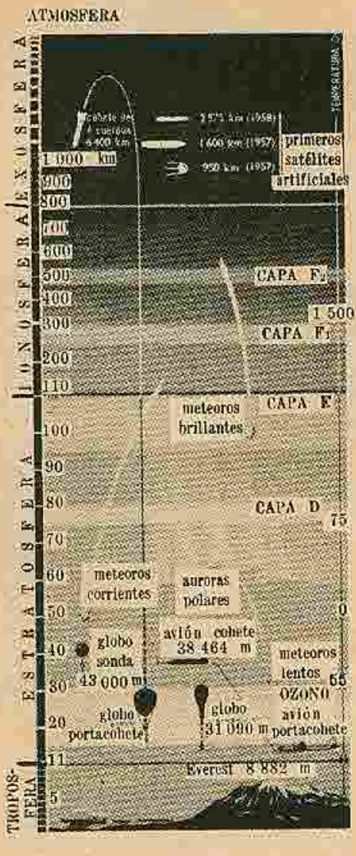
0 ___ y ___ 2π

i) 

-45 ___ f ___ -10

j) 

$-\sqrt{10}$ ___ a ___ $\sqrt{10}$



Usted sabe que la masa gaseosa que rodea nuestro planeta recibe el nombre de atmósfera y sabe que está dividida en varias regiones. En el esquema se puede ver cuáles son esas regiones. (Las distancias se dan en kilómetros y se miden a partir del nivel del mar).

Ejercicio 14. Observe el esquema y complete las siguientes oraciones.

a) La Tropósfera se localiza a una distancia entre ___ y ___ kilómetros del nivel del mar.

Si llamamos t a la distancia de un punto cualquiera de esta región al nivel del mar, tendremos entonces que

___ $< t <$ ___

b) La estratósfera está situada entre ____ y ____ km arriba del nivel del mar. Si e es la distancia de un punto cualquiera de esta región al nivel del mar, entonces,

$$\_\_\_\_ < \_\_\_\_ < \_\_\_\_$$

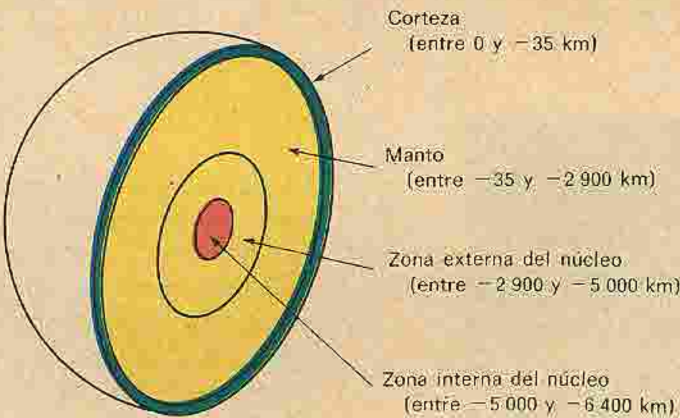
c) La ionósfera está comprendida entre el kilómetro ____ y el kilómetro ____ sobre el nivel del mar. Si llamamos i a la distancia de un punto cualquiera de la ionósfera al nivel del mar, tendremos entonces que

$$\_\_\_\_ < \_\_\_\_ < \_\_\_\_$$

d) La exósfera se sitúa más allá del kilómetro ____ sobre el nivel del mar. La distancia E de un punto cualquiera de la exósfera al nivel del mar, se puede escribir así:

$$\_\_\_\_ > \_\_\_\_$$

La parte sólida de la Tierra se considera dividida en las regiones que se muestran en el esquema siguiente. (Las distancias se miden del nivel del mar hacia abajo; por eso se indican con números negativos).



Ejercicio 15. Vea el esquema y complete las siguientes expresiones

a) Si c es la distancia de un punto cualquiera de la corteza al nivel del mar, entonces sabemos que

$$\_\_\_\_ < c < \_\_\_\_$$

b) Si con la letra m designamos la distancia que hay entre un punto cualquiera del manto y el nivel del mar, entonces se cumple que

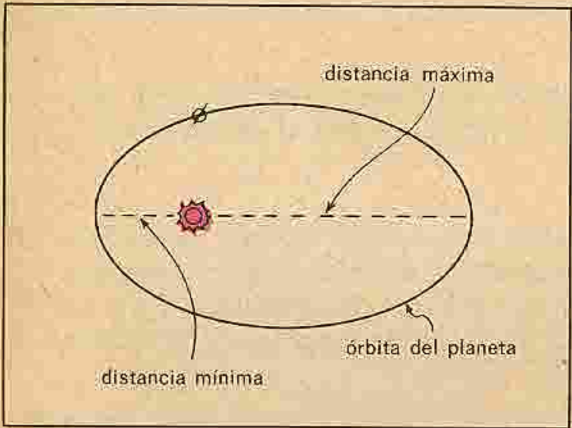
$$\_\_\_\_ < \_\_\_\_ < \_\_\_\_$$

c) Si n es la distancia que hay entre un punto cualquiera de la zona externa del núcleo y el nivel del mar, entonces n cumple la condición de que

$$\_\_\_ < \_\_\_ < \_\_\_$$

d) La distancia del nivel del mar a un punto cualquiera de la zona interna del núcleo es x. Entonces, x cumple con la condición de que

$$\_\_\_ < \_\_\_ < \_\_\_$$



En nuestro Sistema Solar, la distancia de un planeta al Sol sufre variaciones de acuerdo con la órbita que recorre tal planeta. En la tabla de abajo se indican las distancias máximas y mínimas de algunos planetas al Sol. (La unidad de medida es el kilómetro).

Planeta	Distancia máxima al Sol	Distancia mínima al Sol
Mercurio	70 000 000	46 000 000
Venus	108 400 000	106 900 000
La Tierra	152 000 000	149 500 000
Marte	248 000 000	206 000 000

Ejercicio 16. Observe la tabla y complete las siguientes oraciones.

a) Si denotamos con m la distancia de Mercurio al Sol, en cualquier punto de su órbita, tendremos entonces que

$$\_\_\_ \leqq m \leqq \_\_\_$$

b) Si v es la distancia de Venus al Sol, en cualquier momento de su traslación alrededor del astro rey, entonces v cumple con la condición de que:

$$\_\_\_ \leqq \_\_\_ \leqq \_\_\_$$

c) Si t es la distancia de la Tierra al Sol en cualquier momento del año, esta distancia se puede describir así:

d) Si M es la distancia de Marte al Sol en cualquier momento, entonces esta distancia puede describirse con la expresión siguiente:

Los elementos químicos que forman los cuerpos se pueden presentar en 3 estados diferentes de acuerdo con su temperatura: el estado sólido, el estado líquido y el estado gaseoso.

Un cuerpo sólido, al adquirir cierta temperatura (a la cual se le llama temperatura de fusión) pasa al estado líquido. Un cuerpo en estado líquido, al adquirir cierta temperatura (llamada temperatura de ebullición) pasa al estado gaseoso. En la siguiente tabla se anotan las temperaturas de fusión y de ebullición de algunos elementos. (La unidad de medida es el grado centígrado).

Elemento	Temperatura de Fusión	Temperatura de Ebullición
Oro	1 063	2 600
Plata	960.5	1 950
Mercurio	− 38.9	357
Bromo	− 7.2	59
Hidrógeno	−259.1	− 253
Oxígeno	−218.8	− 183

Ejercicio 17. Observe la tabla y complete las oraciones siguientes.

a) Si llamamos t a cualquier temperatura que pueda tener el oro en estado gaseoso, sabemos entonces que

$$t >$$

b) Si denotamos con m la temperatura de un cuerpo formado con bromo en estado sólido, entonces tendremos que

$$m <$$

c) Si r es la temperatura de un cuerpo formado de mercurio, y además sabemos que $59° < r < 350$, entonces ese cuerpo se encuentra en estado ______

d) Si s es la temperatura de un cuerpo formado con hidrógeno y sabemos que $s < -259.1°$, entonces tal cuerpo se encuentra en estado ______

e) Si x es la temperatura de un cuerpo formado con plata y sabemos que $1\,063° < x < 1\,600°$, entonces dicho cuerpo está en estado ______

f) Si y es la temperatura que tiene un cuerpo formado con oxígeno líquido, entonces y cumple con la condición de que

$$\_\_\_ < \_\_\_ < \_\_\_$$

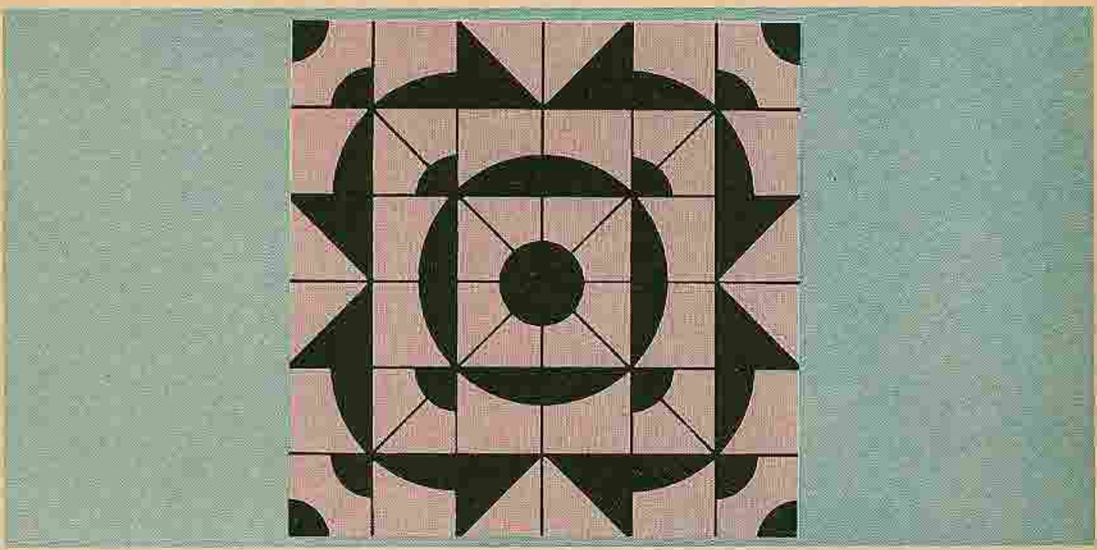
g) Si un cuerpo está formado con hidrógeno en estado líquido y tiene una temperatura w, entonces esa temperatura w está entre ______ y ______ grados y, por lo tanto,

$$\_\_\_ < \_\_\_ < \_\_\_$$

h) La temperatura de un cuerpo formado con bromo está entre $-7.2°$ y $59°$. Por lo tanto, dicho cuerpo se encuentra en estado ______

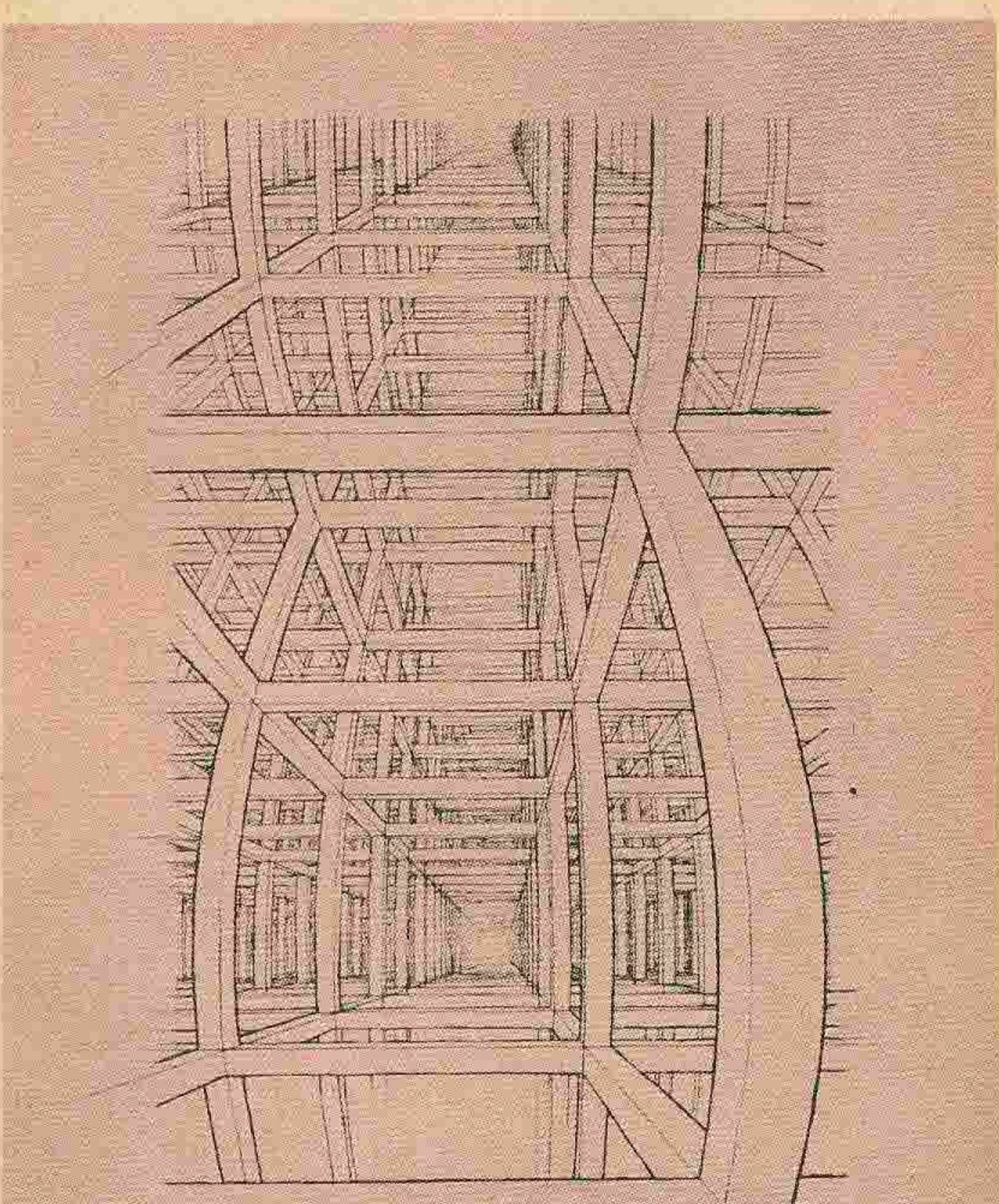
i) La temperatura z de un cuerpo formado con hidrógeno líquido se puede describir así:

$$\_\_\_ > \_\_\_ > \_\_\_$$



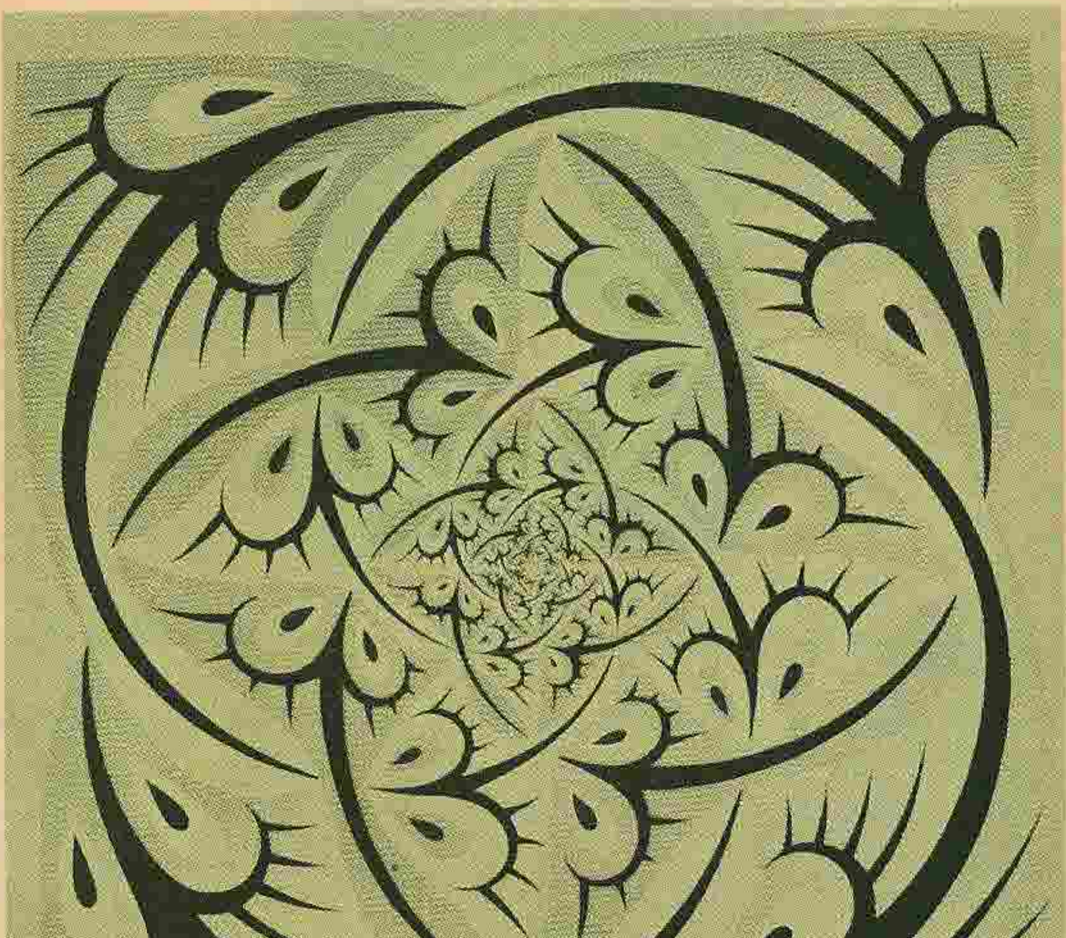
Capítulo tercero

Gráficas



I

Coordenadas en el plano



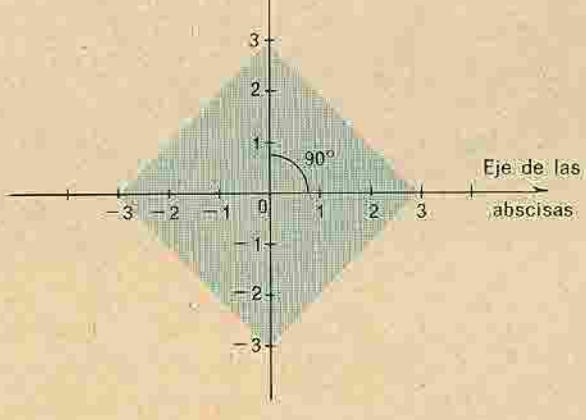
1. coordenadas en el plano

Usted ha usado los números para hacer operaciones y también para expresar resultados de mediciones. Además, los ha empleado para localizar puntos en una recta. Ahora los utilizaremos también para localizar puntos en un plano.

La idea de utilizar números para describir la posición de los puntos de un plano existía desde tiempos muy remotos; pero fue hasta el siglo XVII que René Descartes, eminente matemático francés, aplicó sistemáticamente este método.

A continuación veremos cómo localizar puntos en un plano, siguiendo el método de Descartes.

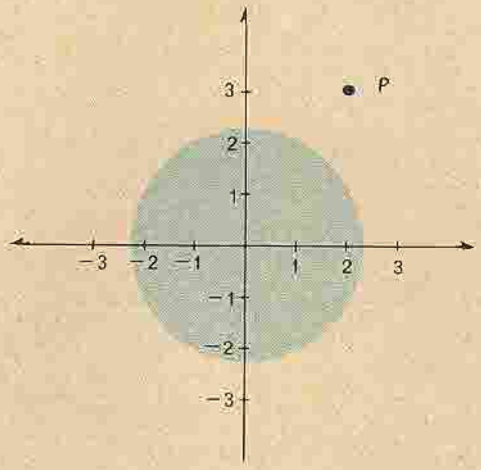
Consideremos en un plano dos ejes de coordenadas perpendiculares entre sí, como se ilustra a continuación.



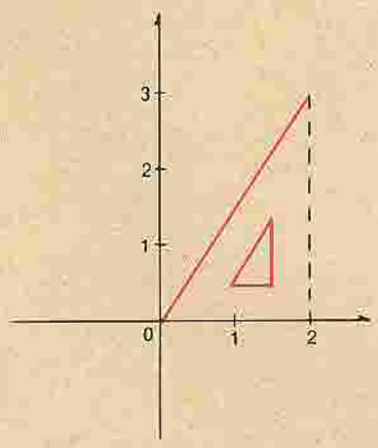
Se acostumbra tomar como punto de intersección de esos dos ejes su punto cero, y distinguirlos nombrándolos como se hace en la ilustración.

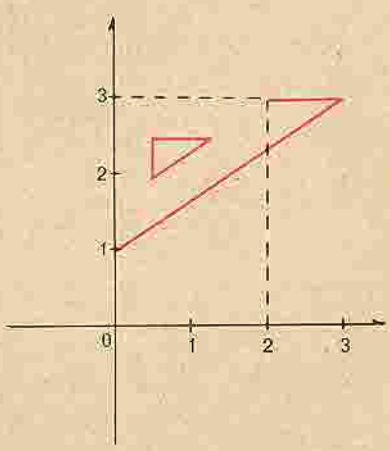
Observe que en los dos ejes los segmentos unidad son congruentes.

Con esto ya podemos describir la posición de cualquier punto del plano por medio de dos números. Por ejemplo, consideremos el punto P en la siguiente figura.



Si trazamos, desde el punto P, segmentos perpendiculares a los ejes de coordenadas, como se ve en la ilustración,





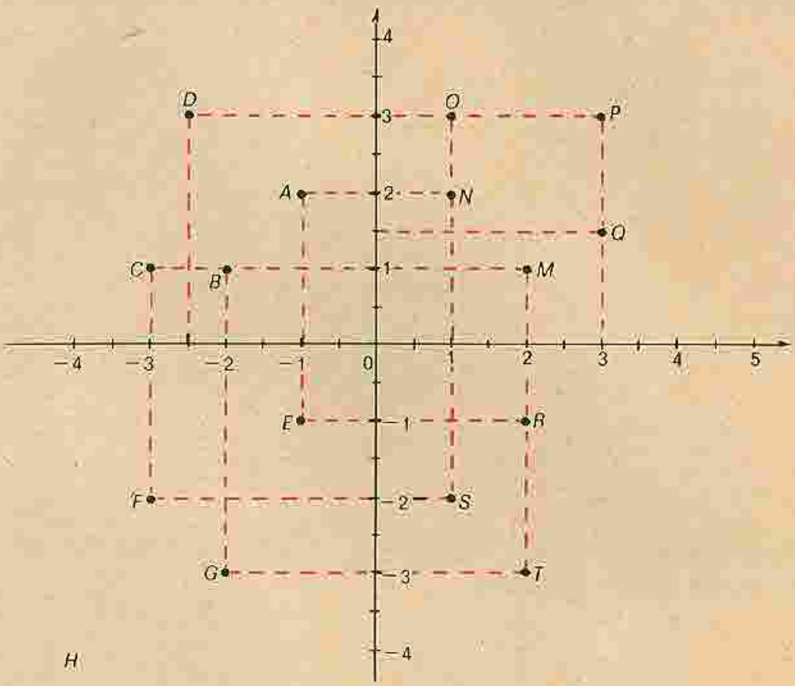
encontramos que uno de esos segmentos interseca al eje de las abscisas en el punto 2 y el otro interseca al eje de ordenadas en el punto 3. Con estos dos números (2, 3) podemos indicar la posición del punto P en el plano. Simplemente decimos que el punto P tiene la abscisa 2 y la ordenada 3, o bien, que tiene las coordenadas (2, 3) y escribimos

$$P = (2, 3)$$

Observe usted que las coordenadas se indican en orden. Primero mencionamos la abscisa y después la ordenada. Se conviene en hacer esto para evitar posibles confusiones.

Cuando se tiene un plano con dos ejes de coordenadas como los que ilustramos antes, se dice que en el plano hay un **sistema de coordenadas.**

Ejercicio 1. Indique las coordenadas de los puntos marcados en la siguiente ilustración. Observe los incisos resueltos.

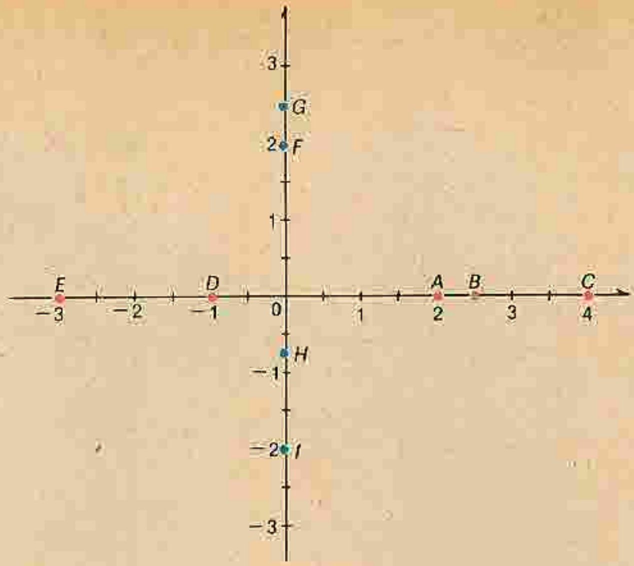


a) $M = (2,\ 1)$	b) $N = (\quad)$	c) $O = (\quad)$
d) $P = (\quad)$	e) $Q = (\quad)$	f) $A = (-1,\ 2)$
g) $B = (\quad)$	h) $C = (\quad)$	i) $D = (\quad)$
j) $E = (-1,\ -1)$	k) $F = (\quad)$	l) $G = (\quad)$
m) $R = (2,\ -1)$	n) $S = (\quad)$	o) $T = (\quad)$

Observe usted que son diferentes los puntos $M = (2,\ 1)$ y $N = (1,\ 2)$, los puntos $F = (-3,\ -2)$ y $G = (-2,\ -3)$, los puntos $R = (2,\ -1)$ y $A = (-1,\ 2)$, etc.

En general, el punto que tiene las coordenadas $(a,\ b)$ es diferente del punto $(b,\ a)$. De ahí la importancia que tiene el dar las coordenadas siempre en orden.

De todos los puntos de un plano hay algunos que están precisamente en los ejes de coordenadas. Por ejemplo veamos los siguientes:



¿Cuál es la ordenada de todos los puntos marcados en color rojo? Todos ellos están en la perpendicular que interseca al eje de ordenadas en el punto cero. Por lo tanto, su ordenada es cero. Esto es,

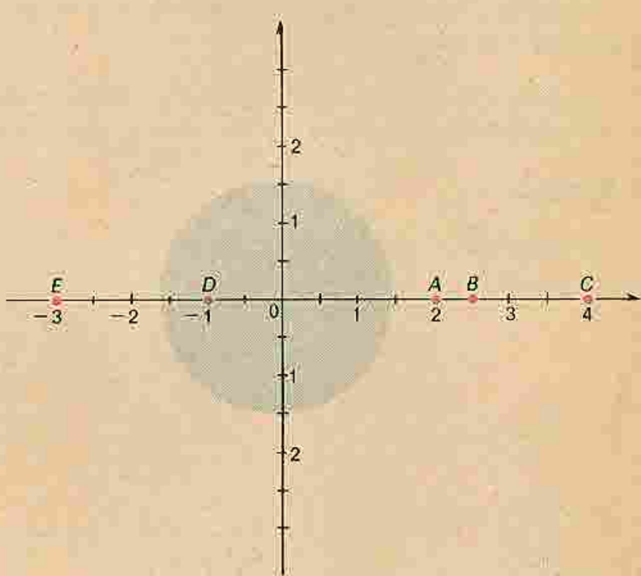
$A = (2, 0)$

$B = (\frac{5}{2}, 0)$

$C = (4, 0)$

$D = (-1, 0)$

$E = (-3, 0)$



¿Cuál es la abscisa de todos los puntos marcados en color azul?

Su abscisa es cero porque están en la perpendicular que interseca al eje de abscisas en el punto cero.

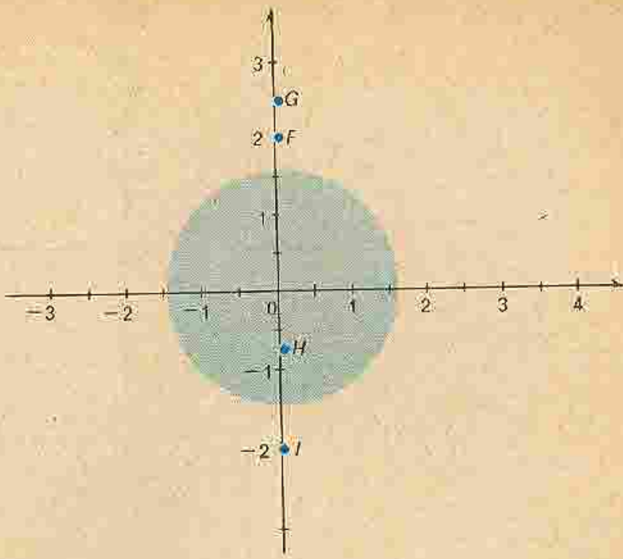
Esto es,

$F = (0, 2)$

$G = (0, 2.5)$

$H = (0, -\frac{3}{4})$

$I = (0, -2)$



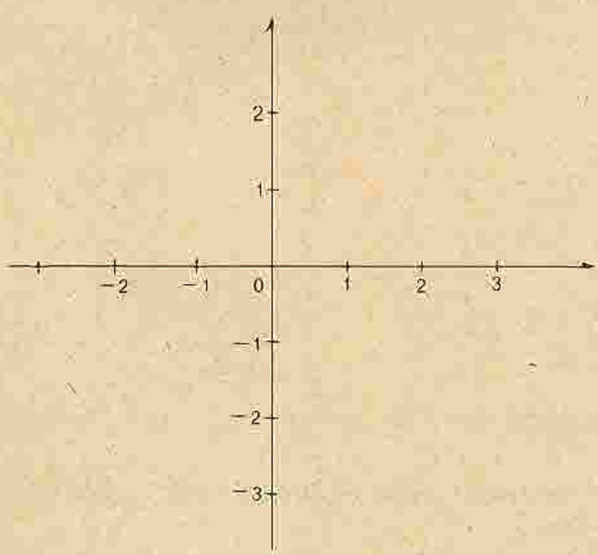
El punto de intersección de los dos ejes de coordenadas recibe el nombre de **origen** y se considera que sus coordenadas son $(0, 0)$.

Con este procedimiento podemos asignar a cada punto de un plano una pareja de números que es única.

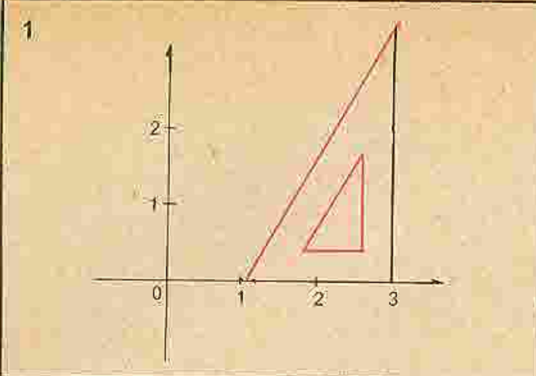
Veamos ahora el problema inverso: Conociendo las coordenadas de un punto, encontraremos ese punto en un plano en el que se tenga un sistema de coordenadas.

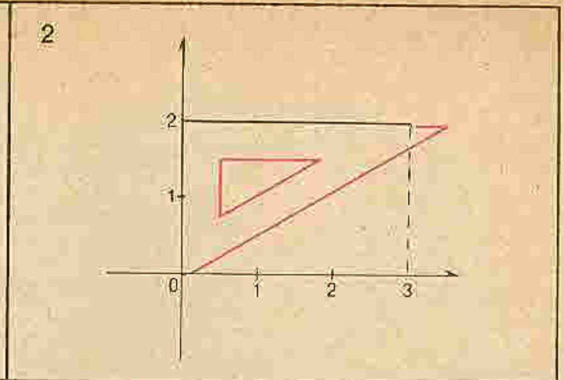
Ejemplo.

Localicemos el punto $M = (3, 2)$ en un plano como el que se ilustra.



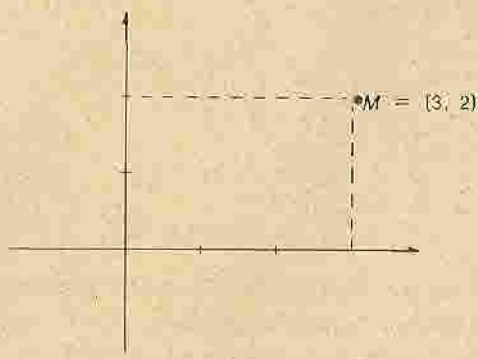
Solución. Como el punto M tiene abscisa 3 y ordenada 2, trazamos segmentos perpendiculares a los ejes, como se ve en los dibujos siguientes.





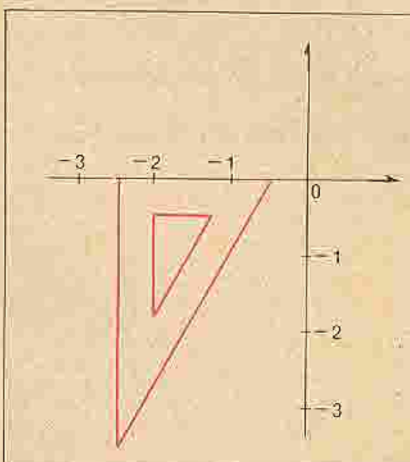
Perpendicular que interseca al eje de las abscisas en el punto 3.	Perpendicular que interseca al eje de las ordenadas en el punto 2.

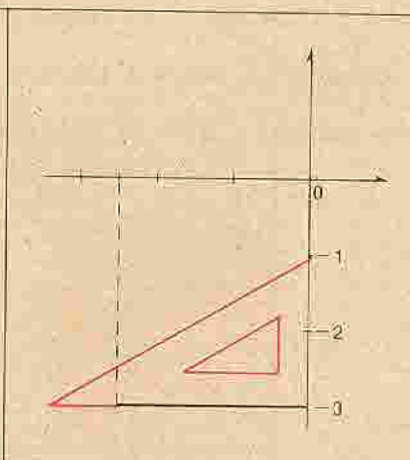
Nuestro punto $M = (3, 2)$ está en la intersección de estos dos segmentos.
$M = (3, 2)$



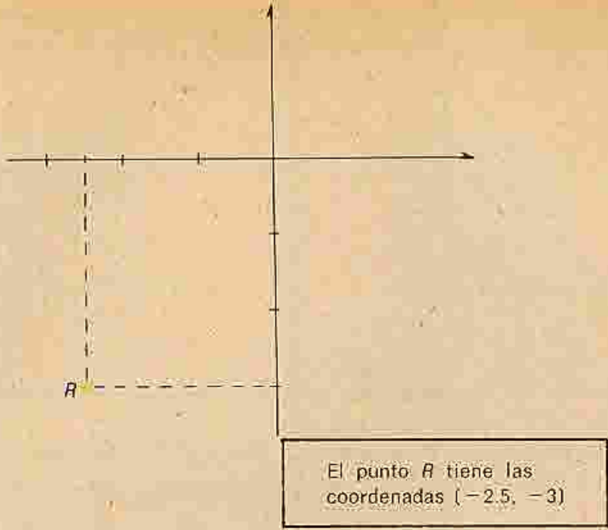
Ejemplo. Localicemos en un plano coordenado el punto $R = (-2.5, -3)$

Solución. Procedemos como en el ejemplo anterior.





Abscisa -2.5	Ordenada -3



Ejercicio 2. En una hoja de papel milimétrico, trace un sistema de coordenadas tomando como unidad el centímetro y localice los siguientes puntos:

$R = (2,\ 4)$	$S = (3,\ 2)$	$T = (-1,\ -3)$	$Q = (4, -3)$
$A = (\ \ 1.5,\ 2\ \ )$	$B = (\ \ 2, 2.3)$	$C = (\ \ 0, 3.7)$	
$D = (-1,\ 2.5)$	$E = (-2.3, 1\ \ )$	$F = (-1.2, 0\ \ )$	
$G = (-\ \ .5, -1\ \ )$	$H = (\ \ 0, -2.6)$	$I = (-3, -\ \ .8)$	
$J = (\ \ 2.6, -2\ \ )$	$K = (\ \ 1.5, 0\ \ )$	$L = (\ \ 4, -\ \ .6)$	

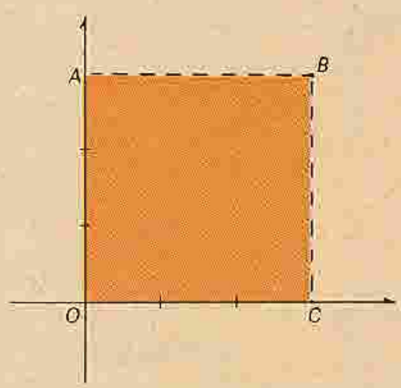
En vista de que los puntos de un plano pueden localizarse por medio de parejas de números, se acostumbra también nombrar a un punto dado por medio de sus coordenadas. Así por ejemplo, si tenemos el punto $P = (3,\ 2)$, podemos hablar indistintamente del punto P o del punto $(3,\ 2)$.

Ejercicio 3. Analice cada situación y conteste lo que se pregunta.

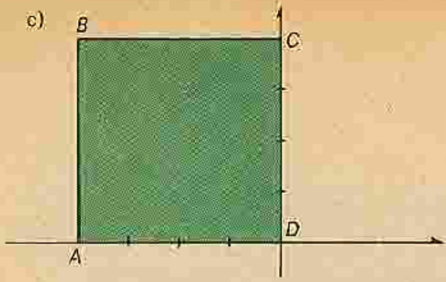
a) El punto R tiene las coordenadas $(5,\ 4)$.

¿Cuántas unidades hay desde el punto R hasta el eje de las ordenadas?

b) En este cuadrado, $B = (3,\ 3)$. ¿Cuáles son las coordenadas de A, C, y 0?

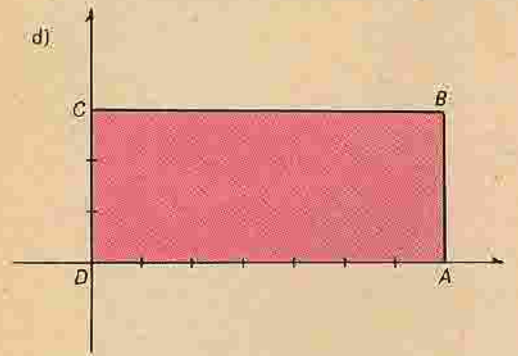


c)



En este cuadrado, el punto A tiene coordenadas $(-4, 0)$. ¿Cuáles son las coordenadas de B, C y D?

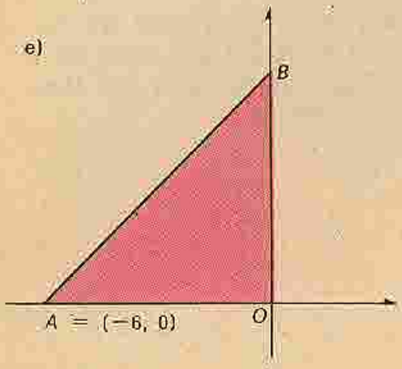
d)



En este rectángulo $A = (7, 0)$ y $C = (0, 3)$. ¿Cuántas unidades mide de base y cuántas de altura?

¿Cuál es su área?

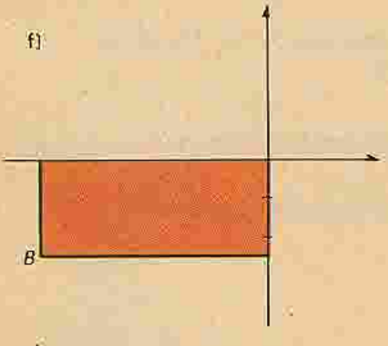
e)



El triángulo $A\ B\ O$ es isósceles.

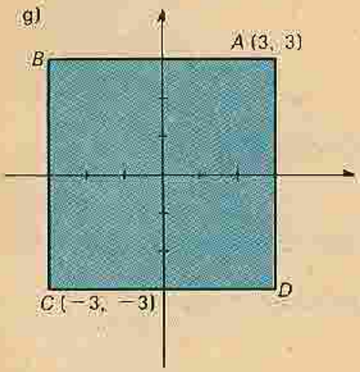
¿Cuáles son las coordenadas de B?

f)



En este rectángulo, las coordenadas de B son $(-6, -2.5)$. ¿Cuál es su área?

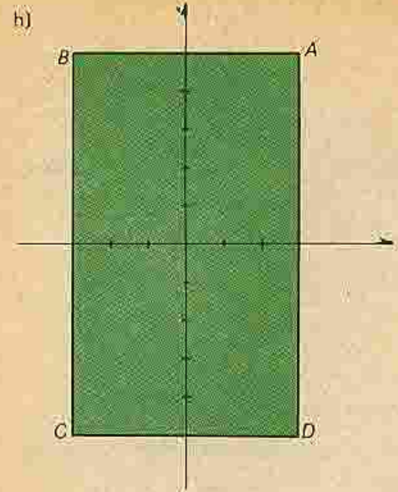
g)



¿Cuáles son las coordenadas de los puntos B y D en este cuadrado?

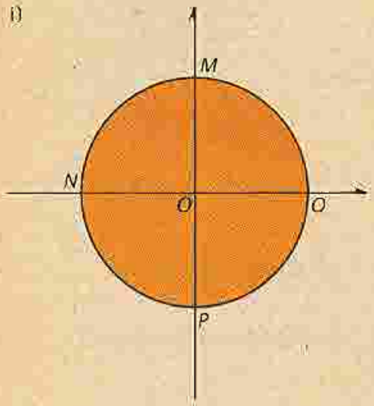
¿Cuál es el área de esta figura geométrica?

h)



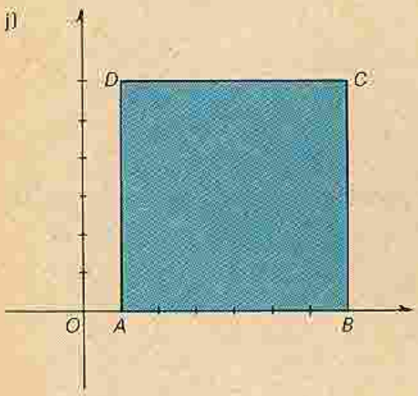
En este rectángulo $A = (3, 5)$ y $B = (-3, 5)$. Si $C = (-3, -5)$, ¿Cuál es el área de dicho rectángulo?

i)



Esta circunferencia, con centro en el origen, tiene un radio de 2.3 unidades. ¿Cuáles son las coordenadas de los puntos M, N, P, y Q?

j)

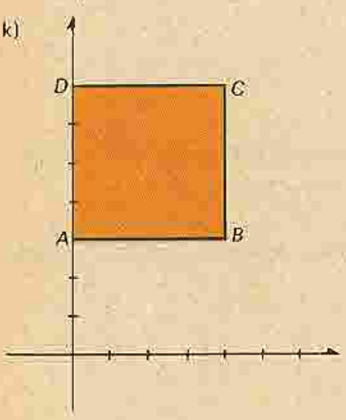


En este cuadrado $A = (1, 0)$ y $B = (7, 0)$

¿Cuáles son las coordenadas de C y D?

¿Cuál es el área del cuadrado?

k)

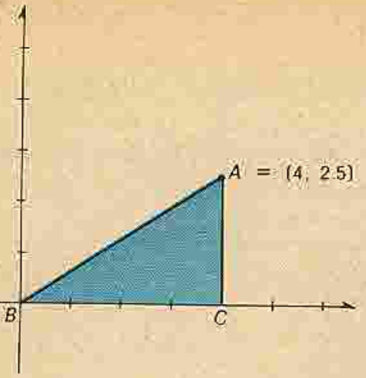


En este cuadrado $A = (0, 3)$ y $D = (0, 7)$.

¿Cuáles son las coordenadas de B y C?

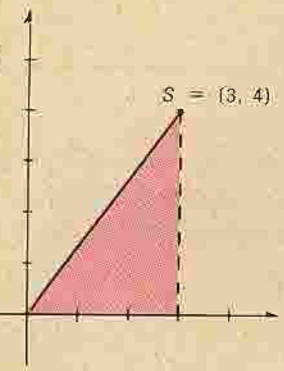
¿Cuál es el área del cuadrado?

l)



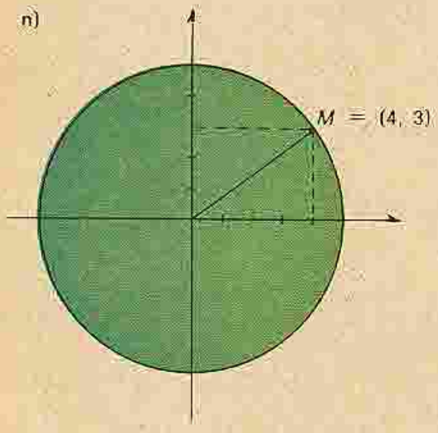
¿Cuál es el área del triángulo A B C?

m)



¿Cuál es la distancia del punto S al origen? (Sugerencia: Observe la figura, ¿recuerda usted el teorema de Pitágoras?).

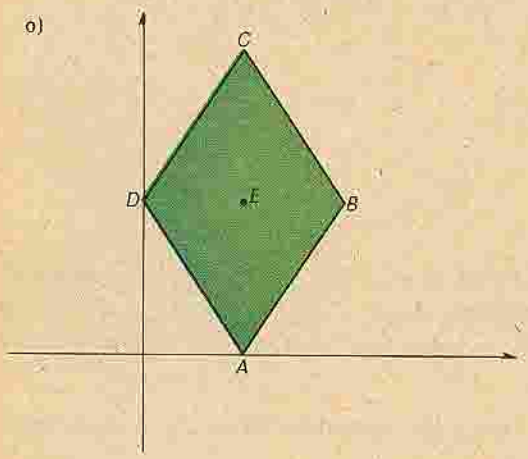
n)



Esta circunferencia tiene su centro en el origen y M es un punto de ella.

¿Cuántas unidades mide su radio?

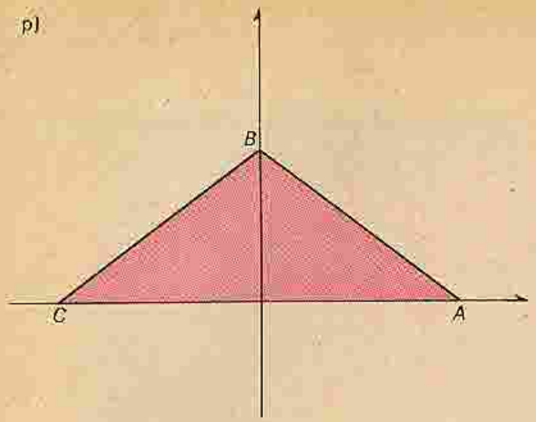
o)



En este rombo, $E = (2, 3)$.

¿Cuáles son las coordenadas de A, B, C y D? ¿Cuál es la longitud del segmento AC? (Sugerencia: E es el punto medio del segmento DB y del segmento AC).

p)



El triángulo $A\ B\ C$ es isósceles.

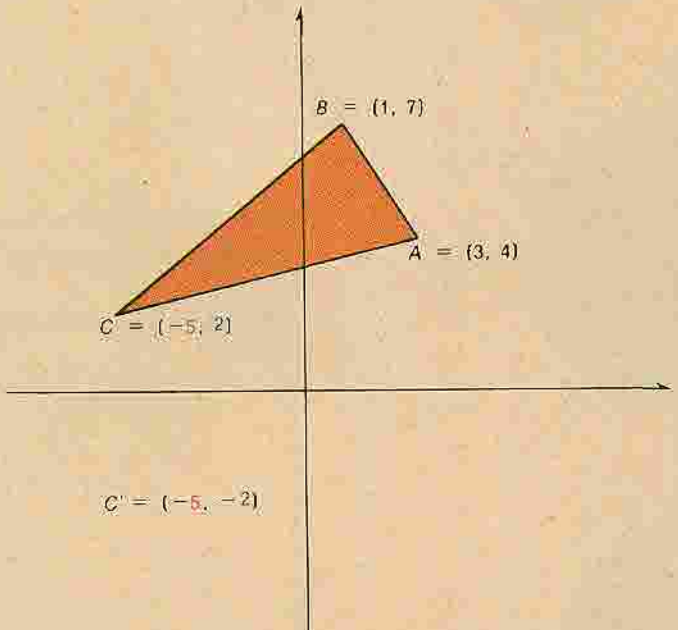
Si $A = (4, 0)$, ¿Cuáles son las coordenadas de C? Si $B = (0, 3)$,

¿Cuál es el área del triángulo?

¿Cuánto mide el lado AB?

Ejercicio 4.

a) Observe los vértices del triángulo ABC ilustrado abajo. En la misma ilustración trace otro triángulo $A'\ B'\ C'$ cuyos vértices tengan la misma abscisa que los puntos A, B, C y que de ordenada tengan el inverso aditivo de las ordenadas de A, B y C. (Vea los puntos C y C').

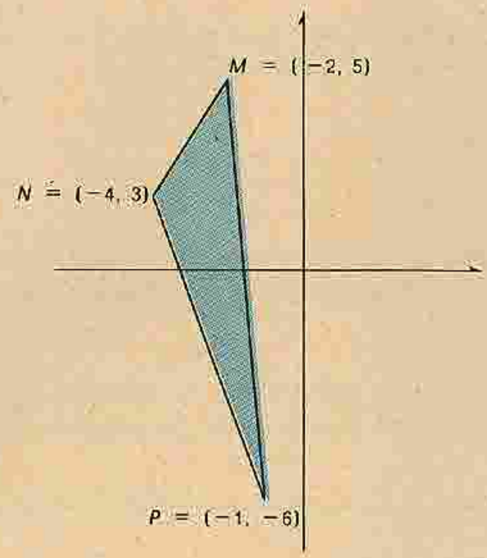


b) Imagine que dobla la hoja de papel por el eje de las abscisas. (O realice el doblez efectivamente). ¿Qué pasa con los puntos A, B, C del triángulo dado y los puntos A', B', C' del nuevo triángulo? ¿Cómo quedan los lados de los dos triángulos?

Cuando ocurre esto se dice que los dos triángulos **son simétricos con respecto al eje de las abscisas.**

Ejercicio 5.

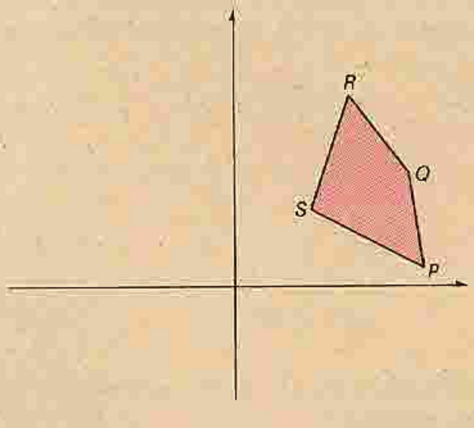
a) Encuentre los vértices del triángulo $M'\ N'\ P'$, de modo que sus ordenadas sean las mismas que tienen los puntos M, N y P. Y sus abscisas sean el inverso aditivo de las abscisas de M, N y P. Trace el triángulo $M'\ N'\ P'$.



b) Doble usted la hoja por el eje de las ordenadas. ¿Qué pasa con los puntos M, N, P y los puntos $M'\ N'\ P'$? ¿Cómo quedan los lados de los dos triángulos?

En este caso, los dos triángulos **son simétricos con respecto al eje de las ordenadas.**

Ejercicio 6. Observe el siguiente cuadrilátero $P\ Q\ R\ S$.



$P = (5, .5)$
$Q = (4.6, 3)$
$R = (3, 5)$
$S = (2, 2)$

a) Trace el cuadrilátero que es simétrico a $P\ Q\ R\ S$, con respecto al eje de las abscisas.

b) Compare las coordenadas de los puntos P, Q, R y S con las coordenadas de los vértices del cuadrilátero simétrico que usted trazó.

Las abscisas son

Las ordenadas son

c) Trace el cuadrilátero que es simétrico a $P\ Q\ R\ S$, con respecto al eje de las ordenadas.

d) Compare las coordenadas de los puntos P, Q, R y S con las coordenadas de los vértices del cuadrilátero simétrico que usted trazó.

Las abscisas son

Las ordenadas son

En nuestro estudio hemos aprendido a representar los números en diversas formas. Una de estas formas ha consistido en emplear las letras como símbolos que representan números.

En un plano con un sistema de coordenadas también se acostumbra utilizar letras para denotar puntos, y se emplea la expresión (x, y) para representar a cualquier punto del plano.

Ejemplo.

a) La expresión (x, y) representa al punto $(5, 3)$ cuando $x = 5$ y $y = 3$.

b) La expresión (x, y) representa al punto $(-7, -2)$ cuando $x = -7$ y $y = -2$

c) Si $x = 8.5$ y $y = -2$, entonces el punto (x, y) es el punto $(8.5, -2)$

d) $(x, y) = (-3, 4)$ si $x = -3$ y $y = 4$

Ejercicio 7. Trace un sistema de coordenadas en una hoja de papel milimétrico y localice el punto (x, y) para los valores de x y y, que se indican en cada inciso.

a) $x = 2, \quad y = 7$

b) $x = 3.5, \quad y = -4.5$

c) $x = 0, \quad y = -7.2$

d) $x = -4.6, \quad y = -6.4$

e) $x = 3, \quad y = 0$

f) $x = 0, \quad y = 0$

g) $x = 5, \quad y = x$

h) $x = y, \quad y = -3$

En ocasiones se pide que las coordenadas de un punto satisfagan alguna condición. Por ejemplo, veamos el siguiente problema.

Problema. Si sabemos que las ordenadas de los puntos A, B, C, D son el doble de las abscisas, ¿cuáles son las coordenadas de dichos puntos?

$A = (3, \quad)$ $\qquad B = (-5, \quad)$ $\qquad C = (3.6, \quad$ $\qquad D = (0, \quad)$

Resolución.

La abscisa del punto A es 3. El doble es $3 \times 2 = 6$. Por lo tanto, las coordenadas de A son $(3, \boxed{6})$.

El doble de -5 es $(-5) \times 2 = -10$. Por lo tanto, $B = (-5, \boxed{-10})$.

El doble de 3.6 es $3.6 \times 2 = 7.2$. Por lo tanto, $C = (3.6, \boxed{7.2})$.

El doble de 0 es $0 \times 2 = 0$. Por lo tanto, $D = (0, \boxed{0})$.

Problema. En los siguientes puntos E, F, G y H, la ordenada es una unidad mayor que la abscisa. Indique las coordenadas de dichos puntos.

$E = (2, \boxed{})$ $F = (-5, \boxed{})$ $G = (.3, \boxed{})$ $H = (2.6, \boxed{})$

Resolución.

Como $2 + 1 = 3$, tenemos que la ordenada del punto E es 3. Por consiguiente, $E = (2, \boxed{3})$.

Para F tenemos que $-5 + 1 = -4$. Entonces, $F = (-5, \boxed{-4})$.

En G ocurre que $.3 + 1 = 1.3$. Por eso $G = (.3, \boxed{1.3})$.

Como $2.6 + 1 = 3.6$, tenemos que $H = (2.6, \boxed{3.6})$.

Ejercicio 8. Encuentre las coordenadas de los siguientes puntos, de acuerdo con la regla que se indica en cada inciso.

Localice en un plano coordenado esos puntos.

a) $P = (7, \boxed{})$. La ordenada es igual a la abscisa.

b) $Q = (-3, \boxed{})$. La ordenada es el inverso aditivo de la abscisa.

c) $R = (-4, \boxed{})$. La ordenada es el inverso multiplicativo de la abscisa.

d) $S = (2.8, \boxed{})$. La ordenada es el triple de la abscisa.

e) $T = (-6.2, \boxed{})$. La ordenada es la mitad de la abscisa.

f) $U = (-2, \boxed{})$. La ordenada es el cuadrado de la abscisa.

g) $V = (7, \boxed{})$. La ordenada se obtiene multiplicando la abscisa por 2 y restando después 5.

h) $W = (-1, \boxed{})$. La ordenada se obtiene multiplicando la abscisa por 3 y elevando al cuadrado ese resultado.

A fin de abreviar se acostumbra indicar con una expresión algebraica la regla para encontrar la ordenada de un punto cuando se conoce su abscisa. Por ejemplo, en el inciso g), del ejercicio anterior, si consideramos que x es la abscisa, entonces la regla para obtener la ordenada es $2x - 5$.

En el inciso b), si consideramos que x es la abscisa, entonces la ordenada es $-x$.

Ejercicio 9. Indique con una expresión algebraica las reglas para encontrar la ordenada en los incisos a), c), d), e), f) y h) del ejercicio anterior.

Ejercicio 10. Encuentre las coordenadas de los siguientes puntos, como se hace en a). Observe bien cuál es la regla para obtener la ordenada.

a) $A = (x, x^2)$. Si $x = 3$, entonces $A = (3, 9)$

(Aquí la ordenada es x^2 y como $x = 3$, tenemos que $x^2 = 3^2 = 9$. En consecuencia, las coordenadas del punto A son $(3, 9)$).

b) $B = (x, -2x)$. Si $x = 4$, entonces $B = (\quad , \quad)$

c) $C = (x, \frac{1}{x})$. Si $x = 2$, entonces $C = (\quad , \quad)$

d) $D = (x, -x)$. Si $x = -6.9$, entonces $D = (\quad , \quad)$

e) $E = (x, 3x + 5)$. Si $x = 2$, entonces $E = (\quad , \quad)$

f) $F = (x, 4x^2)$. Si $x = -\frac{1}{2}$, entonces $F = (\quad , \quad)$

Ejercicio 11.

a) Encuentre las coordenadas de los puntos $(x, -2x)$, para los valores de x que se indican.

1) $x = -3$; $A = (\, , \,)$

2) $x = -2$; $B = (\, , \,)$

3) $x = -1$; $C = (\, , \,)$

4) $x = 0$; $D = (\, , \,)$

5) $x = 1$; $E = (\, , \,)$

6) $x = 2$; $F = (\, , \,)$

7) $x = 3$; $G = (\, , \,)$

b) Localice en un plano con un sistema de coordenadas los puntos anteriores.

c) Escoja dos cualesquiera de estos puntos y trace una recta que pase por ellos.

d) ¿Los otros puntos quedan en la misma recta?

Ejercicio 12.

a) Encuentre las coordenadas de los puntos $(x, 2x - 6)$, para los valores de x que se indican.

1) $x = -2$; $A = (\ , \ )$

2) $x = -1$; $B = (\ , \ )$

3) $x = 0$; $C = (\ , \ )$

4) $x = 1$; $D = (\ , \ )$

5) $x = 2$; $E = (\ , \ )$

6) $x = 3$; $F = (\ , \ )$

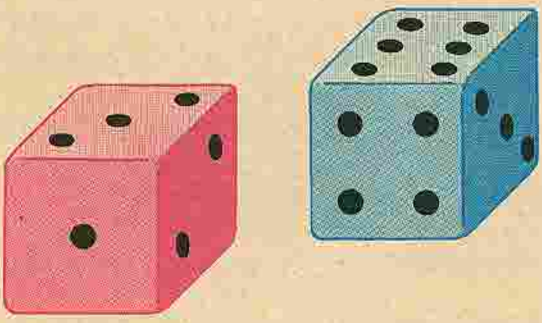
7) $x = 4$; $G = (\ , \ )$

b) Localice en un plano con un sistema de coordenadas los puntos anteriores.

c) Escoja dos cualesquiera de esos puntos y trace una recta que pase por ellos.

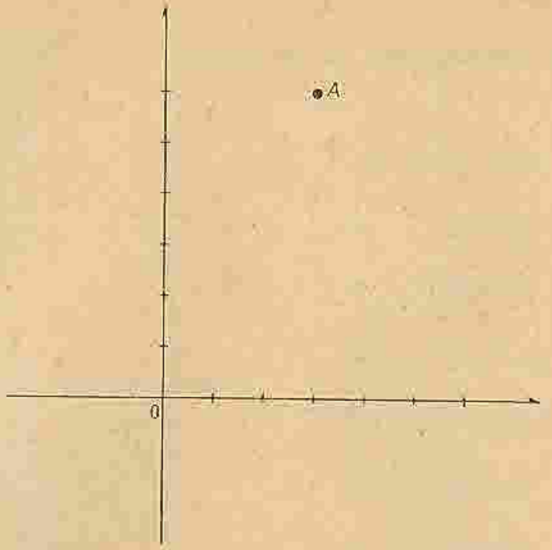
d) ¿Los otros puntos quedan en la recta trazada?

Esta forma de localizar puntos en un plano puede utilizarse para ilustrar algunas situaciones y hacer más fácilmente el análisis de ellas. Por ejemplo, ilustremos los posibles resultados en un juego de dados.



Si se considera cada tirada como una pareja de números en cierto orden, podemos representarla por medio de un punto en un plano cartesiano.

Tomemos primero el número de puntos que indique el dado rojo (éste será la abscisa) y después el número que señale el dado azul. (Este será la ordenada). De esta manera, la tirada (3, 6) que ilustramos antes, quedará representada con el punto *A* en el siguiente plano coordenado.



Ejercicio 13. Marque usted en el plano los puntos que ilustren todos los resultados posibles en las tiradas de dados. (Sugerencia: Suponga que durante 6 jugadas el dado rojo cae en 1 y el azul cae en 1, 2, 3, 4, 5 y 6. Así se formarán las parejas (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5) y (1, 6). Ahora suponga que el dado rojo cae en 2. Las parejas posibles serán (2, 1), (2, 2), (2, 3), etc.)

a) ¿Cuántos puntos marcó en el plano cartesiano?

¿Cuántos son los posibles resultados en las jugadas de dados?

b) En su plano pinte de rojo los puntos correspondientes a las tiradas que suman 7; de azul los que suman 6, de verde los que suman 5, de amarillo los que suman 4, de anaranjado los que suman 3, y de morado los que suman 2.

c) Si usted quisiera ganar en el juego de dados, ¿a qué número le apostaría?

¿Por qué? ¿A qué número no le apostaría? ¿Por qué?

d) ¿Si le dieran a escoger entre el 3 y el 5, ¿a cuál le apostaría? ¿Por qué?

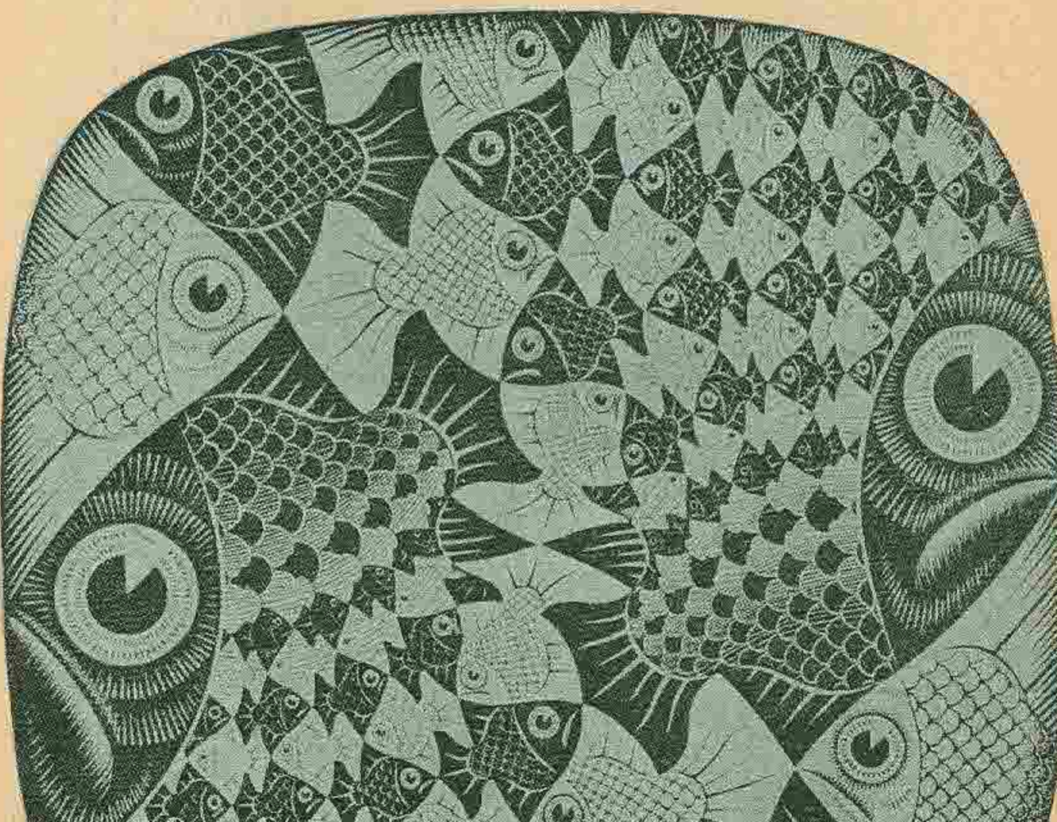
e) Si le dieran a escoger entre el 4 y el 8 para hacer una apuesta ¿cuál escogería usted? Pinte con algún color los puntos cuyas coordenadas suman 8. ¿Está usted conforme con su elección?

f) Si le dieran a escoger entre el 6 y el 8, ¿cuál escogería usted? ¿Por qué?

Más adelante estudiaremos algunos fenómenos y situaciones que se pueden analizar más fácilmente representándolos por medio de puntos en un plano.

II

Gráficas



1. Las gráficas como un recurso para analizar y estudiar fenómenos y situaciones.

A la mayoría de las personas les resulta mucho más fácil obtener información de dibujos o representaciones gráficas que de expresiones a base de números.

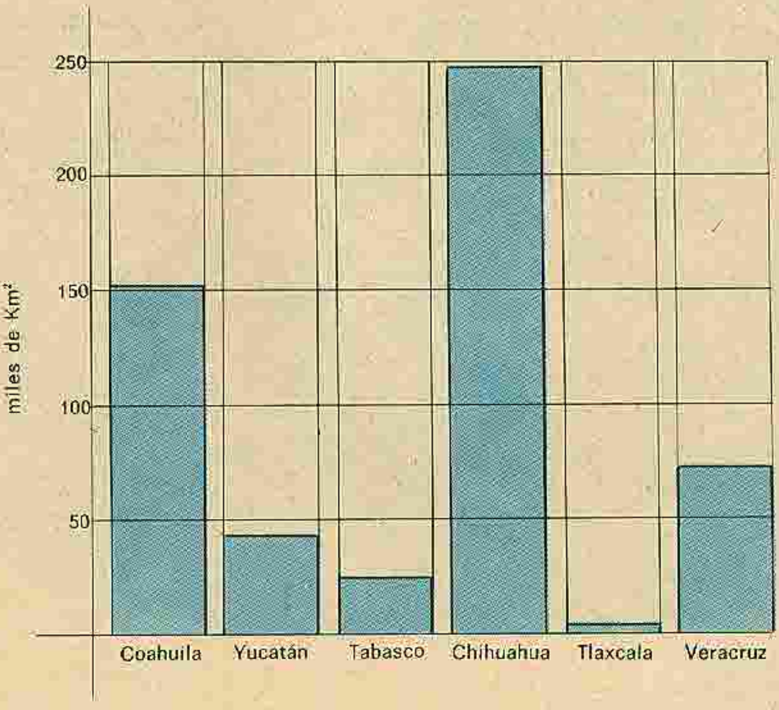
Por eso la presentación de ciertos datos se hace precisamente en forma gráfica.

En esta sección estudiaremos gráficas y aprenderemos a interpretarlas adecuadamente para obtener la mayor información posible de ellas.

Empecemos nuestro estudio mediante la siguiente tabla, en la cual aparecen algunos estados y las áreas de sus respectivos territorios.

Estado	área en miles de km^2
Coahuila	151.571
Yucatán	43.379
Tabasco	24.661
Chihuahua	247.087
Tlaxcala	3.914
Veracruz	72.815

Si deseamos comparar las áreas de los estados que se mencionan, podríamos hacerlo directamente en la tabla. Sin embargo, esta comparación puede hacerse más fácilmente por medio de una gráfica como la siguiente:



(Gráficas como ésta reciben el nombre de **gráficas de barras**).

Ejercicio 1. Observe la gráfica anterior y complete las siguientes expresiones.

a) El estado que tiene la mayor área es

b) El estado que tiene la menor área es

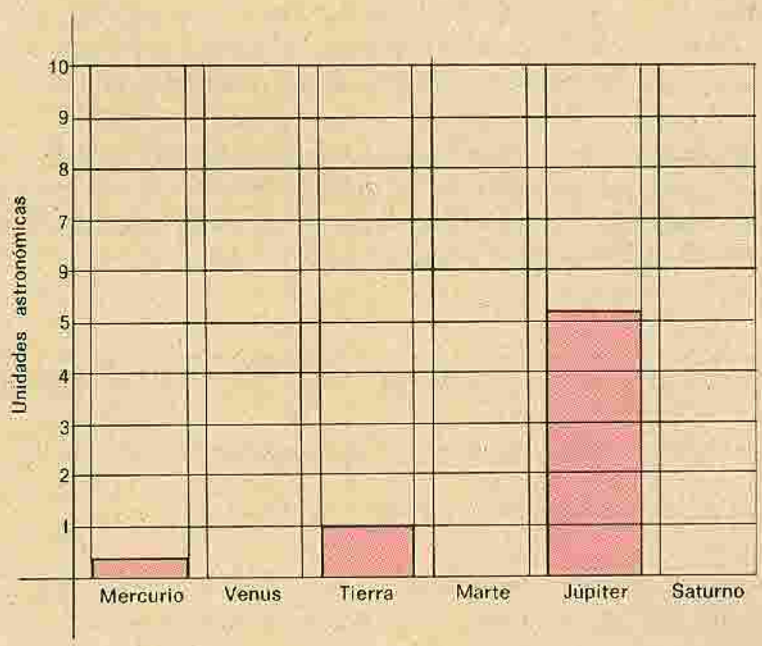
c) Si ordenamos de menor a mayor estos seis estados, de acuerdo con su área, la lista quedará así:

1. ______________________
2. ______________________
3. Yucatán
4. ______________________
5. ______________________
6. ______________________

Observemos ahora la siguiente tabla, en la cual se anotan las distancias medias de algunos planetas al sol. Estas distancias se han medido en unidades astronómicas. (Una unidad astronómica es la distancia de la tierra al sol).

Planetas	Distancia media al Sol
Mercurio	0.387
Venus	0.723
Tierra	1.00
Marte	1.524
Júpiter	5.203
Saturno	9.54

Ejercicio 2. De acuerdo con la tabla anterior complete la siguiente gráfica.



La distancia media de Plutón al Sol es de 39.44 unidades astronómicas. ¿Cabrá en la gráfica anterior la barra que representa a esta distancia? ¿Por qué?

Las gráficas se usan cada vez más para dar, obtener y manejar información acerca de fenómenos, leyes, etcétera. Por eso, no es raro encontrarnos gráficas en la escuela, la oficina, el periódico, las revistas, la televisión, el cine, etcétera.

Por ejemplo, en un hospital los médicos utilizan gráficas como la siguiente para ayudarse en su trabajo.

(Gráficas como ésta reciben el nombre de **gráficas poligonales**).

En esta gráfica se representan las temperaturas de un paciente en diferentes horas del día. Observe que en cada punto rojo, la abscisa indica la hora en que se tomó la temperatura y la ordenada indica cuál fue esa temperatura.

La forma de construir una gráfica depende de la situación o fenómeno que se quiere describir. Así por ejemplo, en la gráfica anterior, el eje vertical empieza en 34, porque la temperatura de cualquier persona no puede ser menor de 34 grados. Y el eje horizontal empieza en 6 porque a esa hora se tomó por primera vez la temperatura de ese enfermo.

Ejercicio 3. Observe usted la gráfica anterior y conteste las siguientes preguntas.

a) ¿A qué horas el paciente tuvo la menor temperatura?

b) ¿A qué hora el paciente tuvo la mayor temperatura?

c) Ese paciente, ¿tiende a recuperar la temperatura normal? (Se considera temperatura normal de un adulto, la de 36.5 grados centígrados).

d) ¿Cree usted posible que el paciente haya tenido una temperatura superior a 40° entre las 12 y las 13 horas?

e) Observe los segmentos cuyos extremos son los puntos rojos. ¿Qué temperatura cree usted que tuvo el paciente a las 8 y media de la mañana?

En cierta ocasión Carlos acompañó a su tío en un viaje que éste realizó en su automóvil.

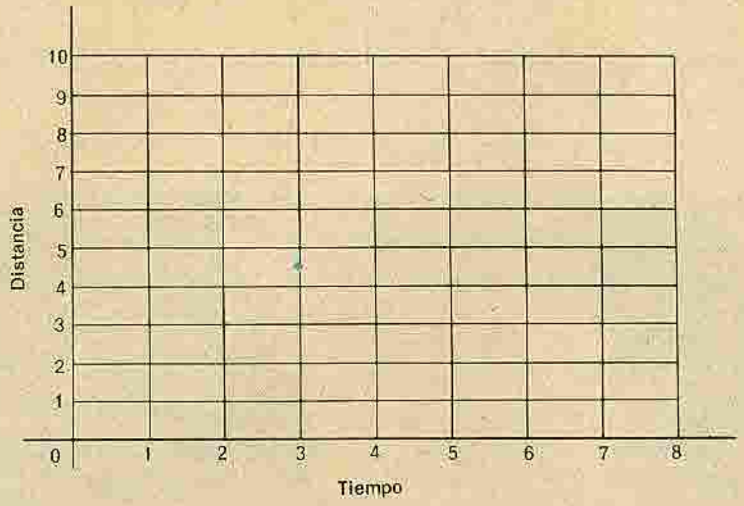
En un corto trayecto de ese viaje, Carlos hizo algunas observaciones y las registró en una tabla como la siguiente:

Tiempo medido en minutos	2	3	4	6
Distancia recorrida en kilómetros	3	4.5	6	9

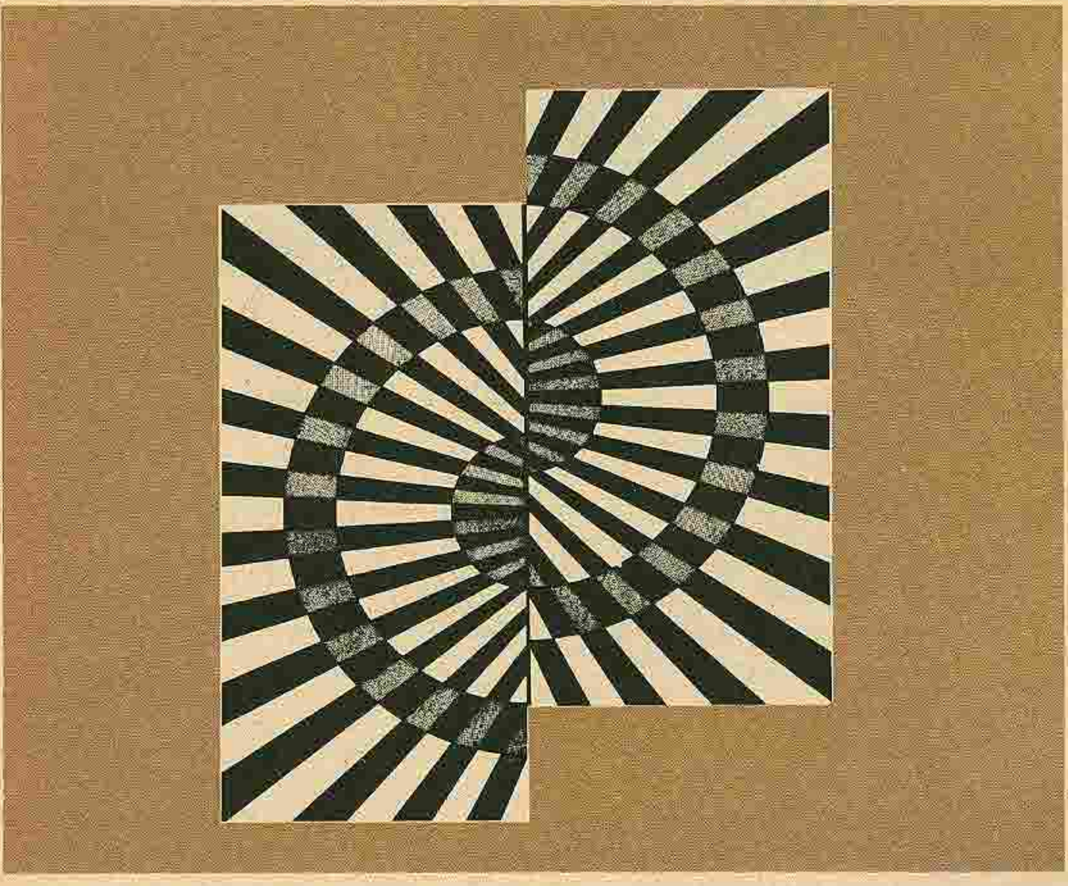
Al observar la tabla, Carlos notó que por cada minuto transcurrido el vehículo había avanzado 1 kilómetro y medio. Esto es, que el coche se había movido a una velocidad constante en ese trayecto.

Ejercicio 4.

a) Usando los datos de la tabla de Carlos, complete usted la siguiente gráfica.



b) Observe la gráfica trazada. ¿Están contenidos en una recta todos los puntos de esa gráfica?



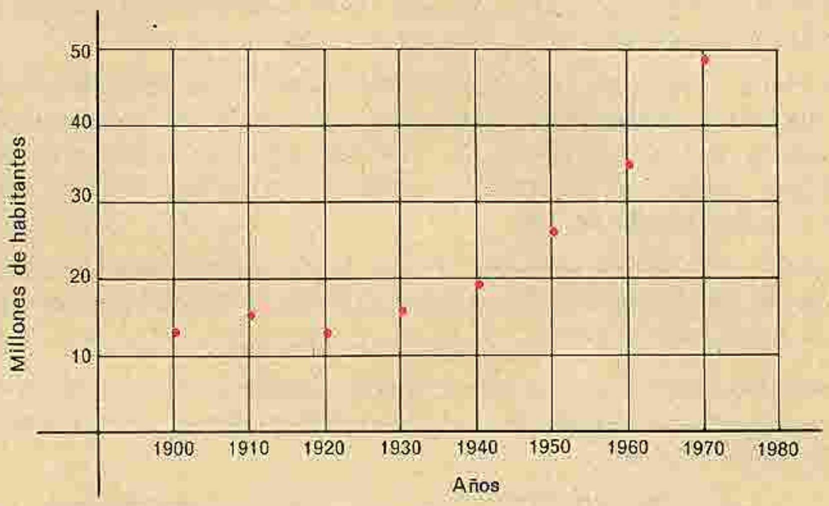
2. Algunas ideas sobre lectura e interpretación de gráficas.

Estudiaremos ahora un procedimiento muy empleado por las personas que disponen de una gráfica que describe cierto fenómeno o situación, y que desean obtener cierto dato, aunque sea aproximadamente.

Los datos de la siguiente tabla se refieren a la población de México en las últimas 8 décadas.

fecha	1900	1910	1920	1930	1940	1950	1960	1970
millones de habitantes	13.6	15.1	14.3	16.6	19.7	25.8	34.9	48.3

La gráfica correspondiente a esta tabla podría ser la que mostramos a continuación.



En esta gráfica podemos observar que la población aumentó en todas las décadas, excepto la de 1910 a 1920, en que la población disminuyó. Seguramente esto fue motivado por el movimiento armado que tuvo lugar en el país en esa época.

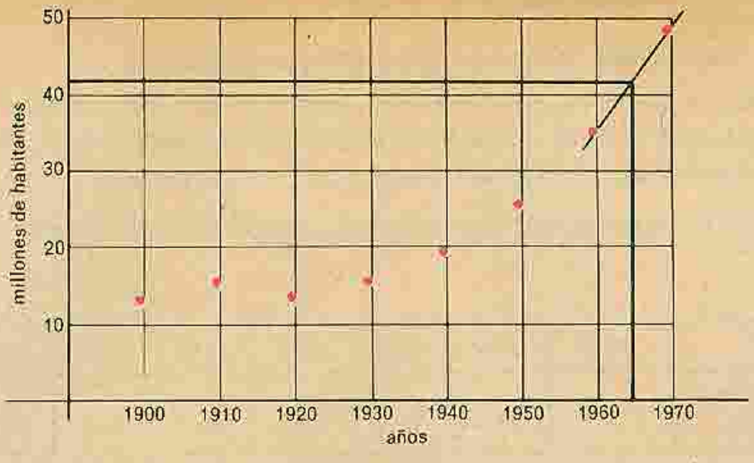
Si observamos más detenidamente la gráfica, podemos darnos cuenta que a partir de 1900 la población se duplicó aproximadamente 5 décadas después; es decir, más o menos en 1950. Y que a partir de esa fecha la población casi se duplica en sólo 2 décadas más; es decir, alrededor de 1970.

Como puede usted darse cuenta, es posible obtener bastante información en una gráfica.

Observemos nuevamente nuestra gráfica de población.

¿Puede usted decir aproximadamente cuál era la población de México en 1965?

Los trazos auxiliares que agregamos a la gráfica, le ayudarán a contestar la pregunta



Es decir, en 1965 la población en México era aproximadamente de 42 millones.

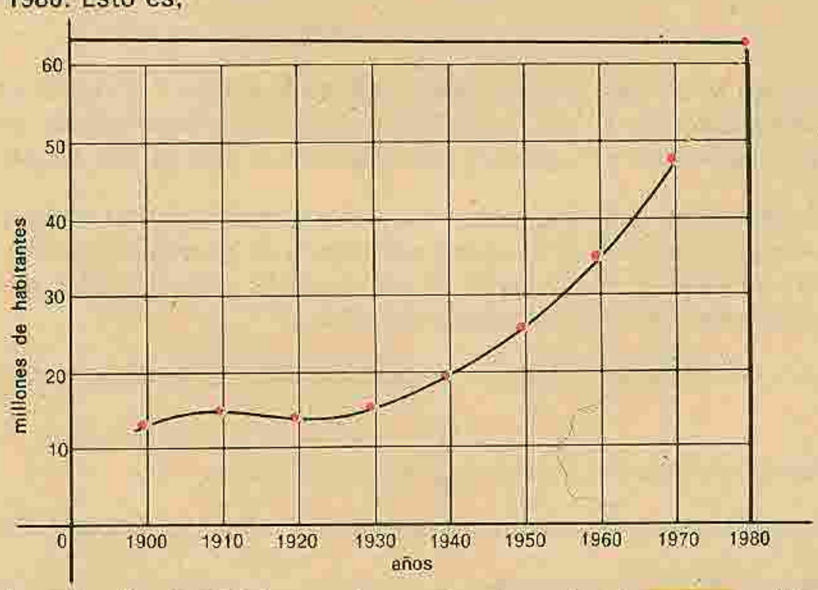
En forma semejante, con trazos auxiliares convenientes en la gráfica, podemos calcular la población de México en determinadas fechas.

Ejercicio 5. Usando la gráfica anterior, calcule usted aproximadamente la población de México en los años 1905, 1925, 1945 y 1955.

Si volvemos a observar con detenimiento la gráfica de nuestro estudio, podemos pensar que el crecimiento de la población, en un país, no se efectúa al azar, sino que se realiza bajo cierta regla o ley. También podemos pensar que algún fenómeno como, por ejemplo, una revolución armada o una epidemia alteran la forma en que aumenta la población de un país.

Suponiendo que no se presente ningún fenómeno que altere considerablemente el crecimiento de la población, ¿podría usted decir cuál será aproximadamente la población de México en 1980?

Para contestar esta pregunta usted puede considerar que la gráfica es una curva con cierta trayectoria y puede marcar sobre ella el punto correspondiente a la población de 1980. Esto es,



En 1980 la población de México será aproximadamente de _____ millones de habitantes.

3. Algunas ideas sobre la construcción de gráficas.

La siguiente tabla se refiere a la población económicamente activa de México en los años indicados.

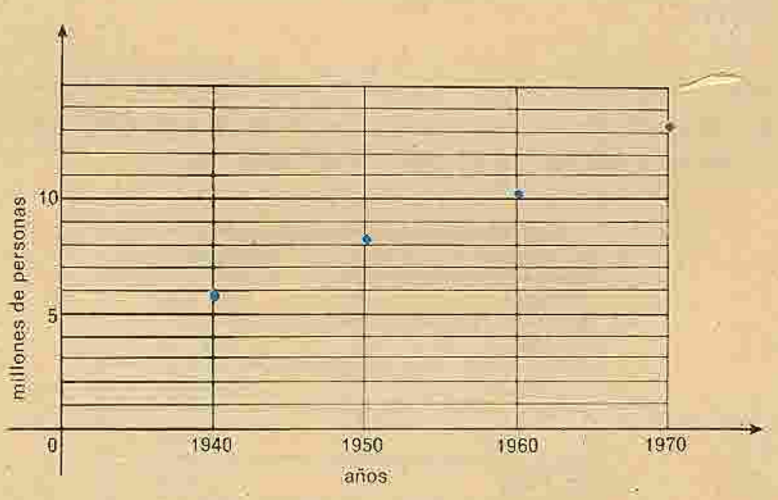
año	número de personas
1940	5 908 100
1950	8 295 600
1960	11 275 400
1970	13 181 300

La elaboración de gráficas de barras para tablas como la anterior resulta difícil, porque hay que localizar números muy grandes en un eje de coordenadas.

Esto se puede evitar simplemente expresando los datos en otra forma. Por ejemplo, en este caso, los datos de la tabla anterior podrían expresarse así:

año	millones de personas
1940	5.9081
1950	8.2956
1960	11.2754
1970	13.1813

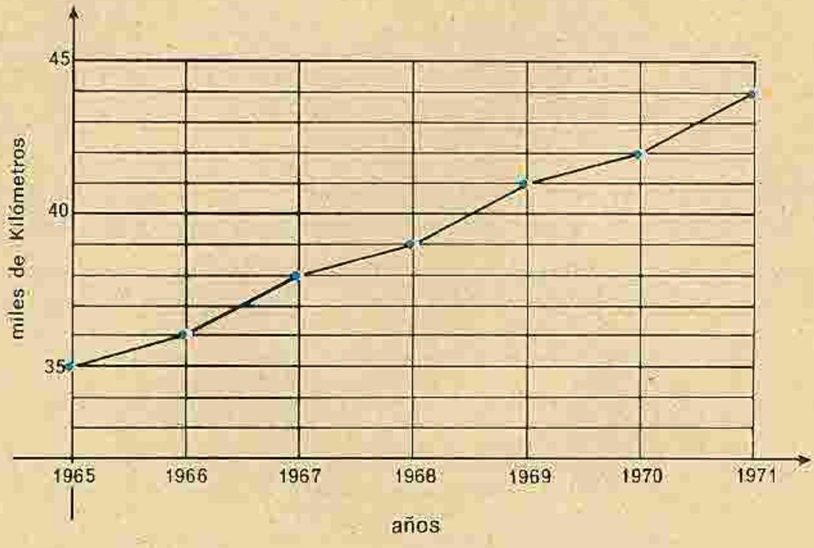
Ahora resulta más cómodo localizar los puntos de la gráfica, como puede observarse.



Ejercicio 6. Elabore una gráfica con los datos de la siguiente tabla. En dicha tabla se han anotado las temperaturas que se tomaron a un paciente cada hora entre las 8 A.M. y las 2 P.M.

temperaturas en °C	37	38.5	39	37.5	37	36.5	38
hora	8	9	10	11	12	13	14

Ejercicio 7. Observe la siguiente gráfica, que se refiere al número de kilómetros de carretera pavimentada en el período 1965 - 1971, y conteste las preguntas.



a) ¿Cuántos kilómetros de carretera pavimentada había en 1965?

b) ¿Cuántos kilómetros se construyeron en el período 1966 - 1967?

c) ¿Se construyeron más kilómetros en el período 1965 - 1967 o en el período 1969 - 1971?

Ejercicio 8. Elabore una gráfica con los datos de la siguiente tabla, referentes a la producción de automóviles en el período de 1965 - 1969.

años	automóviles
1965	67 229
1966	84 754
1967	86 005
1968	98 888
1969	112 925

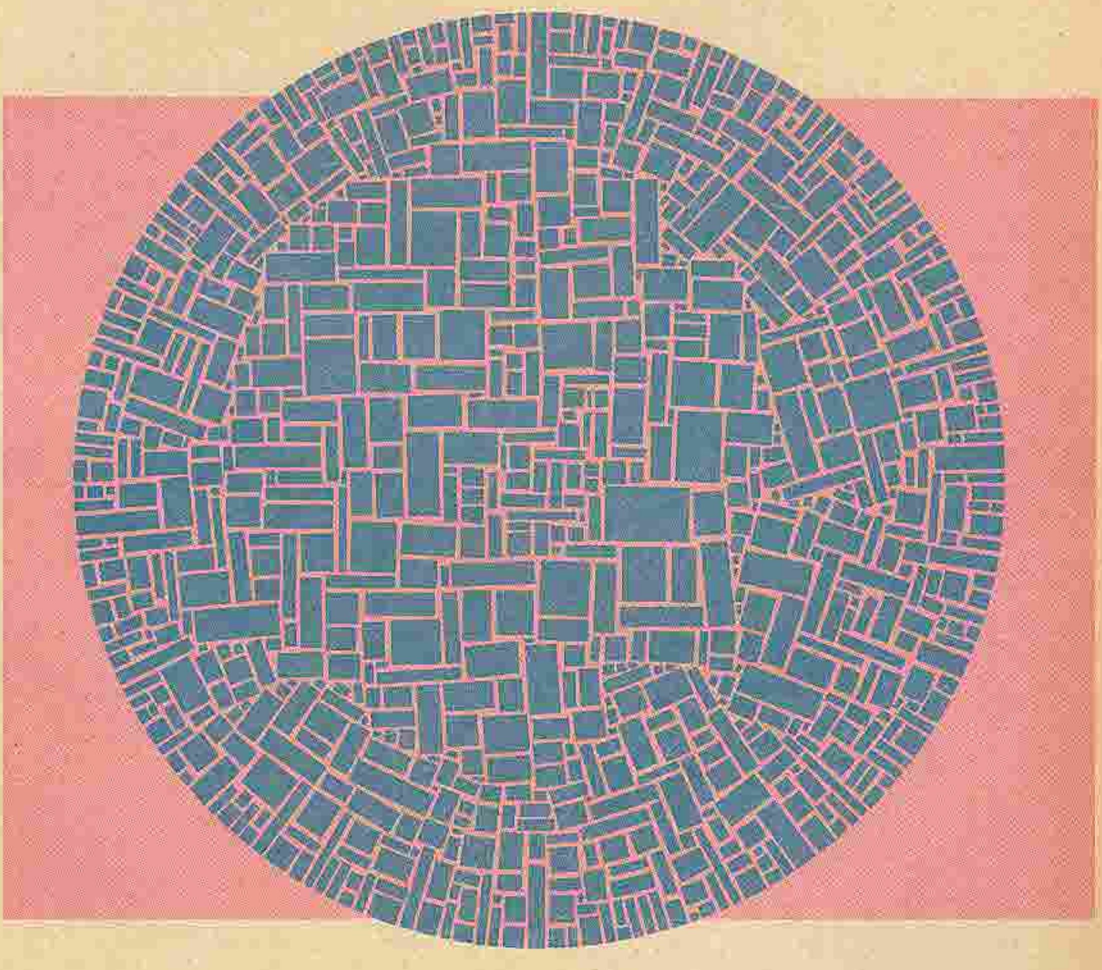
Ejercicio 9. Elabore una gráfica con los datos de la siguiente tabla, en la cual se anota la producción de DDT puro.

años	1965	1966	1967	1968	1969
Toneladas de DDT	5 509	5 977	5 486	3 979	3 625

Observación.

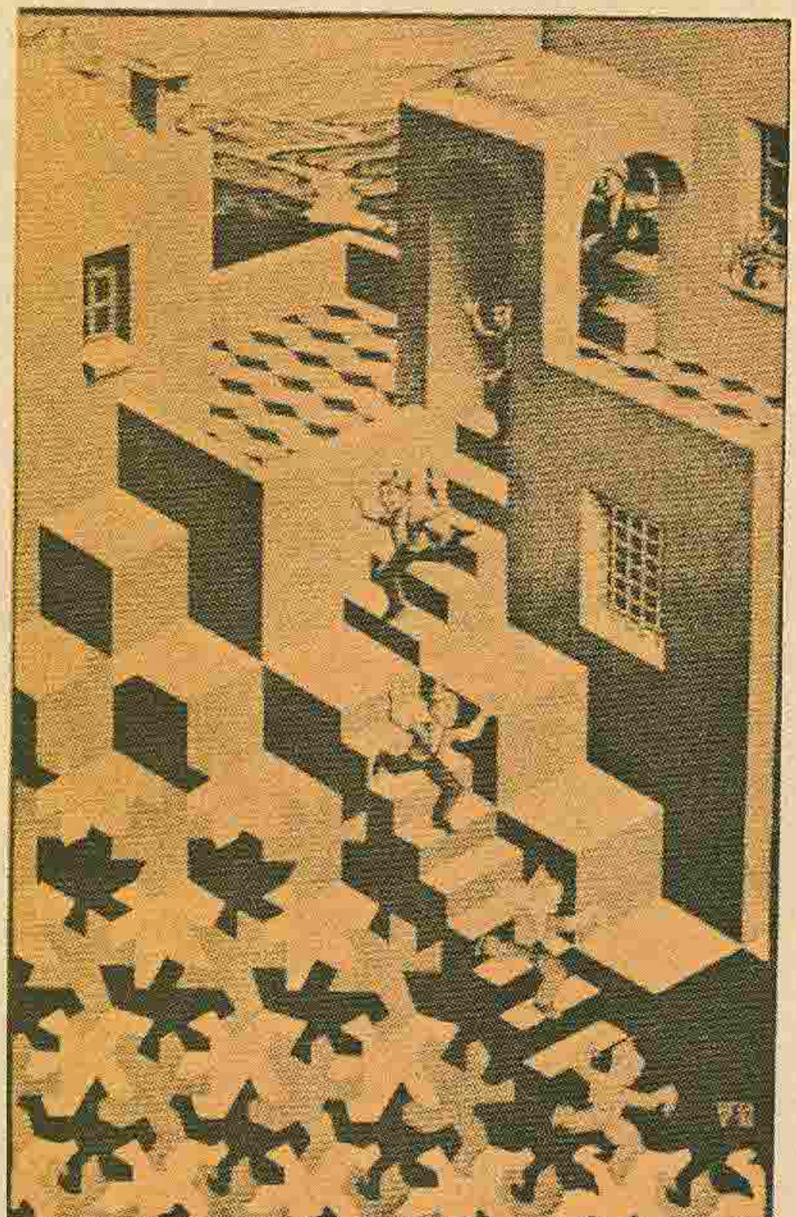
Algunas veces las gráficas pueden no interpretarse adecuadamente. Por ejemplo, en la gráfica del ejercicio 7 (kilómetros de carretera pavimentada en el período 1965 - 1971), no debemos entender que en 1966 se pavimentaron 36 000 km y que en 1967 se pavimentaron 38 000 km. Debemos entender que en 1966 había 35 000 km de carretera pavimentada y en 1967 había 38 000 km; es decir, que en el período 1966 - 1967 se pavimentaron 2 000 km de carretera.

En cambio, en la gráfica del ejercicio 8 debemos entender que en 1966 se produjeron 84 754 automóviles y en 1967 se produjeron 86 005 automóviles.



III

Gráficas lineales

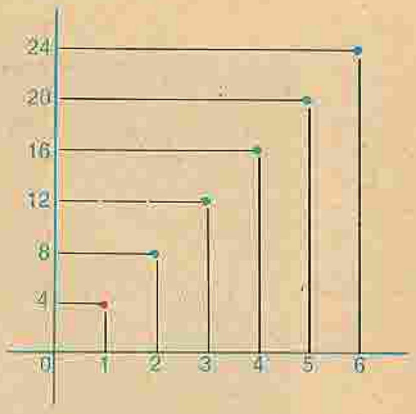


1. Tablas y gráficas.

Alejandro tiene por costumbre, cuando observa algún hecho interesante, registrar los datos en tablas y después construir gráficas.

En cierta ocasión descubrimos sobre su escritorio varias tablas con sus respectivas gráficas. Una de ellas es la siguiente:

	1	2	3	4	5	6
	4	8	12	16	20	24

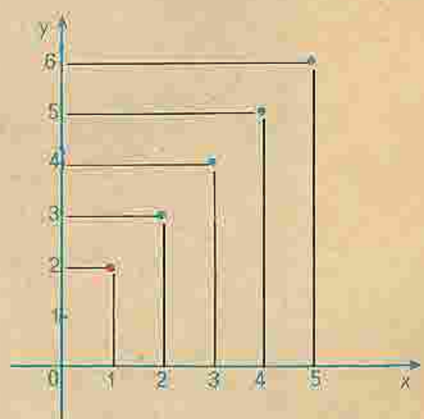


Aquí no hay ninguna anotación, fuera de los números en la tabla y la gráfica, que nos informe sobre la situación que estaba describiendo Alejandro. Es decir, no sabemos a qué se refieren esos datos.

Sin embargo, fijándonos en los colores, nos damos cuenta cómo construyó la gráfica: Con los números marcados en color rojo localizó el punto del mismo color, tomando el 1 como abscisa y el 4 como ordenada. Y en forma semejante fue localizando los otros puntos.

Otra de las hojas sobre el escritorio de Alejandro es la siguiente:

x	1	2				
y	2	3				



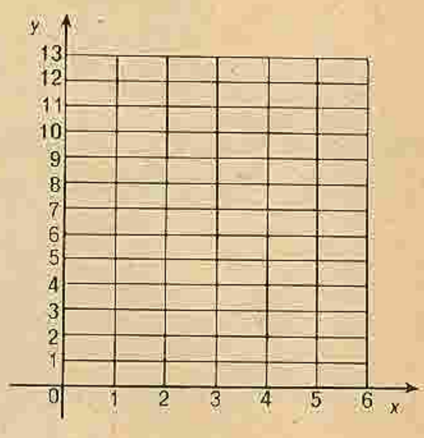
Aquí notamos que se estaba construyendo una tabla a partir de una gráfica. Observamos que las coordenadas del punto rojo (1, 2) fueron anotadas en la segunda columna de la tabla, y las coordenadas del punto azul (2, 3) se anotaron en la tercera columna.

Observamos también que las letras x y y, en la primera columna de la tabla, indican cuál es la abscisa y cuál es la ordenada de cada punto. Con esto ya no hay confusión sobre el cuadro en que debe anotarse cada una de esas coordenadas.

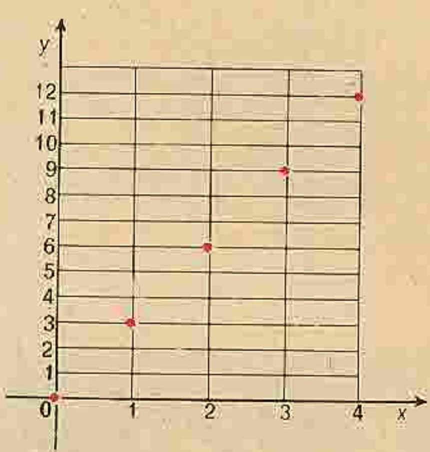
Según puede usted observar, es posible trazar una gráfica a partir de una tabla de datos y, recíprocamente, si se tiene una gráfica es posible elaborar la tabla de datos correspondientes a los puntos de esa gráfica.

Ejercicio 1. Localice los puntos correspondientes a la siguiente tabla.

x	1	2	3	4
y	5	6	7	8

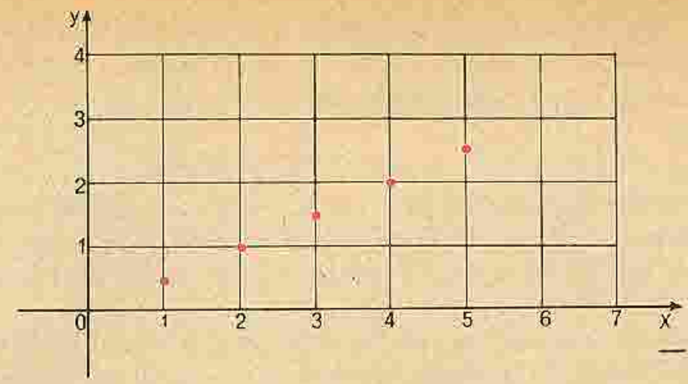


Ejercicio 2. De acuerdo con la gráfica, complete la siguiente tabla.



x	0	1	2		
y				9	12

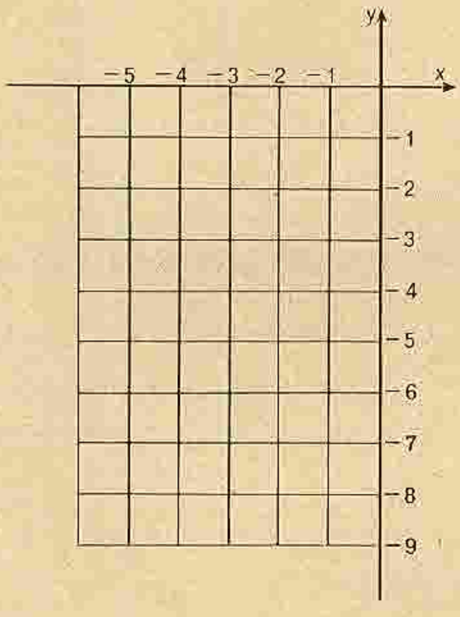
Ejercicio 3. Indique usted qué relación existe entre la abscisa y la ordenada, de cada punto de la siguiente gráfica.

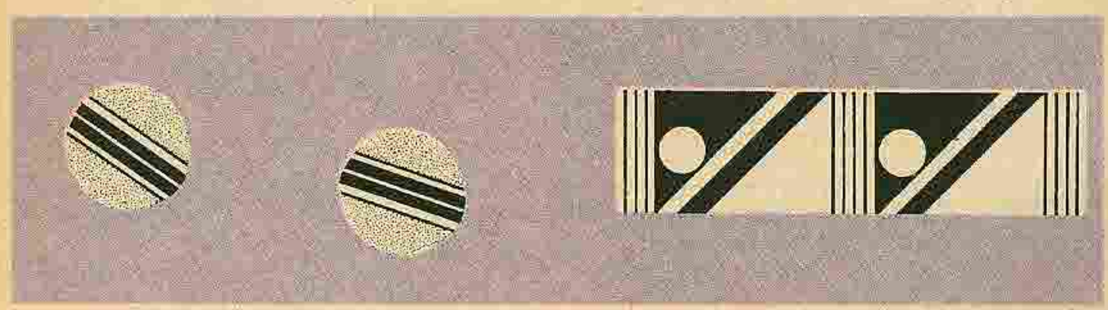


Ejercicio 4. Indique usted qué relación existe entre cada uno de los valores de x y y en la siguiente tabla.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-12	-8	-4	0	4	8	12

Ejercicio 5. Construya una gráfica donde las abscisas de los puntos sean -4, -3, -2 y -1; y la ordenada de cada punto sea el doble de la abscisa.





2. Tablas y expresiones algebraicas.

En lo anterior hemos visto cómo ciertos conjuntos de puntos vistos gráficamente se pueden describir por medio de tablas. Ahora veremos cómo los puntos determinados por una tabla se pueden describir con una expresión algebraica.

Ejemplo. Consideremos el conjunto de puntos determinados por la siguiente tabla.

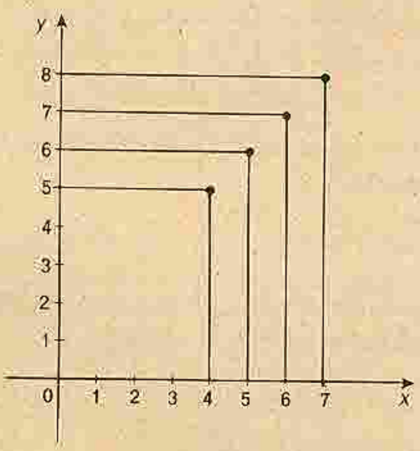
x	2	3	4
y	4	6	8

Vemos que en el primer renglón de la tabla se anotan los valores que toma x y en el segundo renglón los que toma y. Como en cada columna el valor de y es el doble del valor de x, podemos describir estos tres puntos con la expresión

$$y = 2x$$

sin perder de vista que x toma únicamente los valores 2, 3, 4.

Ejemplo. Consideremos los puntos que determina la siguiente tabla:



x	4	5	6	7
y	5	6	7	8

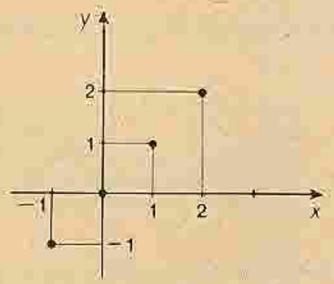
En cada columna de esta tabla, el valor de y es el valor de x más uno. Por lo tanto, podemos describir ese conjunto de puntos con la expresión

$$\boxed{y = x + 1}$$

sin olvidar que x toma solamente los valores 4, 5, 6 y 7.

Ejemplo. En cada columna de la siguiente tabla

x	-1	0	1	2
y	-1	0	1	2



el valor de y es igual al de x. Por lo tanto, podemos emplear la expresión

$\boxed{y = x}$ (donde x toma los valores -1, 0, 1, 2)

para describir el conjunto de puntos que determina la tabla.

Ejemplo. Veamos la siguiente tabla:

x	-3	-2	-1	0
y	3	2	1	0

En este caso cada valor de y es el inverso aditivo del valor de x. Así que la tabla puede sustituirse por la expresión

$\boxed{y = -x}$ (donde x toma los valores -3, -2, -1 y 0).

Ejercicio 6. Anote la expresión algebraica que describe al conjunto de puntos determinado por cada tabla. Observe el inciso resuelto.

a)

x	0	1	2	3
y	2	3	4	5

$\boxed{y = x + 2}$

(x toma los valores 0, 1, 2, 3)

b)

x	0	1	2	3	4
y	3	4	5	6	7

$y =$

(x toma los valores:

c)

x	1	2	3	4	5	6
y	-1	-2	-3	-4	-5	-6

$y =$

(x toma los valores:

d)

x	2	3	4	5
y	1	2	3	4

$y =$

(x toma los valores:

e)

x	-3	-2	-1	0	1
y	-15	-10	-5	0	5

$y =$

(x toma los valores:

Ejercicio 7. Llene las siguientes tablas de acuerdo con el conjunto de puntos que describe cada expresión algebraica.

a) $\boxed{y = x + 2}$

(donde x toma los valores -2, -1, 0, 1, 2)

x	-2	-1	0	1	2
y					

b) $\boxed{y = x - 1}$

(donde x toma los valores -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5)

x							
y							

c) $\boxed{y = -x}$

(donde x puede ser -5, -4, -3, -2, -1, 0)

x						
y						

d) $\boxed{y = 2x + 1}$

(donde x puede ser -1, 0, 1, 1.5, 2, 2.5)

x						
y						

3. Gráficas lineales.

En las secciones anteriores hemos visto cómo una serie de datos anotados en una tabla, se pueden representar gráficamente por medio de puntos en el plano. También hemos visto que si se tiene una gráfica es posible construir, a partir de ella, la tabla de datos correspondiente, y que teniendo una tabla se puede dar una expresión algebraica para representar el conjunto de puntos que determina dicha tabla.

Al usar las expresiones algebraicas de esta manera, siempre indicamos cuáles eran los valores que podía tomar la x para que no hubiera confusión posible.

Ahora, en esta sección, vamos a estudiar las gráficas correspondientes a expresiones algebraicas como las que manejamos anteriormente; pero **sin limitar los valores que puede tomar la** x. Es decir, en las expresiones como $y = -x$ o como $y = 2x + 5$, consideramos que *la x puede ser cualquier número real.*

Ejemplo. Construyamos la gráfica correspondiente a la expresión $y = x + 1$

1. Primero elaboramos una tabla a fin de determinar algunos puntos de la gráfica.

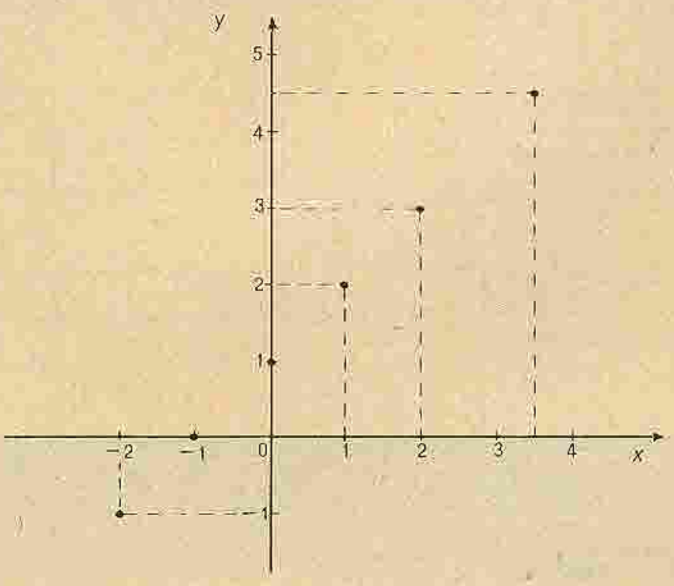
Como x puede ser cualquier número, elegimos arbitrariamente algunos valores para x, digamos -2, -1, 0, 1, 2 y 3.5.

x	-2	-1	0	1	2	3.5

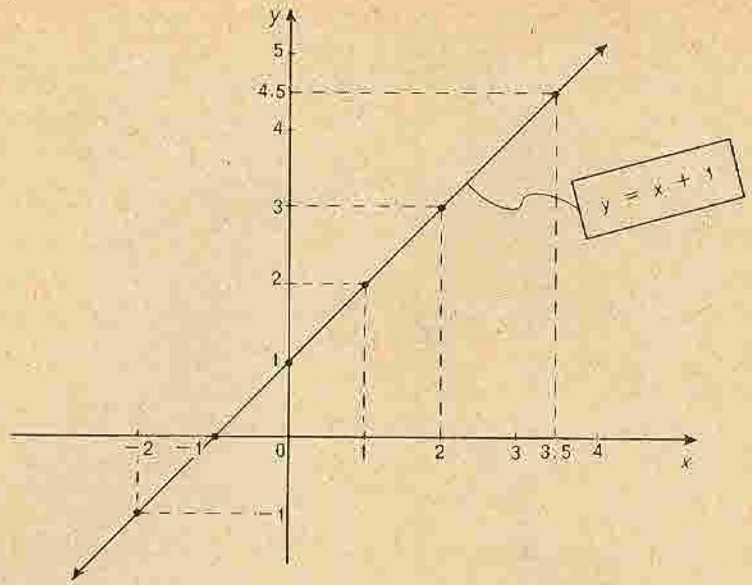
Y completamos la tabla anotando los valores de y. (En cada columna el valor de y debe ser $x + 1$, pues eso es lo que nos indica la expresión $y = x + 1$).

x	-2	-1	0	1	2	3.5
y $(x + 1)$	-1	0	1	2	3	4.5

2. Construimos la gráfica correspondiente a la tabla que elaboramos.



3. Trazamos una recta que pase por todos los puntos que fueron determinados por la tabla que elaboramos. Esta recta es la gráfica correspondiente a la expresión $y = x + 1$



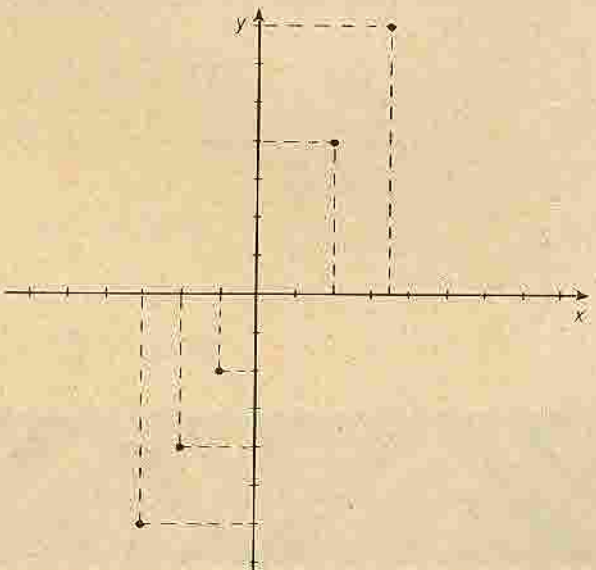
En virtud de que x puede ser cualquier número, esta recta es el conjunto de puntos determinado por la expresión $y = x + 1$. Esto es, cada punto de esta recta tiene como ordenada el valor de su abscisa más uno. O, dicho de otra manera, cualquier punto de esta recta tiene las coordenadas $(x, x + 1)$

Ejemplo. Construyamos la gráfica correspondiente a la expresión $y = 2x$

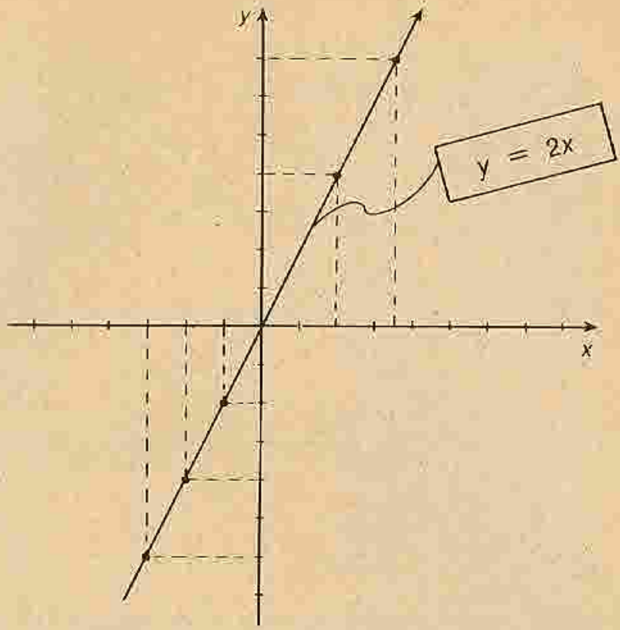
Como x puede ser cualquier número, podríamos considerar por ejemplo, los valores -3, -2, -1, 2 y 3.5 para construir la siguiente tabla.

x	-3	-2	-1	2	3.5
$2x$	-6	-4	-2	4	7

Ahora buscamos en el plano los puntos determinados por esa tabla



y trazamos la recta que pasa por esos puntos.



Cualquier punto de esta recta tiene las coordenadas $(x, 2x)$. Por lo tanto, esta recta es la gráfica correspondiente a la expresión $y = 2x$.

Las gráficas correspondientes a expresiones algebraicas como $y = x + 1$, $y = 2x$, $y = 3x + 2$, etcétera, en la cuales la x puede ser cualquier número real, reciben el nombre de **gráficas lineales** y, como usted habrá notado, son muy fáciles de trazar. Basta con que se localicen unos cuantos puntos de la gráfica y luego se trace ésta.

Ejercicio 8. Use papel milimétrico para trazar las gráficas lineales determinadas por las siguientes expresiones. (Recuerde que x puede ser cualquier número real).

a) $y = x + 2$

b) $y = -x$

c) $y = 3x$

d) $y = 2x + 1$

e) $y = 2x - 1$

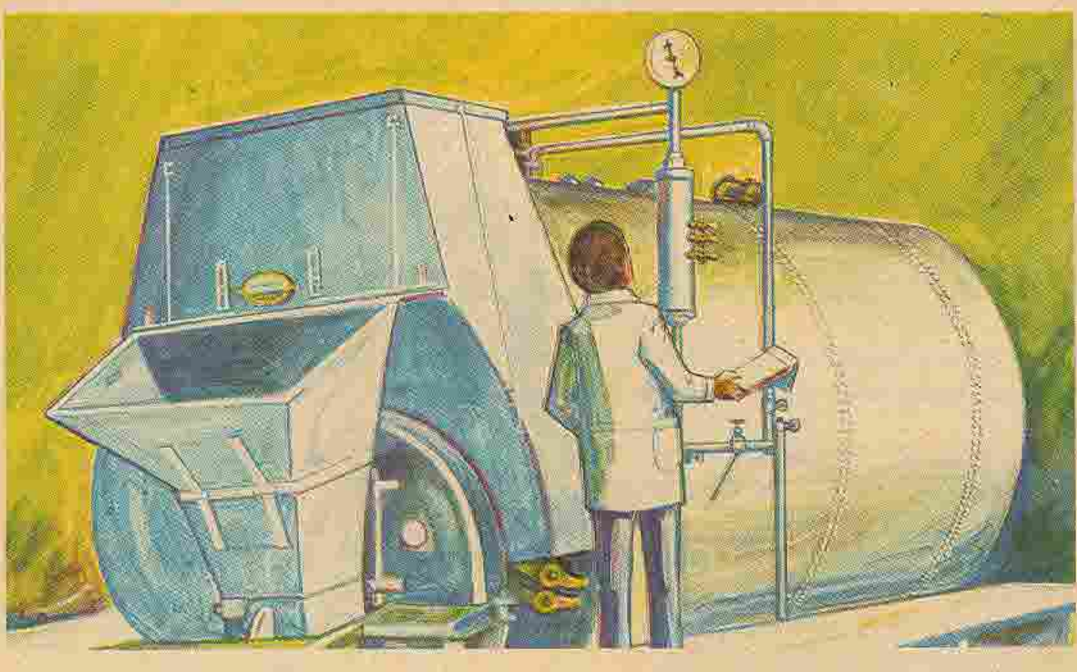
f) $y = \frac{1}{2}x$

g) $y = x$

h) $y = \frac{x}{5}$

4. Algunas aplicaciones de las gráficas lineales.

En los termómetros de algunas máquinas importadas la temperatura se lee en grados farenheit. Pero, como usted sabe, en nuestro sistema las temperaturas se miden en grados centígrados. Es por eso que en algunos talleres, fábricas y laboratorios es necesario un instrumento que permita rápidamente expresar en grados centígrados una temperatura leída en grados farenheit y viceversa.



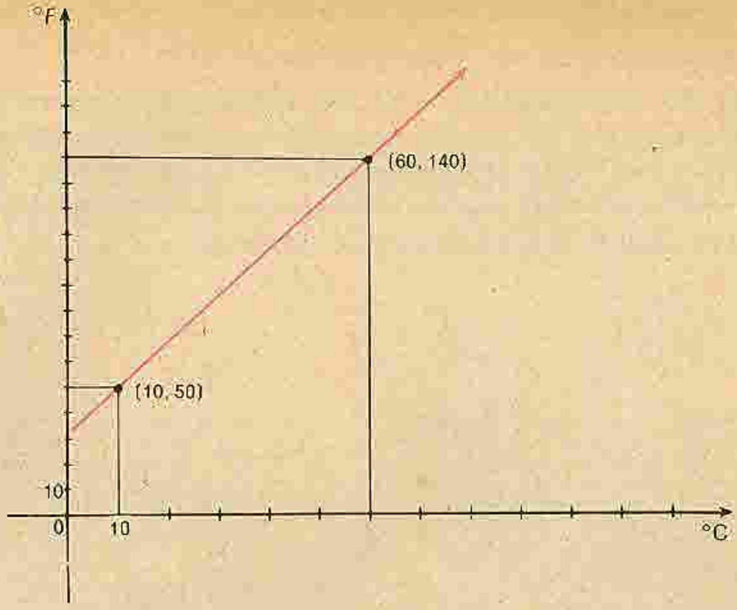
Tal instrumento podría ser una gráfica como la que construimos a continuación.

Existe una fórmula que se aplica para hacer la conversión de grados centígrados a grados farenheit. Ella es:

$$\boxed{F = 1.8C + 32}$$

A esta expresión corresponde una gráfica lineal, tracémosla:

En la fórmula podemos apreciar que cuando C toma el valor 10, F toma el valor 50 y cuando C toma el valor 60, F toma el valor 140. Entonces, dos puntos de la gráfica son los que tienen las coordenadas (10, 50) y (60, 140). Con ellos podemos trazar la gráfica.



Ejercicio 9. Use la gráfica anterior para contestar las siguientes preguntas.

a) El termómetro de una caldera marca 110° F. ¿Cuál es la temperatura de esa caldera, expresada en grados centígrados?

b) ¿Cuántos grados farenheit marca el termómetro de esa caldera, cuando la temperatura de la misma es de 0° C?

c) ¿Qué temperatura en grados farenheit corresponde a 30° centígrados?

d) ¿Cuál es la temperatura de la caldera en grados centígrados, cuando su termómetro marca 50° F?

e) ¿Hay una temperatura para la cual el número de grados farenheit es igual al número de grados centígrados?

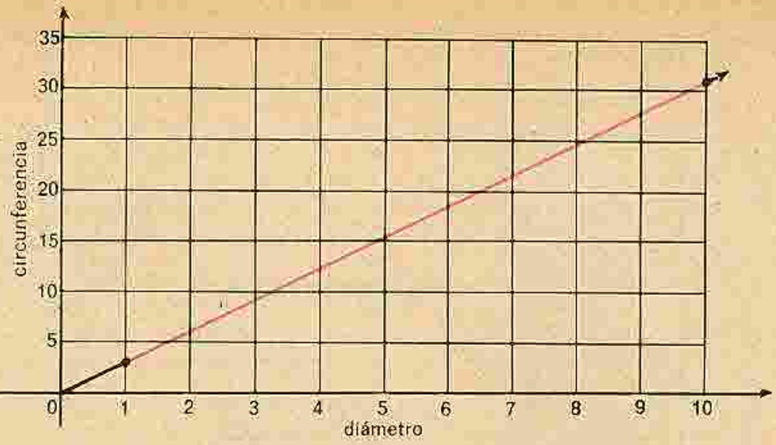
En algunos talleres eléctricos necesitan calcular, aproximadamente, la longitud de una circunferencia conocida la longitud de su diámetro y viceversa, calcular el diámetro cuando se conoce la circunferencia.

Usted sabe que la fórmula empleada para esos casos es:

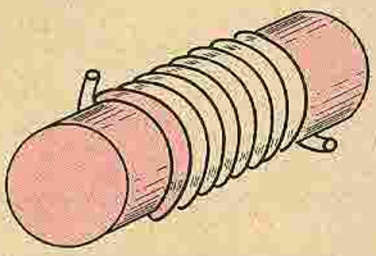
$$C = 3.1416\,d$$

Esta fórmula corresponde a una gráfica lineal que podemos trazar fácilmente: Si $d = 1$, entonces $C = 3.1416$. Si $d = 10$, entonces $C = 31.416$.

Entonces, dos puntos de la gráfica son (1, 3.1416) y (10, 31.416). Con ellos trazamos la gráfica.

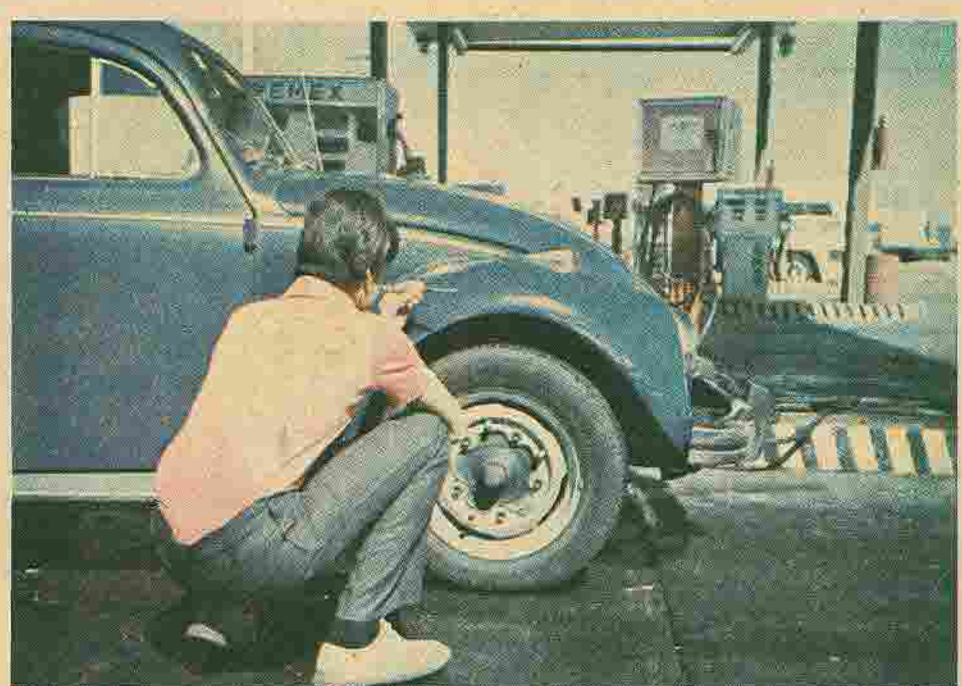


Interpretando adecuadamente esta gráfica podemos encontrar aproximadamente el diámetro de una bobina conocida la longitud de una vuelta en el enrollado de la misma.

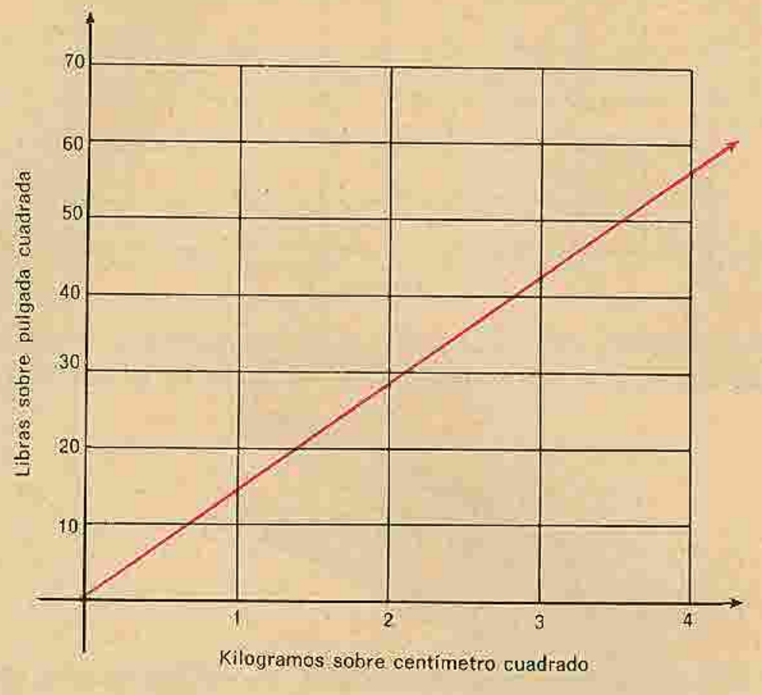


Aunque el dato se obtiene aproximadamente, es suficiente para elegir el tubo más adecuado de los existentes en el mercado.

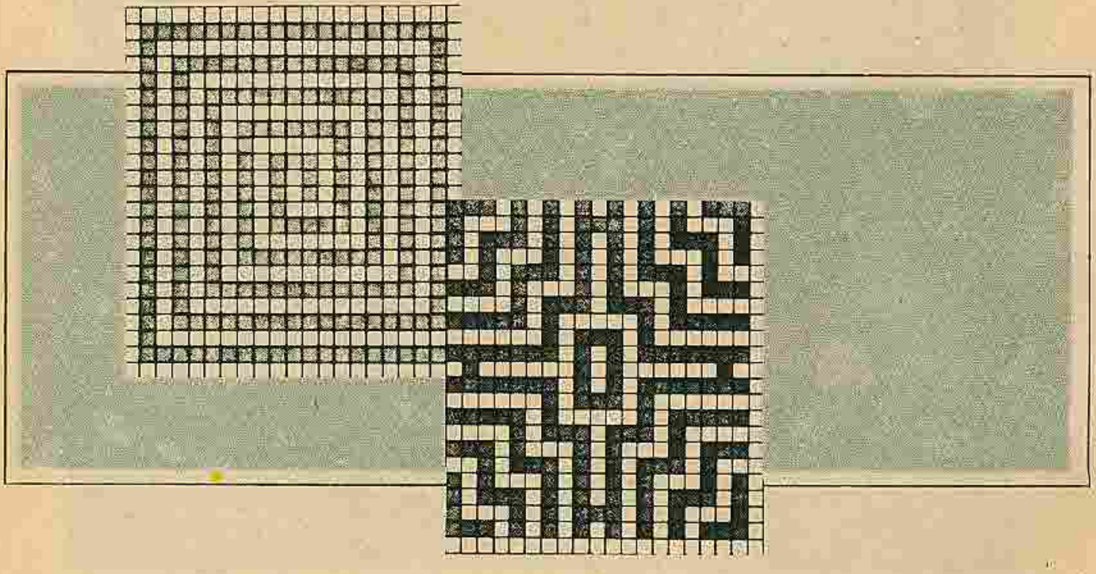
Los medidores para la presión del aire de los neumáticos indican la presión en libras sobre pulgada cuadrada. En cambio, en la máquina para inflar automáticamente los neumáticos a cierta presión, ésta debe marcarse en kilogramos sobre centímetro cuadrado.



Con la siguiente gráfica podemos hacer fácilmente conversiones de $\frac{lb}{in^2}$ a $\frac{kg}{cm^2}$ y viceversa.

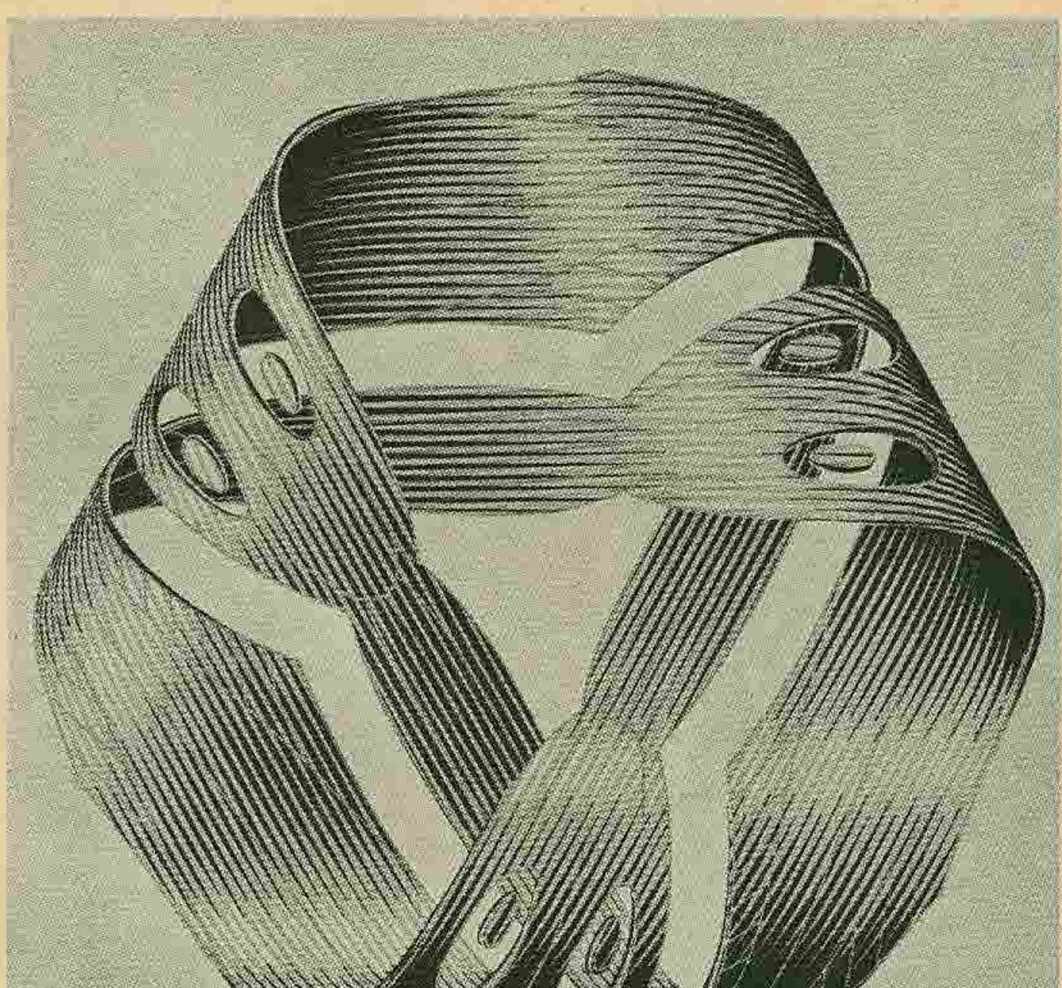


La necesidad de expresar una presión en $\frac{libras}{in^2}$ o en $\frac{kg}{cm^2}$ no se presenta únicamente en el caso de los neumáticos. Es muy frecuente también en problemas de ingeniería, en sus diversas ramas, y, en general, dondequiera que se necesite calcular presiones.



Capítulo cuarto

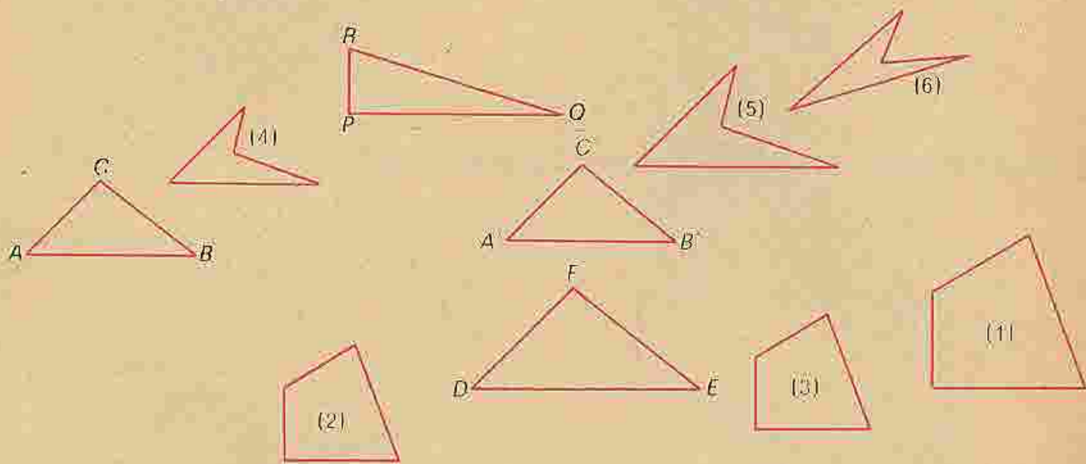
Geometría



Congruencia

Al observar figuras como las que a continuación se ilustran decimos que algunas de ellas "tienen la misma forma".

Por ejemplo, decimos que los triángulos $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ y $\triangle DEF$ tienen la misma forma; que las figuras (1), (2) y (3) tienen la misma forma. También los cuadriláteros (4) y (5).



Por el contrario, decimos que los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle PQR$ no tienen la misma forma. Tampoco las figuras (5) y (6) tienen la misma forma.

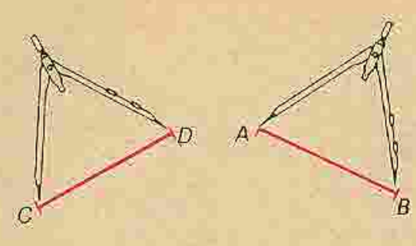
En algunos casos decimos, además, que algunas figuras "tienen la misma forma y el mismo tamaño" como, por ejemplo, los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$. También diríamos que los cuadriláteros (2) y (3) tienen la misma forma y el mismo tamaño.

Ahora bien, expresiones como "tienen la misma forma" y "tienen la misma forma y el mismo tamaño" no son del todo precisas y unas personas las pueden interpretar de una manera y otras de otra. Por ello, en matemáticas usaremos otras frases para expresar estas ideas y les daremos un sentido preciso. En lugar de decir "tienen la misma forma", diremos "son semejantes" y aclararemos perfectamente qué significa esto. Análogamente, en vez de decir "tienen la misma forma y el mismo tamaño" diremos "son congruentes".

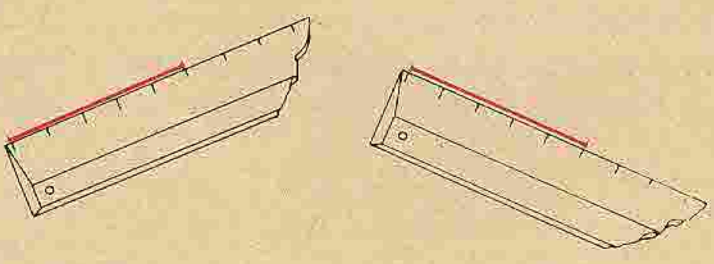
Para segmentos de recta ya hemos precisado el significado de congruencia. Dijimos que

Dos segmentos son congruentes si tienen la misma medida.

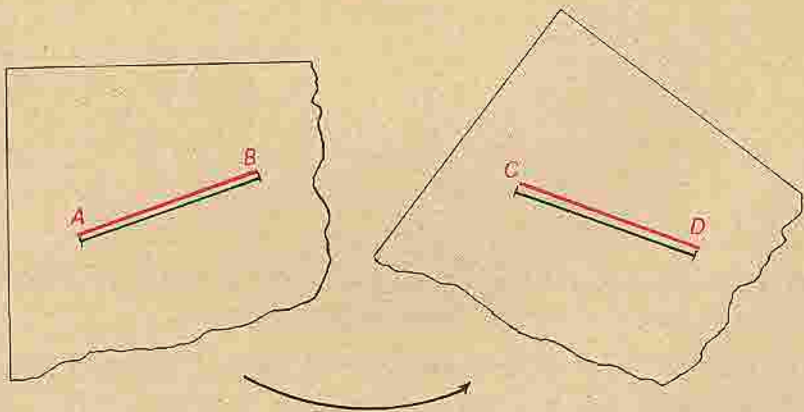
Podemos ver si dos segmentos son congruentes utilizando el compás



o bien una regla con escala



o bien, calculando uno de ellos y superponiéndolo al otro.



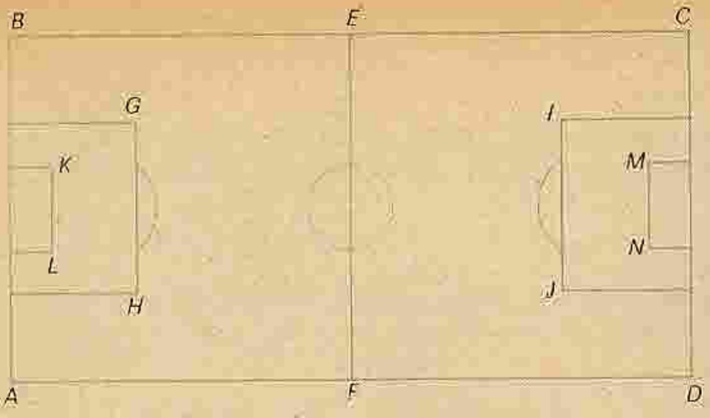
Para indicar que dos segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son congruentes escribiremos simplemente

$$\overline{AB} \cong \overline{CD}$$

(léase AB es congruente con CD). Si los segmentos no son congruentes, es decir, si no miden lo mismo, escribiremos

$$\overline{AB} \cong \overline{CD}$$

Ejercicio 1. Utilizando el compás diga si los segmentos indicados son o no congruentes y escriba el símbolo adecuado.

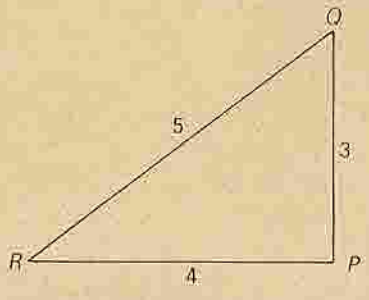


$\overline{AB}$	$\cong$	$\overline{GH}$	$\overline{IJ}$		$\overline{GH}$
$\overline{AB}$	$\cong$	$\overline{CD}$	$\overline{MN}$		$\overline{KL}$
$\overline{EF}$		$\overline{CD}$	$\overline{BE}$		$\overline{FA}$
$\overline{BE}$		$\overline{FD}$	$\overline{AF}$		$\overline{CD}$
$\overline{IJ}$		$\overline{KL}$	$\overline{FD}$		$\overline{AD}$

Notación. El segmento $\overline{BE}$ del dibujo anterior mide 45 mm. Para indicar esto, escribimos

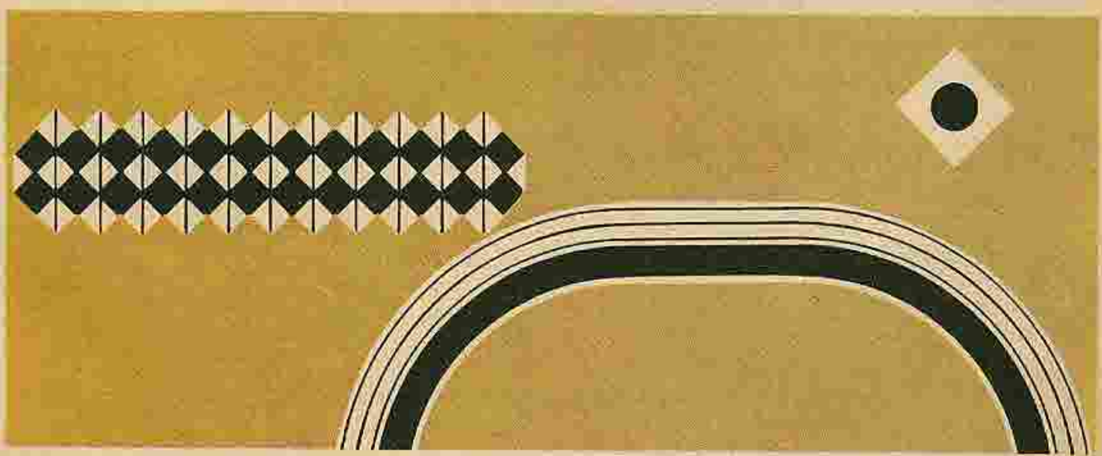
$$BE = 45 \text{ mm}$$

De aquí en adelante, para indicar la medida de un segmento $\overline{AB}$ escribiremos AB (sin la rayita arriba). Por ejemplo, en el triángulo PQR, $\overline{PQ}$ denota el segmento $\overline{PQ}$; es decir, un lado, y en cambio PQ denota la medida de este lado. Es decir, $PQ = 3$. En este mismo triángulo, $\overline{QR}$ y $\overline{RP}$ son lados (segmentos) y $QR = 5$ y $RP = 4$.



Puesto que es lo mismo decir "dos segmentos son congruentes" que decir "tienen la misma medida", podemos afirmar que

$$\overline{AB} \cong \overline{CD} \text{ equivale a } AB = CD$$



1. Triángulos congruentes.

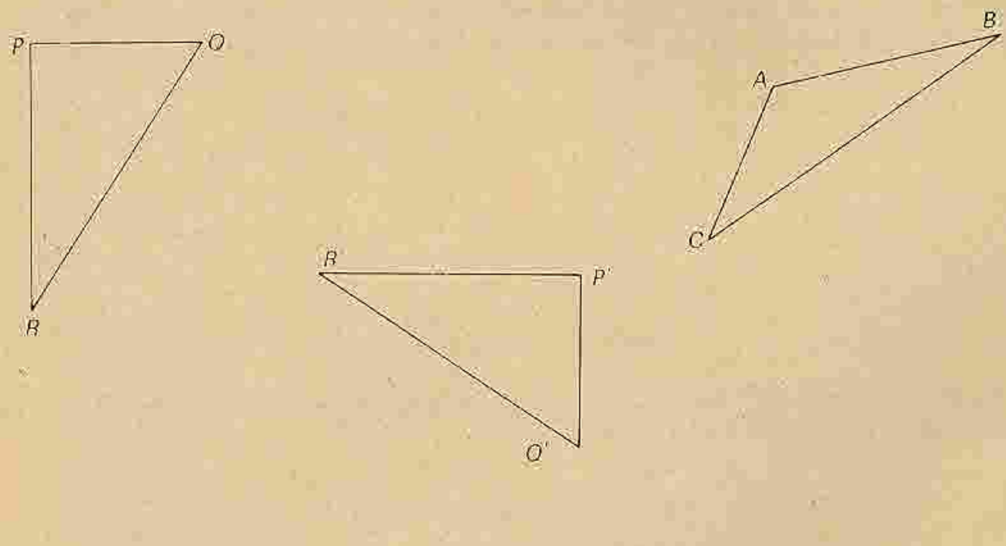
Precisaremos ahora lo que se entiende por triángulos congruentes. (Es decir, lo que en el lenguaje usual corresponde a triángulos que "tienen la misma forma y el mismo tamaño").

Definición. *Se dice que dos triángulos son congruentes si los tres lados de uno de ellos son respectivamente congruentes a los tres lados del otro.*

Así, por ejemplo, los siguientes triángulos, $\triangle PQR$ y $\triangle P'Q'R'$ son congruentes porque

$$\overline{PQ} \cong \overline{P'Q'},\ \overline{QR} \cong \overline{Q'R'} \text{ y } \overline{RP} \cong \overline{R'P'}$$

(Esto puede comprobarse, en el dibujo, con un compás o también calcando uno de ellos y superponiéndolo al otro).



Dicho en otra forma, los triángulos $\triangle PQR$ y $\triangle P'Q'R'$ son congruentes porque las medidas de los tres lados del $\triangle PQR$ son iguales a las medidas de los tres lados del $\triangle P'Q'R'$. Es decir, porque

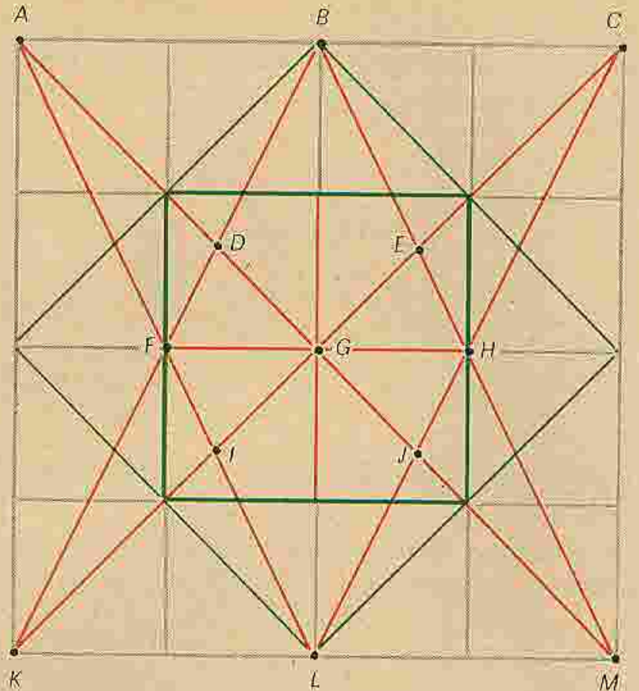
$$PQ = P'Q',\ QR = Q'R' \text{ y } RP = R'P'.$$

Para indicar que dos triángulos son congruentes usaremos también el símbolo $\cong$. Así, en el dibujo anterior,

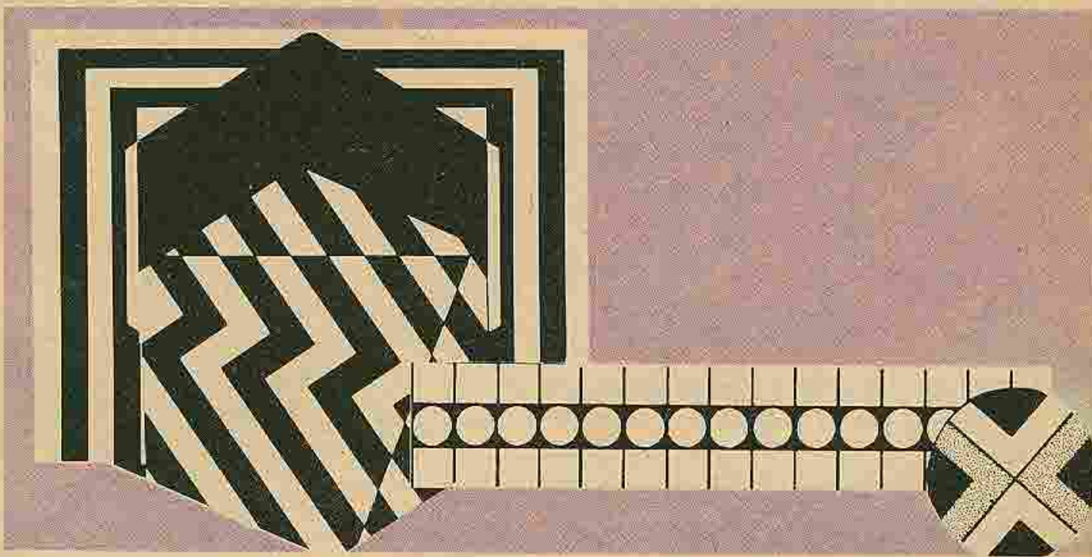
$$\triangle PQR \cong \triangle P'Q'R'$$

En el caso de triángulos no congruentes, como por ejemplo $\triangle PQR$ y $\triangle ABC$, escribiremos $\triangle PQR \not\cong ABC$.

Ejercicio 2. Utilizando el compás, o un papel transparente, diga si los triángulos que se indican son o no congruentes y escriba el símbolo respectivo.



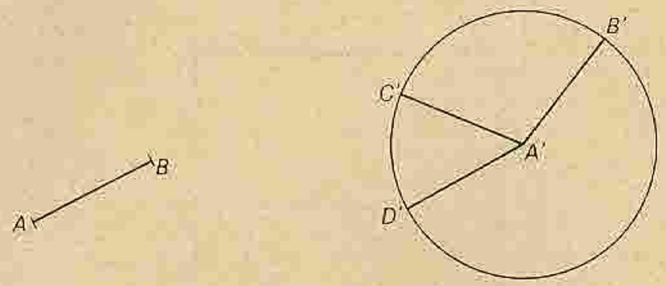
$\triangle ADF$	$\cong$	$\triangle CEH$	$\triangle ADF$	$\ncong$	$\triangle AFG$
$\triangle ADF$		$\triangle KIF$	$\triangle FDG$		$\triangle FIK$
$\triangle KDG$		$\triangle CJG$	$\triangle KDG$		$\triangle CEH$
$\triangle MGH$		$\triangle AGI$	$\triangle JHM$		$\triangle GHC$
$\triangle IFK$		$\triangle EHC$	$\triangle BFH$		$\triangle LFH$



2. Trazado de polígonos congruentes

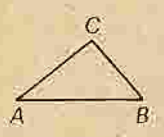
Ya sabemos cómo, utilizando la regla y el compás, podemos trazar segmentos congruentes con uno dado.

Por ejemplo, dado un segmento $\overline{AB}$ lo medimos con el compás, apoyamos una punta del compás en cualquier punto, digamos A' y cualquier punto que

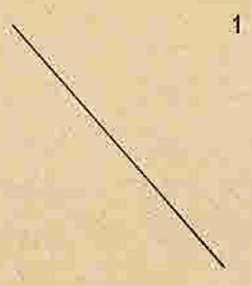


esté en la circunferencia determina un segmento congruente con $\overline{AB}$. Por ejemplo, $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$, $\overline{AB} \cong \overline{A'C'}$, etc.

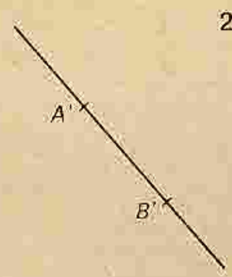
Este procedimiento podemos ahora aplicarlo para construir triángulos congruentes. Las siguientes figuras indican cómo construir un triángulo congruente a uno dado.



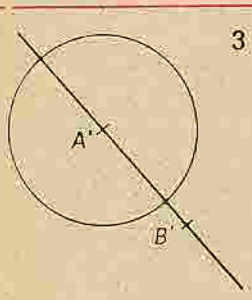
Triángulo dado.



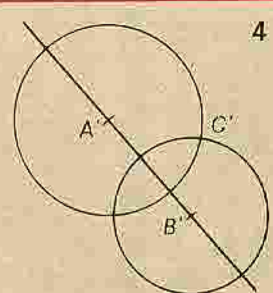
Trazamos una recta.



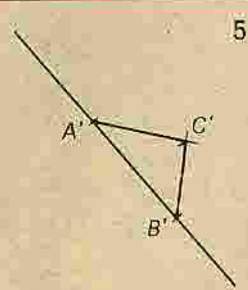
Medimos un segmento $A'B'$ congruente con AB.



Trazamos una circunferencia con centro en A' y radio AC.



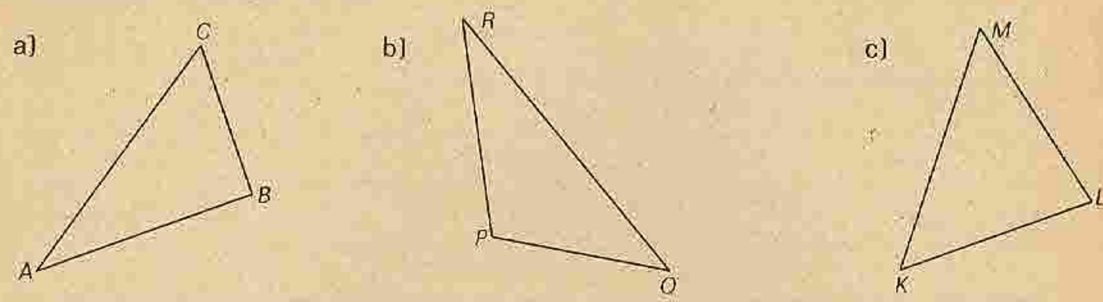
Trazamos otra circunferencia con centro en B' y radio BC. Nombremos C' a uno de los puntos de intersección.



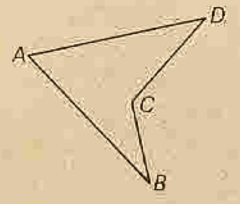
Unimos C' con A' y B' y obtenemos el $\triangle A'B'C'$ congruente con el $\triangle ABC$.

Ejercicio 3. Explique por qué el segmento $A'C'$ es congruente con el segmento $\overline{AC}$ y por qué $\overline{B'C'} \cong \overline{BC}$.

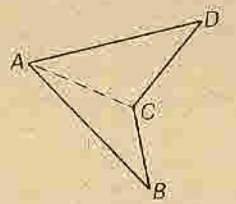
Ejercicio 4. Siguiendo el procedimiento anterior dibuje en su cuaderno triángulos congruentes a los que se dan.



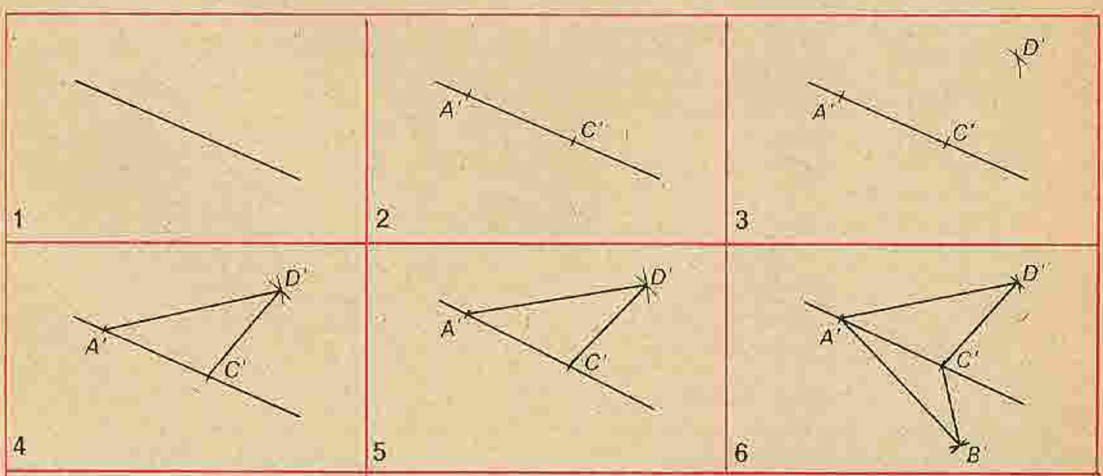
En geometría se estudian con bastante detalle los triángulos, porque éstos nos sirven para analizar otras figuras más complicadas. Por ejemplo, si queremos dibujar un cuadrilátero que sea congruente con el que sigue,



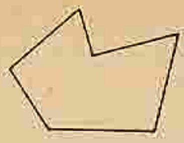
podemos triangular el cuadrilátero en la siguiente forma:



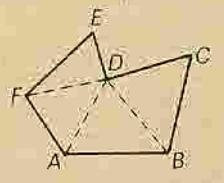
y, ahora, la construcción de un cuadrilátero congruente con el dado se reduce a la construcción de dos triángulos $\triangle A'B'C'$ y $\triangle A'C'D'$ congruentes con los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle ACD$. Observe la siguiente serie de ilustraciones:



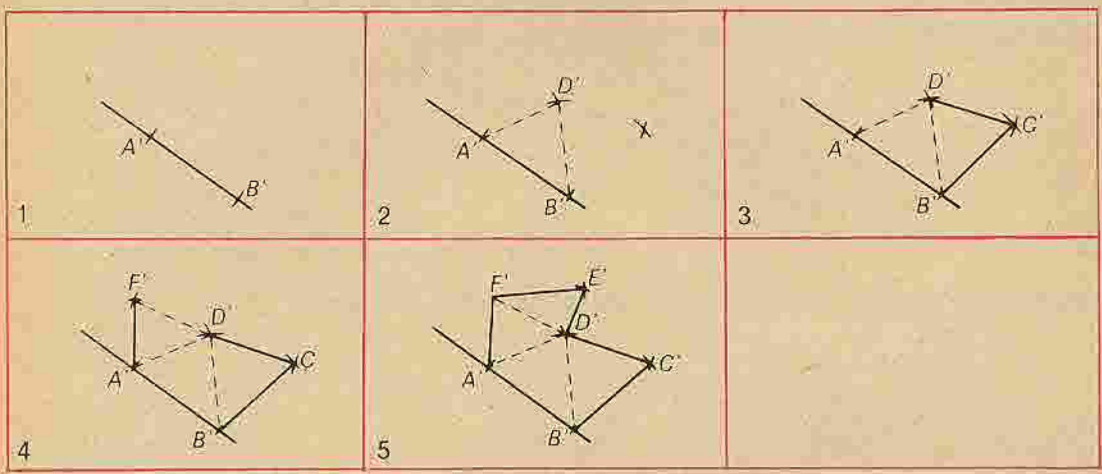
Ejemplos. Trazar una figura congruente con la siguiente.



Primero triangulamos la figura, por ejemplo, así:

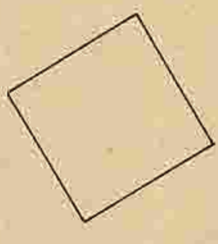


Y después vamos construyendo convenientemente triángulos congruentes a los obtenidos. Podemos empezar de varias maneras. Por ejemplo, con el lado AB.

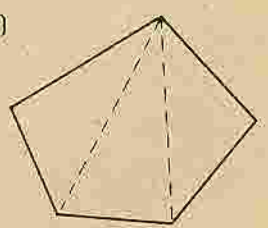


Ejercicio 5. Triangulando convenientemente las figuras dadas, construya en su cuaderno figuras congruentes con ellas. (En algunos incisos se sugieren triangulaciones).

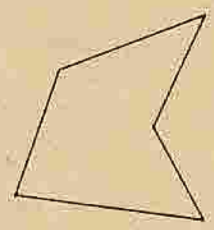
a)



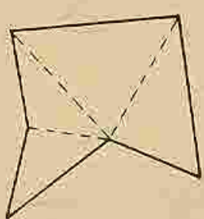
b)



c)



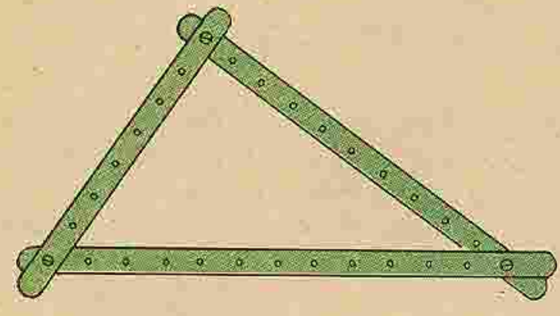
d)



Una observación. En lo anterior hemos visto cómo dibujar polígonos congruentes a un polígono dado, haciendo triangulaciones apropiadas. Sin embargo, no hemos discutido bastante el concepto de congruencia de polígonos.

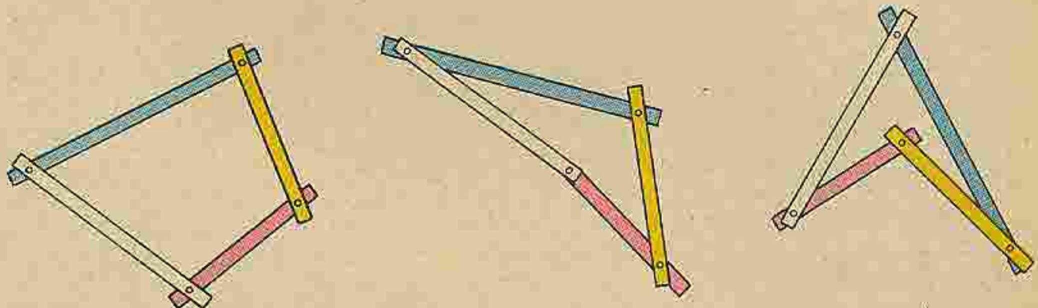
Hagamos un experimento que nos será útil más adelante.

Si unimos tres tiras de madera, metal o cartón, como las que se ilustran a continuación, obtenemos una estructura rígida.

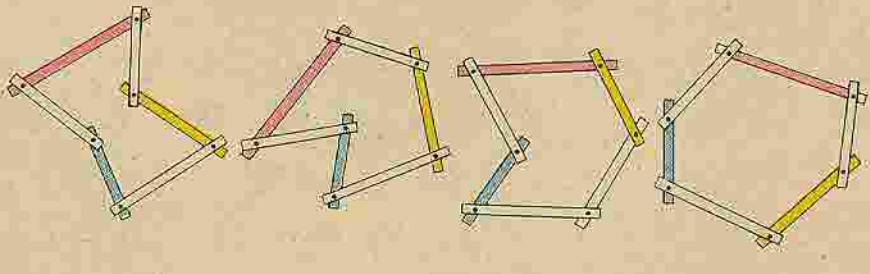


No se puede deformar.
Es rígida.

No ocurre lo mismo si unimos cuatro o más tiras como se ilustra en las figuras siguientes:



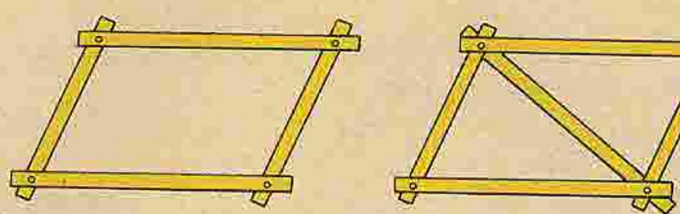
Se puede deformar. No es rígida. Al deformar el aparato construido observamos que se forman diversos polígonos. Estos polígonos tienen lados respectivamente congruentes. Sin embargo, no tienen la misma forma.



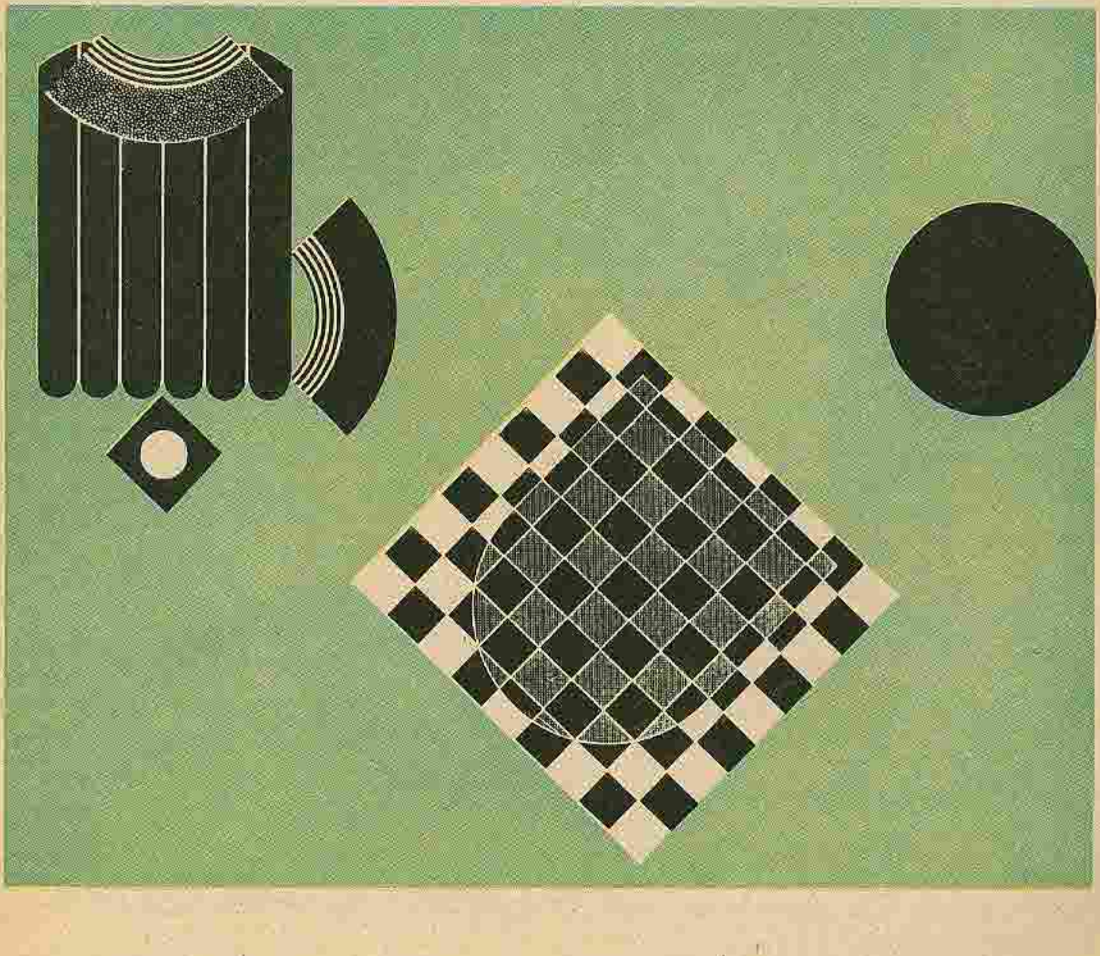
Se puede deformar. No es rígida. Como en el caso anterior, obtenemos varios polígonos; todos ellos con lados respectivos congruentes y que, sin embargo, no tienen la misma forma.

Ejercicio 6. Repita usted este experimento con tiras de cartón o madera, con clavos en sus extremos, o con tiras metálicas y tornillos (sin apretar).

Pregunta. Un carpintero quiso hacer rígido un cuadrilátero y le agregó una tira diagonal. ¿Resultó rígida la estructura que obtuvo? ¿Por qué?

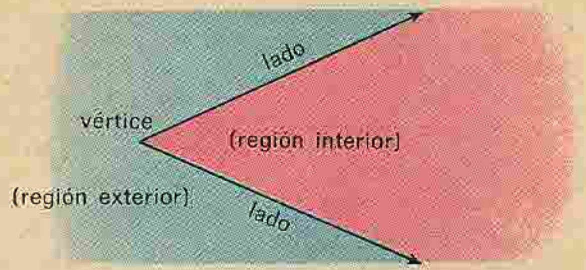


En los ejemplos anteriores vemos que dos polígonos pueden tener sus lados respectivamente congruentes y, sin embargo, no tener la misma forma. Así pues, para poder decir que dos polígonos son congruentes se necesita conocer algo más que la congruencia de sus lados respectivos. A continuación analizaremos el concepto de ángulo, el cual nos servirá para precisar el significado de congruencia de polígonos y, más adelante, de semejanza.



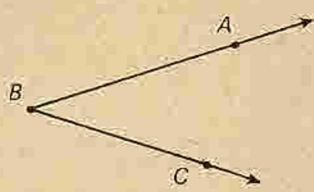
3. Angulos.

Todos tenemos un concepto bastante claro de lo que es un ángulo. La siguiente figura ilustra un ángulo.



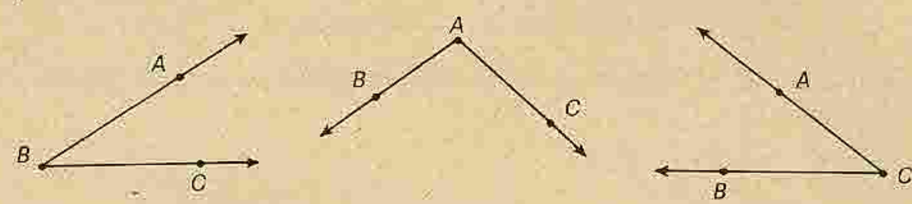
Definición. Un ángulo es la unión de dos rayos que tienen el mismo vértice.

Para referirnos a un ángulo como el siguiente,



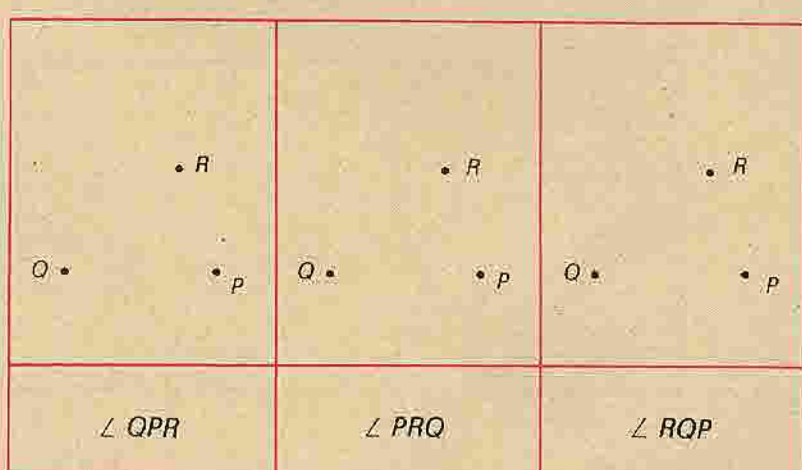
escribimos ∠ *ABC* (léase ángulo *ABC*) teniendo cuidado en que la letra de en medio sea la que indica el vértice.

Ejemplo.

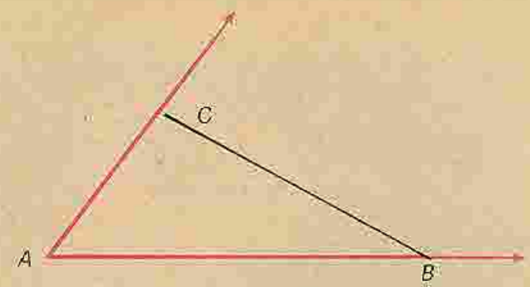


∠ *ABC* ∠ *BAC* ∠ *ACB*

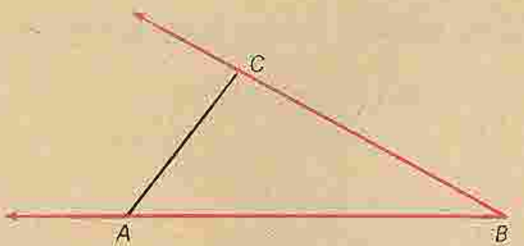
Ejercicio 7. Dibuje los ángulos indicados.



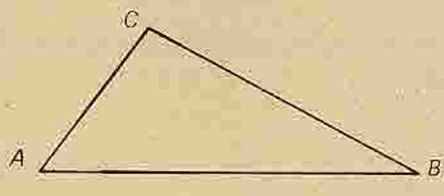
A veces nombraremos un ángulo con una sola letra. Por ejemplo, en un triángulo $\triangle ABC$, cuando hablemos del ángulo $\angle BAC$, diremos simplemente *el ángulo A* y escribiremos $\angle A$.



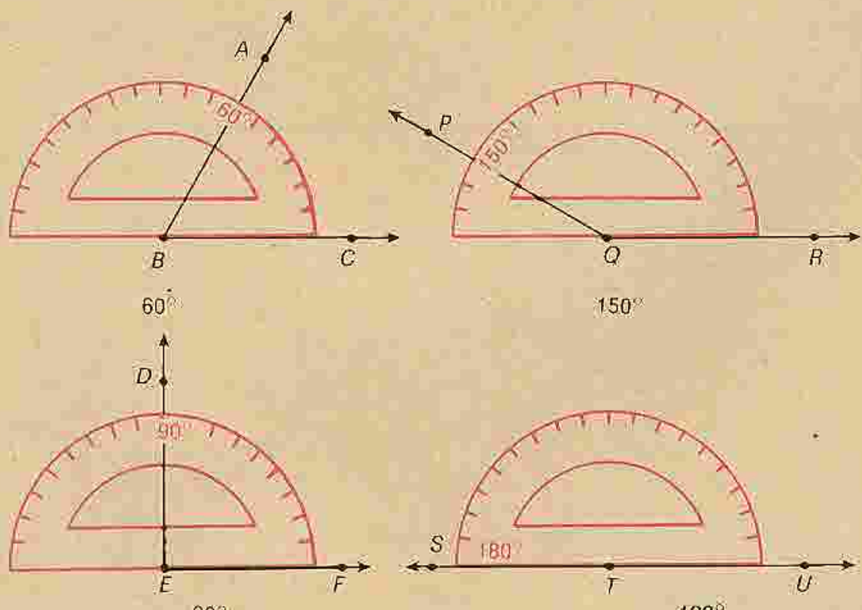
Así, el ángulo B ($\angle B$) será el ángulo $\angle ABC$:



Ejercicio 8. En la siguiente figura marque el $\angle C = \angle ACB$.



Para medir ángulos se acostumbra usar el transportador. Como unidad de medida se toma el grado.



60°

150°

90°

(Angulo **recto**)

180°

(Angulo **llano**)

Notación. Si un ángulo $\angle ABC$ mide, por ejemplo, 60°, escribiremos $\measuredangle ABC = 60°$. Es decir, la notación $\angle ABC$ se refiere al ángulo (unión de dos rayos) y la notación $\measuredangle ABC$ se refiere a un número, que es la medida del ángulo $\angle ABC$.

Así en las cuatro últimas figuras, podemos escribir

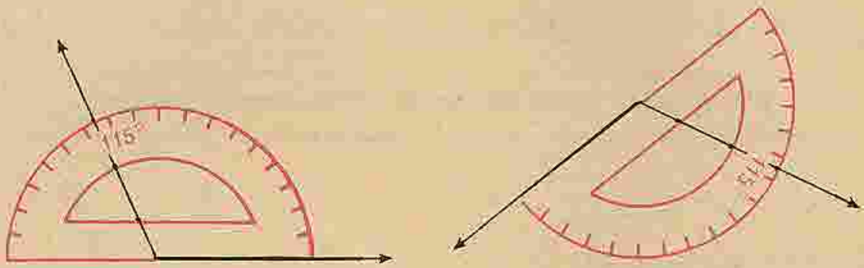
$\measuredangle ABC = 60°$ $\quad \measuredangle PQR = 150°$, $\quad \measuredangle DEF = 90°$, $\quad \measuredangle STU = 180°$.

Usando la misma idea que para los segmentos, diremos que

Dos ángulos son congruentes si tienen la misma medida.

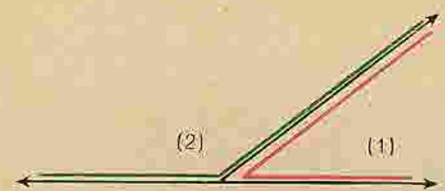
Por ejemplo, los ángulos $\angle ABC$ y $\angle KLM$, que a continuación se ilustran, son congruentes pues tienen la misma medida:

$\measuredangle ABC = \measuredangle KLM = 115°$



Para indicar que dos ángulos son congruentes usamos también el símbolo $\cong$. Así pues, decir que $\angle ABC \cong \angle PQR$ equivale a decir que $\measuredangle ABC = \measuredangle PQR$.

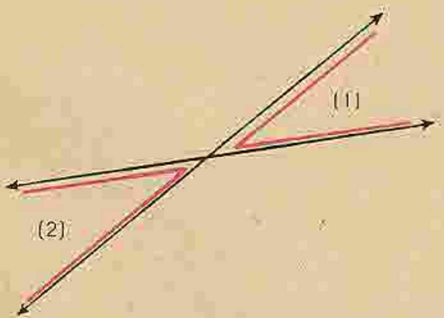
En la siguiente figura se ilustran dos ángulos, $\angle(1)$ y $\angle(2)$, tales que la suma de sus medidas es 180°



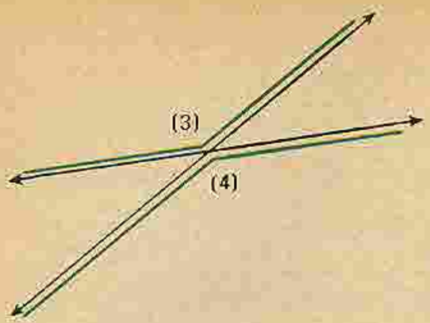
$\measuredangle(1) + \measuredangle(2) = 180°$

Si la suma de las medidas de dos ángulos es 180° se acostumbra decir que los ángulos son **suplementarios.** Así, en el dibujo anterior, podemos decir que $\angle(1)$ y $\angle(2)$ son suplementarios.

Dos ángulos como los que se ilustran a continuación se llaman opuestos por el vértice:



$\angle(1)$ y $\angle(2)$ son opuestos por el vértice.



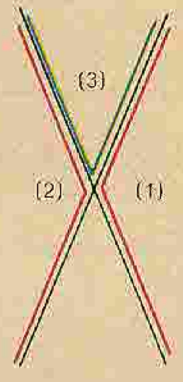
$\angle(3)$ y $\angle(4)$ son opuestos por el vértice.

En cada caso podemos ver (midiéndolos) que dos ángulos opuestos por el vértice son congruentes. Por ejemplo,

$$\angle(1) \cong \angle(2) \text{ porque } \sphericalangle(1) = \sphericalangle(2) = 30^\circ$$

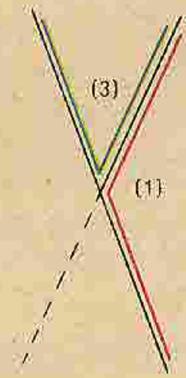
Ahora bien, sin necesidad de hacer ninguna medición podemos asegurar que

Dos ángulos opuestos por el vértice son congruentes.



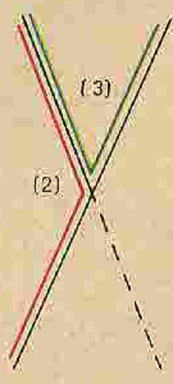
Esto lo podemos pensar así:

Queremos ver que $\sphericalangle(1) = \sphericalangle(2)$



Para ello observamos que

$\sphericalangle(1) + \sphericalangle(3) = 180^\circ$

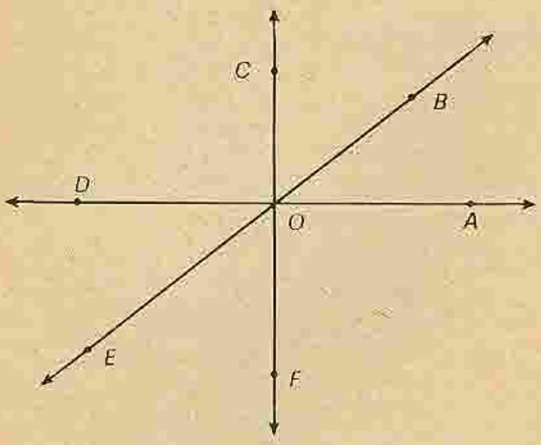


y que también

$\sphericalangle(2) + \sphericalangle(3) = 180^\circ$

Por lo tanto, $\measuredangle(1) + \measuredangle(3) = \measuredangle(2) + \measuredangle(3)$, lo cual nos asegura que $\measuredangle(1) = \measuredangle(2)$. Es decir, $\angle(1)$ y $\angle(2)$ son congruentes.

Ejercicio 9. Si en la siguiente figura $\angle AOC = 90°$ y $\angle BOC = 52°$, diga cuánto miden los ángulos que se indican (sin hacer ninguna medición).

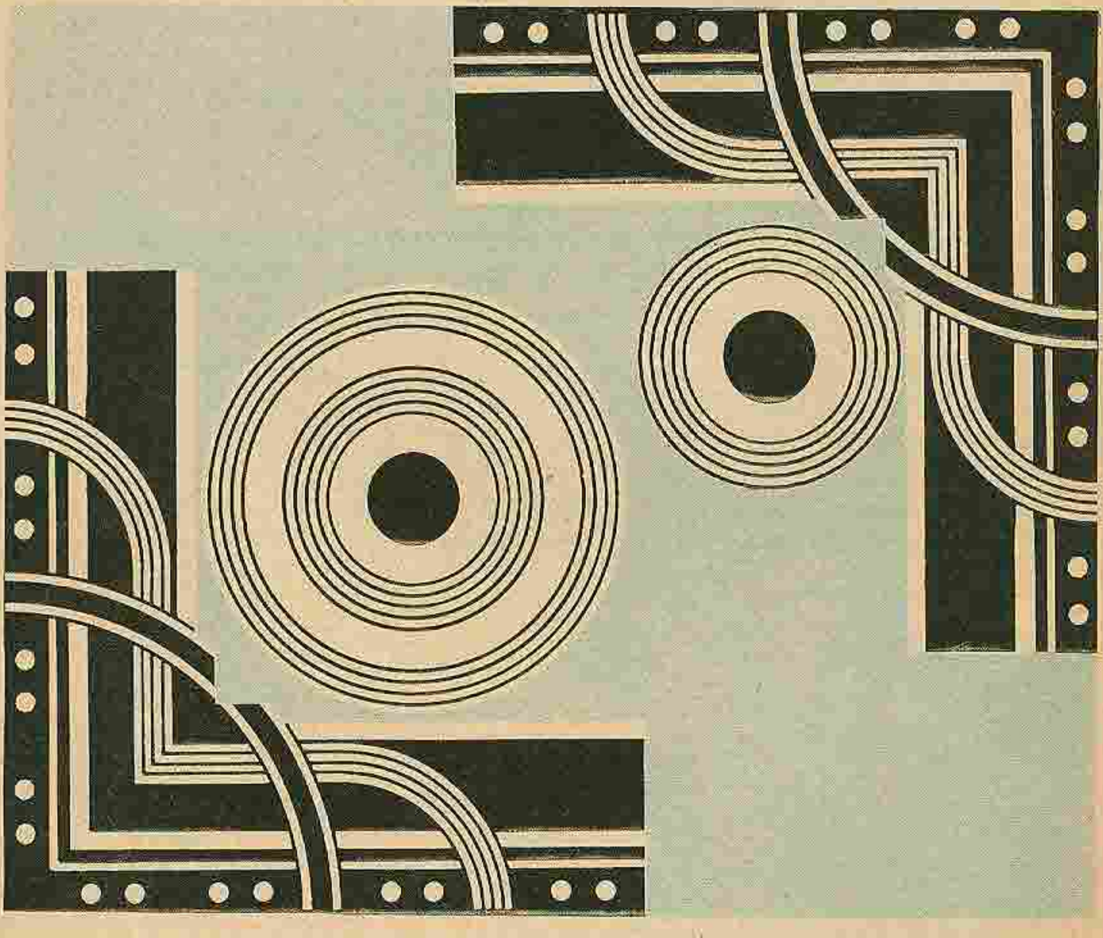


$\measuredangle DOC =$ ____ $\qquad EOF = \measuredangle$ ____

$\measuredangle BOF =$ ____ $\qquad FOA = \measuredangle$ ____

$\measuredangle DOE =$ ____ $\qquad EOC = \measuredangle$ ____

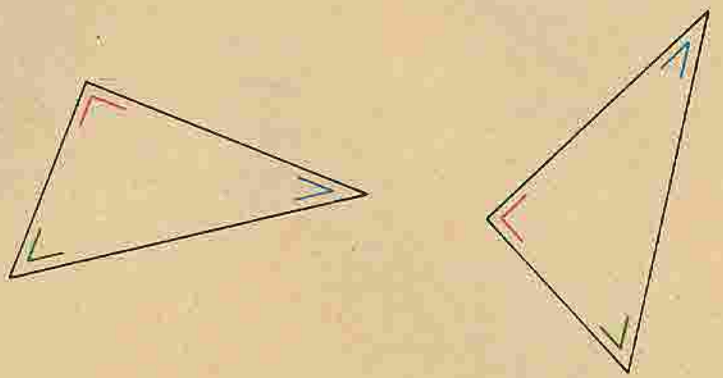
$\measuredangle DOF =$ ____ $\qquad EOB = \measuredangle$ ____



4. Polígonos congruentes

Consideremos dos triángulos congruentes; es decir, dos triángulos cuyos lados respectivos son congruentes, como por ejemplo, los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ que a continuación se ilustran.

Si medimos sus ángulos nos encontramos con que



$\sphericalangle A = \sphericalangle A'$

$\sphericalangle B = \sphericalangle B'$

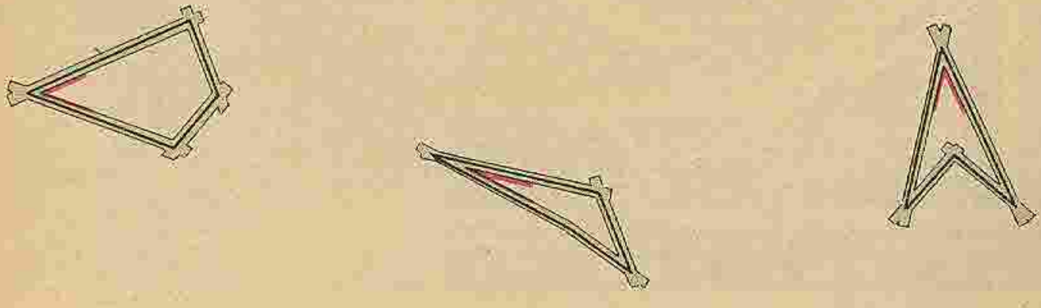
$\sphericalangle C = \sphericalangle C'$

Esto es cierto para cualquier pareja de triángulos congruentes. Es un hecho que aceptamos:

Si los tres lados de un triángulo son respectivamente congruentes a los tres lados de otro triángulo entonces los ángulos respectivos son congruentes.

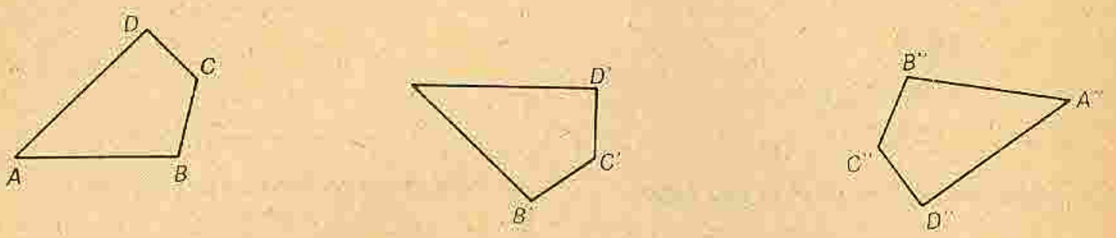
¿Ocurrirá lo mismo para los polígonos de más de tres lados? Es decir, si dos polígonos de más de tres lados tienen sus lados respectivos congruentes, ¿podemos afirmar que sus ángulos respectivos son congruentes?

En el experimento que hicimos al final del párrafo 2 de este capítulo (págs. 407 - 408) observamos los siguientes cuadriláteros.



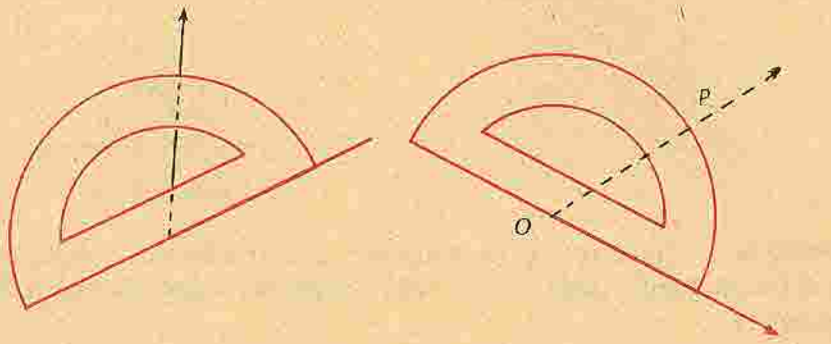
que tienen sus lados respectivos congruentes (compruébelo) y que, sin embargo, sus ángulos respectivos no lo son (por ejemplo, los marcados con rojo).

Ahora bien, lo anterior nos indica que para que dos polígonos tengan "la misma forma y el mismo tamaño", es decir, para que sean congruentes no basta con que los lados respectivos sean congruentes. Como se muestra en los siguientes cuadriláteros, diremos que dos polígonos son congruentes si además de tener sus lados respectivos congruentes, tienen sus ángulos respectivos congruentes.

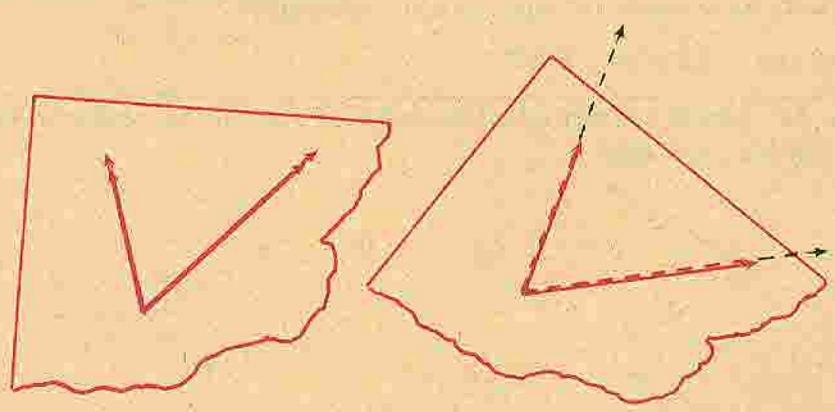


Trazado de ángulos congruentes. La "rigidez" de los triángulos, de la que antes hablábamos permite trazar ángulos congruentes utilizando la regla y el compás.

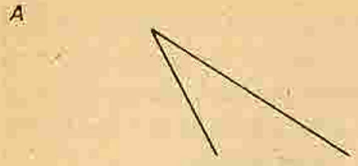
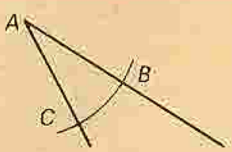
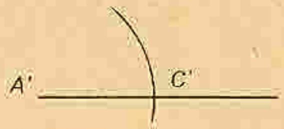
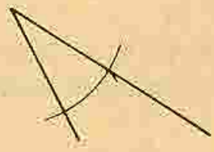
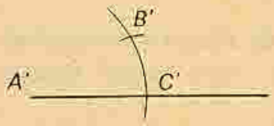
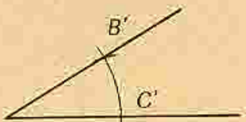
Sabemos ya cómo hacerlo con un transportador:



Podemos hacerlo también calcando:



Sin embargo, la construcción que a continuación mostramos es preferible por ser más precisa. Procedemos así:

Angulo dado	Trazado de otro ángulo congruente al ángulo dado
 Angulo dado	 Trazamos un rayo
 Dibujamos un arco en el ángulo dado.	 Con la misma abertura trazamos otro arco
 Con el compás medimos BC	 Transportamos la medida BC a $B'C'$
	 Trazamos el rayo $A'C'$

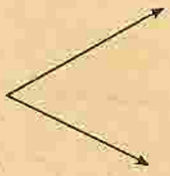
La construcción es correcta por lo siguiente: Los triángulos $\triangle ABC$ que hemos construido sobre el ángulo dado y el $\triangle A'B'C'$ obtenido tienen los tres lados respectivos congruentes:

$$AC \cong A'C', \quad AB \cong A'B', \quad BC \cong B'C'$$

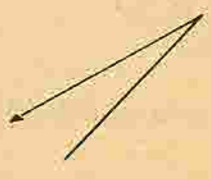
Por lo tanto, los ángulos respectivos son congruentes.

En particular, $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$.

Ejercicio 10. Usando el procedimiento anterior trace, en su cuaderno, ángulos congruentes con los siguientes.

(a) 

(b) 

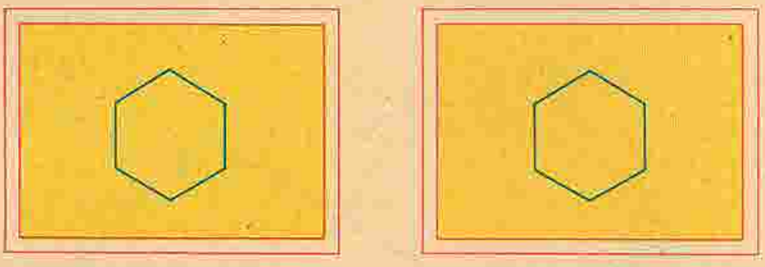
(c) 

(d) 

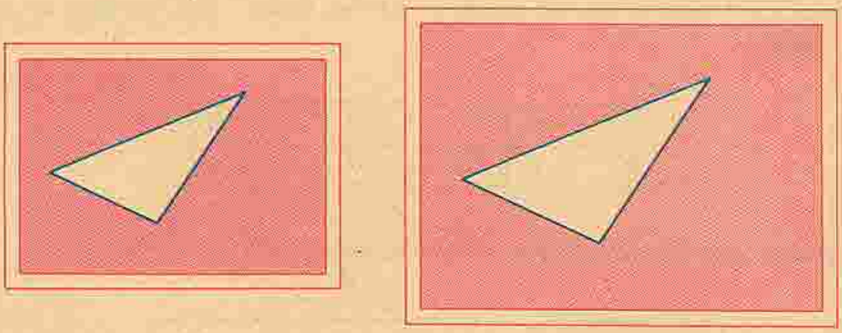
II

Semejanza

Las fotografías siguientes nos muestran dos figuras que "tienen la misma forma y el mismo tamaño". Como vimos antes, en este caso decimos que las figuras son congruentes.



Ahora bien, es claro que cuando amplificamos una fotografía, el tamaño de la figura cambia, pero no la forma:



Ya mencionamos antes que de dos figuras que tienen la misma forma se dice que son semejantes. A continuación precisaremos este concepto y puesto que los triángulos sirven para estudiar figuras más complicadas, empezaremos con los triángulos.

1. Triángulos semejantes.

Diremos que

Dos triángulos son semejantes si los tres ángulos de uno de ellos son respectivamente congruentes a los tres ángulos del otro.

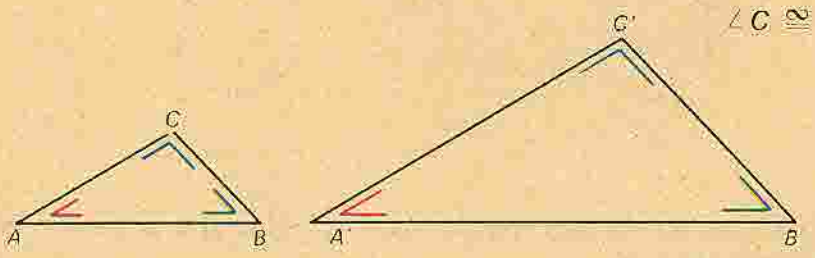
Analicemos esto con más detenimiento. Recordemos que si dos triángulos tienen los lados respectivamente congruentes, entonces sus ángulos respectivos son también congruentes. Pero la afirmación inversa no es cierta. Por ejemplo, si observamos las dos últimas fotografías, vemos que los triángulos tienen ángulos congruentes y que, sin embargo, sus lados respectivos no son congruentes.

Lo mismo observamos en los triángulos siguientes:

$\angle A \cong \angle A'$

$\angle B \cong \angle B'$

$\angle C \cong \angle C'$



¿Habrá alguna relación entre las medidas de los lados? Midámoslos en mm y hagamos una tabla:

$AB = 4$	$BC = 2$	$CA = 3$
$A'B' = 8$	$B'C' = 4$	$C'A' = 6$

Veamos ahora las razones de los lados respectivos:

$\frac{AB}{A'B'} = \frac{1}{2}$	$\frac{BC}{B'C'} = \frac{1}{2}$	$\frac{CA}{C'A'} = \frac{1}{2}$

Por lo tanto, vemos que

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$$

es decir, los lados respectivos son proporcionales.

Esto es cierto en general y lo aceptaremos:

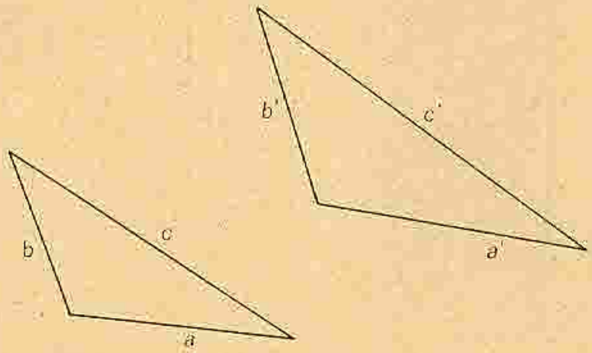
Si dos triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ son semejantes ($\angle A \cong \angle A'$, $\angle B \cong \angle B'$, $\angle C \cong \angle C'$), entonces sus lados respectivos son proporcionales:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$$

Ejemplo. Los siguientes triángulos son semejantes. Midiendo sus lados vemos que

$$a = 4, \quad b = 3, \quad c = 6$$

$$a' = 4.8, \quad b' = 3.6, \quad c' = 7.2$$



Las razones de los lados respectivos son:

$$\frac{a}{a'} = \frac{4}{4.8}, \quad \frac{b}{b'} = \frac{3}{3.6}, \quad \frac{c}{c'} = \frac{6}{7.2}$$

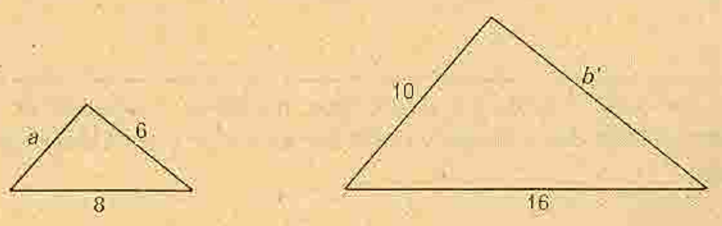
Y ya que

$$\frac{4}{4.8} = \frac{3}{3.6} = \frac{6}{7.2}, \text{ (compruébelo)}$$

entonces,

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

Ejemplo. Los triángulos siguientes son semejantes. ¿Cuánto miden a y b'?



Resolución.

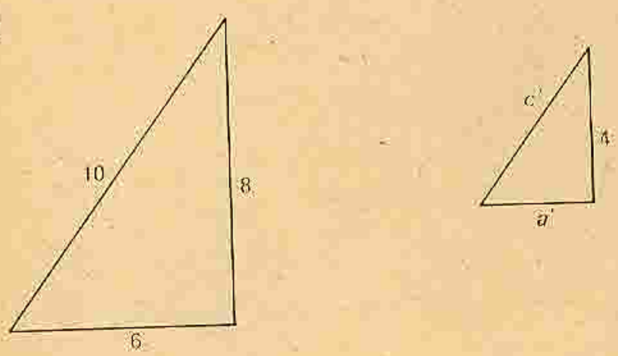
$$\frac{a}{10} = \frac{8}{16} = \frac{6}{b'}$$

$$\frac{a}{10} = \frac{8}{16}; \qquad a = \frac{8 \times 10}{16}; \qquad a = 5$$

$$\frac{9}{16} = \frac{8}{b'}; \qquad b' = \frac{16 \times 6}{8}; \qquad b' = 12$$

Ejercicio 1. En cada uno de los incisos siguientes se dan triángulos semejantes y las medidas de algunos de sus lados. Encuentre las medidas de los lados restantes.

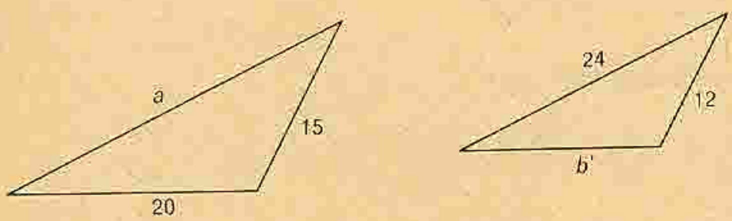
a)



$a' =$

$c' =$

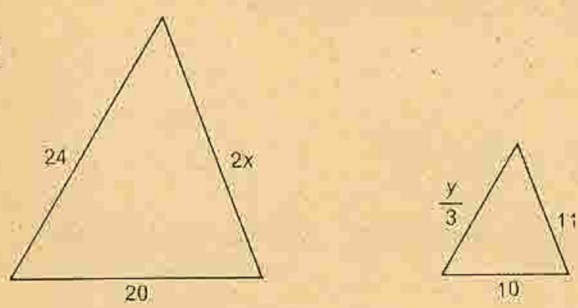
b)



$a =$

$b' =$

c)

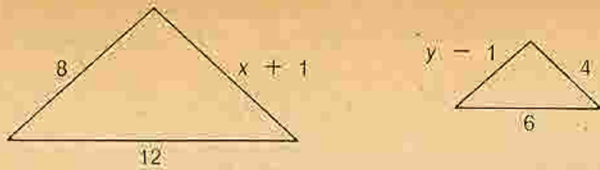


$x =$

$y =$

Ejercicio 2. En cada inciso encuentre qué números representan las letras, partiendo del hecho de que los triángulos son semejantes y considerando los datos que se proporcionan.

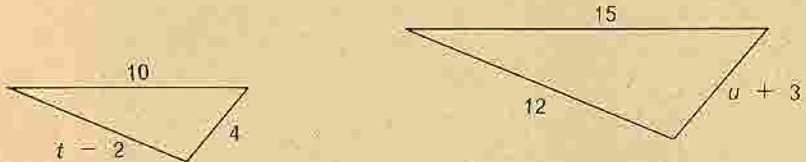
a)



$x =$

$y =$

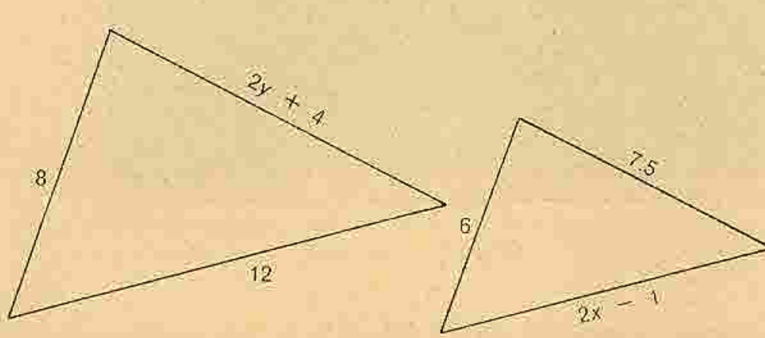
b)



$t =$

$u =$

c)

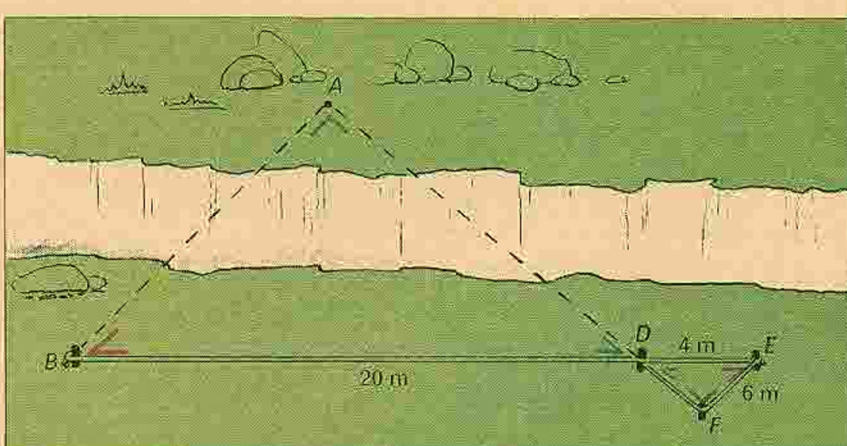


$x =$

$y =$

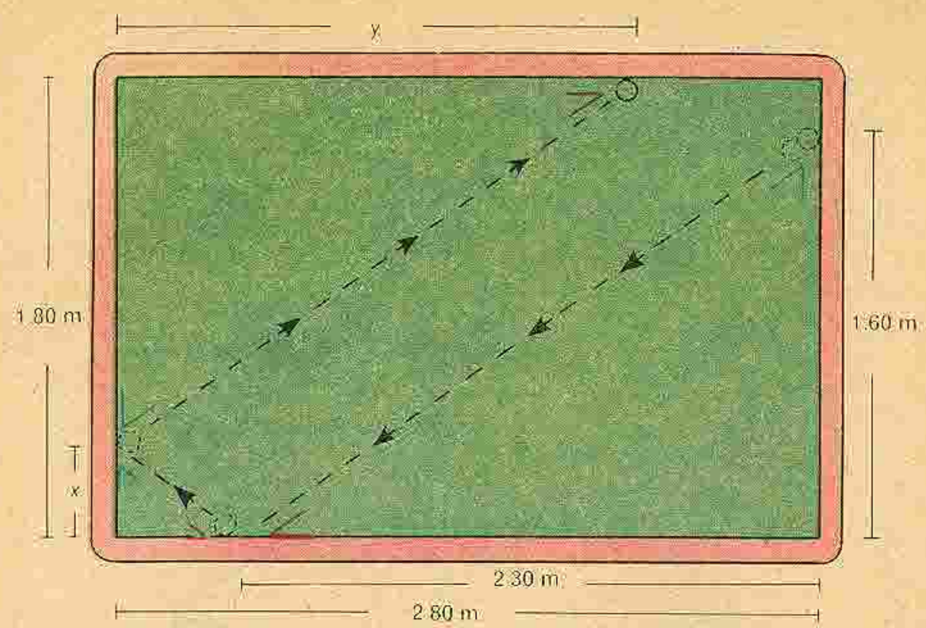
Problemas.

1. Para encontrar la distancia entre dos puntos, uno de los cuales es inaccesible, como en el caso de la barranca que se ilustra, se plantaron unas estacas como se indica.



Se hizo de tal manera que los ángulos marcados con el mismo color fueran congruentes. Después se midieron los segmentos $\overline{BD}$, $\overline{DE}$ y $\overline{EF}$. ¿Puede usted encontrar, con estos datos, la distancia entre los puntos A y B?

2. En una mesa de billar, la bola blanca es impulsada como se muestra en el dibujo.

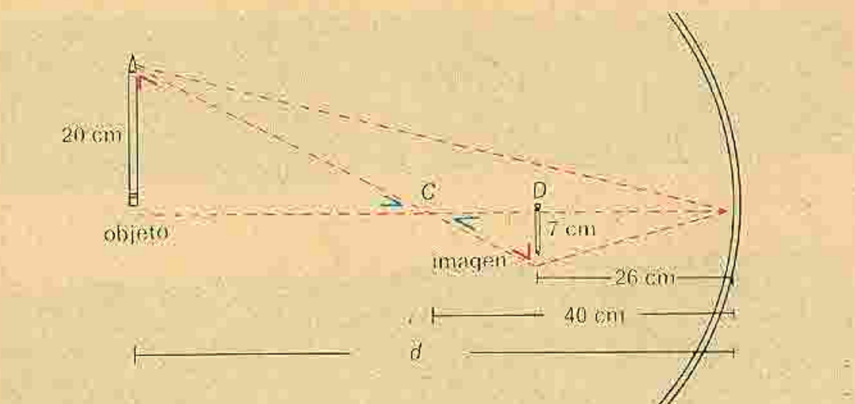


Suponemos que los ángulos marcados con el mismo color son congruentes.

a) Calcule la distancia x cuando la bola golpea la banda de la izquierda.

b) Calcule la distancia y cuando la bola golpea la banda de arriba.

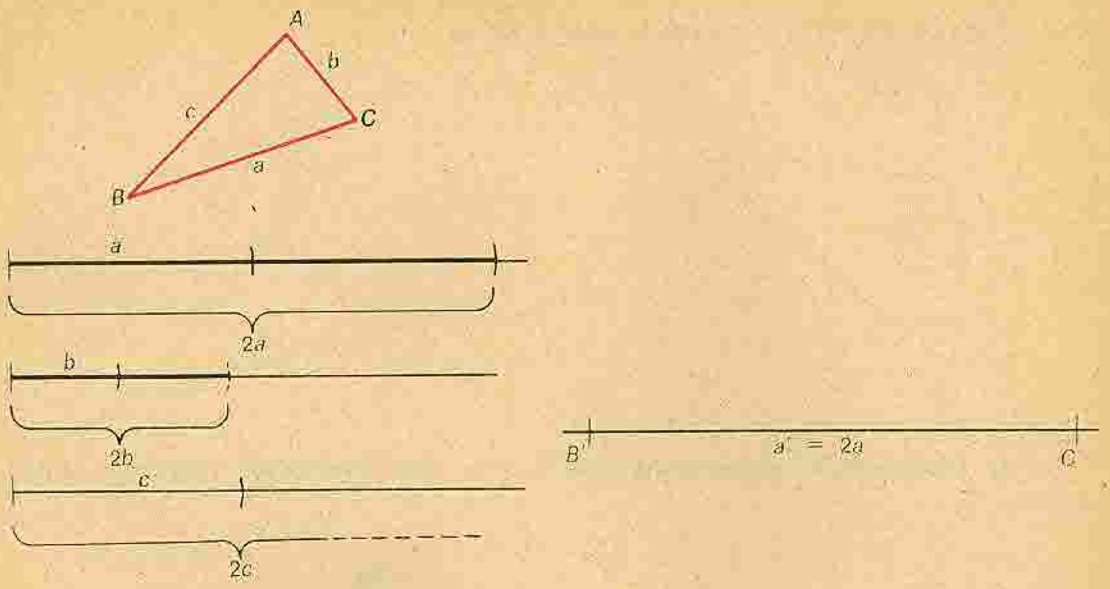
3. Encuentre la distancia d a que está situado el objeto del espejo esférico, con los datos que se proporcionan.



Sugerencia. Calcule primero la longitud del segmento CD.

Hasta aquí hemos visto que si dos triángulos son semejantes, entonces sus lados respectivos son proporcionales. Ahora bien, la afirmación inversa es también cierta. Veamos un ejemplo.

Ejercicio 3. Construya en el espacio de la derecha un triángulo $\triangle A'B'C'$ cuyos lados midan el doble de los lados del triángulo que se da a la izquierda.



En el triángulo que usted construyó, vemos que

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$$

Al medir ahora los ángulos respectivos vemos que

$$\angle A \cong \angle A', \quad \angle B \cong \angle B', \quad \angle C \cong \angle C',$$

es decir, los triángulos son semejantes.

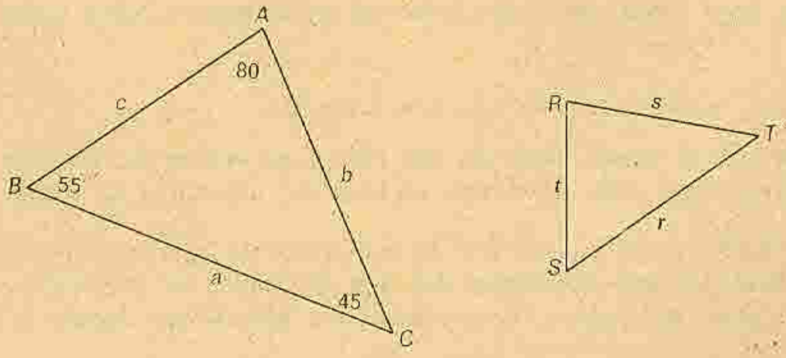
Aceptaremos esta propiedad:

Si los lados respectivos de dos triángulos son proporcionales, entonces los triángulos son semejantes.

Ejercicio 4. Si suponemos que en los siguientes triángulos

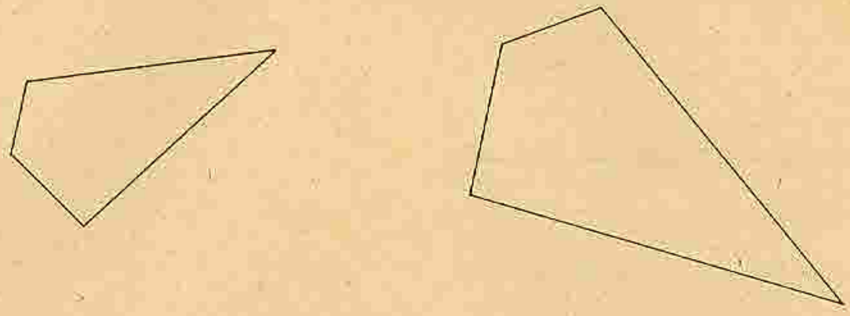
$$\frac{a}{r} = \frac{b}{s} = \frac{c}{t},$$

entonces $\sphericalangle R =$ ____ , $\sphericalangle S =$ ____ y $\sphericalangle T =$ ____

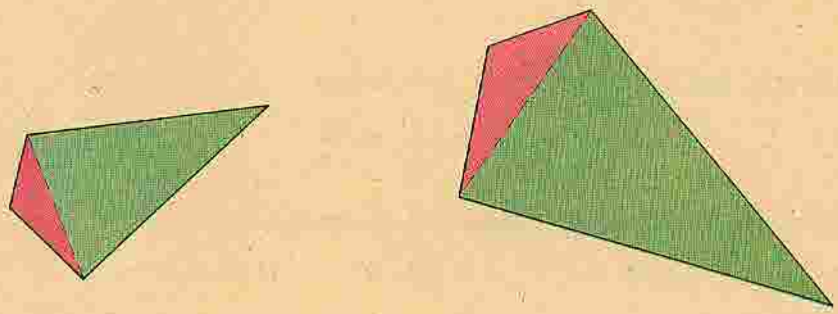


2. Polígonos semejantes.

Los polígonos siguientes "tienen la misma forma".



Si los triangulamos convenientemente vemos que obtenemos triángulos semejantes:



Esto sugiere considerar que *dos polígonos son semejantes cuando podemos hacer triangulaciones adecuadas de tal forma que todos los triángulos respectivos sean semejantes.*

En tal caso, *todos los ángulos respectivos serán congruentes y los lados respectivos, proporcionales.*

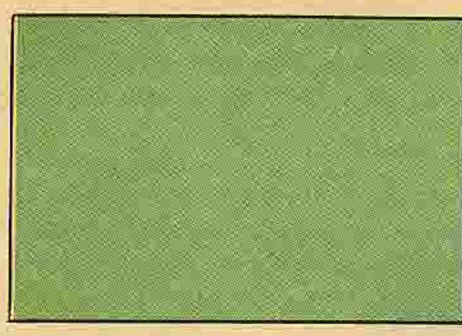
Dibujos a escala.

En la práctica, en el dibujo industrial, en el dibujo arquitectónico y en el dibujo de mapas, se presenta con frecuencia la necesidad de dar información sobre figuras que son muy grandes o muy pequeñas, para ser dibujadas en su tamaño natural. En tales casos, para poder dar información suficiente sobre alguna figura, se recurre a los dibujos a escala.

Por ejemplo, consideremos la siguiente situación:

Se quiere usar un dibujo para dar una idea clara acerca de la forma y el tamaño de un rectángulo que mide 60 metros de base por 40 metros de altura.

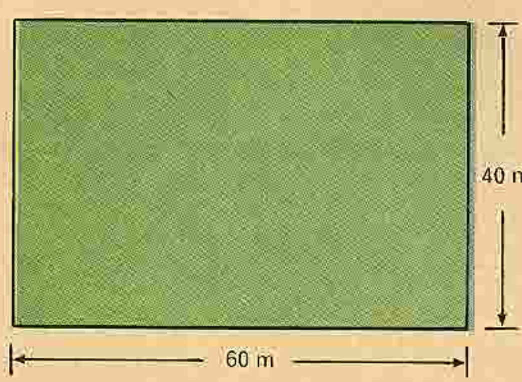
Aquí se puede recurrir al concepto de semejanza de figuras geométricas para dar idea de la forma de ese rectángulo. Así que dibujamos un rectángulo como el siguiente, que tiene los ángulos congruentes y los lados proporcionales a la figura que deseamos describir. (La razón de proporcionalidad de esta figura con respecto a la "original" es de $\frac{1}{1\,000}$).



La figura, por lo tanto, es *semejante* a la original y nos proporciona una idea clara de la *forma* de ésta.

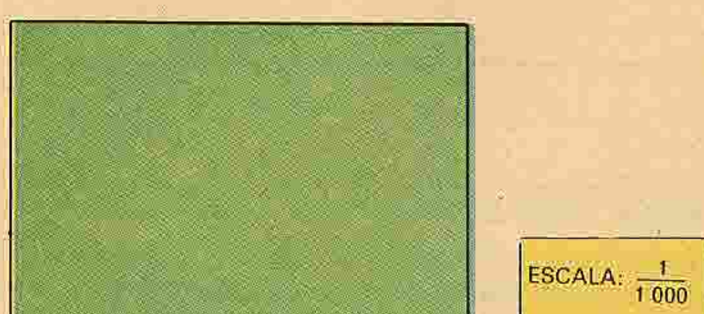
Sin embargo, la figura sola no nos da idea del tamaño de la figura que describe.

Podríamos dar una idea del tamaño de la figura original haciendo algunas anotaciones sobre esta que hemos dibujado.



Pero, en figuras más complicadas, esto resulta impráctico y en algunos casos hasta imposible.

En muchos dibujos, y sobre todo en los mapas geográficos, el problema se resuelve indicando cuál es la razón de proporcionalidad entre la figura dibujada y la figura original. Es costumbre designar esta razón con la palabra "escala".



También se acostumbra hacer esta anotación en la siguiente forma:

$\boxed{\text{ESCALA: 1 : 1 000}}$ léase: "escala: 1 a 1 000")

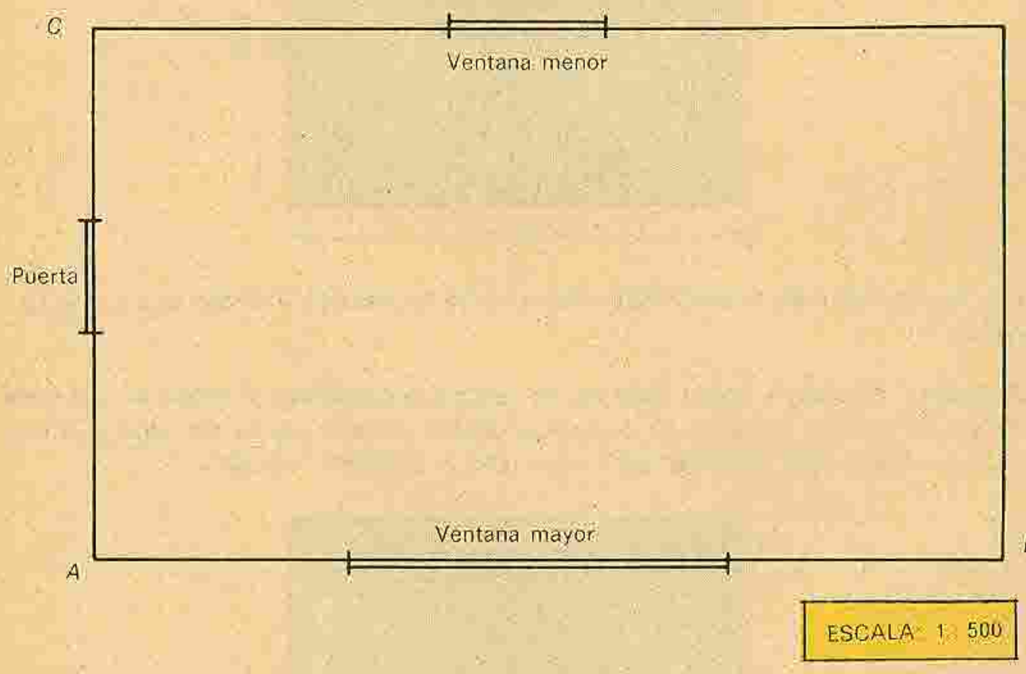
Los dibujos que como el anterior, describen una figura con otra figura semejante, y en los cuales se indica la razón de proporcionalidad, reciben el nombre de **dibujos a escala.**

De esta manera, una persona con conocimientos de semejanza puede saber el "tamaño" de la figura original realizando un simple cálculo. Por ejemplo, si quisiera saber cuál es la longitud de la base del rectángulo que se describe mediante el dibujo anterior, primero mediría la base de éste (la base mide 6 centímetros). Con este dato y sabiendo que la razón de proporcionalidad (la escala) es de $\frac{1}{1\,000}$; es decir, sabiendo que 1 centímetro del dibujo a escala corresponde a 1 000 centímetros de la figura original, puede calcular la base del rectángulo original así:

$$6 \times 1\,000 = 6\,000 \text{ (centímetros)}$$

Esto es, la base del rectángulo que se describe con la figura mide, en la realidad, 60 metros.

El siguiente es un dibujo a escala de la planta de un laboratorio en una fábrica de aviones.



Ejercicio 5. Mida el dibujo anterior y luego complete las siguientes oraciones.

a) La figura de la planta del laboratorio y la figura del dibujo son ____________ y, por lo tanto, los ángulos de ellas son congruentes y los lados son proporcionales. En consecuencia, las dos figuras tienen la misma forma.

b) La anotación ESCALA : 1 : 500 nos indica que la razón de proporcionalidad de la figura a escala y la planta del laboratorio es igual a ____________ .

c) Lo anterior significa que 1 centímetro del dibujo a escala corresponde a ________________ centímetros de la planta del laboratorio.

d) La longitud de $\overline{AB}$ es aproximadamente igual a ________________ cm.

e) Calculando con el dato anterior, sabemos que el largo de la planta del laboratorio mide aproximadamente _______ metros.

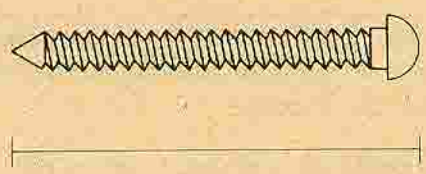
f) El segmento $\overline{AC}$ mide _______ centímetros.

g) Calculando con ese dato, sabemos que el ancho del laboratorio mide _______ metros.

h) La puerta del laboratorio mide _______ metros de ancho.

i) La ventana mayor tiene una base que mide ____________ metros.

El siguiente dibujo a escala corresponde a un tornillo de un reloj para dama.



ESCALA : 60 : 1

Ejercicio 6 Complete las siguientes oraciones.

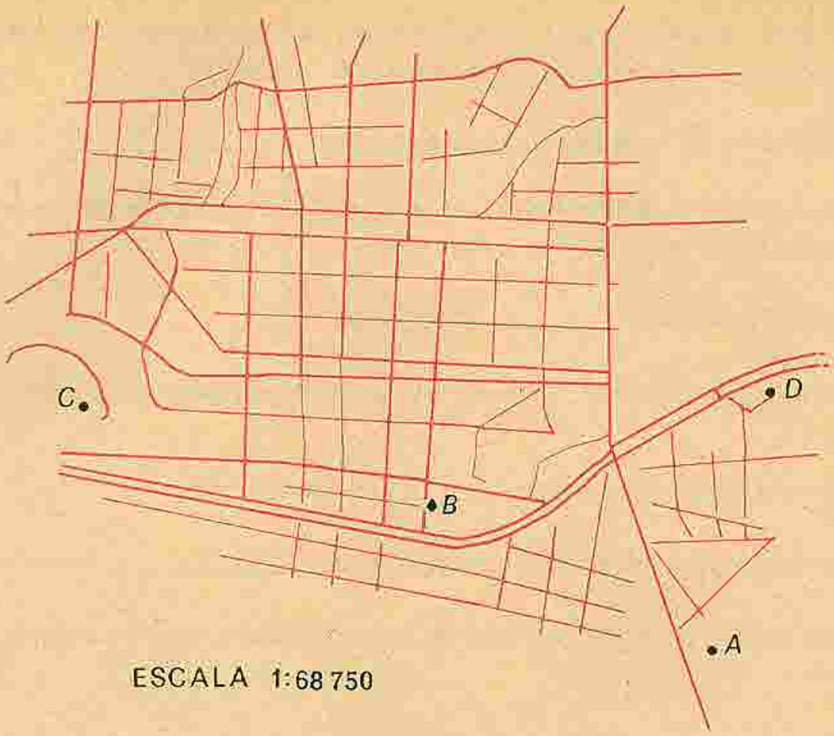
a) La escala del dibujo nos indica que la razón de proporcionalidad entre la figura dibujada y el tornillo real es de ____________.

b) Esto significa que cada 60 unidades que se midan en la figura corresponden a ________ unidad medida en el tornillo.

c) Tomando en cuenta lo anterior, podemos decir que a cada centímetro medido en el dibujo le corresponde _________ de centímetro en el tornillo real.

d) El tornillo del dibujo mide _____ centímetros de largo. Por lo tanto, el largo del tornillo real es de __________ de centímetro, o sea, un __________ .

El siguiente dibujo es el plano de una parte de la ciudad de Monterrey.



Ejercicio 7. En el plano anterior se han señalado puntos que corresponden a lugares de interés de esa ciudad. *A* indica el estadio del Tecnológico de Monterrey. *B* es el Zócalo. *C* es el obispado. *D* es el Parque España.

Midiendo sobre el plano anterior, calcule las distancias reales entre:

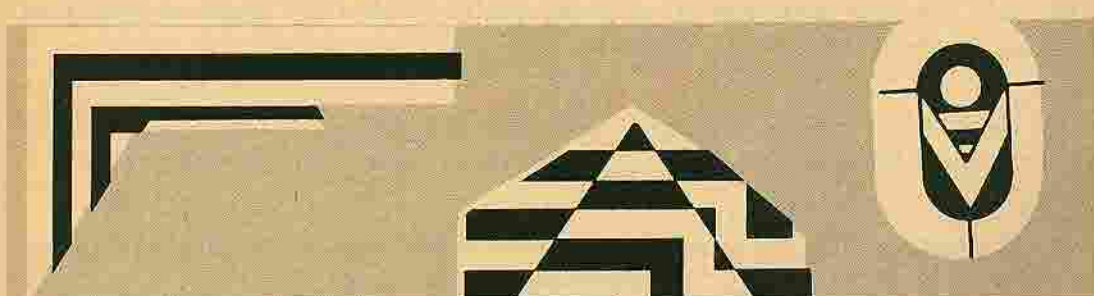
a) El estadio del Tecnológico y el Zócalo.

b) El Parque España y el Zócalo.

c) El Obispado y el Tecnológico.

d) El Parque España y el Obispado.

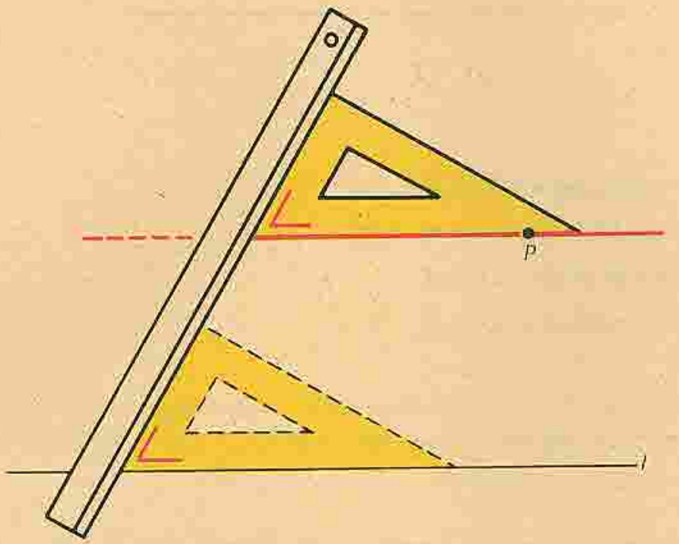
Problema. Se pretende hacer un dibujo a escala de una circunferencia que mide 70 centímetros de radio. Si el dibujo se va a efectuar con la escala 1 : 20. ¿Cuántos centímetros debe medir el radio de la circunferencia en el dibujo?



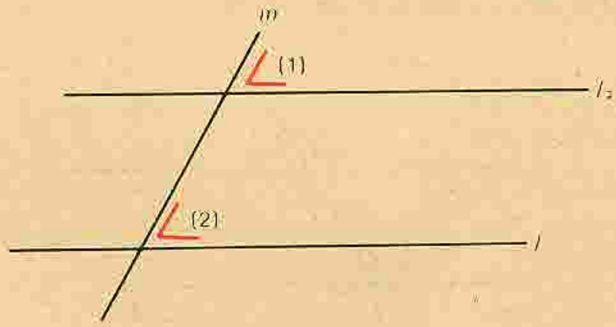
3. Rectas paralelas.

Ya sabemos cómo utilizar una escuadra para trazar rectas paralelas.

Dada una recta l y un punto P podemos trazar una recta paralela a l y que pase por el punto P:



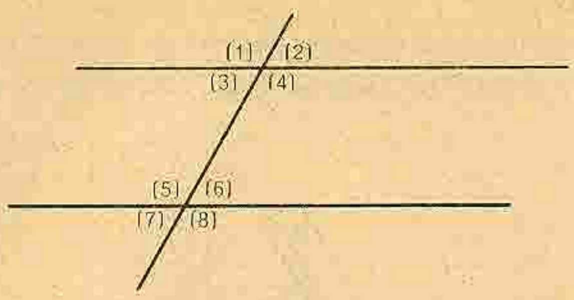
Consideremos ahora una situación como la siguiente, en la que hay dos rectas paralelas l_1 y l_2 y una tercera recta m que las interseca:



Fijémonos en los ángulso (1) y (2), que se llaman correspondientes. Ya sea midiéndolos con un transportador o utilizando un compás vemos que $\angle(1) \cong \angle(2)$. Esto no es casual y es cierto para cualquier par de rectas paralelas cortadas por otra. Lo aceptamos y enunciamos como una propiedad básica:

Los ángulos correspondientes son congruentes.

En la siguiente figura observamos varias parejas de ángulos correspondientes.

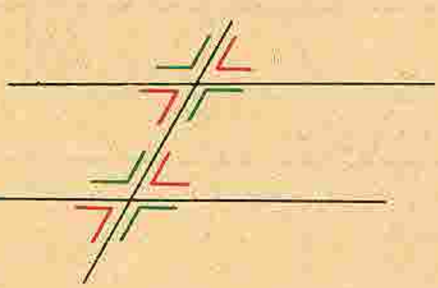


El $\angle(2)$ es correspondiente con el $\angle(6)$;
El $\angle(4)$ es correspondiente con el $\angle(8)$;
El $\angle(1)$ es correspondiente con el ______ y
el ______ es correspondiente con el ______

Ahora bien, el $\angle(2) \cong \angle(3)$ porque son opuestos por el vértice. Asimismo $\angle(6) \cong \angle(7)$. Tenemos entonces que los ángulos $\angle(2)$, $\angle(3)$, $\angle(6)$ y $\angle(7)$ son congruentes entre sí.

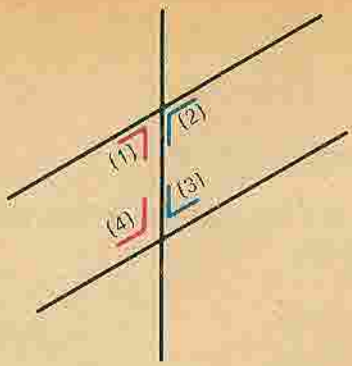
Con un razonamiento análogo al anterior concluimos que los ángulos $\angle(1)$, $\angle(5)$, $\angle(4)$ y $\angle(8)$ también son congruentes entre sí.

En la siguiente ilustración se señalan con un mismo color los ángulos congruentes entre sí. Además observamos que cualquier ángulo indicado con rojo es suplementario de cualquier ángulo indicado con verde.



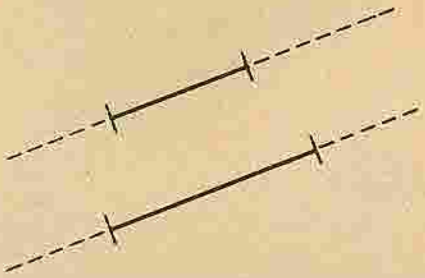
A ángulos como el $\angle(3)$ y el $\angle(6)$, de la figura anterior se les suele llamar **ángulos alternos internos** y, según hemos visto, esos ángulos son congruentes. Esto ocurre en cualquier par de rectas paralelas cortadas por otra recta.

Los ángulos alternos internos son congruentes

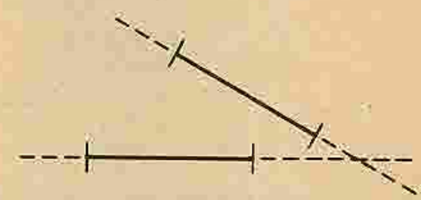


Por ejemplo, en la siguiente figura los ángulos (1) y (3) son alternos internos y su medida es la misma. Es decir, son congruentes. También son alternos internos los ángulos (2) y (4). Y también son congruentes.

Paralelogramos. Convendremos en decir que dos segmentos son paralelos si están contenidos en rectas paralelas.



segmentos paralelos

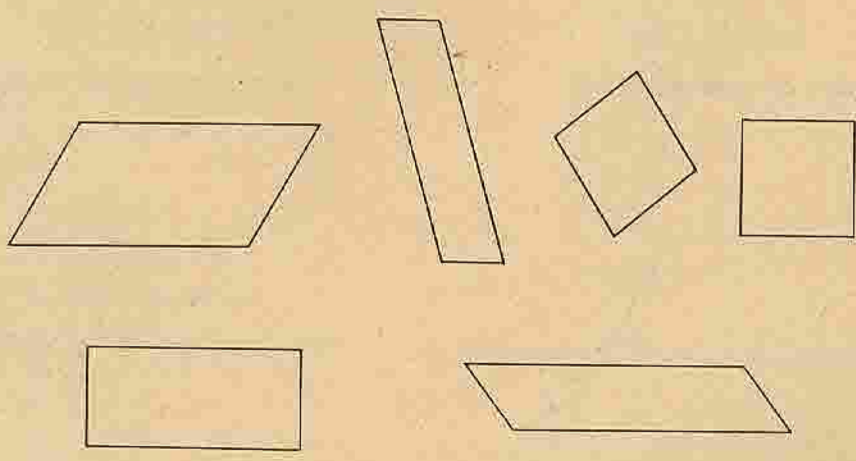


segmentos no paralelos

Recordemos ahora que

> **Un paralelogramo es un cuadrilátero cuyos lados opuestos son paralelos.**

Las figuras siguientes ilustran paralelogramos



(Algunos paralelogramos reciben nombres especiales:

Rectángulos, los que tienen sus cuatro ángulos rectos;

rombos, los que tienen sus cuatro lados congruentes entre sí;

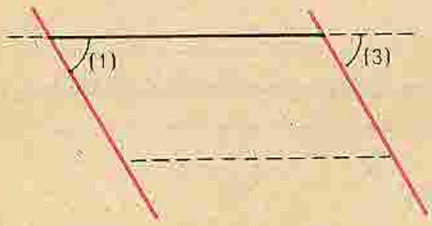
cuadrados, los que son rectángulos y rombos, o sea los que tienen sus cuatro ángulos rectos y sus cuatro lados congruentes entre sí).

Demostraremos ahora que:

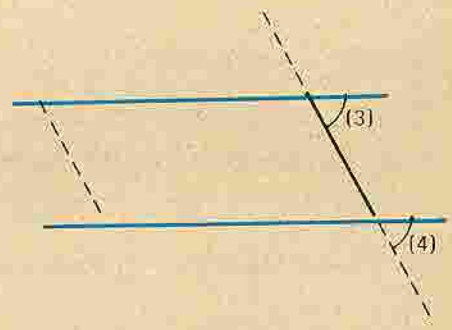
Los ángulos opuestos de un paralelogramo son congruentes.

Por ejemplo, en el siguiente paralelogramo, los ángulos $\angle(1)$ y $\angle(2)$ son congruentes.

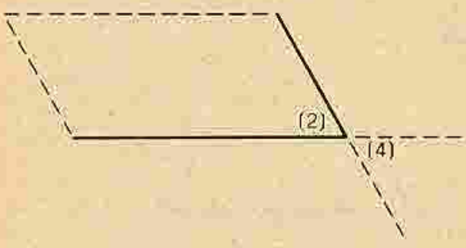
Para ver por qué es así, consideremos las siguientes figuras auxiliares:



$\angle(1) \cong \angle(3)$
(son correspondientes)



$\angle(3) \cong \angle(4)$
(son correspondientes)

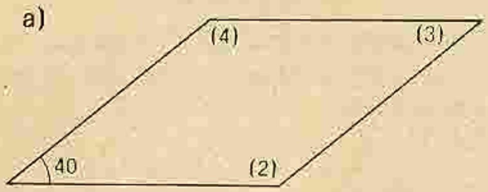


$\angle(4) \cong \angle(2)$
(son opuestos por el vértice)

Por lo tanto, todos esos ángulos son congruentes entre sí. En particular, $\angle(1)$ y $\angle(2)$ son congruentes.

Ejercicio 8. Encuentre los datos que se piden de cada uno de los siguientes paralelogramos.

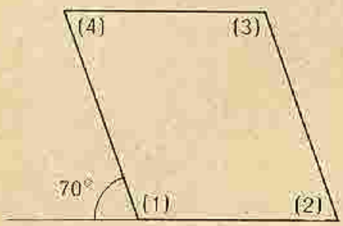
a)



$\sphericalangle(3) =$ $\quad$ $\sphericalangle(4) =$

$\sphericalangle(2) =$

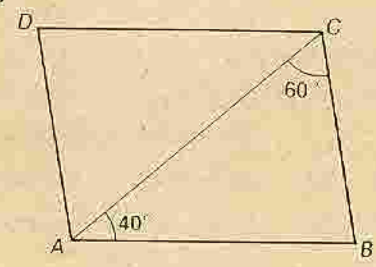
b)



$\sphericalangle(1) =$ $\quad$ $\sphericalangle(3) =$

$\sphericalangle(2) =$ $\quad$ $\sphericalangle(4) =$

c)



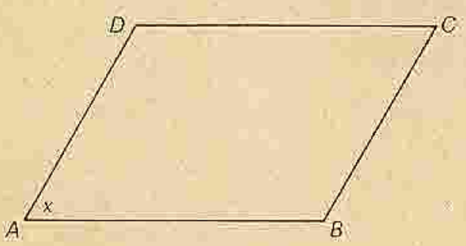
$\sphericalangle DCA =$ $\quad$ $\sphericalangle CAD =$

$\sphericalangle DAB = \sphericalangle DCB =$

$\sphericalangle D = \sphericalangle B =$

Ejercicio 9. En el último inciso del ejercicio anterior deduzca que los triángulos $\triangle\, ABC$ y $\triangle\, CDA$ son semejantes.

Problema 1. Uno de los ángulos de un paralelogramo mide el doble de otro. ¿Cuánto mide cada uno de los ángulos de ese paralelogramo?



Sugerencia: Llame x a la medida de uno de los ángulos, digamos el $\angle A$. Así tendremos que la medida de $\angle B$ será $2x$. Y como esos dos ángulos son suplementarios tenemos que

$$x + 2x = 180°$$

En esta ecuación es muy fácil hallar el valor de x y así encontraremos las medidas de todos los ángulos del paralelogramo $ABCD$.

Problema 2. En un paralelogramo $ABCD$, uno de los ángulos mide el triple de otro. ¿Cuánto mide cada uno de los ángulos de ese paralelogramo?

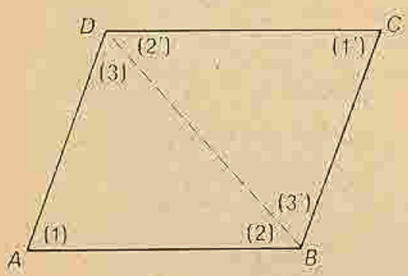
Problema 3. Uno de los ángulos de un paralelogramo $ABCD$ mide $\frac{2}{3}$ de otro. ¿Cuál es la medida de cada uno de los ángulos de ese paralelogramo?

Al observar cuidadosamente un paralelogramo, podemos darnos cuenta que sus lados opuestos miden lo mismo; es decir, que son congruentes. Esta es una propiedad de todos los paralelogramos, y podemos demostrarla:

En un paralelogramo, los lados opuestos son congruentes.

Demostración.

Consideremos un paralelogramo cualquiera y tracémosle una diagonal, como se muestra en la figura.



Así tenemos que,

$\angle(1) \cong \angle(1')$ (son ángulos opuestos en un paralelogramo)

$\angle(2) \cong \angle(2')$ (son alternos internos)

$\angle(2) \cong \angle(3)')$ (son alternos internos)

De aquí concluimos que los triángulos $\triangle ABD$ y $\triangle BCD$ son semejantes y, por consiguiente, tienen sus lados proporcionales. Esto significa que:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{BC}{AD} = \frac{BD}{BD}$$

Como $\frac{BD}{BD} = 1$, tenemos que $\frac{AB}{CD}$ y $\frac{BC}{AD} = 1$

En consecuencia,

$AB = CD$ y $BC = AD$

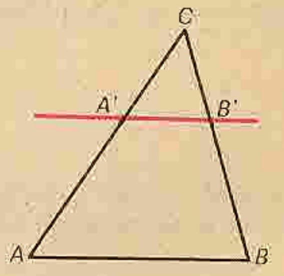
que es lo que queríamos demostrar.

4. El teorema de Tales.

Cuando en un triángulo trazamos una paralela a uno de los lados, el triángulo que se forma es semejante al original.

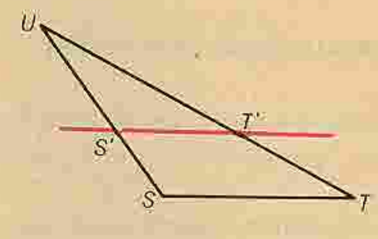
Ejemplo.

a)



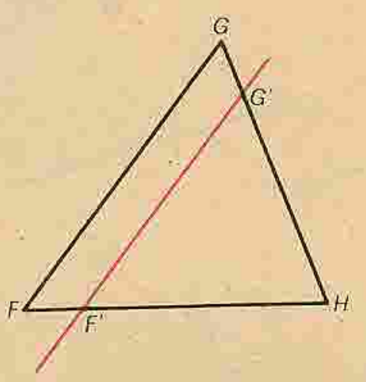
El $\triangle ABC$ es semejante al $\triangle A'B'C'$.

b)



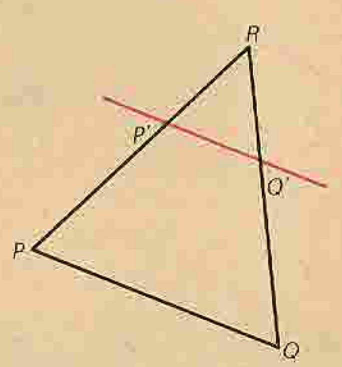
El $\triangle STU$ es semejante al $\triangle S'T'U'$.

c)



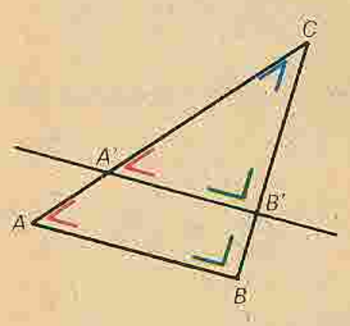
Los triángulos $\triangle FGH$ y $\triangle F'G'H'$ son semejantes.

d)



El triángulo $\triangle PQR$ es semejante al $\triangle P'Q'R'$.

Es muy sencillo darnos cuenta del por qué de la afirmación anterior. En efecto, en una situación como ésta, los ángulos marcados con rojo son congruentes, por ser correspondientes.



Por la misma razón, los marcados con verde también son congruentes. Además, el ángulo marcado con azul es común a los dos triángulos. Por lo tanto, los dos triángulos son semejantes. Luego, los lados respectivos son proporcionales. Esto es,

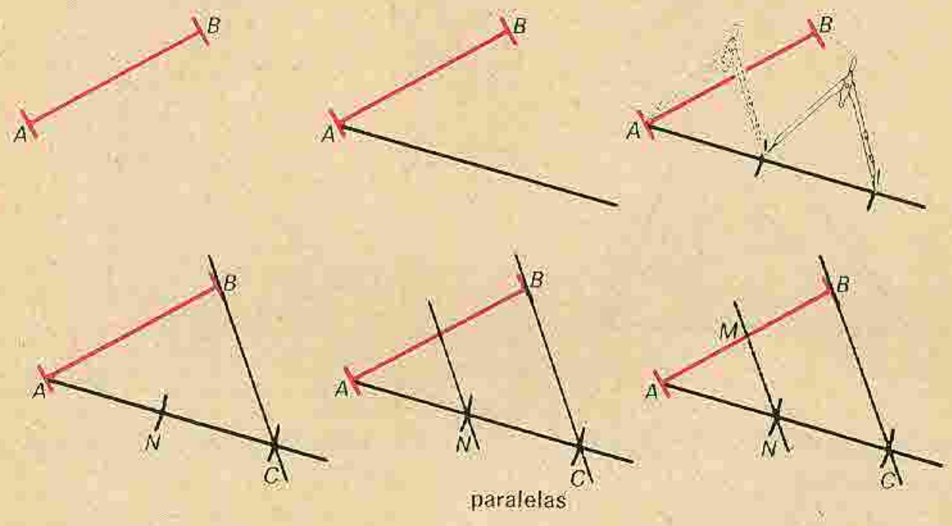
$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C}$$

Este teorema de Tales se llama así, en honor de Tales de Mileto, uno de los grandes geómetras de la antigüedad, que vivió en la primera mitad del siglo sexto antes de nuestra era. Este matemático se hizo famoso, no tanto por sus descubrimientos de tipo experimental e intuitivo, sino por haber sido uno de los primeros en utilizar métodos deductivos en geometría.

Dos construcciones geométricas.

I. Veremos ahora que el método de subdividir un segmento en varias partes congruentes, que ya hemos utilizado varias veces, se basa en el teorema de Tales.

Las siguientes ilustraciones nos recuerdan el procedimiento de dividir un segmento $\overline{AB}$ en dos partes congruentes:



Por ser $\overline{AN}$ y $\overline{NC}$ congruentes, tenemos que

$$\frac{AC}{AN} = \frac{2}{1} = 2$$

Ahora bien, por ser $\overline{MN}$ y $\overline{BC}$ paralelas, podemos aplicar el teorema de Tales y escribir

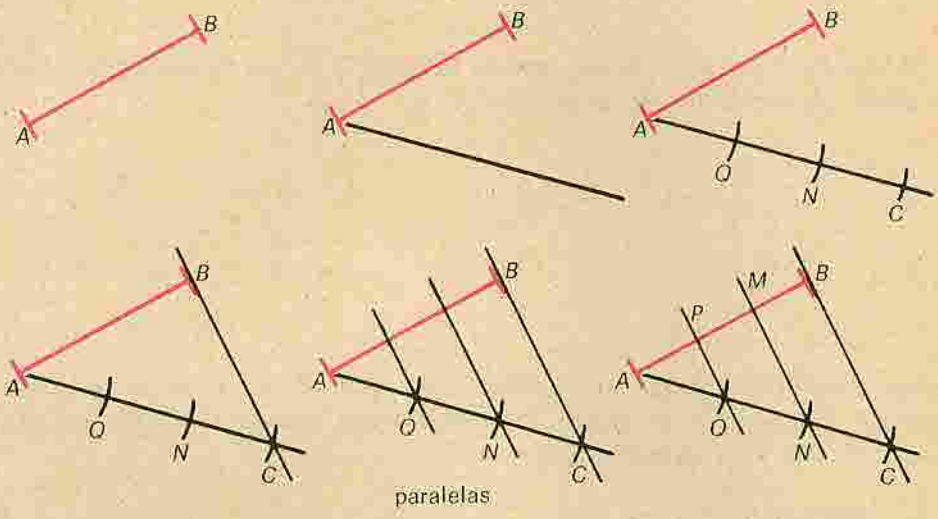
$$\frac{AC}{AN} = \frac{AB}{AM}$$

Por lo tanto,

$$\frac{AB}{AM} = \frac{2}{1},$$

lo cual implica que $\overline{AM} \cong \overline{MB}$.

Ilustremos ahora el procedimiento para dividir un segmento en tres partes congruentes:



Por ser $\overline{AQ} \cong \overline{QN} \cong \overline{NC}$, tenemos que

$$\frac{AC}{AQ} = \frac{3}{1}, \quad \frac{AN}{AQ} = \frac{2}{1}$$

Ahora bien, por ser paralelas las tres rectas trazadas, podemos aplicar el Teorema de Tales y escribir

$$\frac{AC}{AQ} = \frac{AB}{AP}, \quad \frac{AN}{AQ} = \frac{AM}{AP}$$

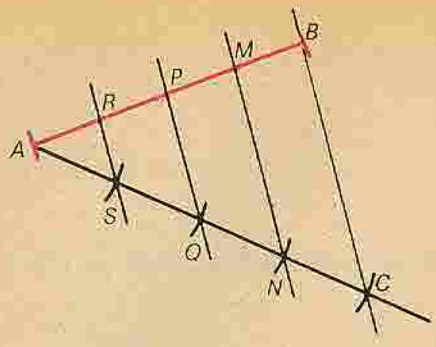
Por lo tanto,

$$\frac{AB}{AP} = \frac{3}{1}, \quad \frac{AM}{AP} = \frac{2}{1}$$

lo cual implica que $\overline{AM}$ es 2 veces $\overline{AP}$ y $\overline{AB}$ es 3 veces $\overline{AP}$. De aquí deducimos que

$$\overline{AP} \cong \overline{PM} \cong \overline{MB}.$$

Ejercicio 10. Haga un razonamiento análogo para justificar la subdivisión de un segmento en cuatro partes congruentes. Observe la figura.

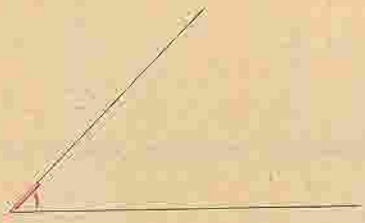


Datos: $\overline{AS} \cong \overline{SQ} \cong \overline{QN} \cong \overline{NC}$
$\overline{RS}$, $\overline{PQ}$, $\overline{MN}$ y $\overline{BC}$ paralelos.

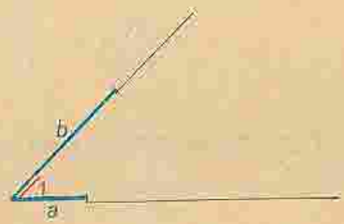
II. Si nos dan dos segmentos, uno de longitud a y otro de longitud b, es muy fácil construir un segmento de longitud $a + b$.

Es algo más difícil dibujar un segmento que mida ab, es decir, el producto de las medidas de los segmentos dados. Veremos ahora cómo, utilizando el teorema de Tales, es posible esta construcción:

Segmentos dados de longitudes a y b



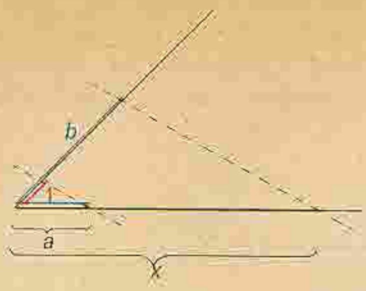
Trazamos un ángulo. Marcamos un segmento de medida 1 sobre uno de los lados.



Y sobre los lados, con el compás, marcamos segmentos congruentes con los segmentos dados.

Trazamos una recta como se indica.

Trazamos una paralela a esta recta por el extremo del otro segmento.



El segmento obtenido marcado con verde es de longitud $x = ab$.

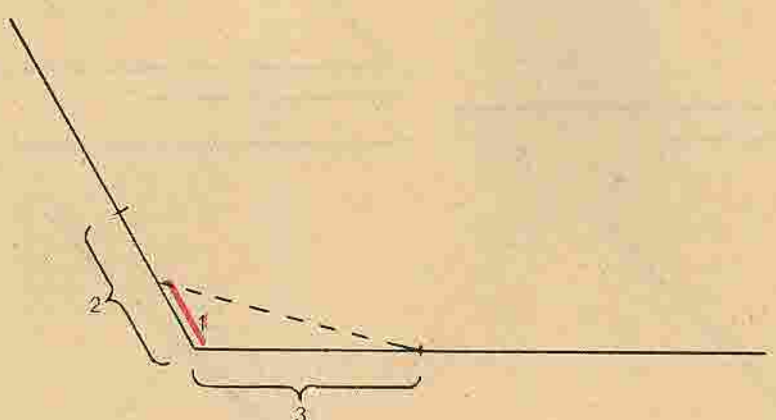
En efecto, por el teorema de Tales, tenemos que

$$\frac{x}{a} = \frac{b}{1}$$

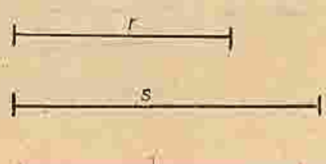
Por lo tanto $x = ab$

Ejercicio 11.

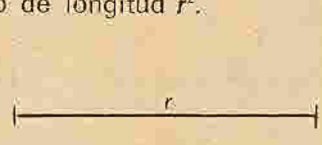
a) Termine la construcción para obtener un segmento de longitud 6. Midiendo, compruebe el resultado.



b) Construya un segmento cuya longitud sea rs.

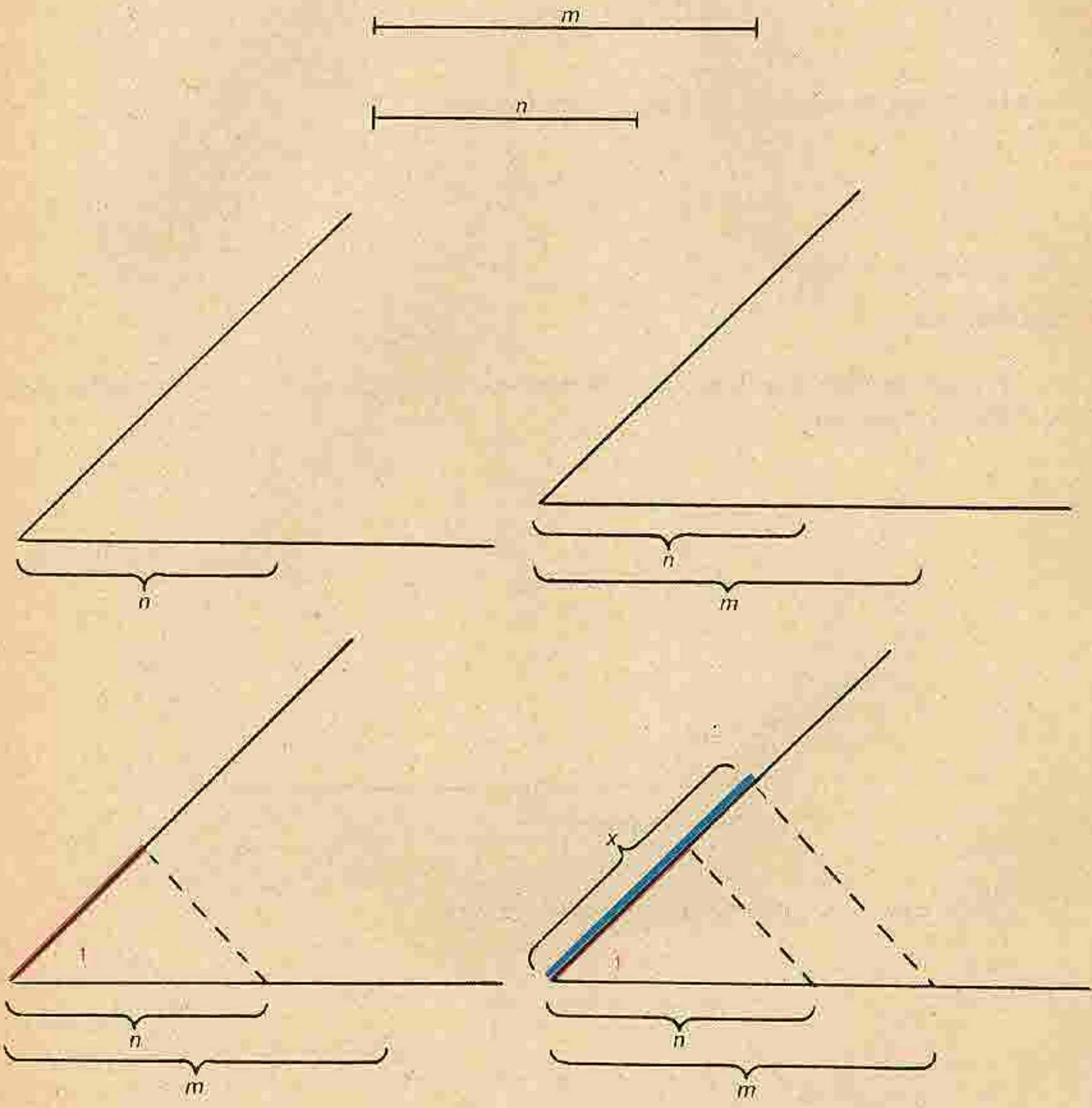


c) Construya un segmento de longitud r^2.



Ejercicio 12. En la siguiente secuencia de dibujos, a partir de dos segmentos de longitud m y n se construye un segmento de longitud x, marcado en azul. ¿Puede usted decir qué relación tiene la medida de este segmento con las medidas m y n?

Sugerencia: Utilice el teorema de Tales.



Ejercicio 13.

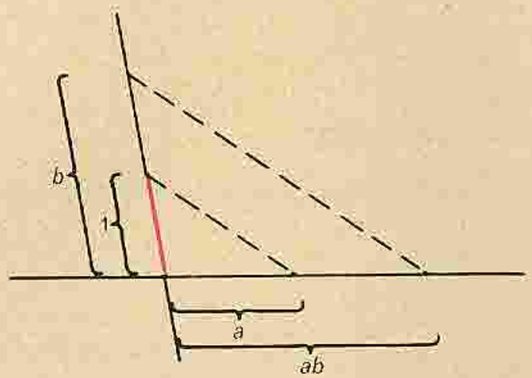
a) Construya un segmento cuya longitud sea el cociente $\frac{p}{q}$.

b) Construya un segmento cuya longitud sea $\frac{1}{r}$.

c) Usando los datos y el resultado del inciso b) construya un segmento cuya longitud sea $r \cdot \frac{1}{r}$

Una ilustración de la multiplicación de números positivos y negativos.

Acabamos de ver, en el párrafo anterior, cómo se construye un segmento de longitud *ab*, a partir de un segmento de longitud *a* y otro de longitud *b*.

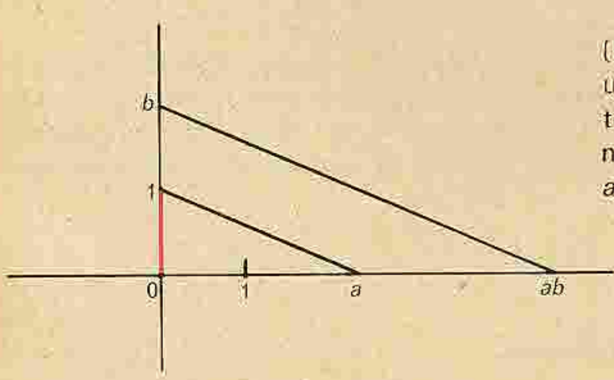


Veremos ahora cómo, interpretándola convenientemente, esta construcción puede ilustrar la multiplicación de números positivos y negativos. Más precisamente, con esta construcción puede ilustrarse que:

El producto de dos números positivos es positivo;
el producto de un número positivo por uno negativo es negativo y
el producto de dos números negativos es positivo.

En efecto, podemos considerar que las rectas que trazamos son ejes de coordenadas, y que tomamos los factores *a* y *b*, uno en cada eje.

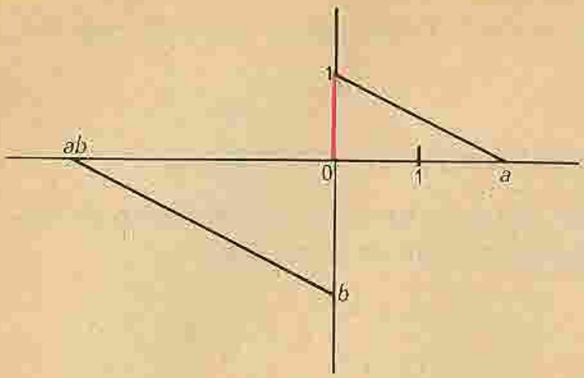
1. Si *a* y *b* son positivos, obtenemos la siguiente figura:



(Unimos 1 con *a* y desde *b* trazamos una paralela a este segmento. Su intersección con el eje de las abscisas nos da el punto cuya coordenada es *ab*)

en la que observamos que *ab* resulta positivo.

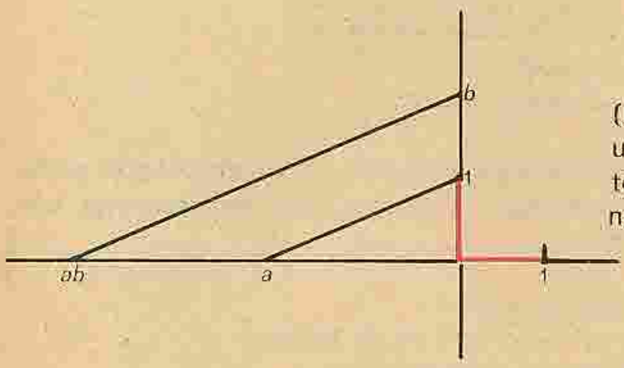
2. Si a es positivo y b es negativo, la construcción queda así:



(Unimos 1 con a y desde b trazamos una paralela a este segmento. Su intersección con el eje de las abscisas nos da el punto cuya coordenada es ab)

Aquí observamos que ab es negativo.

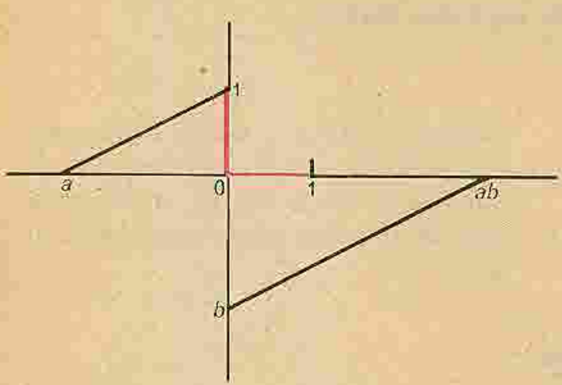
3. Si a es negativo y b es positivo, obtenemos la figura siguiente:



(Unimos 1 con a y desde b trazamos una paralela a este segmento. Su intersección con el eje de las abscisas nos da el punto cuya coordenada es ab)

Aquí observamos que ab es negativo.

4. Si a y b son ambos negativos, la construcción resulta así:

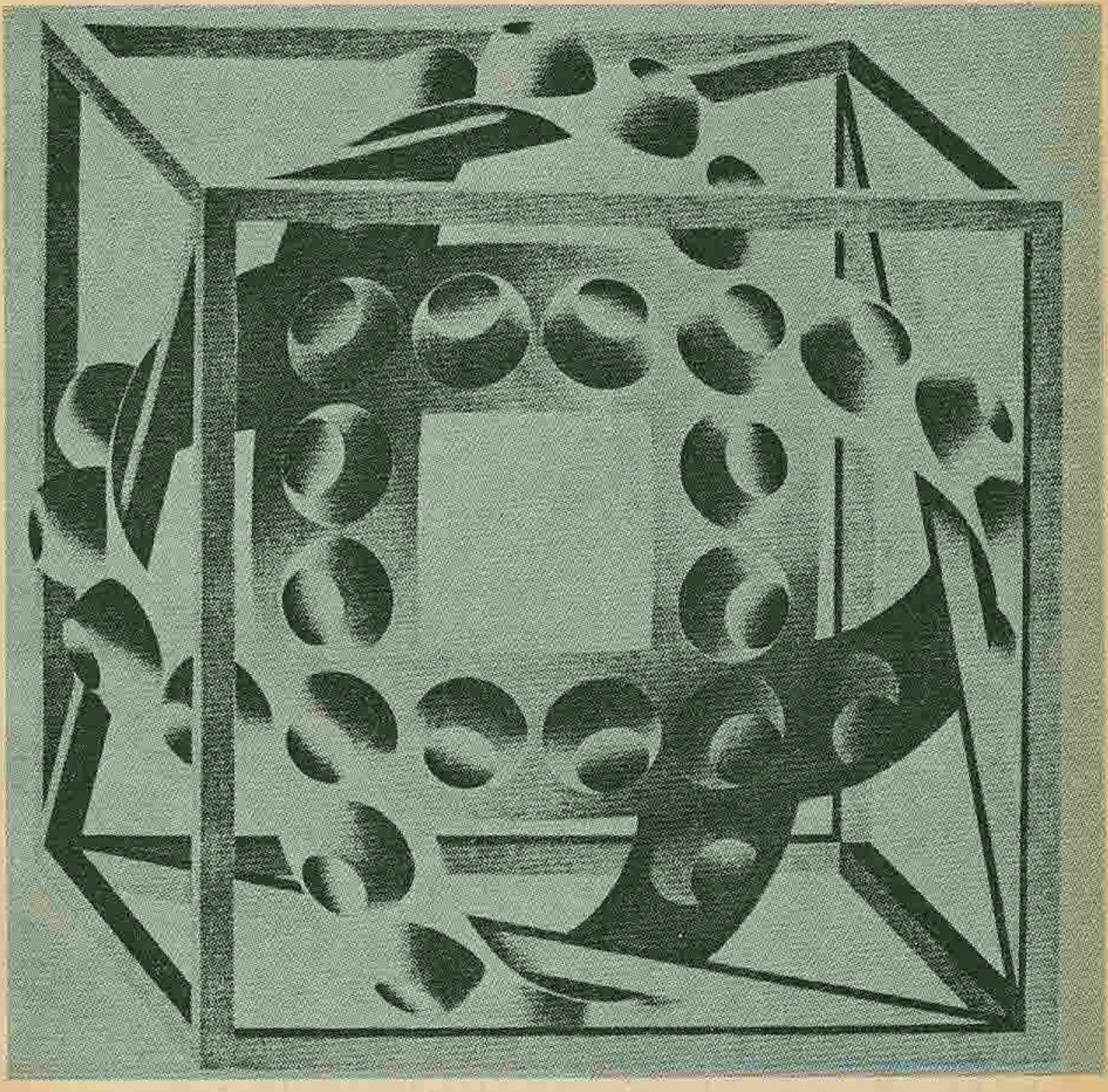


(Unimos 1 con a y desde b trazamos una paralela a este segmento. Su intersección con el eje de las abscisas nos da el punto cuya coordenada es ab).

Y observamos que el producto ab es positivo.

III

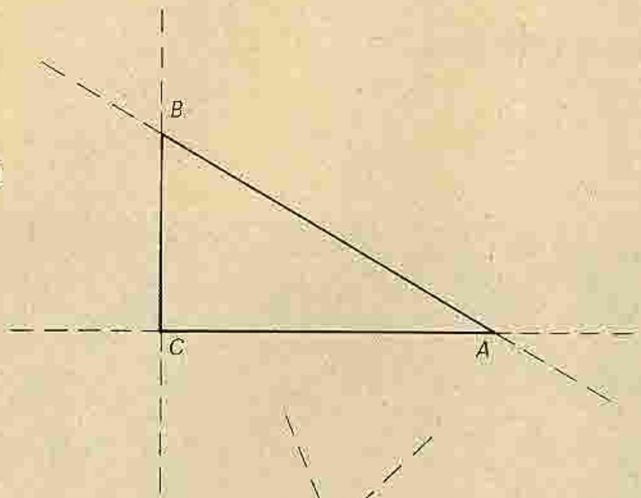
Polígonos regulares



1. Suma de las medidas de los ángulos de un triángulo.

Ejercicio 1. En cada uno de los incisos mida los ángulos del triángulo y encuentre su suma.

a)



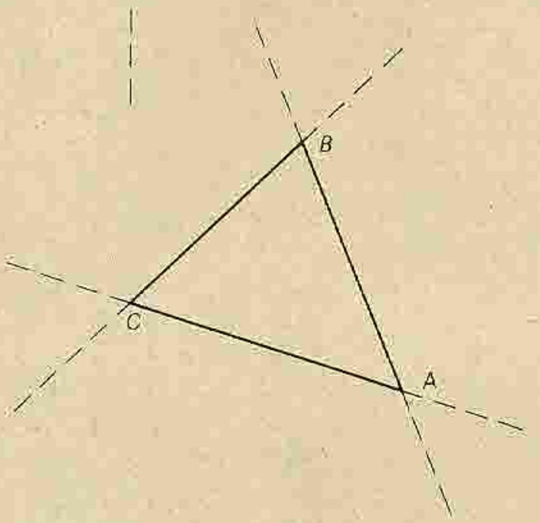
$\measuredangle A = 30°$

$\measuredangle B =$

$\measuredangle C =$

$\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C =$

b)



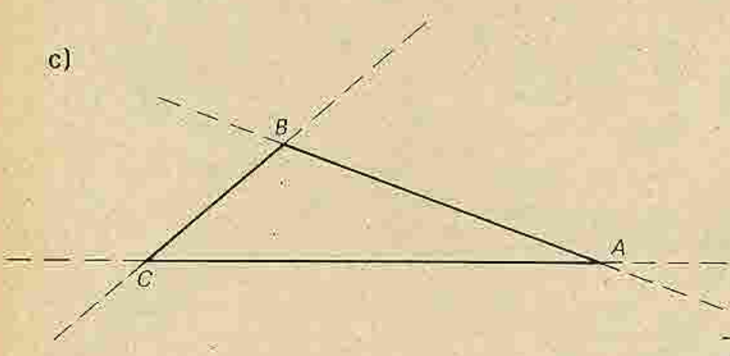
$\measuredangle A =$

$\measuredangle B =$

$\measuredangle C =$

$\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C =$

c)



$\measuredangle A =$

$\measuredangle B =$

$\measuredangle C =$

$\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C =$

En este ejercicio observamos que la suma de las medidas de los ángulos de un triángulo es 180°. (Posiblemente usted no haya obtenido, en algún caso, exactamente 180°, pero esto se debe a errores de medición).

Este es un hecho que vale en todos los triángulos. Es decir, la suma de las medidas de los ángulos de un triángulo es 180°.

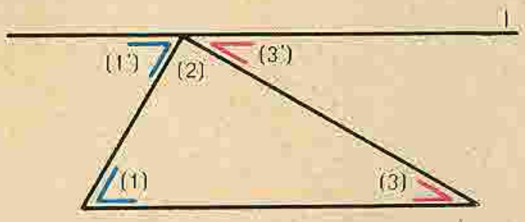
Podríamos simplemente aceptar este resultado como hemos hecho algunas veces con otros. Sin embargo, veremos ahora que este resultado lo podemos deducir de otros ya aceptados. En otras palabras, podemos *demostrar* esta propiedad.

Enunciémosla nuevamente:

En cualquier triángulo, $\triangle ABC$, la suma de las medidas de sus tres ángulos es 180°. O sea,

$$\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C = 180°$$

Demostración. Consideremos una recta l que pase por el punto C y que sea paralela a AB como se muestra en la siguiente figura:



Tenemos que

$$\measuredangle(1') + \measuredangle(2) + \measuredangle(3') = 180°.$$

En esta expresión sustituimos $\measuredangle(1')$ por $\measuredangle(1)$ y $\measuredangle(3')$ por $\measuredangle(3)$ lo cual se puede hacer porque $\measuredangle(1) = \measuredangle(1')$ y $\measuredangle(3) = \measuredangle(3')$, pues son alternos internos. Obtenemos entonces

$$\angle(1) + \angle(2) + \angle(3) = 180°$$

que es lo que se quería demostrar.

De este resultado podemos deducir otros. Por ejemplo el siguiente:

Si en dos triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ sabemos que $\angle A \cong \angle A'$ y $\angle B \cong \angle B'$, entonces los triángulos son semejantes.

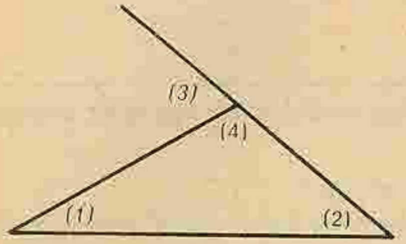
Demostración. En efecto, sabemos que

$$\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C = 180°$$
$$\measuredangle A' + \measuredangle B' + \measuredangle C' = 180°$$

y además $\measuredangle A = \measuredangle A'$ y $\measuredangle B = \measuredangle B'$. Por lo tanto, forzosamente $\measuredangle C = \measuredangle C'$, lo cual quiere decir que $\angle C \cong \angle C'$.

Así pues, para ver que dos triángulos son semejantes, basta ver que dos ángulos de uno de ellos son respectivamente congruentes a dos de los ángulos del segundo.

Ejercicio 2. En la siguiente figura $\measuredangle(1) = 30°$, $\measuredangle(2) = 40°$ ¿Cuánto mide el $\angle(3)$?

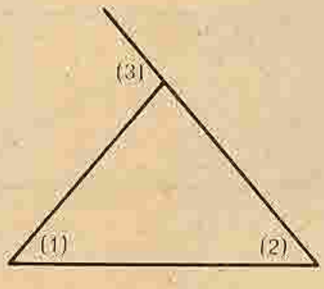


Sugerencia. Use los siguientes hechos:

$\measuredangle(3) + \measuredangle(4) = 180°$

$\measuredangle(1) + \measuredangle(2) + \measuredangle(4) = 180°$

Ejercicio 3. Utilizando la idea del ejercicio anterior, demuestre que en un triángulo cualquiera $\angle(1) + \angle(2) = \angle(3)$. (Vea la siguiente figura).



Recordemos que un triángulo rectángulo es un triángulo que tiene un ángulo de 90°.

Ejercicio 4.

a) Un triángulo no puede tener dos ángulos rectos. ¿Por qué?

b) En un triángulo rectángulo, la suma de las medidas de los dos ángulos no rectos es 90°.

(Decimos que un ángulo es agudo si mide menos de 90°).

c) Los ángulos no rectos de un triángulo rectángulo son agudos. ¿Por qué?

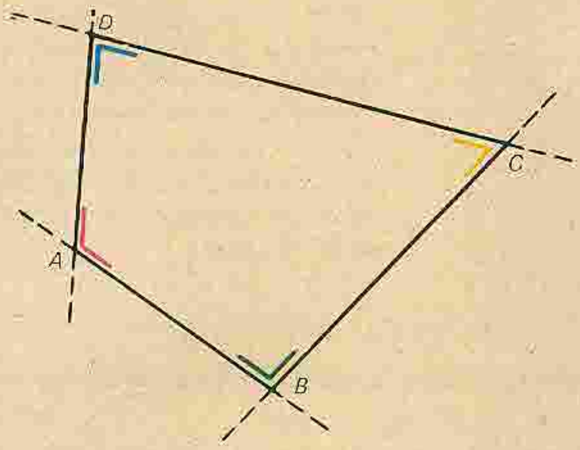
Se dice que un ángulo es obtuso si mide más de 90° y que un triángulo es obtusángulo si tiene un ángulo obtuso.

Ejercicio 5. ¿Por qué en un triángulo obtusángulo hay solamente un ángulo obtuso y los otros dos son agudos?

2. Suma de las medidas de los águlos de un polígono.

Ejercicio 6. Mida los ángulos de los siguientes cuadriláteros y encuentre su suma.

a)



$\measuredangle A =$

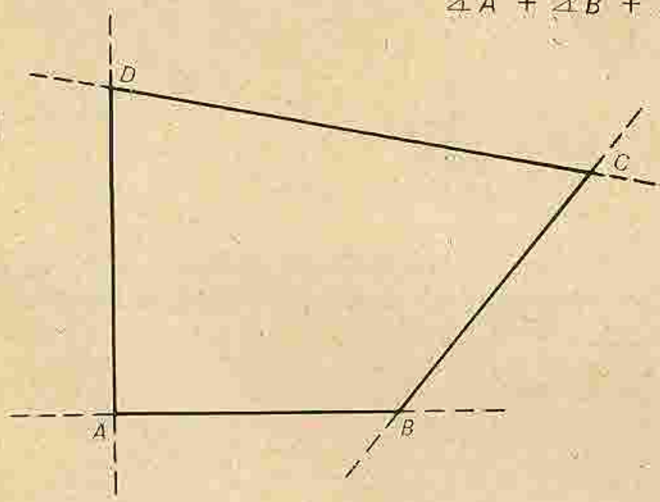
$\measuredangle B =$

$\measuredangle C =$

$\measuredangle D =$

$\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C + \measuredangle D =$

b)



$\measuredangle A =$

$\measuredangle B =$

$\measuredangle C =$

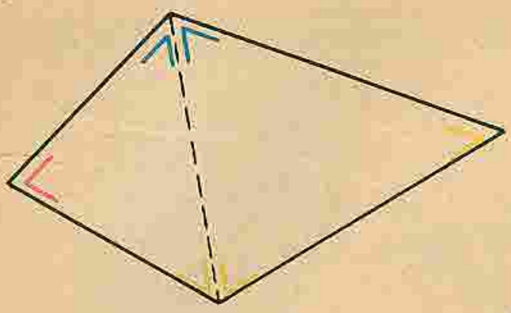
$\measuredangle D =$

$\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C + \measuredangle D =$

Salvo errores de medición usted habrá obtenido, en ambos casos, que la suma es 360°.

¿Podríamos demostrar que no solamente en los dos cuadriláteros del ejercicio anterior, sino que en cualquier cuadrilátero la suma de las medidas de sus ángulos es 360°?

Es muy fácil. Consideremos un cuadrilátero cualquiera.



Al unir dos vértices opuestos queda triangulado.

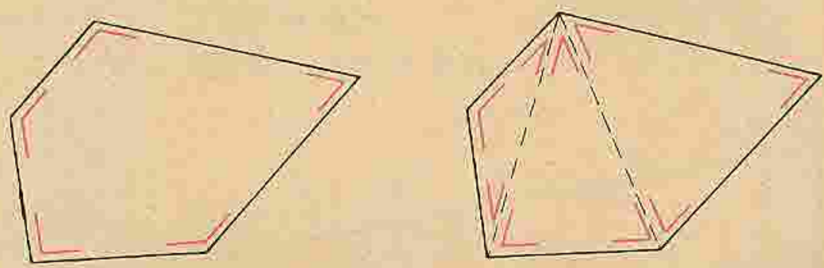
Observemos que la suma de las medidas de los cuatro ángulos del cuadrilátero es igual a la suma de los seis ángulos obtenidos, tres de cada triángulo. Ahora bien, como la suma de las medidas de los ángulos de un triángulo es 180°, resulta que en total se obtiene $180° + 180° = 2 \times 180° = 360°$.

Es decir, hemos demostrado que

La suma de las medidas de los 4 ángulos de un cuadrilátero es

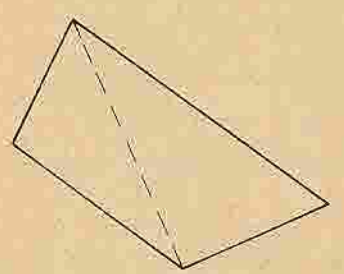
$2 \times 180° = 360°$

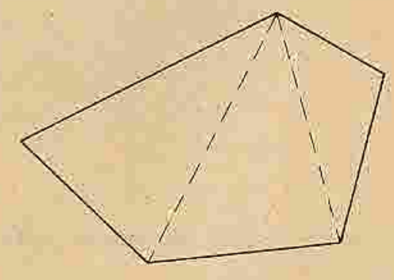
El razonamiento que hemos hecho para cuadriláteros lo podemos hacer para polígonos convexos de cualquier número de lados. Por ejemplo, consideremos un pentágono. Lo triangulamos:



La suma de las medidas de los ángulos del pentágono es igual a la suma de las medidas de todos los ángulos que aparecen en la triangulación. Como hay 3 triángulos, dicha suma es $3 \times 180°$.

Para el caso general, observemos que:



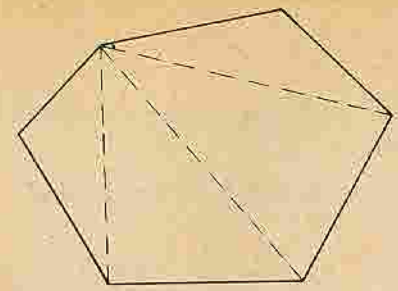


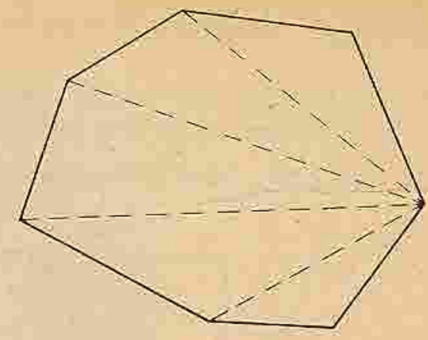
En un polígono de $\boxed{4}$ lados se forman $\boxed{2}$ triángulos. La suma de las medidas de sus ángulos es

$\boxed{2 \times 180°}$

En un polígono de $\boxed{5}$ lados se forman $\boxed{3}$ triángulos. La suma de las medidas de sus ángulos es

$\boxed{3 \times 180°}$





En un polígono de $\boxed{6}$ lados se forman $\boxed{4}$ triángulos. La suma de las medidas de sus ángulos es

$\boxed{4 \times 180°}$

En un polígono de $\boxed{7}$ lados se forman $\boxed{5}$ triángulos. La suma de las medidas de sus ángulos es

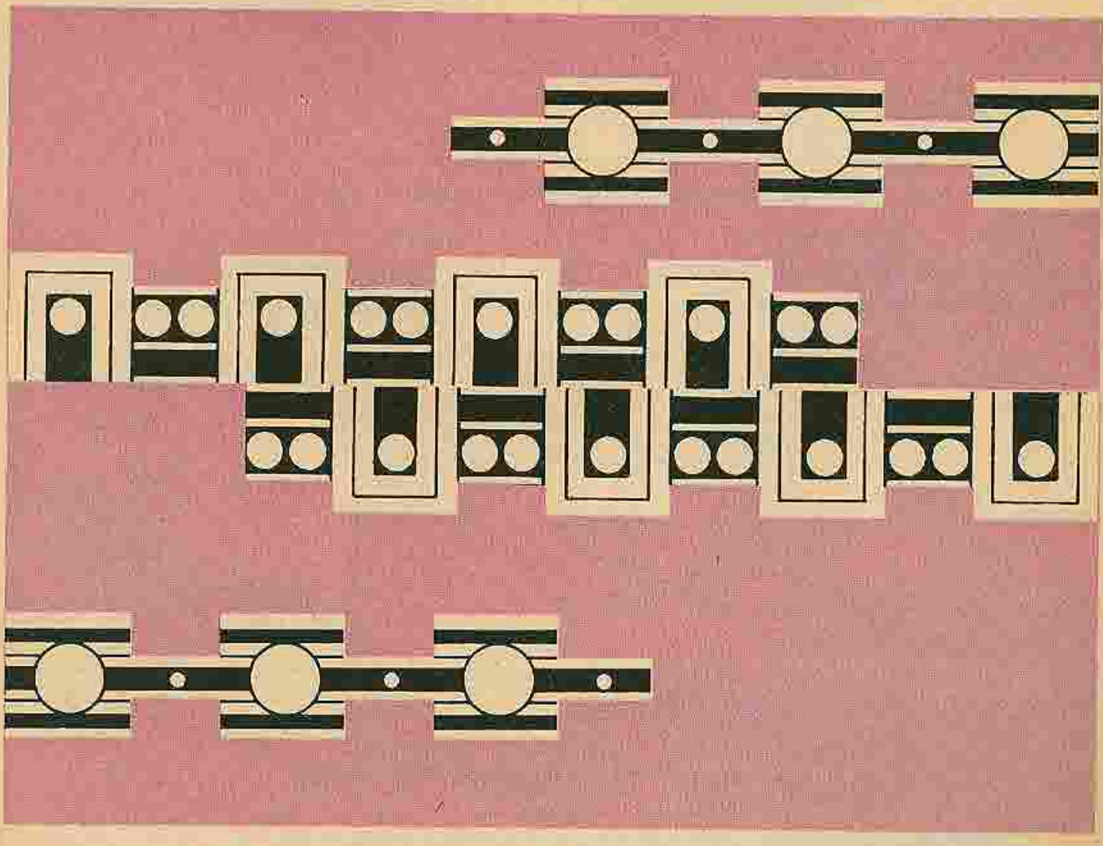
$\boxed{5 \times 180°}$

En general,

En un polígono de n lados, la suma de las medidas de sus ángulos es

$(n - 2)\ 180°$

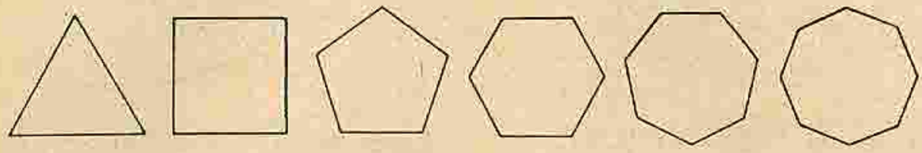
Ejercicio 7. ¿Cuánto suman las medidas de los ángulos de un polígono que tiene 12 lados? ¿Y de un polígono que tiene 17 lados?



3. Polígonos regulares. Medida de sus ángulos.

Un polígono se dice que es regular si todos sus lados son congruentes entre sí y también todos sus ángulos son congruentes entre sí.

Los siguientes dibujos ilustran polígonos regulares de 3, 4, 5, 6, 7 y 8 lados.



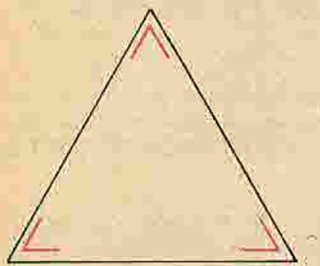
Polígonos regulares

Un triángulo regular se llama equilátero. Un cuadrilátero regular se llama cuadrado.

Lo que vimos en el párrafo anterior nos permite calcular las medidas de los ángulos de los polígonos regulares.

Empecemos con el triángulo equilátero. Sabemos que la suma de las medidas de sus 3 ángulos es 180°. Como todos ellos miden lo mismo (porque son congruentes), cada uno de ellos medirá

$$\frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$$

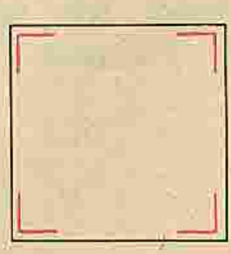


$$\frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$$

Los ángulos de un triángulo equilátero miden 60°

En un cuadrado, sabemos que la suma de las medidas de sus 4 ángulos es $2 \times 180^\circ = 360^\circ$. Como todos miden lo mismo, cada uno de ellos medirá

$$\frac{360^\circ}{4} = 90^\circ;$$

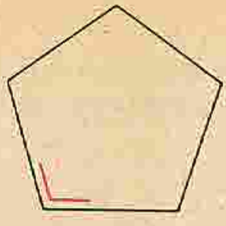


$$\frac{2 \times 180^\circ}{4} = \boxed{90^\circ}$$

es decir, sus cuatro ángulos son rectos.

Los ángulos de un cuadrado son rectos.

Analicemos ahora el pentágono regular. Sabemos que la suma de las medidas de sus 5 ángulos es $3 \times 180°$. Como todos miden lo mismo, cada uno de ellos mide

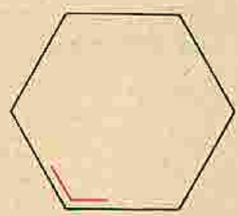


$$\frac{3 \times 180°}{5} = 3 \times 36° = 108°.$$

$$\frac{3 \times 180°}{5} = \boxed{108°}$$

Los ángulos de los exágonos regulares medirán

$$\frac{4 \times 180°}{6} = 4 \times 30° = 120°$$



$$\frac{4 \times 180°}{6} = \boxed{120°}$$

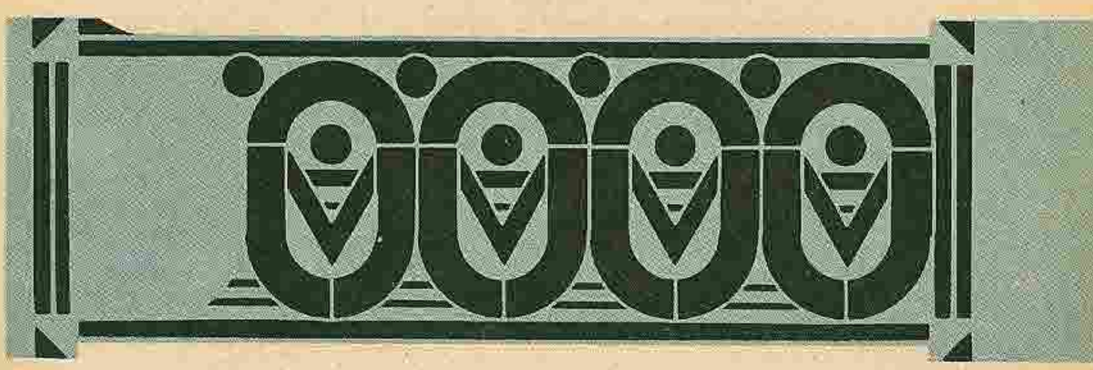
Ejercicio 8. En forma análoga, calcule la medida de los ángulos de

a) un eptágono regular;

b) un octágono regular;

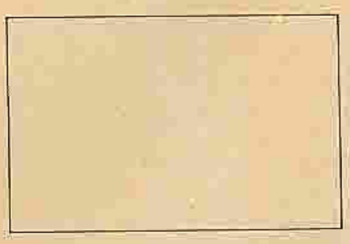
c) un polígono regular de 12 lados.

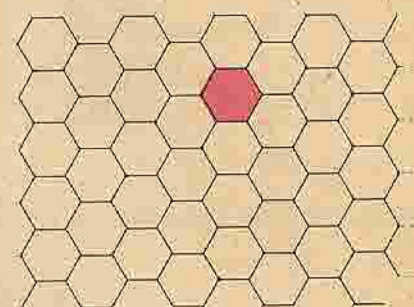
Ejercicio 9. Encuentre una fórmula para calcular la medida de los ángulos de un polígono regular de n lados.



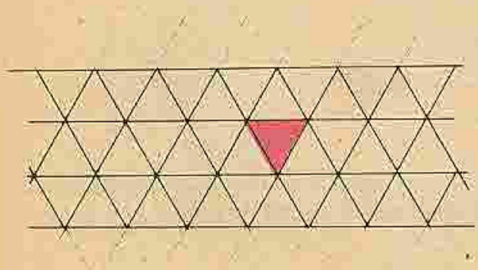
4. Una aplicación.

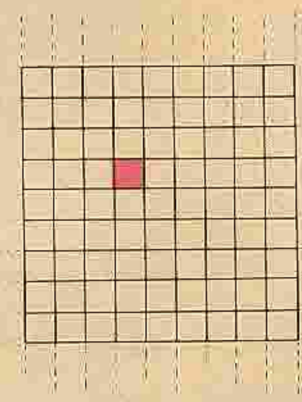
¿Ha observado usted alguna vez un panal de abejas? Esta hermosa obra de la naturaleza nos muestra cómo, con exágonos regulares, podemos tapizar el plano.





¿Podríamos hacer lo mismo con otros polígonos regulares? Desde luego que sí con triángulos equiláteros y con cuadrados:





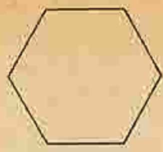
¿Y con otros polígonos regulares? Antes de contestar esta pregunta hagamos un ejercicio.

Ejercicio 10.

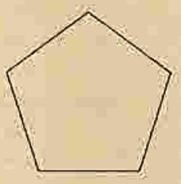
a) Recorte de una hoja de papel grueso o cartón unos 10 o 12 triángulos equiláteros, como el de la derecha, y vea cómo puede ir tapizando el plano con ellos (sin dejar "huecos" y sin encimar los triángulos).

b) Haga lo mismo con cuadrados.

c) Lo mismo con exágonos regulares como el que se muestra.



d) Trate ahora de hacer lo mismo con pentágonos regulares como el de la derecha. ¿Qué ocurre?



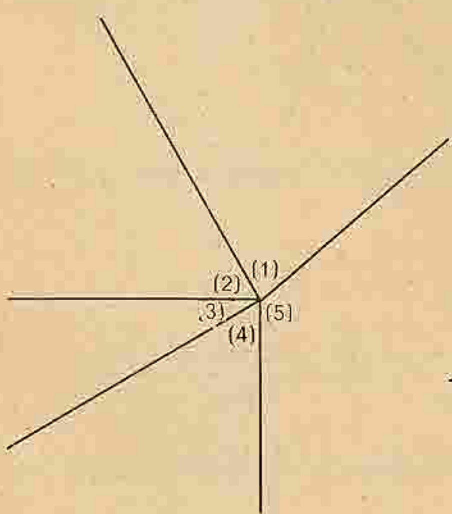
e) Intente hacer lo mismo con eptágonos regulares.

f) Y con octágonos regulares.

Al resolver este ejercicio habrá usted observado que solamente se puede hacer con polígonos regulares de 3, 4 y 6 lados (triángulos equiláteros, cuadrados y exágonos regulares). Con los demás polígonos regulares no podemos tapizar el plano.

¿Por qué ocurre esto? Para contestar esta pregunta conviene primero demostrar otro resultado.

Ejercicio 11. En cada inciso mida con un transportador los ángulos que se indican y encuentre la suma de dichas medidas.



$\measuredangle (1) =$

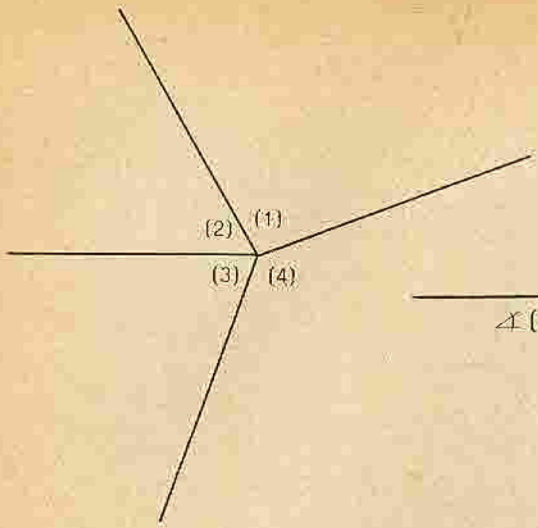
$\measuredangle (2) =$

$\measuredangle (3) =$

$\measuredangle (4) =$

$\measuredangle (5) =$

$\measuredangle (1) + \measuredangle (2) + \measuredangle (3) \measuredangle (4) + \measuredangle (5) =$



$\measuredangle(1) =$

$\measuredangle(2) =$

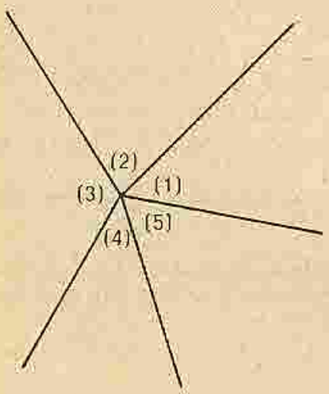
$\measuredangle(3) =$

$\measuredangle(4) =$

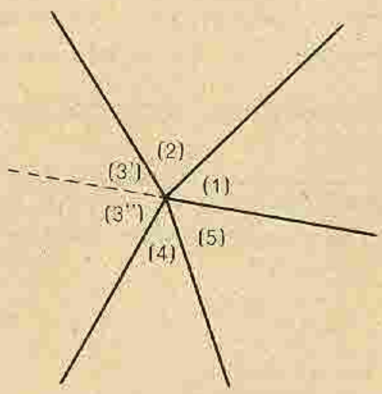
$\measuredangle(1) + \measuredangle(2) + \measuredangle(3) + \measuredangle(4) =$

En ambos casos, salvo errores de medición, la suma es 360°.

Este resultado podemos demostrarlo fácilmente. En efecto, supongamos que nos dan varios ángulos con el vértice común y queremos encontrar la suma de sus medidas.



Podemos nosotros trazar un rayo adicional como se muestra en la siguiente figura y encontramos una situación así:



El ángulo $\angle(3)$ ha quedado subdividido en $\angle(3')$ y $\angle(3'')$. Tenemos que $\measuredangle(3) = \measuredangle(3') + \measuredangle(3'')$.

Por lo tanto,

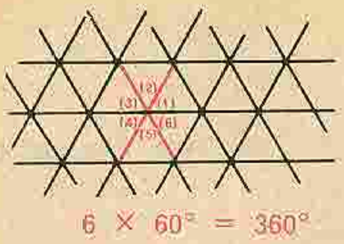
$$\measuredangle(1) + \measuredangle(2) + \measuredangle(3) + \measuredangle(4) + \measuredangle(5) =$$

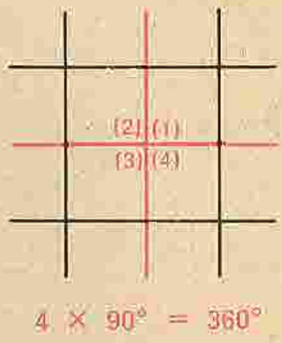
$$= \underbrace{\measuredangle(1) + \measuredangle(2) + \measuredangle(3')}_{180°} + \underbrace{\measuredangle(3'') + \angle(4) + \angle(5)}_{180°}$$

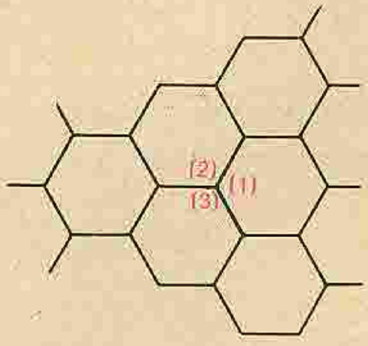
(pues la medida de un ángulo llano es 180°). Por lo tanto la suma mencionada es 180° + 180° = 360°.

Ahora bien, al tapizar con polígonos el plano, en cada vértice aparecen varios ángulos como en el ejercicio anterior.

Veamos esto en los tres casos:







Según lo anterior, la suma de las medidas de estos ángulos debe ser, en cada caso, 360°. Comprobemos esto en los tres casos que tenemos.

1. *Triángulos equiláteros*. Sabemos que cada ángulo de un triángulo equilátero mide 60°. Si juntamos 6 triángulos equiláteros, la suma de los ángulos será $6 \times 60° = 360°$

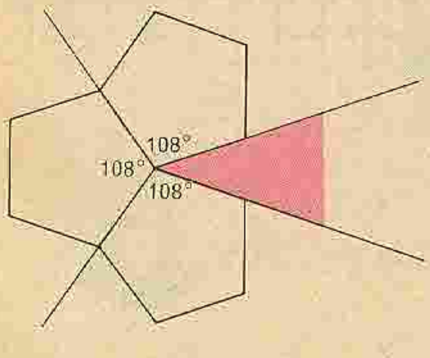
2. *Cuadrados*. Cada ángulo de un cuadrado mide 90°. Al juntar 4 cuadrados, la suma de los ángulos será $4 \times 90° = 360°$.

3. *Exágonos regulares*. Los ángulos de un exágono regular miden 120°. Luego, podemos juntar en un vértice 3 exágonos regulares, porque $3 \times 120 = 360°$.

¿Qué ocurre con los demás polígonos regulares?

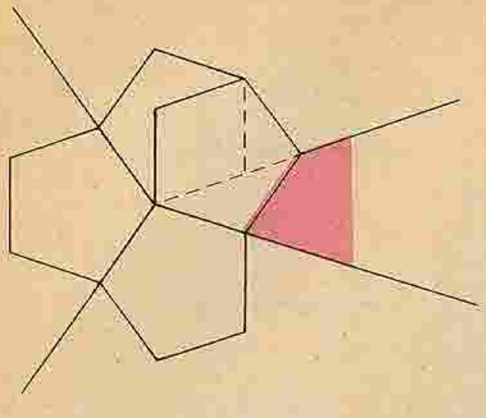
Examinemos el caso de pentágonos regulares. Sabemos que cada ángulo de un pentágono regular mide 108°.

Ahora bien, si juntamos 3 pentágonos regulares, la suma de los ángulos en el vértice será de $3 \times 108° = 324° < 360°$



$360° - 324° = 36°$ (sobra)

Por otro lado, si juntamos 4 pentágonos regulares en un vértice, éstos se traslaparán pues $4 \times 108° = 432° > 360°$



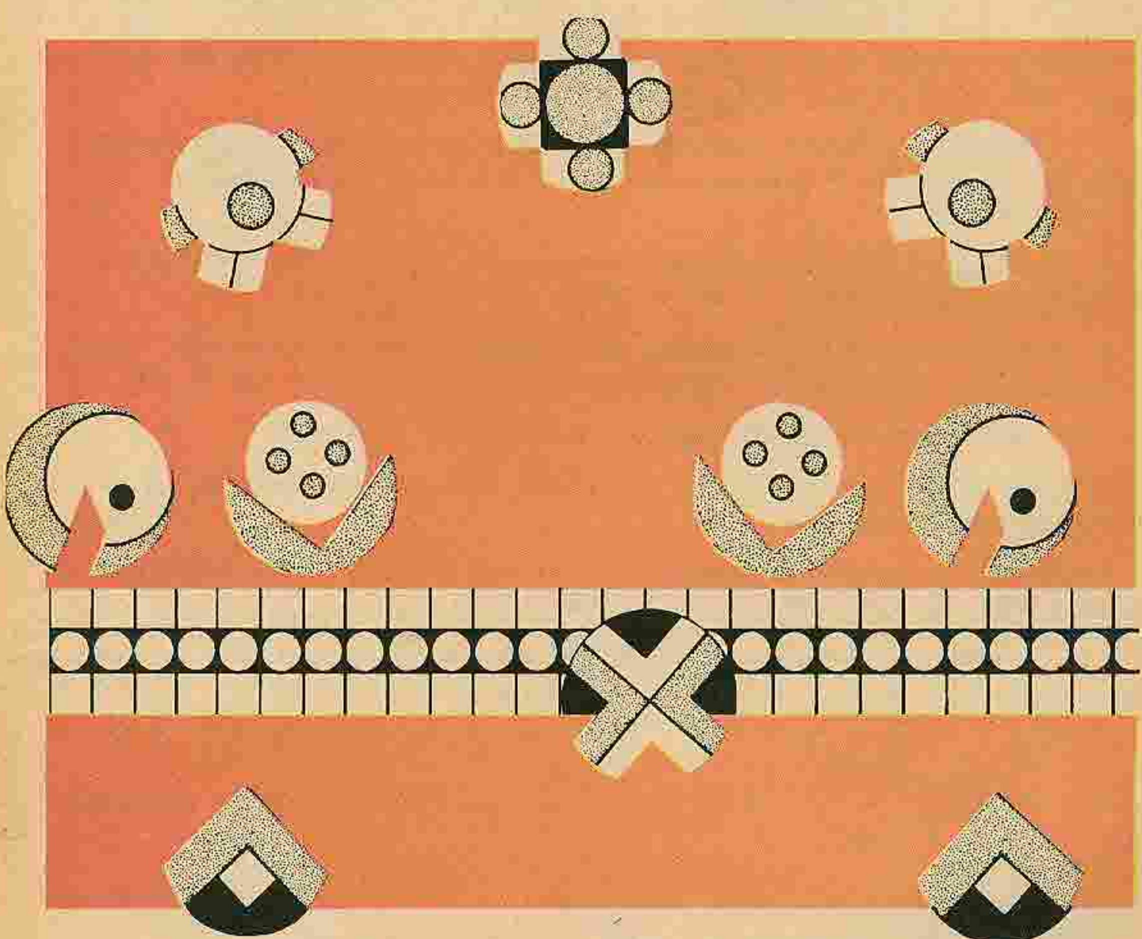
$432° - 360° = 72°$ (se traslapan)

Esto prueba que con pentágonos regulares no podemos tapizar el plano.

Ejercicio 12. Haga un análisis como el anterior para:

a) eptágonos regulares.

b) octágonos regulares.



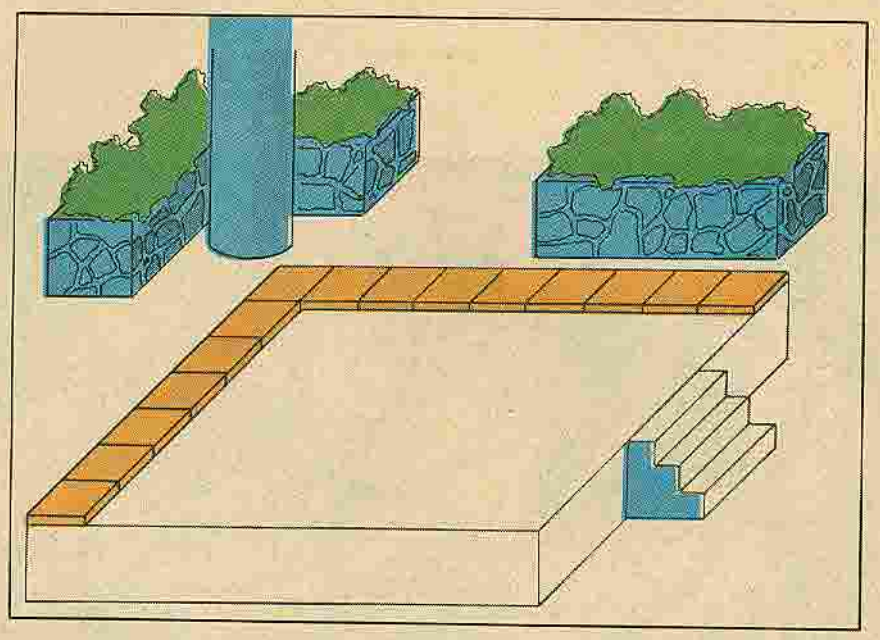
IV

Area

1. Area de regiones planas.

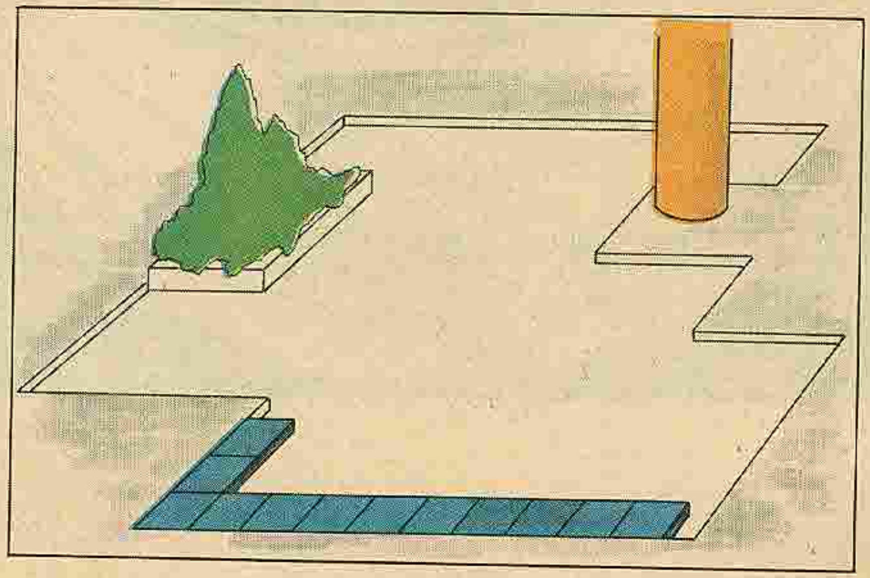
Desde la época de los asirios ha existido la costumbre de cubrir con mosaicos cuadrados los pisos de patios, estancias, etcétera.

Seguramente en la mayoría de los casos, antes de cubrir con mosaicos un piso, el albañil podía decir cuántos mosaicos iba a emplear. Por ejemplo, si se tratara de colocar mosaicos en el piso que se ilustra a continuación,



el albañil diría sin ninguna duda que para cubrir completamente el piso, son necesarios 63 mosaicos. (Observe que a lo largo del piso caben 9 mosaicos y a lo ancho caben 7).

Sin embargo, en otros casos el albañil no encontraría tan fácil la situación. Por ejemplo, si se tratara de cubrir el piso ilustrado a continuación,



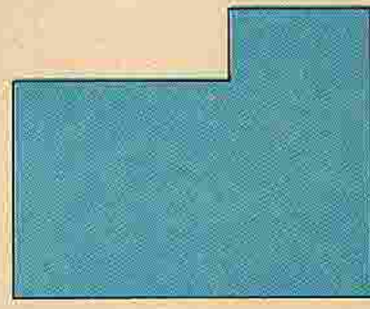
el albañil tendría más dificultad para decir el número de mosaicos con los cuales se cubre tal piso pues, según podemos observar, hay necesidad de usar fracciones de mosaico.

De todas maneras, hay un número de mosaicos, o un número de mosaicos y fracción, con los cuales se cubre ese piso; y es muy fácil encontrarlo. Basta con aplicar las ideas que tenemos acerca del área de una región plana.

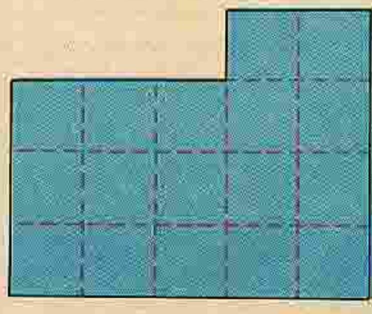
Hagamos algunas consideraciones al respecto.

A fin de darle generalidad a nuestros conceptos, ya no hablaremos, por el momento, de pisos de patios o estancias, sino de regiones planas. Tampoco hablaremos de mosaicos, sino de cuadrados que se toman como unidad de área.

A continuación mostramos una unidad de área y una región plana


unidad


Si ahora nos preguntan cuál es el área de esta región con respecto a la unidad que se muestra; para contestar tenemos que ver cuántos cuadrados congruentes con la unidad contiene el interior de la región.

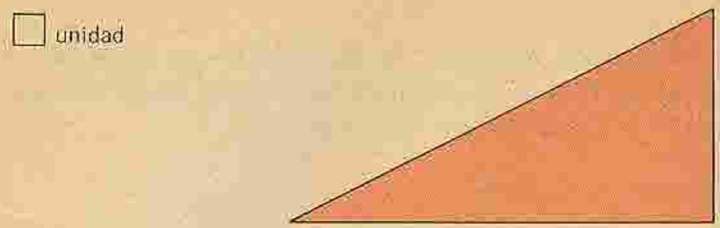

unidad


Como puede usted observar, el interior de la región contiene 17 cuadrados congruentes con la unidad. Así es que ya podemos contestar: "El área de la figura es 17 con respecto a la unidad mostrada".

En este caso, el acomodar cuadrados congruentes con la unidad en el interior de la región fue fácil. Además, con 17 de dichos cuadrados se cubrió "exactamente" la figura.

Desde luego, no siempre ocurre esto. Veamos por ejemplo el siguiente caso:

Se quiere conocer el área de esta región triangular.



Aquí el método de "acomodar" cuadrados congruentes con la unidad en el interior del triángulo, sólo nos permitirá hallar un número que se "aproxima" al área; pero no hallaremos el área exactamente.

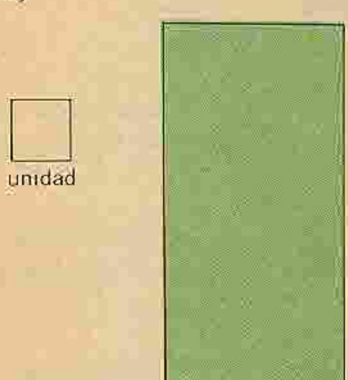
Sin embargo, el área de esta región se puede determinar con precisión. Sólo necesitamos emplear otro método que sirva para ello. Más adelante veremos este método.

Independientemente del método que se elija para conocer el área de una región plana, de antemano nosotros aceptamos que:

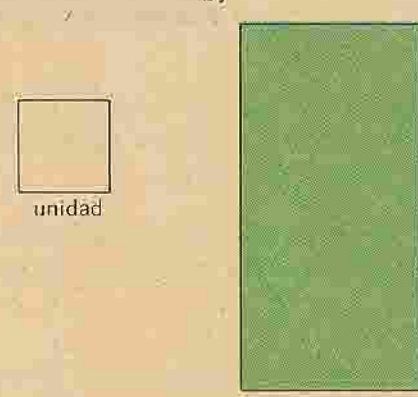
El área de una figura plana siempre es un número positivo.

Ejercicio 1. En cada inciso, diga cuál es el área de la figura, con respecto a la unidad mostrada.

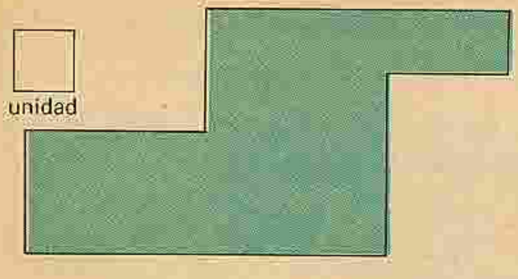
a)



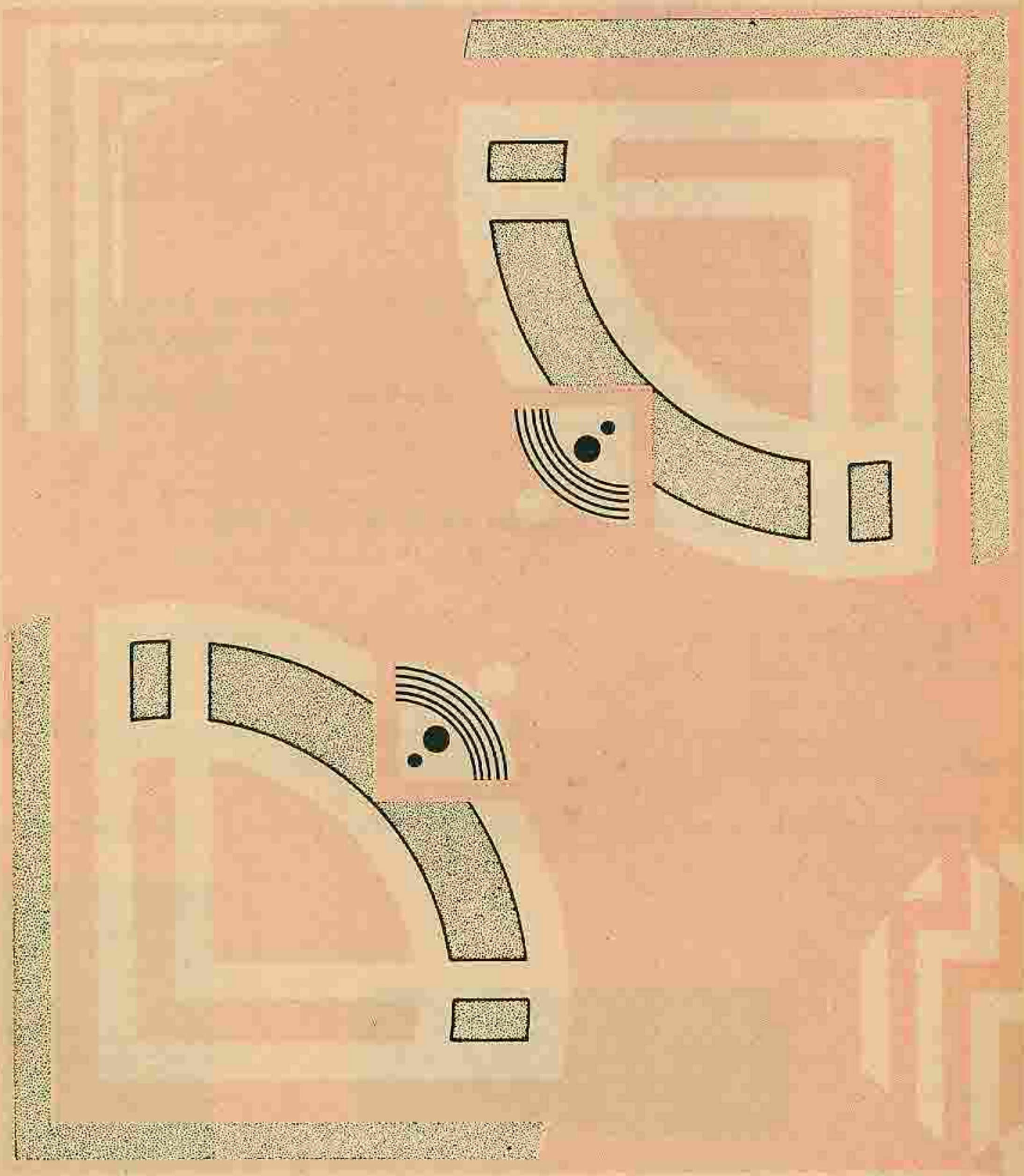
b)



c)



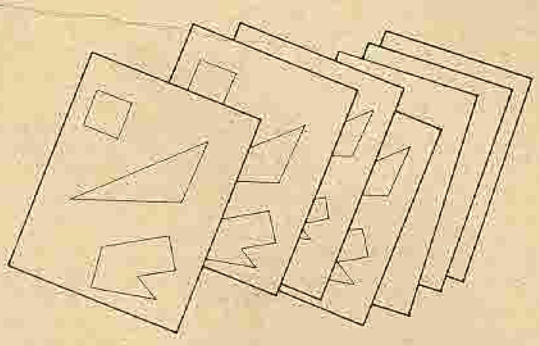
d)



2. Propiedades del área

Ya que aceptamos que el área de una figura plana es un número positivo, vemos ahora qué propiedades básicas tiene el área.

I. Un profesor que quería examinar a sus alumnos usó una fotocopiadora para sacar varias copias de una hoja en la que había dibujado algunas figuras geométricas.



En el examen pidió a los alumnos que encontraran el área de dichas figuras y, al calificar los trabajos encontró que todos dieron las mismas respuestas.

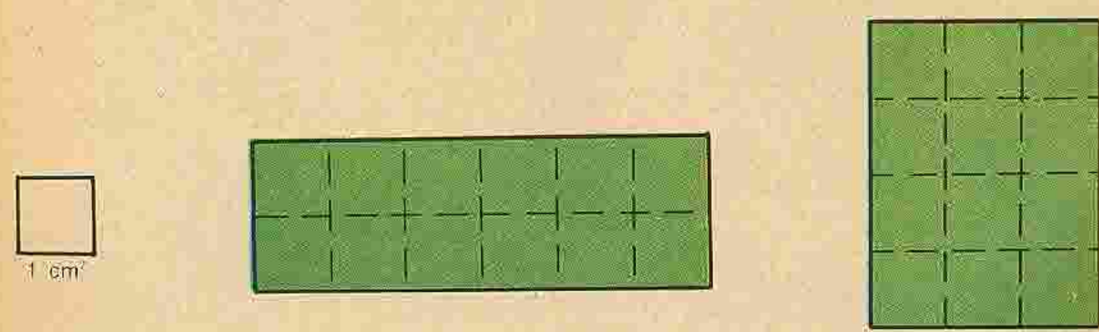
Este resultado no fue mera coincidencia. Está basado en el siguiente hecho, que aceptaremos como propiedad del área:

Dos regiones congruentes tienen la misma área.

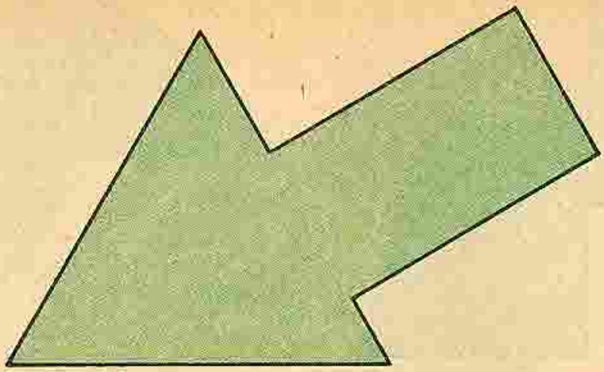
(Intuitivamente pensamos que regiones congruentes son aquellas que al "encimarse" coinciden exactamente).

Observe que el recíproco de la propiedad anterior no es cierto. Es decir, si dos regiones tienen la misma área, no necesariamente son congruentes.

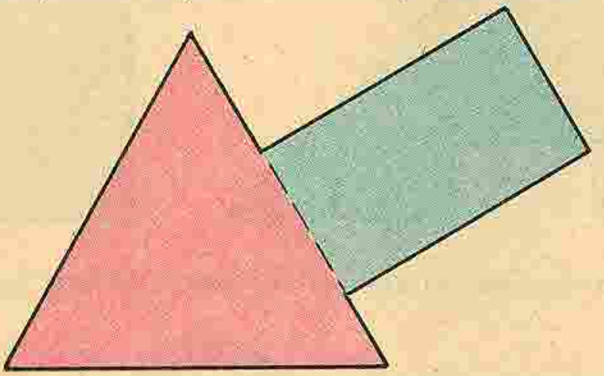
Ejemplo. Las dos figuras siguientes tienen 12 cm^2 de área y no son congruentes.



II. Si alguien quisiera obtener el área de la siguiente figura,



es muy probable que primero la partiera en la siguiente forma,

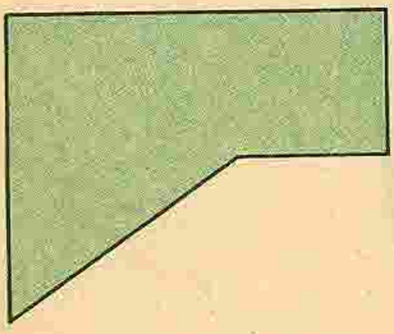


después calculará por separado el área del triángulo y del rectángulo y, posteriormente, sumara estos resultados. Esta forma de proceder tiene como fundamento la siguiente propiedad:

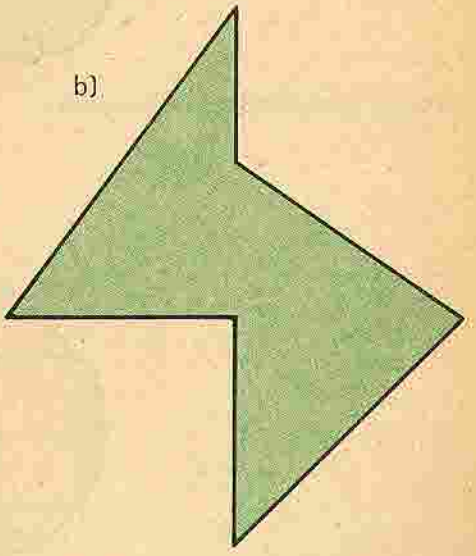
El área de la unión de dos regiones ajenas, es la suma de las áreas de estas regiones.

Ejercicio 2. Encuentre el área de cada figura. Tome como unidad el centímetro cuadrado.

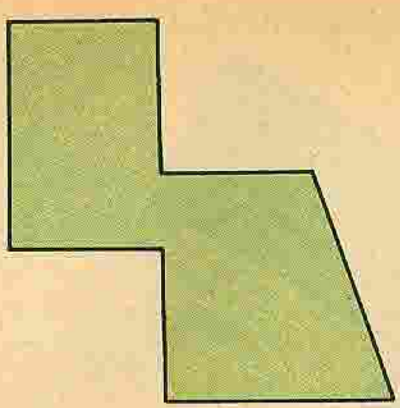
a)



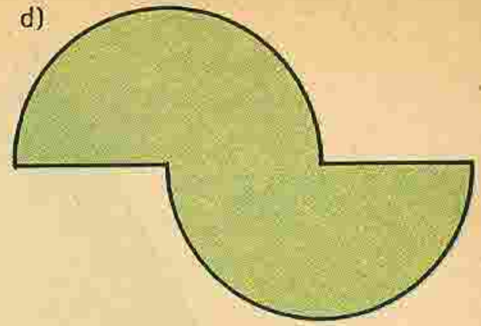
b)



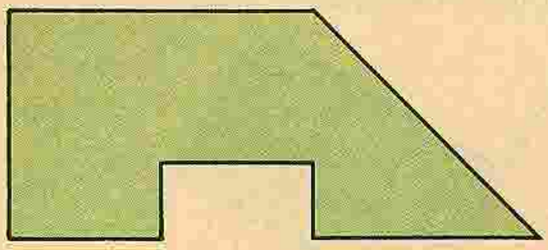
c)



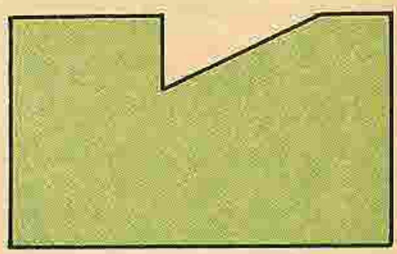
d)



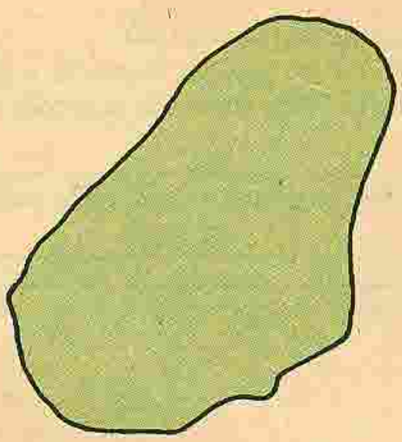
e)



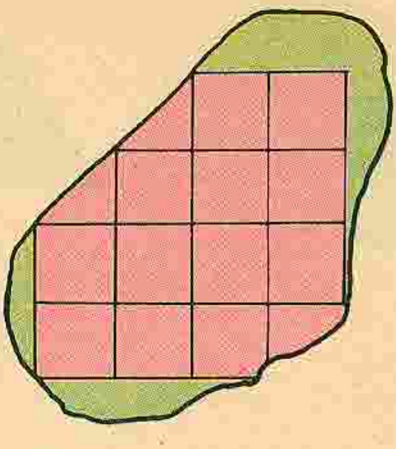
f)



III. Al tratar de encontrar el área de una región como la siguiente,



a veces procedemos como sigue:

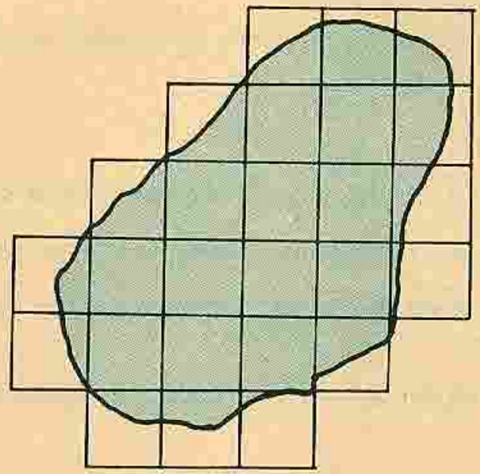


Ya que la región dada contiene a la región marcada con color rojo y como ésta tiene un área de 12 cm², decimos que el área de la región dada es mayor que 12 cm².

Esta es otra propiedad del área y la enunciamos en la siguiente forma:

El área de una región es mayor o igual que el área de cualquier región que esté contenida en ella.

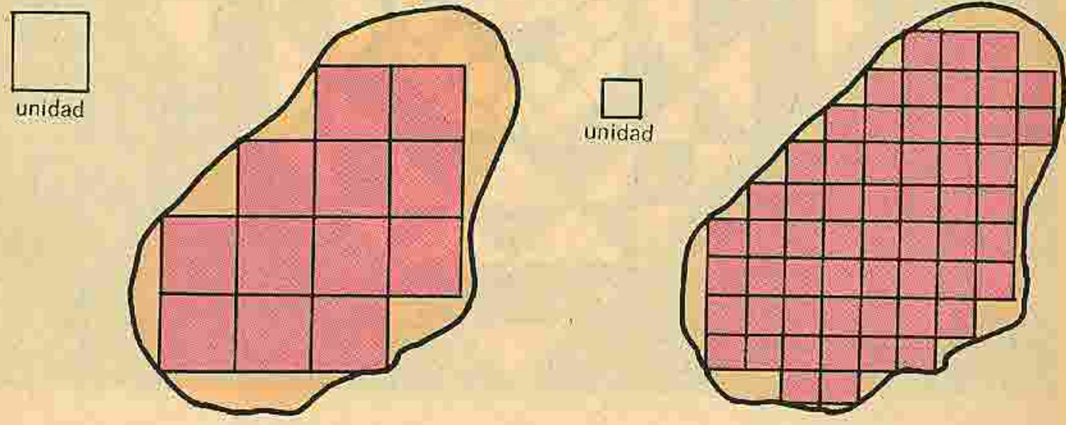
Este hecho se utiliza, a veces, para calcular aproximadamente el área de algunas regiones. Por ejemplo, si cubrimos ahora la región anterior en la siguiente forma,

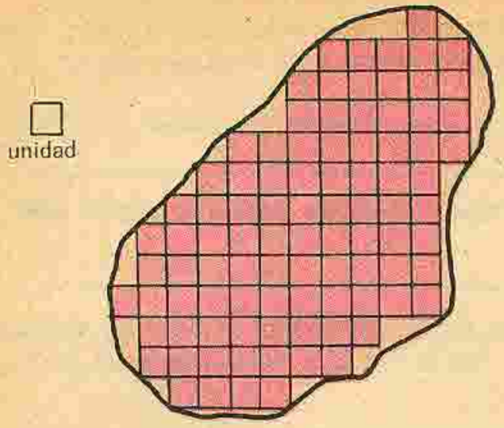


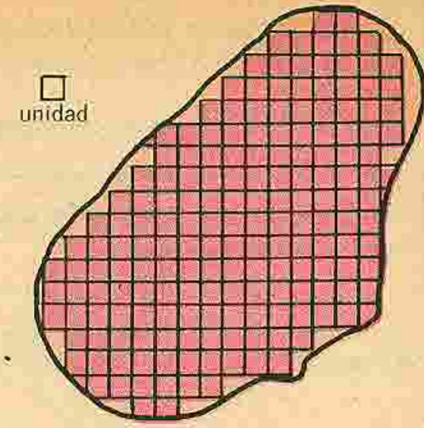
decimos que el área de la región dada es menor que 26 cm². Juntando los dos resultados podemos decir que si A es el área de la región dada,

$$12 < A < 26$$

Desde luego, podríamos obtener una mayor precisión en el cálculo del área de esa región si tomamos unidades más y más pequeñas. Observe usted las siguientes ilustraciones:







Aquí vemos cómo el área de las regiones coloreadas se aproxima cada vez más al área de la región original.

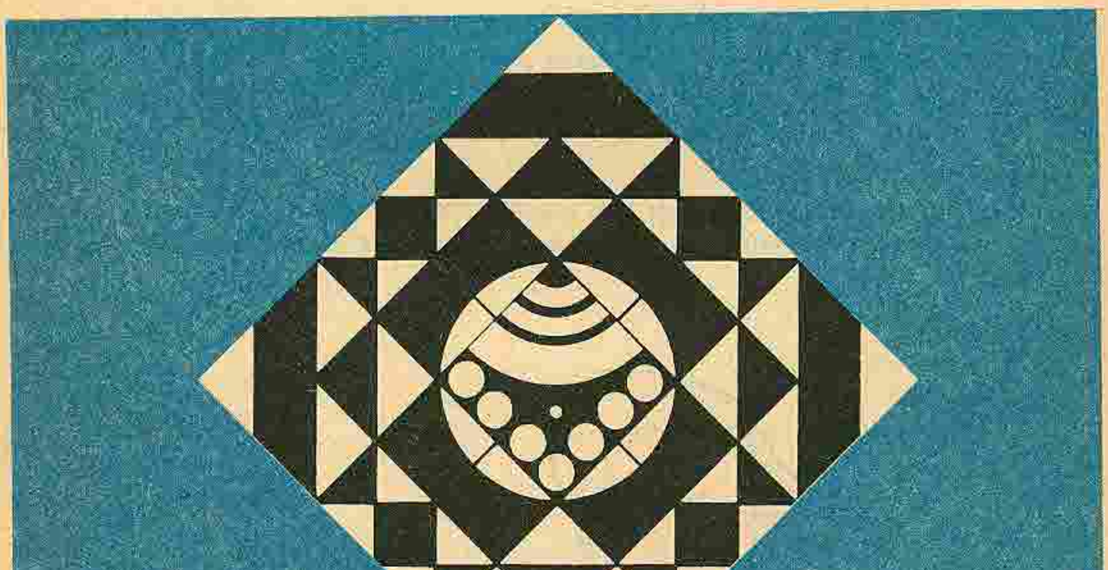
En resumen:

Las tres propiedades básicas del área de regiones planas son:

I. Dos o más regiones congruentes tienen la misma área.

II. El área de la unión de dos o más regiones ajenas, es la suma de las áreas de estas regiones.

III. El área de una región es mayor o igual que el área de cualquier región que contenga.



3. Cálculo del área de algunas regiones planas.

Para encontrar el área de una región plana, es poco práctico el método de "acomodar" cuadrados congruentes con la unidad dentro de esa región plana. Cuando usted desea calcular el área de algunas regiones planas prefiere emplear fórmulas. A continuación vamos a deducir esas fórmulas que usted conoce.

Area del rectángulo.

Antes de hacer deducciones definamos qué entenderemos por área de un rectángulo.

Consideremos una *unidad de longitud*, a la que llamaremos u, y construyamos un cuadrado cuyos lados sean congruentes con esa unidad. A este cuadrado lo llamaremos u^2 y lo tomaremos como *unidad de área.*

Ahora podemos definir:

En un rectángulo cualquiera, si a es la medida del largo, con respecto a u, y b es la medida del ancho, con respecto a u, entonces el área de ese rectángulo es el producto de $a \cdot b$, con respecto a u^2.

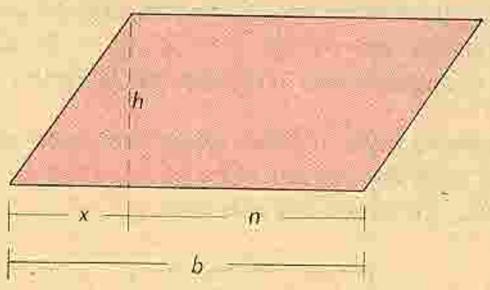
Si tomamos esta definición y usamos las propiedades del área, podemos ya deducir algunas fórmulas.

Area de un paralelogramo.

Queremos obtener el área de un paralelogramo de base b y altura h.

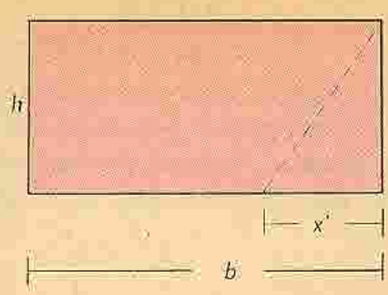
(Observe usted que la altura determina un triángulo y un trapecio en el paralelogramo).

Podemos llamar x y n a los segmentos que determinan la intersección de la altura con la base.



Ahora consideremos un rectángulo de base b y altura h y marquemos sobre su base un segmento x' congruente con x.

Luego tracemos un triángulo, como se muestra.



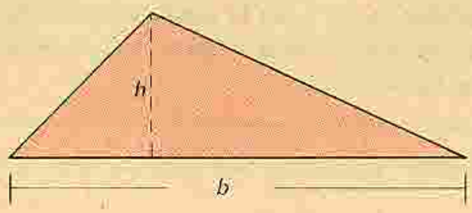
El trapecio y el triángulo así formados son respectivamente congruentes al trapecio y al triángulo que tenemos en el paralelogramo. Por lo tanto, este rectángulo y nuestro paralelogramo tienen la misma área.

Si designamos con A el área del paralelogramo, podemos afirmar que

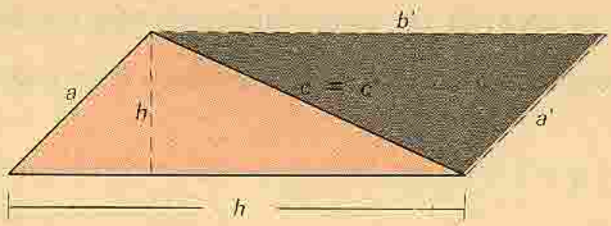
$$\boxed{A = b \times h}$$

Area de un triángulo.

Consideremos un triángulo cualquiera de base b y altura h.



Tracemos segmentos paralelos a dos de sus lados, como se muestra en la figura siguiente:

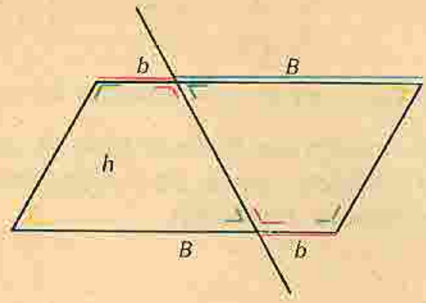


Obtenemos entonces un paralelogramo. Sabemos que en un paralelogramo los lados opuestos son congruentes, por lo que $a = a'$, $b = b'$. Como, además, $c = c'$, concluimos que los dos triángulos que aparecen en la figura son congruentes.

Ahora bien, si multiplicamos b por h obtenemos el área de esos dos triángulos congruentes. Por lo tanto, el área de uno de ellos es la mitad de b por h. Si denotamos con A el área del triángulo, podemos afirmar que

$$\boxed{A = \frac{b \times h}{2}}$$

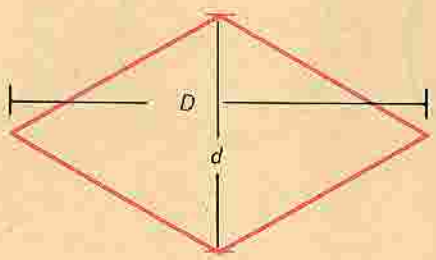
Ejercicio 3. Observe que los trapecios de la siguiente figura son congruentes. Ya que los lados y ángulos de uno son respectivamente congruentes a los lados y ángulos del otro.



a) ¿Es el área del paralelogramo $(B + b) \times h$?

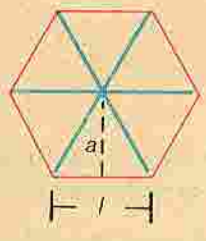
b) ¿Cuál es la fórmula para obtener el área del trapecio?

Ejercicio 4. Explique por qué la fórmula para el área del rombo es $A = \dfrac{D \times d}{2}$ donde D y d son respectivamente las diagonales del rombo.



Area de un polígono regular.

Consideremos, por ejemplo, un exágono regular.



Vemos que en él se forman 6 triángulos congruentes. Por lo tanto, el área del exágono es 6 veces el área de uno de esos triángulos. Esto es, si denotamos con A el área del exágono,

$$A = 6\,\frac{l \times a}{2} = \frac{6l \times a}{2}$$

Pero $6l$ es el perímetro del exágono. De modo que, si denotamos con P este perímetro, podemos afirmar que

$$\boxed{A = \frac{P \times a}{2}}$$

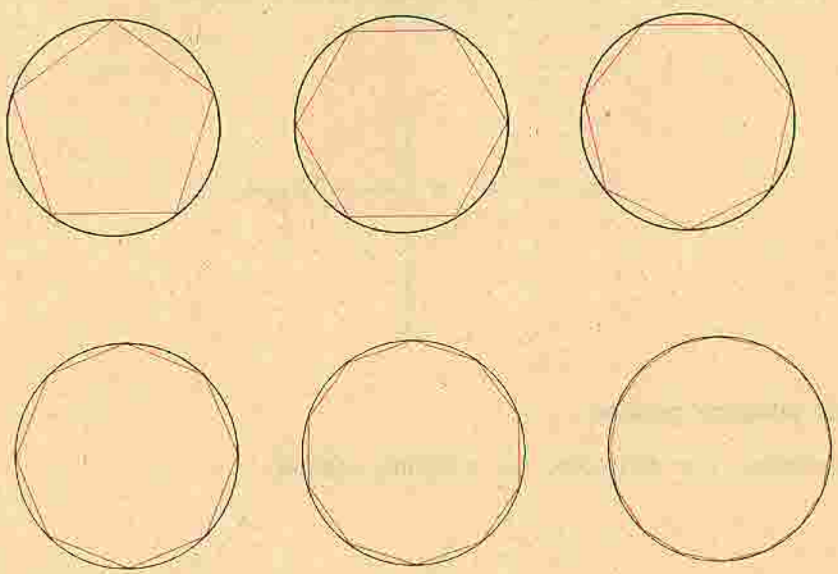
Es decir, el área del exágono es el semiproducto de su perímetro por su apotema.

Desde luego, este razonamiento que hicimos para el exágono puede hacerse también para cualquier otro polígono regular de n lados. Por eso la fórmula anterior es aplicable a todos los polígonos regulares.

Area del círculo.

Usted conoce la fórmula para encontrar el área de un círculo. A continuación trataremos de "ver" el porqué de esa fórmula.

Consideremos un círculo e inscribamos en él diversos polígonos.



Según observamos, entre mayor es el número de lados que tiene un polígono, más se "aproxima" su área al área del círculo considerado.

También observamos que el perímetro del polígono se "aproxima a la longitud de la circunferencia y que la longitud de la apotema se "aproxima" a la longitud del radio.

Sabemos, que la fórmula para obtener el área de los polígonos regulares es

$$A = \frac{P \times a}{2}$$

Ahora bien, si en esta expresión sustituimos el perímetro P por la longitud de la circunferencia C y sustituimos la apotema a por el radio r, obtenemos la expresión

$$A = \frac{C \cdot r}{2}$$

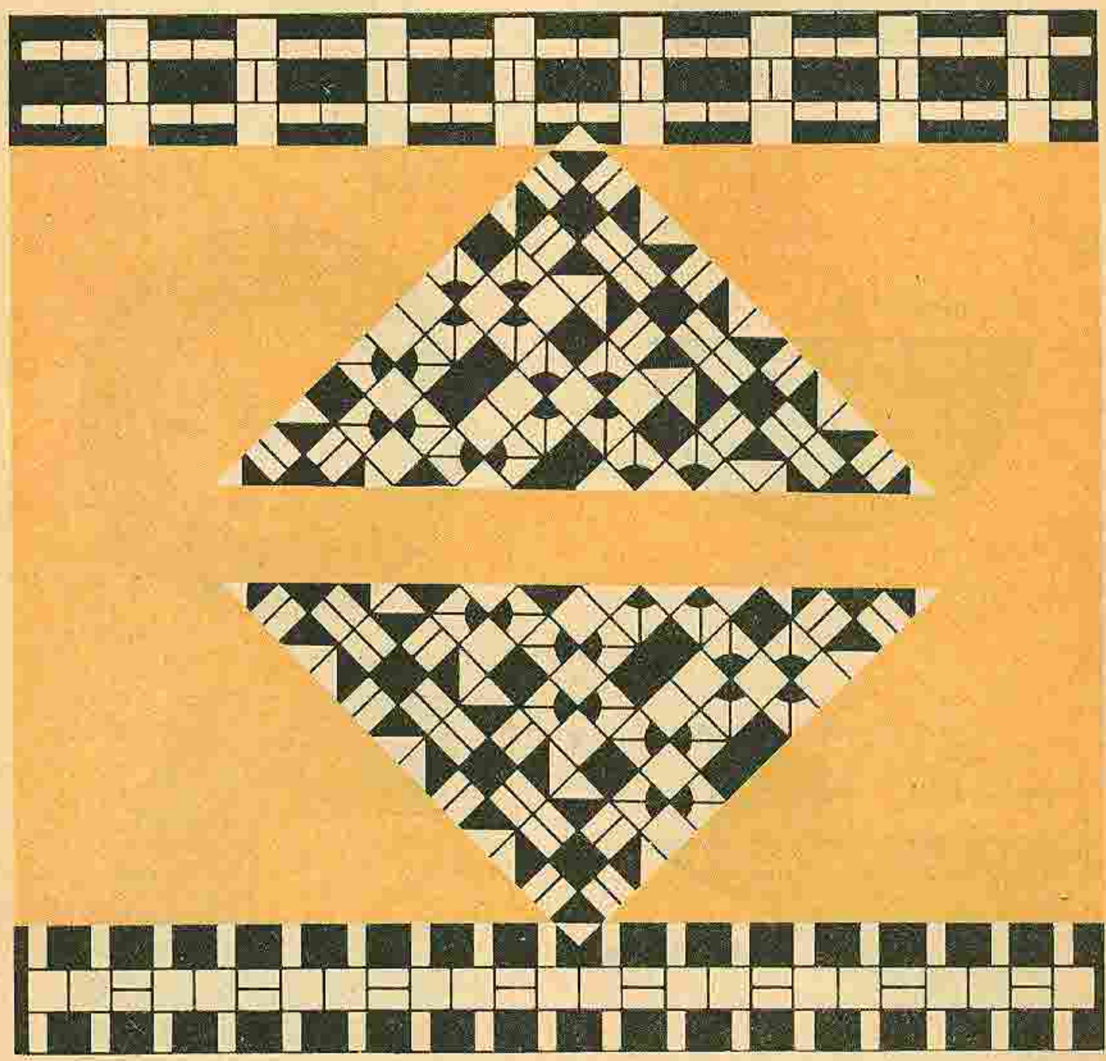
Pero como $C = 2\pi r$, podemos escribir también

$$A = \frac{2\pi r \cdot r}{2}$$

y, simplificando, llegamos a la expresión

$$A = \pi r^2$$

que es la fórmula conocida por usted.

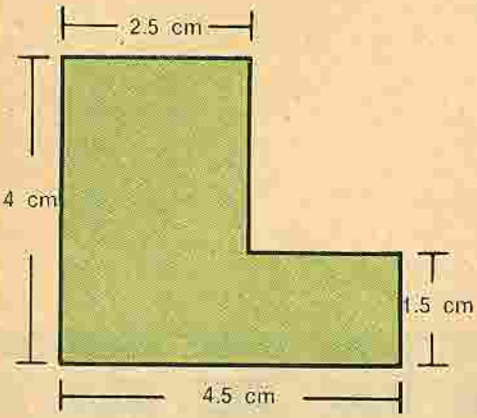


4. Ejercicios y problemas.

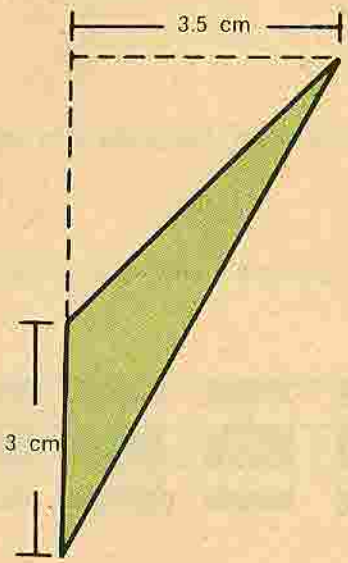
En los siguientes ejercicios y problemas usted tendrá oportunidad de aplicar los conceptos que, acerca del área, adquirió en las páginas anteriores. Necesitará, además, utilizar algunas ideas relativas a ecuaciones.

Ejercicio 5. Encuentre el área de cada una de las siguientes figuras.

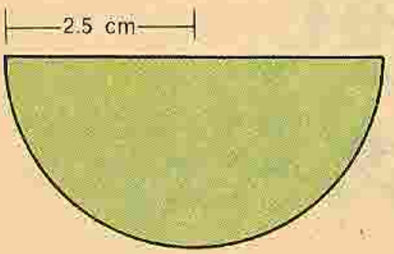
a)



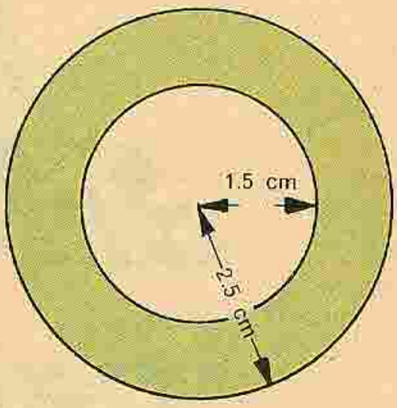
b)



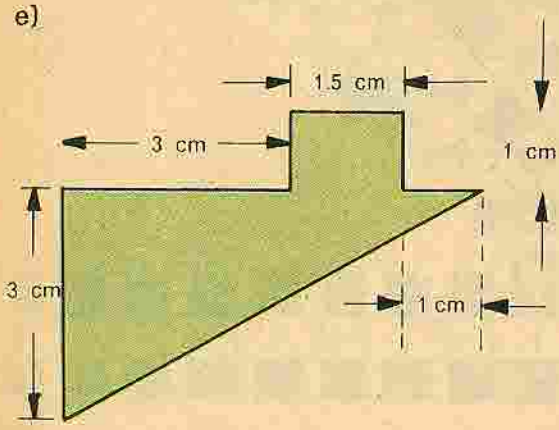
c)



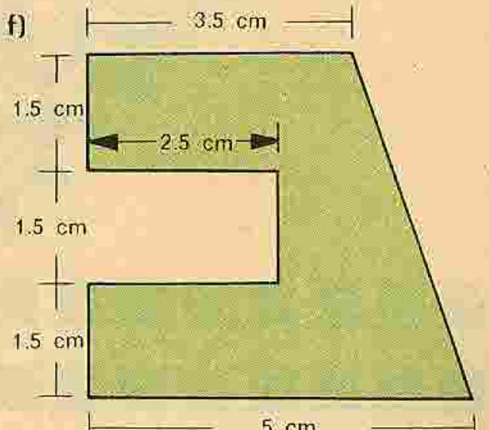
d)



e)

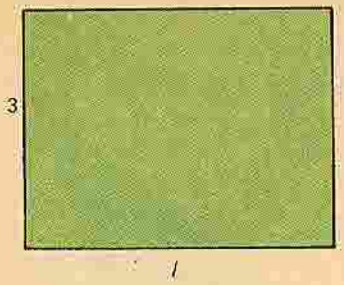


f)



Ejercicio 6. En cada inciso encuentre el valor que representa la letra.

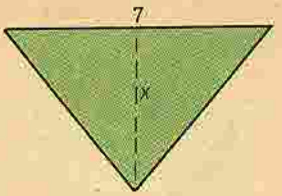
a)



$3l = 12.1$

$l =$ ______

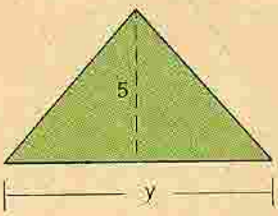
b)



$\frac{7x}{2} = 15$

$x =$ ______

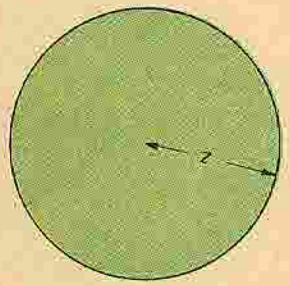
c)



El área del triángulo es 22

$y =$ ______

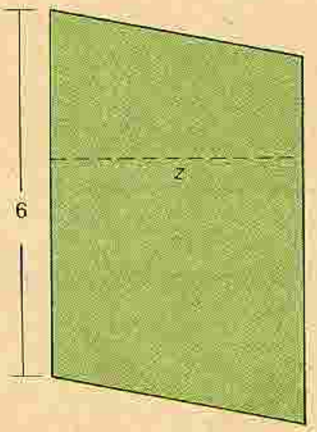
d)



El área del círculo es 16

$z =$ ______

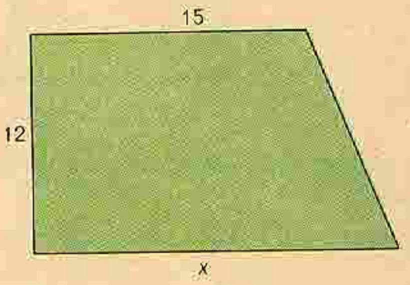
e)



El área del paralelogramo es 25.

$z =$ ______

f)

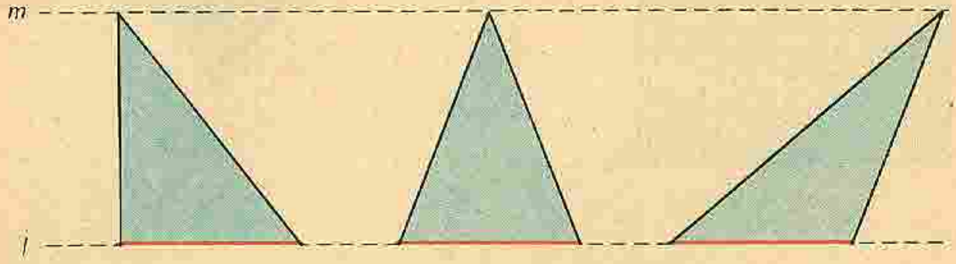


El área del trapecio es 210

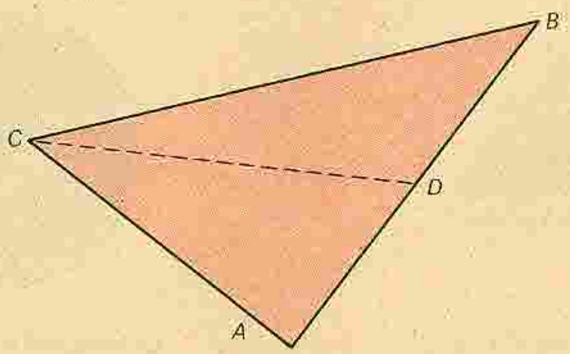
$x =$ ______

Ejercicio 7.

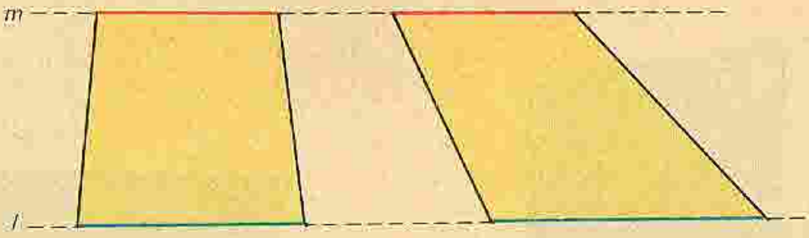
a) Las rectas l y m son paralelas; $\overline{AB} \cong \overline{PQ} \cong \overline{ST}$. ¿Cuál de los triángulos tiene mayor área?



b) ¿Puede asegurar que el área del $\triangle ADC$ es igual al área del $\triangle ACB$? $\overline{AD} \cong \overline{DB}$.

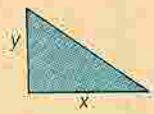


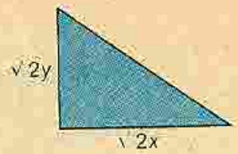
c) Los segmentos marcados con el mismo color son congruentes. Las rectas l y m son paralelas. ¿Puede afirmar que las áreas de los trapecios son iguales?



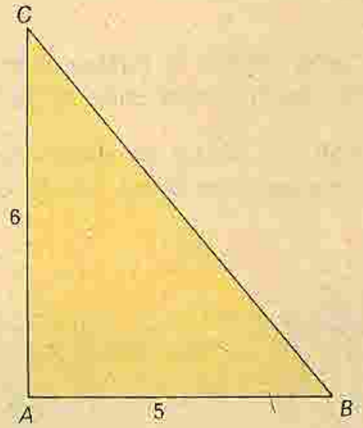
d) ¿Es el área del triángulo de la derecha, el doble del área del triángulo de la izquierda?

e) ¿Es el área del triángulo de la derecha el doble del área del triángulo de la izquierda?





f) Trace una paralela a la base del triángulo, de manera que las regiones que se forman tengan la misma área.



Problemas.

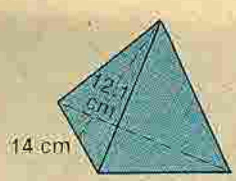
1. ¿Cuántos mosaicos de 0.25 por 0.25 m, se requieren para cubrir un pasillo rectangular que mide 17 m de largo por 2.50 m de ancho?

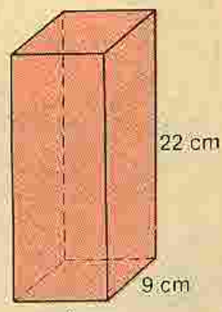
2. El m^2 de vidrio de color cuesta \$85.00. ¿Cuánto debe pagarse por un vidrio que mide .28 m de ancho por .45 m de largo?

3. ¿Cuál es el área del ruedo de una plaza de toros, cuyo radio mide 20 m? (Use como aproximación racional de π, el número 3.14).

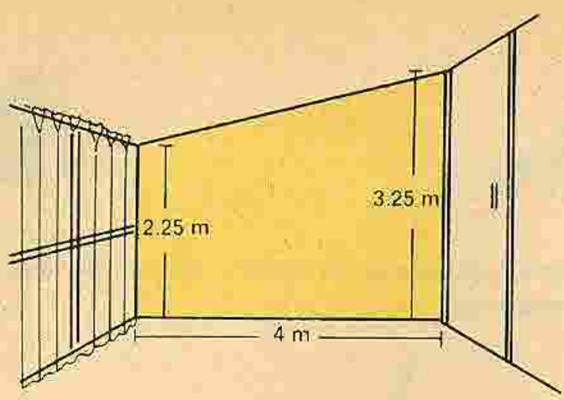
4. El lado de un patio cuadrado mide 5 m. Si ese patio se debe ampliar de modo tal que se duplique el área conservando su forma, ¿cuánto debe medir el lado?

5. ¿Cuál de los dos envases, dibujados a continuación requiere menos material?



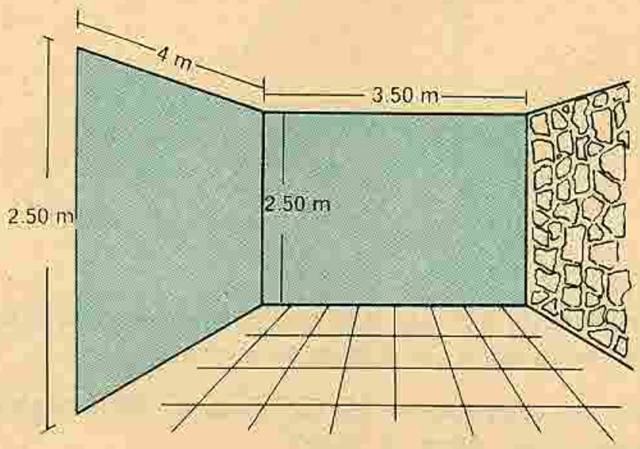


6. ¿Cuál es el área de la pared en la ilustración siguiente?

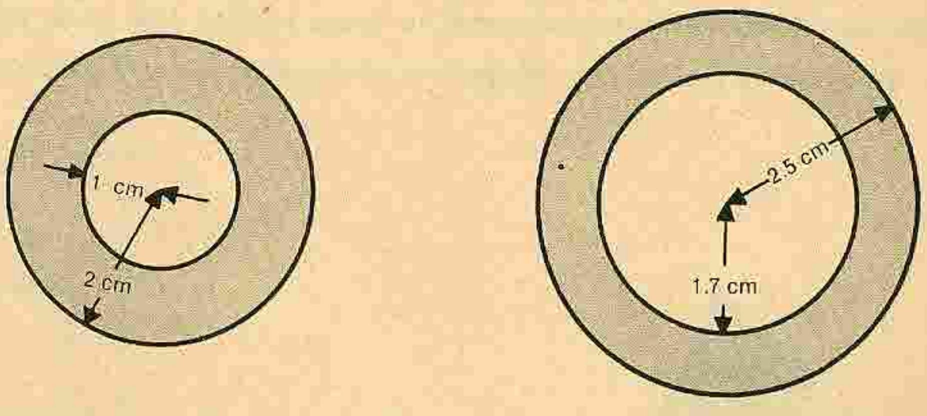


7. Dos lotes rectangulares tienen la misma área. Si uno de ellos mide 15 m por 30 m, ¿cuál es el ancho del otro lote que mide 12 m de largo?

8. Un pintor cobra $ 4.50 por pintar un metro cuadrado de pared. ¿Cuánto deberá pagársele por pintar dos paredes como las de la ilustración?

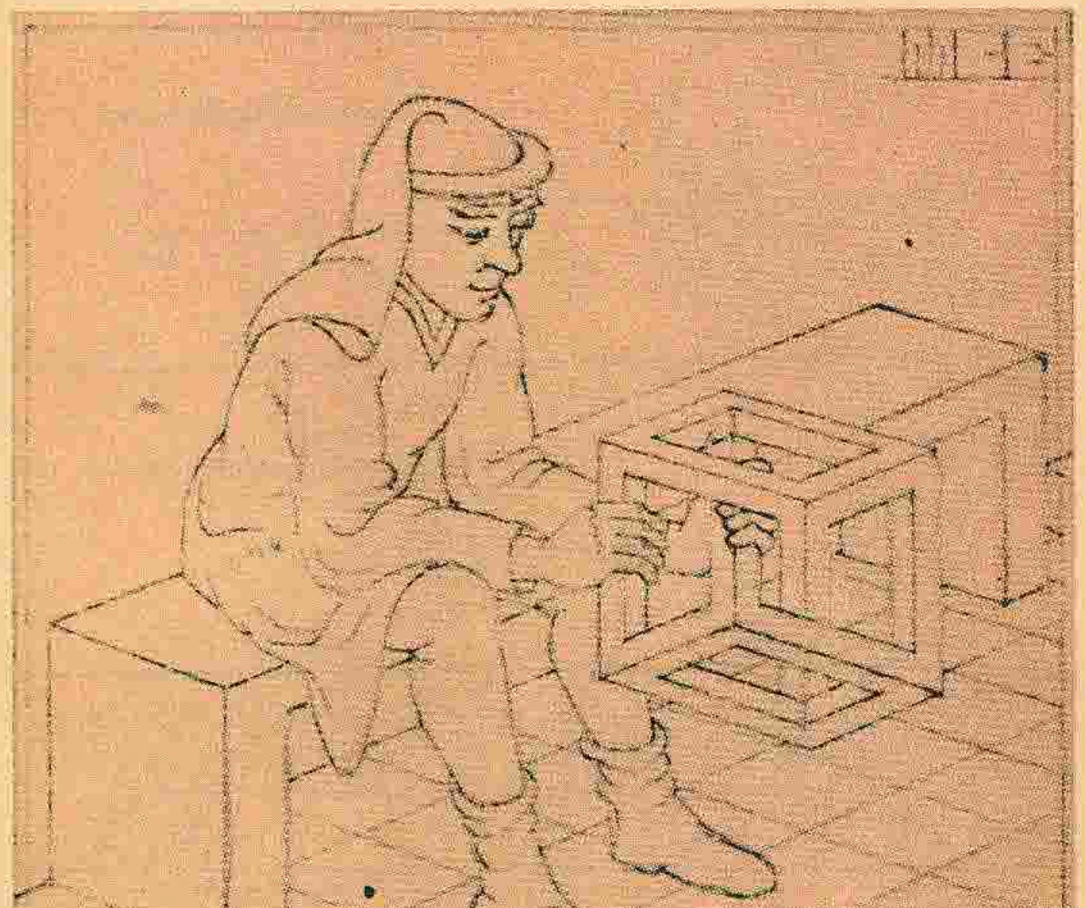


9. Las arandelas que se dibujan a continuación son del mismo espesor. ¿En cuál de ellas se empleó mayor cantidad de material?



10. ¿Cuál es el mayor número de hojas de cartón, de .30 m por .20 m, que pueden sacarse de una hoja que mide 1 m por 1.40 m? ¿Qué cantidad de cartón sobra?

Soluciones a los Ejercicios y Problemas

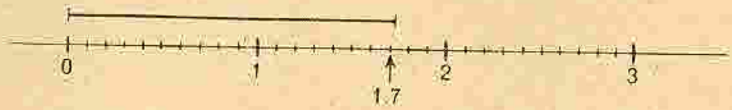


IV. Los números reales

1. Los números irracionales.

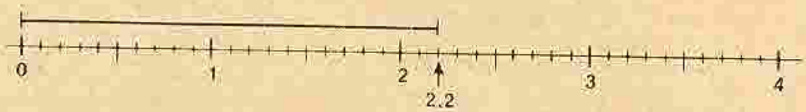
Ejercicio 1.

$\sqrt{3}$ es aproximadamente igual a $\boxed{1.7}$



Ejercicio 2.

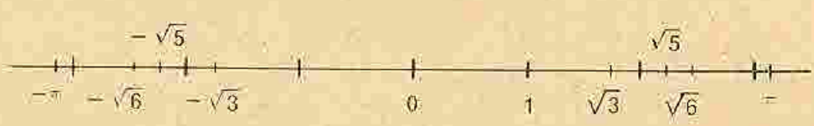
$\sqrt{5}$ es aproximadamente igual a 2.2



Ejercicio 3.

$\sqrt{6}$ es aproximadamente igual a 2.4

Ejercicio 4.



V. Distancia entre dos puntos

1. Definición de distancia.

Ejercicio 1.

a) La distancia entre P y Q es 7 centímetros.

b) La distancia entre R y M es 11.2 centímetros.

c) La distancia entre M y N es 3.5 centímetros.

d) La distancia entre Q y S es 10.4 centímetros.

e) La distancia entre A y B es 5.1 centímetros.

f) La distancia entre S y T es .9 centímetros.

g) La distancia entre R y S es 10.1 centímetros.

h) La distancia entre C y N es 1.8 centímetros.

Ejercicio 2.

La distancia del punto 0 al punto A es de 25 milímetros. Todos los puntos que haya usted trazado deben quedar en la circunferencia.

Ejercicio 3.

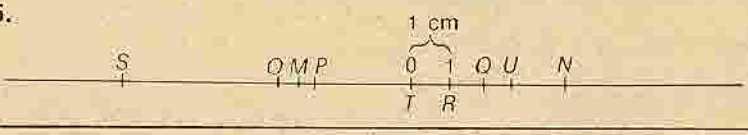
Todos los segmentos miden lo mismo.

2. Coordenadas en una recta.

Ejercicio 4.

a) $A = (3)$	b) $B = (4.5)$	c) $C = (6.1)$
d) $D = (8)$	e) $E = (-1.5)$	f) $F = (-3)$
g) $G = (-4.5)$	h) $H = (-6.1)$	i) $I = (0)$

Ejercicio 5.



3. Distancia entre dos puntos nombrados por sus coordenadas.

Ejercicio 6.

a) La distancia de A al origen es 5.

b) La distancia de B al origen es 7.

c) La distancia de C al origen es 12.

d) La distancia de D al origen es 7.5.

e) La distancia de E al origen es 18.3.

f) La distancia de F al origen es $\frac{15}{2}$

g) La distancia de G al origen es $\sqrt{2}$.

h) La distancia de H al origen es π

i) La distancia de I al origen es $\sqrt{5}$.

Ejercicio 7.

a) La distancia de A al origen es 5.

b) La distancia de B al origen es 7.

c) La distancia de C al origen es 12.

d) La distancia de D al origen es 7.5.

e) La distancia de E al origen es 18.3.

f) La distancia de F al origen es $\frac{15}{2}$.

g) La distancia de G al origen es $\sqrt{2}$.

h) La distancia de H al origen es π.

i) La distancia de I al origen es $\sqrt{5}$.

Ejercicio 8.

a) La distancia entre C y D es 23.

b) La distancia entre Q y B es 10.05.

c) La distancia entre R y W es 67.8.

d) La distancia entre T y V es 208.31.

e) La distancia entre N y R es $58a$.

f) La distancia entre A y D es 3π.

g) La distancia entre S y T es $7a$.

h) La distancia entre M y N es 12.

i) La distancia entre R y K es 26.2.

j) La distancia entre A y B es 1 346.7

k) La distancia entre K y L es 2 507.1.

l) La distancia entre U y E es $3a$.

m) La distancia entre N y C es $3.5x$

n) La distancia entre C y D es 22.

o) La distancia entre G y H es 137.

p) La distancia entre E y F es 7.9.

q) La distancia entre A y P es 37.58.

r) La distancia entre T y Z es $5n$.

VI. Desigualdades

1. Orden entre los números reales.

Ejercicio 1.

a) $-1 < 3.5$

b) $4.3 > -7$

c) $-2.8 < 1.6$

d) $-\pi > -7.4$

e) $-6.2 < 4.6$

f) $\pi > -\pi$

g) $-2 < 2$

h) $5.3 > 2.8$

i) $\sqrt{2} < \pi$

j) $0 > -5$

Ejercicio 2.

a) $a > b$

b) $a < d$

c) $b > c$

d) $b < d$

e) $c < b$

f) $c < d$

g) $d > a$

h) $d > b$

Ejercicio 3.

a) $-7 < 2$

b) $4.5 > 2.9$

c) $-3.7 > -4.3$

d) $-2.7 < 2.7$

e) $13.8 > -46.7$

f) $-10.9 < 20.3$

g) $-\frac{3}{2} < -\frac{6}{5}$

h) $-37.2 < -31.5$

i) $-20.4 > -20.6$

j) $\frac{8}{10} > -2.5$

k) $-\pi < -\sqrt{6}$

l) $-\sqrt{9} < 3$

m) $\frac{9}{23} > -\frac{3}{5}$

Ejercicio 4.

a) Si a y b son dos números reales positivos y a está a la izquierda de b; entonces $a < b$.

b) Si b es un número real positivo y a es un número real negativo, entonces $a < b$
Cualquier número real positivo es mayor que cualquier número real negativo

c) Si b es un número real positivo, entonces $b > 0$
Cero es *menor* que cualquier número real positivo.

d) Si a es un número real negativo, entonces $a < 0$
Cero es *mayor* que cualquier número real negativo.

e) Si a y b son dos números reales negativos y b está a la derecha de a, entonces $b > a$

f) Si sabemos que a, b y c son números reales y sabemos que $a > b$ y $b > c$, podemos concluir que $a > c$

g) Si m, n y p son números reales y sabemos que $m < n$ y $n < p$, podemos entonces concluir que $m < p$.

Ejercicio 5.

a) $8 > 5 > -2$

b) $-8 < 0 < 3.5$

c) $.9 > .3 > -.4$

d) $.85 < 8.5 < 85$

e) $\frac{1}{3} < \frac{1}{2} < \frac{3}{4}$

f) $4.1 > \pi > 2.5$

Ejercicio 6.

a) $10 > 7 > 5$; 7 está entre 10 y 5.

b) $-6 < -4 < -1$; -4 está entre -6 y -1.

c) $.04 > 0 > -.03$; 0 está entre $-.03$ y $.04$.

d) $-25 < 0 < 1$; 0 está entre -25 y 1.

e) $3.1415 < \pi < 3.1416$; π está entre 3.1415 y 3.1416

---

3. Gráficas de desigualdades.

Ejercicio 7.

a) x puede ser el 2.

b) x puede ser el -1.

c) x no puede ser el -5.6.

d) x no puede ser el -12.

e) x puede ser el 0.

f) x no puede ser el -7.3.

g) x puede ser el -4.7.

h) x puede ser el 6.3.

i) x no puede ser el -5.

j) x puede ser el 5.

Ejercicio 8.

a) $y \neq 8.3$ b) $y \neq 17.9$ c) $y = 3.4$

d) $y = -6$ e) $y \neq 12$ f) $y = 0$

g) $y = -1$ h) $y = -17.8$ i) $y \neq 6$

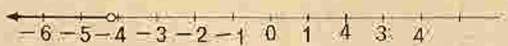
Ejercicio 9.

a) 2.5 *no* pertenèce al conjunto.

b) −3.4 *no* pertenece al conjunto.

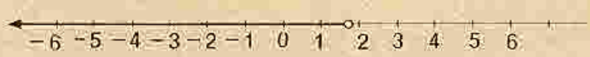
c) 0 *no* pertenece al conjunto.

d) −4.2 *no* pertenece al conjunto.



e) 0 *no* pertenece al conjunto.

f) 1.7 *no* pertenece al conjunto.



Ejercicio 10

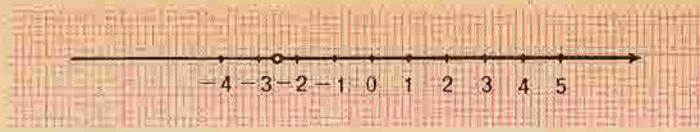
a) $x > -2$ b) $x < 4$ c) $x < -1$

d) $x > 2$ e) $x > -3$

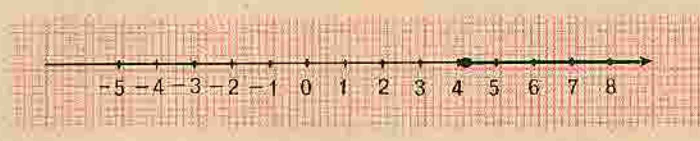
Ejercicio 11.

a) $p \leqq -3$ Esta gráfica es un rayo

b) $q > -2.5$ Esta gráfica no es un rayo



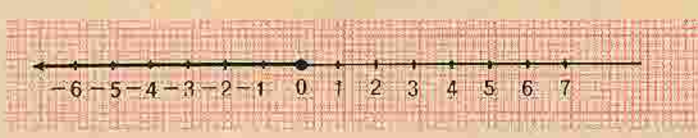
c) $s \geqq 4.2$ Esta gráfica es un rayo



d) $r < 6.8$ Esta gráfica no es un rayo

e) $t \leqq 7.3$ Esta gráfica es un rayo

f) $v \leqq 0$ Esta gráfica es un rayo



g) $a \geqq \sqrt{2}$ Esta gráfica es un rayo

Ejercicio 12.

a) $-5 < x < 6$

La gráfica del conjunto *no* es un segmento.

b) $2 \leqq t \leqq 7$.

La gráfica del conjunto *es* un segmento.

c) $-6 \leqq v \leqq -1$

La gráfica del conjunto *es* un segmento.

d) $0 < y < 4.5$

La gráfica del conjunto *no* es un segmento.

e) $-4.5 < s < 0$

La gráfica del conjunto *no* es un segmento.

f) $\sqrt{2} \leqq a \leqq \pi$

La gráfica del conjunto *es* un segmento.

Ejercicio 13.

a) $-2 \leqq a \leqq 3$

b) $2 < t < 7$

c) $-15 < p < 10$

d) $-7 \leqq v \leqq -2$

e) $-\pi < m < \pi$

f) $-30 < x < 20$

g) $-4 \leqq s \leqq \sqrt{2}$

h) $0 \leqq y \leqq 2\pi$

i) $-45 < f < -10$

j) $-\sqrt{10} \leqq a \leqq \sqrt{10}$

Ejercicio 14.

a) La troposfera se localiza a una distancia entre 0 y 11 kilómetros del nivel del mar. Si llamamos t a la distancia de un punto cualquiera de esta región al nivel del mar, tendremos.

$$0 < t < 11.$$

b) La estratosfera está situada entre 11 y 110 km arriba del nivel del mar. Si e es la distancia de un punto cualquiera de esta región al nivel del mar, entonces

$$11 < e < 110.$$

c) La ionósfera está comprendida entre el kilómetro 110 y el kilómetro 800 sobre el nivel del mar. Si llamamos i a la distancia de un punto cualquiera de la ionosfera al nivel del mar, tendremos entonces que

$$110 < i < 800.$$

d) La exósfera se sitúa más allá del kilómetro 800 sobre el nivel del mar. La distancia E de un punto cualquiera de la exósfera al nivel del mar, se puede escribir así:

$$E > 800$$

Ejercicio 15.

a) $-35 < c < 0$

b) $-2\,900 < m < -35$

c) $-5\,000 < n < -2\,900$

d) $-6\,400 < x < -5\,000$

Ejercicio 16.

a) $46\,000\,000 \leqq m \leqq 70\,000\,000$

b) $106\,900\,000 \leqq v \leqq 108\,400\,000$

c) Se puede describir con cualquiera de las dos expresiones siguientes:

$$152\,000\,000 \geqq t \geqq 149\,500\,000$$

$$149\,500\,000 \leqq t \leqq 152\,000\,000$$

d) Se puede describir con cualquiera de las dos expresiones siguientes:

$$248\,000\,000 \geqq M \geqq 206\,000\,000$$

$$206\,000\,000 \leqq M \leqq 248\,000\,000$$

Ejercicio 17.

a) $t > 2\,600$

b) $m < -7.2$

c) líquido

d) sólido.

e) líquido

f) $-218.8 < y < -183$

g) Si un cuerpo está formado con hidrógeno en estado líquido y tiene una temperatura w, entonces esa temperatura w está entre -259.1 y -253 grados y, por lo tanto, $-259.1 < w < -253$.

h) líquido

i) $-253 > z > -259.1$

Capítulo Tercero

Gráficas

I. Coordenadas en el plano

Ejercicio 1.

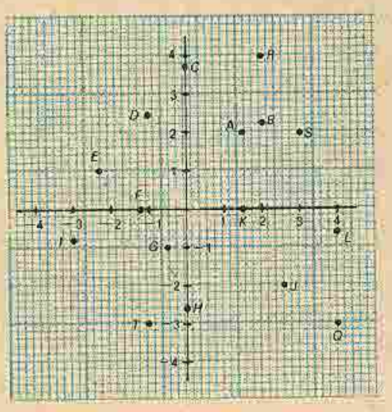
b) $N = (1, 2)$ c) $O = (1, 3)$ d) $P = (3, 3)$

e) $Q = (3, 1.5)$ g) $B = (-2, 1)$ h) $C = (-3, 1)$

i) $D = (-2.5, 3)$ k) $F = (-3, -2)$ l) $G = (-2, -3)$

n) $S = (1, -2)$ o) $T = (2, -3)$

Ejercicio 2.



Ejercicio 3.

a) De R al eje de las ordenadas hay 5 unidades.

b) $A = (0, 3)$, $C = (3, 0)$, $O = (0, 0)$

c) $B = (-4, 4)$, $C = (0, 4)$, $D = (0, 0)$

d) De base mide 7 unidades, y de altura mide 3 unidades. Su área es de 21 unidades cuadradas.

e) $B = (6, 0)$

f) El área del rectángulo es de 15 unidades cuadradas.

g) $B = (-3, 3)$, $D = (3, -3)$. El área del cuadrado $ABCD$ es de 36 unidades cuadradas.

h) El área del rectángulo $ABCD$ es de 60 unidades cuadradas.

i) $M = (0, 2.3)$, $N = (-2.3, 0)$, $P = (0, -2.3)$, $Q = (2.3, 0)$.

j) $C = (7, 6)$, $D = (1, 6)$. El área del cuadrado $ABCD$ es de 36 unidades cuadradas.

k) $B = (4, 3)$, $C = (4, 7)$. El área del cuadrado es de 16 unidades cuadradas.

l) El área del triángulo ABC es de 5 unidades cuadradas.

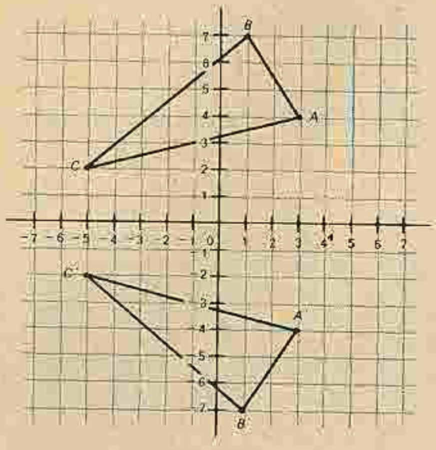
m) La distancia de S al origen es de 5 unidades.

n) El radio mide 5 unidades.

o) $A = (2, 0)$, $B = (4, 3)$, $C = (2, 6)$, $D = (0, 3)$.

p) $C = (-4, 0)$. El área del triángulo ABC es de 12 unidades cuadradas.

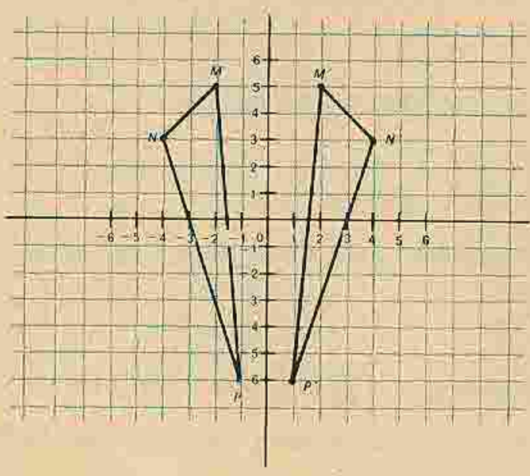
Ejercicio 4.



b) El punto A coincide con el punto A', el punto B coincide con el punto B' y el punto C coincide con el punto C'. Los lados quedan superpuestos.

Ejercicio 5.

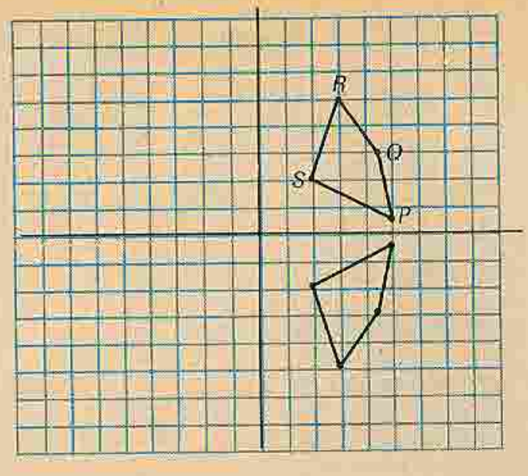
a) $M' = (2, 5)$, $N' = (4, 3)$, $P' = (1, -6)$



b) El punto M coincide con el M', el N con el N' y el P con el P'. Los lados quedan superpuestos.

Ejercicio 6.

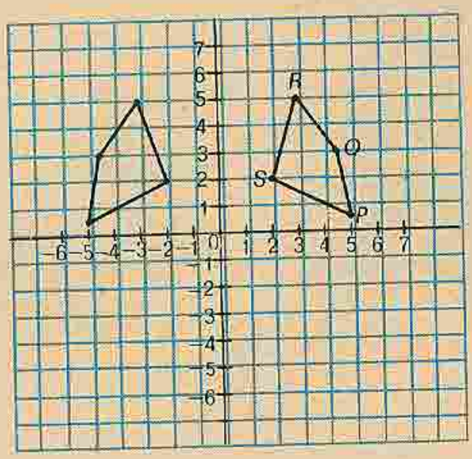
a)



b) Las abscisas son iguales.

Las ordenadas son inversos aditivos.

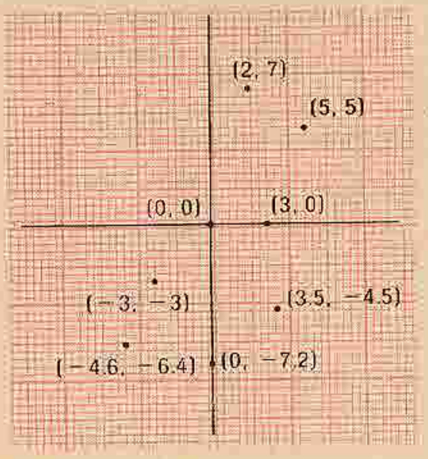
c)



d) Las abscisas son inversos aditivos.

Las ordenadas son iguales.

Ejercicio 7.



Ejercicio 8.

a) $P = (7, 7)$, b) $Q = (-3, 3)$, c) $R = (-4, -\frac{1}{4})$

d) $S = (2.8, 8.4)$, e) $T = (-6.2, -3.1)$, f) $U = (-2, 4)$

g) $V = (7, 9)$, h) $W = (-1, 9)$

Ejercicio 9.

a) Si la abscisa es x, la ordenada es x.

c) Si la abscisa es x, la ordenada es $\frac{1}{x}$.

d) Si la abscisa es x, la ordenada es $3x$.

e) Si la abscisa es x, la ordenada es $\frac{x}{2}$.

f) Si la abscisa es x, la ordenada es x^2.

h) Si la abscisa es x, la ordenada es $(3x)^2$.

Ejercicio 10.

b) $B = (4, -8)$ c) $C = (2, \frac{1}{2})$

d) $D = (-6.9, 6.9)$ e) $E = (2, 11)$

f) $F = (-\frac{1}{2}, 1)$

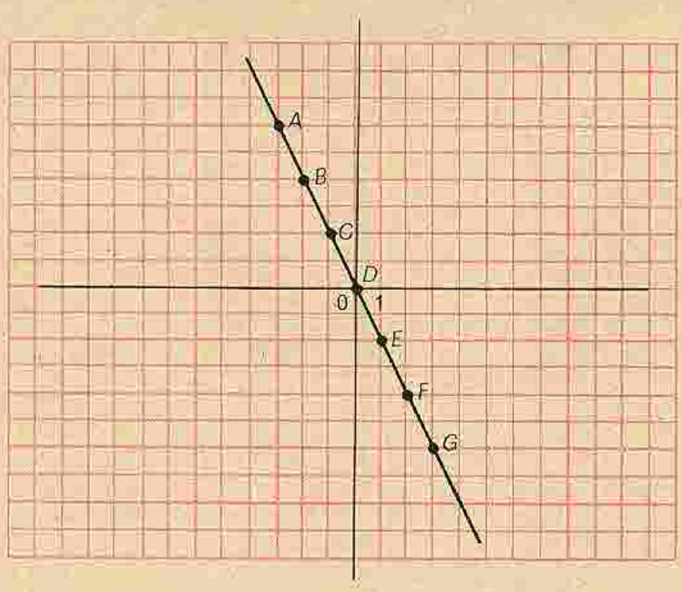
Ejercicio 11.

a) $A = (-3, 6)$, $B = (-2, 4)$, $C = (-1, 2)$

$D = (0, 0)$, $E = (1, -2)$, $F = (2, -4)$

$G = (3, -6)$,

b) y c)

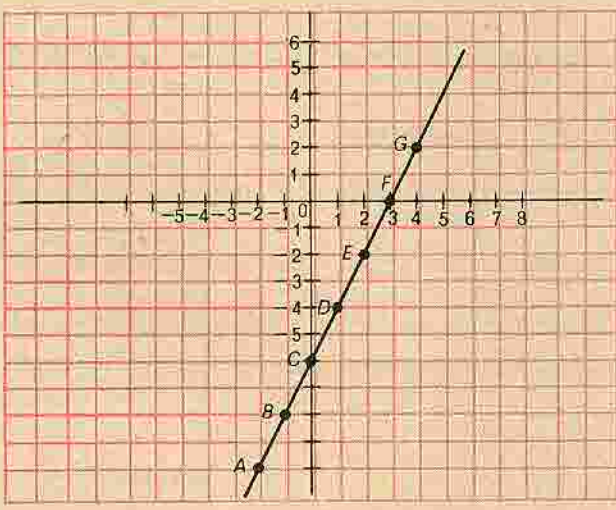


d) Todos los puntos están en la misma recta.

Ejercicio 12.

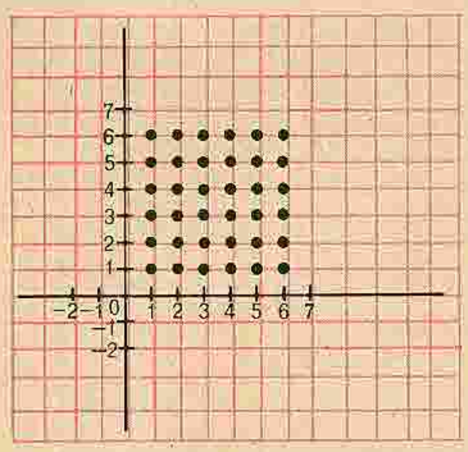
a) $A = (-2, -10)$, $B = (-1, -8)$, $C = (0, -6)$
$D = (1, -4)$, $E = (2, -2)$, $F = (3, 0)$
$G = (4, 2)$.

b) y c)



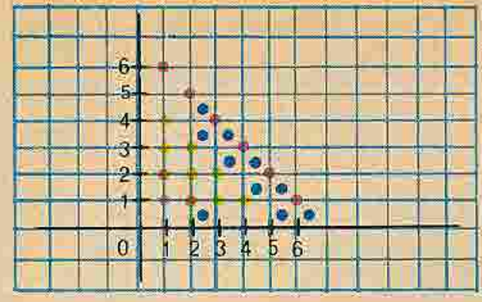
d) Sí, todos los puntos quedan en la recta.

Ejercicio 13.



a) Se marcaron 36 puntos. Los posibles resultados en las jugadas de dados son 36

b)



c) Al 7, porque de los 36 resultados posibles hay más sietes que ochos o seises, por ejemplo.

d) Usted debería escoger el 5, porque de los 36 resultados posibles hay más cincos que treces.

e) Usted debería haber escogido el 8.

f) Cualquiera de los dos, ya que tanto el 6 como el 8 tienen las mismas posibilidades de salir.

II. Gráficas

1. Las gráficas como un recurso para analizar y estudiar fenómenos y situaciones.

Ejercicio 1.

a) Chihuahua

b) Tlaxcala

c) 1. Tlaxcala 2. Tabasco 3. Yucatán 4. Veracruz 5. Coahuila 6. Chihuahua

Ejercicio 2.

Ejercicio 3.

a) A las 14 horas.

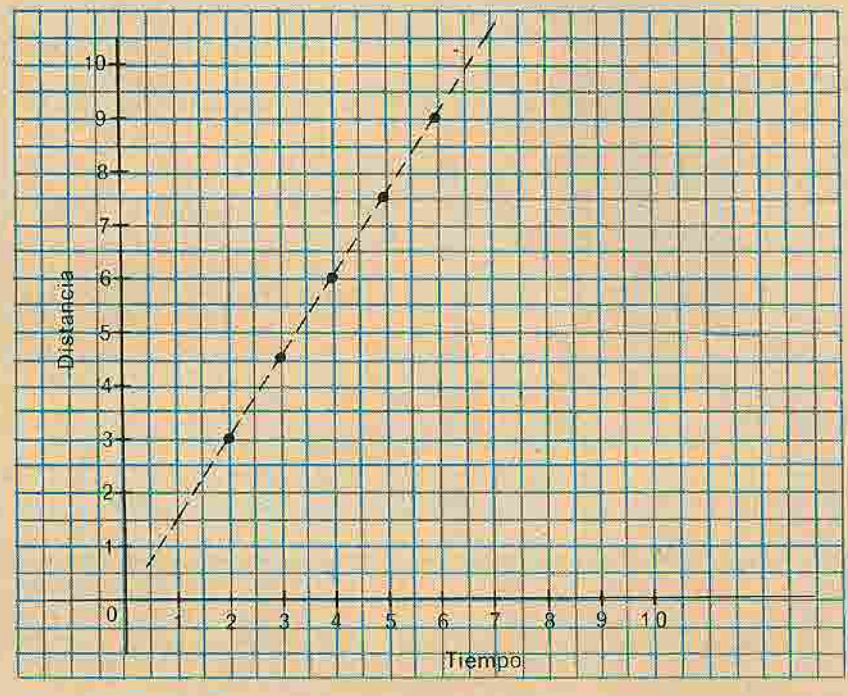
b) A las 6 horas.

c) Sí.

d) No es posible. La gráfica muestra que durante ese período la temperatura del paciente descendió. Además, por lo que se aprecia en la gráfica la temperatura tiende a bajar durante todo el tiempo.

e) Es posible que haya tenido una temperatura de 39.5 grados.

Ejercicio 4.



b) Todos los puntos trazados están contenidos en una recta.

2. Algunas ideas sobre lectura e interpretación de gráficas.

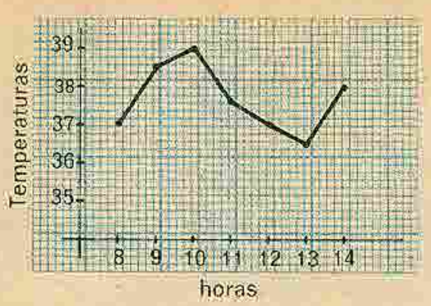
Ejercicio 5.

La población de México en 1905 era aproximadamente de 15 000 000 de habitantes; en 1925, de 16 000 000; en 1945, de unos 24 000 000 y en 1955, de unos 30 000 000.

En 1980 la población de México será aproximadamente de 63 millones de habitantes.

3. Algunas ideas sobre la construcción de gráficas.

Ejercicio 6.



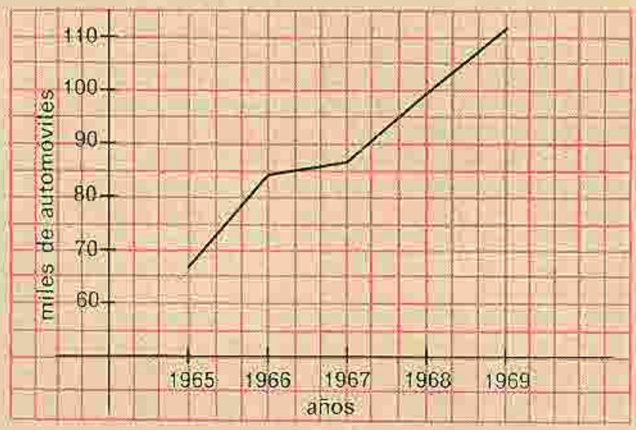
Ejercicio 7.

a) En 1965 había 35 000 kilómetros.

b) Se construyeron 2 000 kilómetros.

c) Se construyó el mismo número de kilómetros en los dos períodos.

Ejercicio 8.

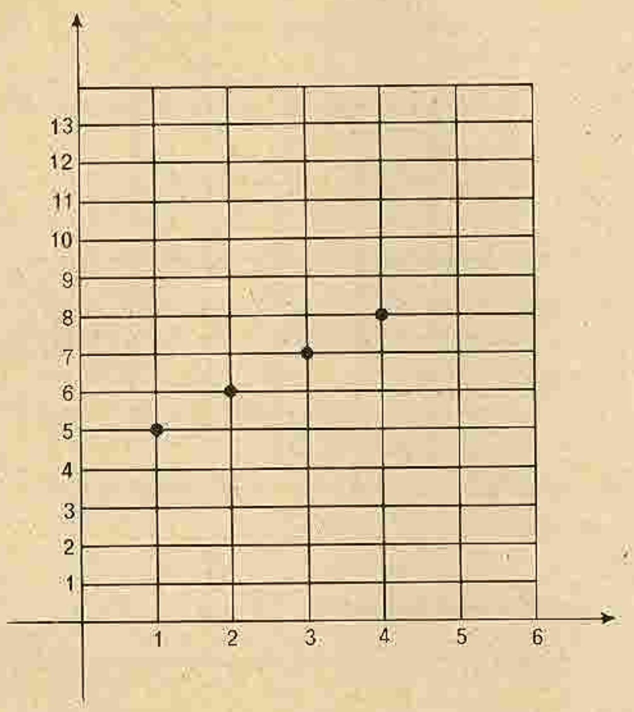


Ejercicio 9.

III. Gráficas lineales

1. Tablas y gráficas.

Ejercicio 1.



Ejercicio 2.

x	0	1	2	3	4
y	0	3	6	9	12

Ejercicio 3.

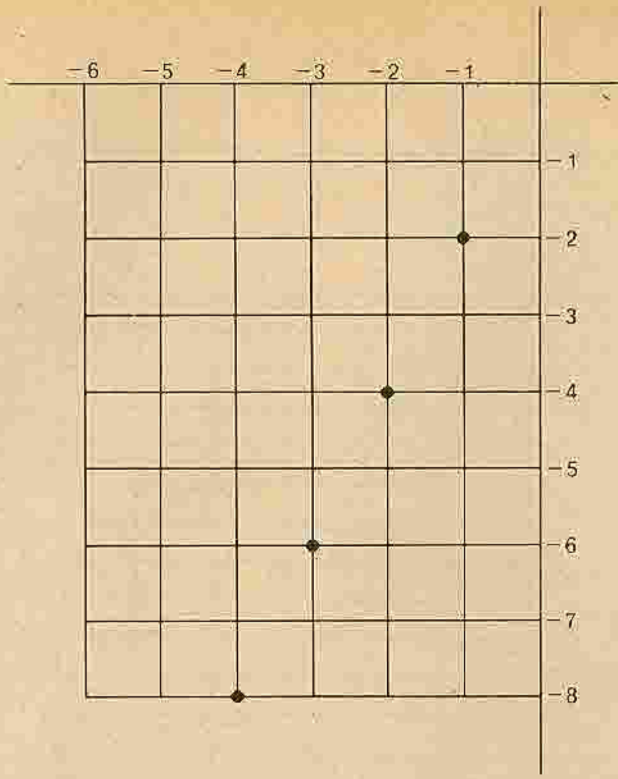
La abscisa es el doble de la ordenada.

Ejercicio 4.

La relación es $y = 4x$

Ejercicio 5.

Los puntos tendrían las coordenadas $(-4, -8)$, $(-3, -6)$, $(-2, -4)$, $(-1, -2)$ y su gráfica es la siguiente:



2. Tablas y expresiones algebraicas.

Ejercicio 6.

b) $y = x + 3$

x toma los valores 0, 1, 2, 3 y 4.

c) $y = -x$

x toma los valores 1, 2, 3, 4, 5 y 6.

d) $y = x - 1$

x toma los valores 2, 3, 4 y 5.

e) $y = 5x$

x toma los valores −3, −2, −1, 0 y 1.

Ejercicio 7.

a)

x	−2	−1	0	1	2
y	0	1	2	3	4

b)

x	−1	0	1	2	3	4	5
y	−2	−1	0	1	2	3	4

c)

x	-5	-4	-3	-2	-1	0
y	5	4	3	2	1	0

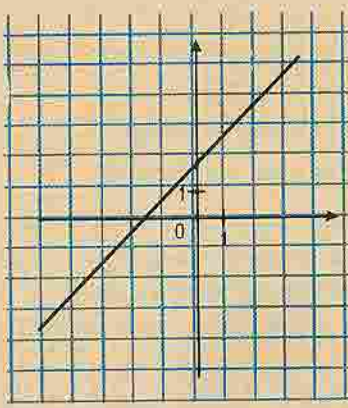
d)

x	-1	0	1	1.5	2	2.5
y	-1	2	3	4	5	6

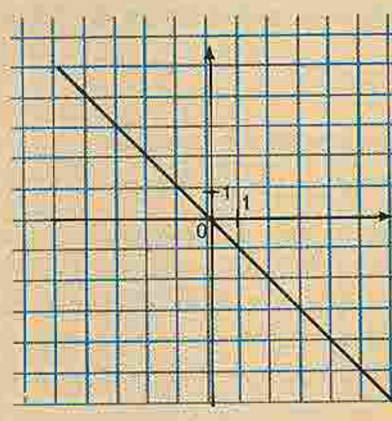
3. Gráficas lineales.

Ejercicio 8.

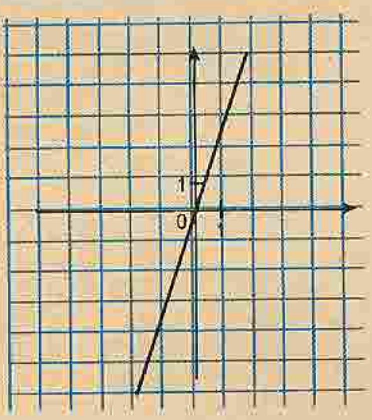
a)



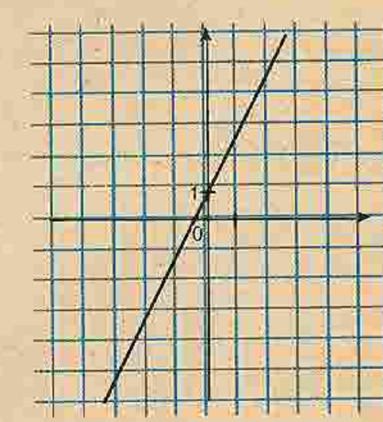
b)



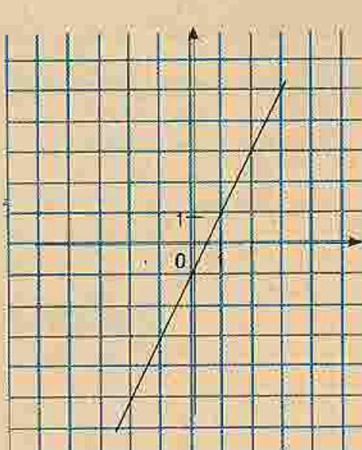
c)



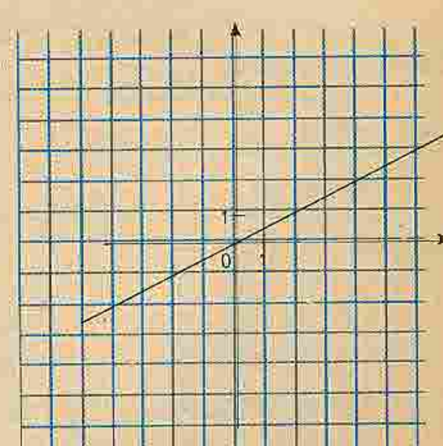
d)

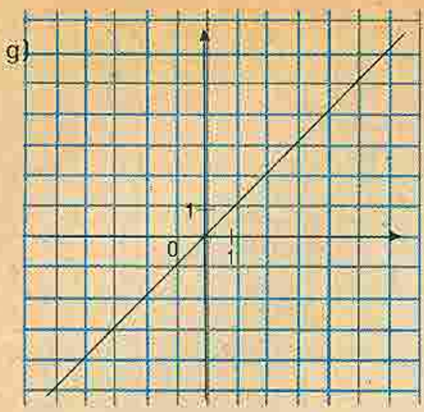


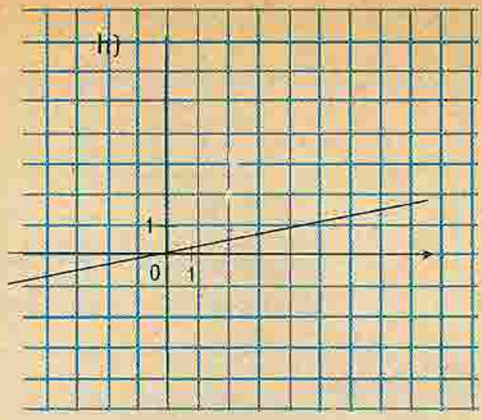
e)



f)







4. Algunas aplicaciones de las gráficas lineales.

Ejercicio 9.

a) 43 grados centígrados

b) 32 grados farenheit.

c) A 86 grados farenheit.

d) 10 grados centígrados.

e) Sí la hay. La temperatura para la cual el número de grados farenheit es igual al número de grados centígrados es -40 grados farenheit o bien -40 grados centígrados. Esto se puede calcular fácilmente con la fórmula dada, si consideramos, como lo indica el problema, que $F = C$, es decir que en ella podemos sustituir F por C o viceversa.

$$F = 1.8\,c + 32.$$

Como $F = C$.

$$F = 1.8\,F + 32.$$

Resolviendo esta ecuación tendremos:

$$F - 1.8\,F = 32$$
$$-.8\,F = 32$$
$$F = \frac{32}{-.8} = -40$$

Capítulo Cuarto

Geometría

I. Congruencia

Ejercicio 1.

$\overline{EF} \cong \overline{CD}$	$\overline{IJ} \cong \overline{GH}$	$\overline{AF} \cong \overline{CD}$
$\overline{BE} \cong \overline{FD}$	$\overline{MN} \cong \overline{KL}$	$\overline{FD} \ncong \overline{AD}$
$\overline{IJ} \ncong \overline{KL}$	$\overline{BE} \cong \overline{FA}$	

1. Triángulos congruentes.

Ejercicio 2.

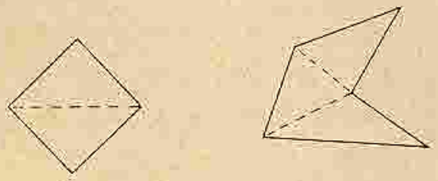
$\triangle ADF \cong \triangle KIF$	$\triangle FDG \ncong \triangle FIK$
$\triangle KDG \cong \triangle CJG$	$\triangle KDG \ncong \triangle CEH$
$\triangle MGH \ncong \triangle AGI$	$\triangle JHM \ncong \triangle GHC$
$\triangle IFK \cong \triangle EHC$	$\triangle BFH \cong \triangle LFH$

2. Trazado de polígonos congruentes.

Ejercicio 3. Porque la medida de $\overline{A'C'}$ es igual a la de $\overline{AC}$. Analogamente, $B'C' = BC$.

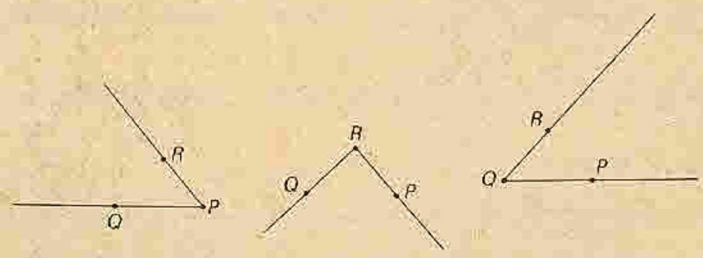
Ejercicio 4. Siga el procedimiento explicado.

Ejercicio 5. Puede triangular a) y c) en varias formas. Por ejemplo, las siguientes:



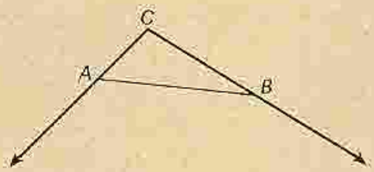
Después siga el procedimiento explicado.

Ejercicio 7.



3. Angulos

Ejercicio 8.



Ejercicio 9.

$\measuredangle DOC = 90°$	$\measuredangle DOE = 38°$	$\measuredangle EOF = 52°$	$\measuredangle EOC = 128°$
$\measuredangle BOF = 128°$	$\measuredangle DOF = 90°$	$\measuredangle FOA = 90°$	$\measuredangle EOB = 180°$

4. Polígonos congruentes

Ejercicio 10. Los ángulos que usted trazó en su cuaderno deben tener la misma medida que los ángulos dados en los incisos a) b), c) y d).

II. Semejanza

1. Triángulos semejantes

Ejercicio 1.

a) $a' = 3$, $c' = 5$
b) $a = 30$, $b' = 16$
c) $x = 11$, $y = 36$

Ejercicio 2.

a) $x = 7$, $y = 5$
b) $t = 10$, $u = 3$
c) $x = 5$, $y = 3$

Problemas.

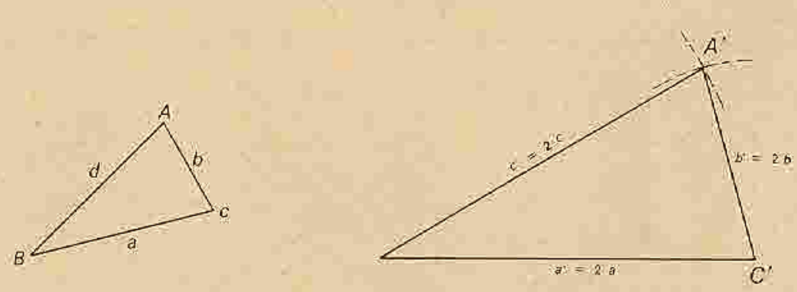
1. $AB = 30$ m.

2. $\dfrac{x}{1.60} = \dfrac{2.80 - 2.30}{2.30}$, $x = 0.3478\ldots$; aproximadamente $x = 0.35$ m

$\dfrac{y}{2.30} = \dfrac{1.80 - 0.35}{1.60}$, $y = 2.084\ldots$; aproximadamente $y = 2.08$ m

3. 80 cm.

Ejercicio 3.



Ejercicio 4.

$\measuredangle R = 80°$, $\measuredangle S = 55°$ $\measuredangle T = 45°$

2. Polígonos semejantes.

Ejercicio 5.

a) semejantes. b) $\frac{1}{500}$ c) 500 d) 12 e) 60

f) 7 g) 35 h) 7.5 i) 25

Ejercicio 6.

a) $\frac{60}{1}$ b) una c) $\frac{1}{60}$ d) 6, $\frac{1}{10}$, milímetro

Ejercicio 7.

a) 2853 m b) 3231 m c) 6806 m d) 6221 m

Problema.

$$\frac{70}{20} = \frac{7}{2} = 3.5 \text{ cm}.$$

3. Rectas paralelas.

Ejercicio 8.

a) $\measuredangle(3) = 40°$, $\measuredangle(2) = 140°$, $\measuredangle(4) = 140°$.

b) $\measuredangle(1) = 110°$, $\measuredangle(2) = 70°$, $\measuredangle(3) = 110°$, $\measuredangle(4) = 70°$.

c) $\measuredangle DCA = 40°$, $\measuredangle CAD = 60°$, $\measuredangle DAB = \measuredangle DCB = 100°$.
$\measuredangle D = \measuredangle B = 80°$.

Ejercicios 9.

Son semejantes porque tienen ángulos respectivos congruentes.

Problema 1.

$$3x = 180°, \quad x = 60°$$

Problema 2.

$$x + 3x = 180°, \quad 4x = 180, \quad x = 45°.$$

Problema 3.

$$x + \frac{2}{3}x = 180°, \quad \frac{5x}{3} = 180°, \quad x = 108°$$

4. El teorema de Tales.

Ejercicio 10.

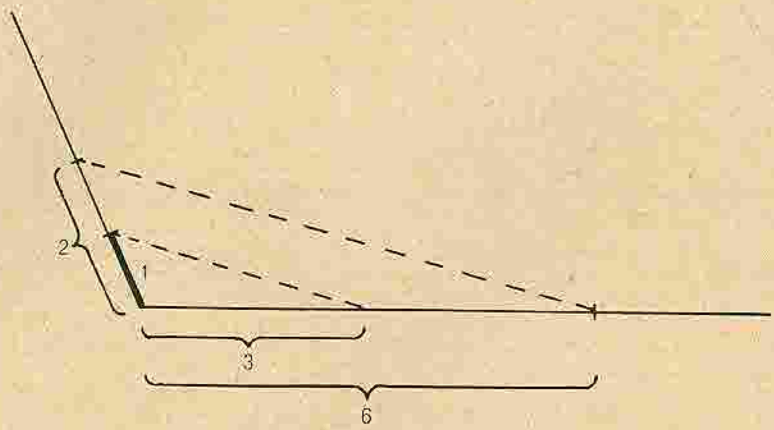
$$\frac{AC}{AS} = \frac{4}{1}, \quad \frac{AN}{AS} = \frac{3}{1}, \quad \frac{AQ}{AS} = \frac{2}{1}$$

$$\frac{AC}{AS} = \frac{AB}{AR}, \qquad \frac{AN}{AS} = \frac{AM}{AR}, \qquad \frac{AQ}{AS} = \frac{AP}{AR}$$

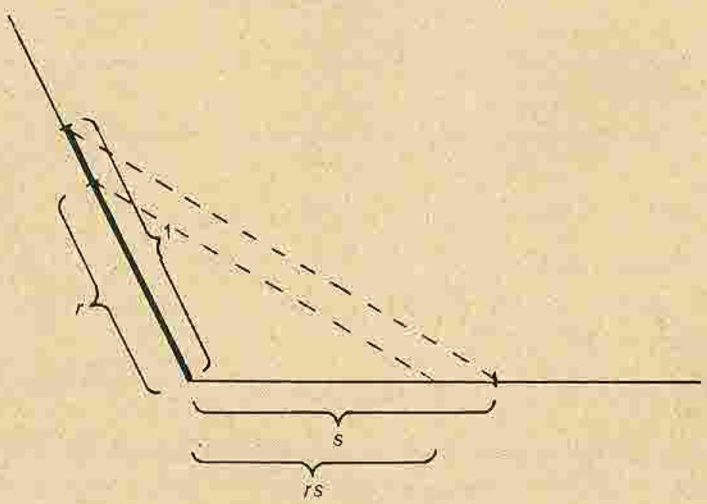
$$\frac{AG}{AR} = 4, \qquad \frac{AM}{AR} = 3, \qquad \frac{AP}{AR} = 2$$

Ejercicio 11.

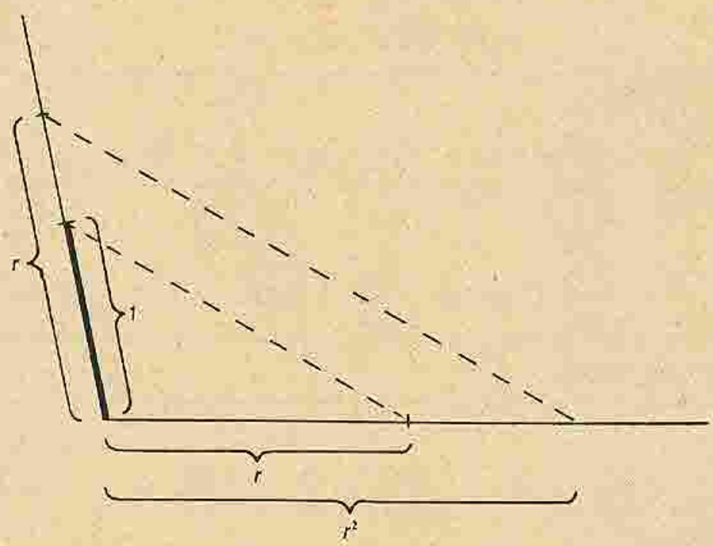
a)



b)



c)

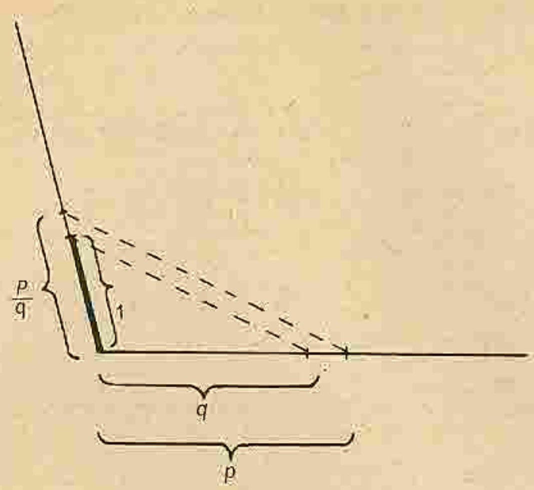


Ejercicio 12.

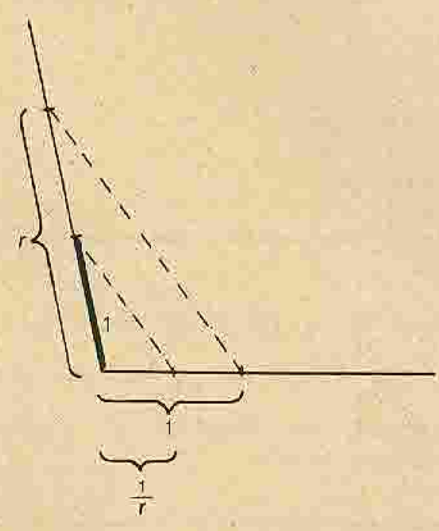
$$\frac{x}{1} = \frac{m}{n}, \qquad x = \frac{m}{n}.$$

Ejercicio 13.

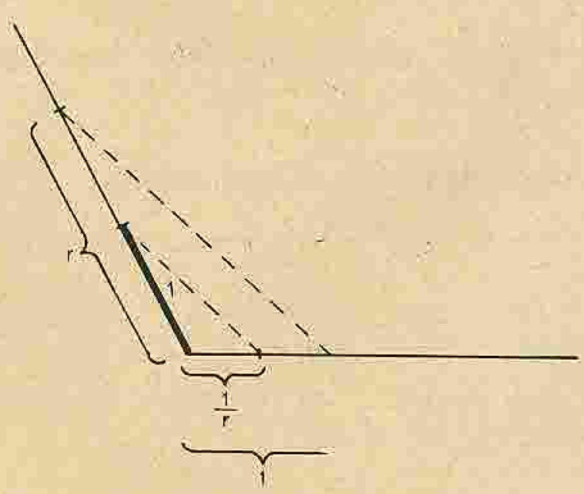
a)



b)



c)



III. Polígonos regulares

1. Suma de las medidas de los ángulos de un triángulo.

Ejercicio 1.

a) $\measuredangle B = 60°$, $\measuredangle C = 90°$, $\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C = 180°$

b) $\measuredangle A = 50°$, $\measuredangle B = 70°$, $\measuredangle C = 60°$
$\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C = 180°$

c) $\measuredangle A = 20°$, $\measuredangle B = 120°$, $\measuredangle C = 40°$
$\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C = 180°$

Ejercicio 2.

$\measuredangle(3) = 70°$

Ejercicio 3.

$\measuredangle(3) + \measuredangle(4) = 180°$

$\measuredangle(1) + \measuredangle(2) + \measuredangle(4) = 180°$

$\measuredangle(1) + \measuredangle(2) = \measuredangle(3)$

Ejercicio 4.

a) Si en un $\triangle ABC$ $\measuredangle A = 90°$ y $\measuredangle B = 90°$, entonces $\measuredangle C = 0°$

b) Si $\measuredangle A = 90°$, como $\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C = 180°$, entonces $\measuredangle A + \measuredangle C = 90°$

c) La suma de los dos ángulos no rectos es $90°$, y ambos son positivos. Por lo tanto ambos miden menos de $90°$.

Ejercicio 5.

Como $\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C = 180°$; si, por ejemplo, $\measuredangle A > 90°$ entonces $\measuredangle B + \measuredangle C < 90°$, por lo que $\measuredangle A < 90°$ y $\measuredangle C < 90°$.

2. Suma de las medidas de los ángulos de un polígono.

Ejercicio 6.

a) $\measuredangle A = 120°$ $\measuredangle B = 100°$ $\measuredangle C = 60°$, $\measuredangle D = 80°$
$\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C + \measuredangle D = 360°$

b) $\measuredangle A = 90°$, $\measuredangle B = 130°$, $\measuredangle C = 60°$, $\measuredangle D = 80°$
$\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C + \measuredangle D = 360°$

Ejercicio 7.

1800° y 2700°

3. Polígonos regulares. Medida de sus ángulos.

Ejercicio 8.

a) $\dfrac{5 \times 180°}{7} = 128.6°$

b) $\dfrac{6 \times 180°}{8} = 135°$

c) $\dfrac{10 \times 180°}{12} = 150°$

Ejercicio 9.

$$\frac{(n - 2)\,180°}{n}$$

4. Una aplicación.

Ejercicio 11.

a)

$$\begin{aligned} \measuredangle(1) &= 80° \\ \measuredangle(2) &= 60° \\ \measuredangle(3) &= 30° \\ \measuredangle(4) &= 60° \\ \measuredangle(5) &= 130° \end{aligned}$$

$$\measuredangle(1) + \measuredangle(2) + \measuredangle(3) + \measuredangle(4) + \measuredangle(5) = 360°$$

b)

$$\begin{aligned} \measuredangle(1) &= 100° \\ \measuredangle(2) &= 60° \\ \measuredangle(3) &= 70° \\ \measuredangle(4) &= 130° \end{aligned}$$

$$\measuredangle(1) + \measuredangle(2) + \measuredangle(3) + \measuredangle(4) = 360°$$

Ejercicio 12.

a) $3 \times 128.6° = 385.8°$; $385.8° - 360° = 25.8°$ (se traslapan)

b) $3 \times 135° = 405°$; $405° - 360° = 45°$ (se traslapan)

IV. Area

1. Area de regiones planas.

Ejercicio 1.

a) 18, b) 8, c) 20, d) 1

2. Propiedades del área.

Ejercicio 2.

a) 13 cm^2 b) 13.5 cm^2 c) 13.5 cm^2 d) 12.56 cm^2

e) 14.5 cm^2 f) 14 cm^2

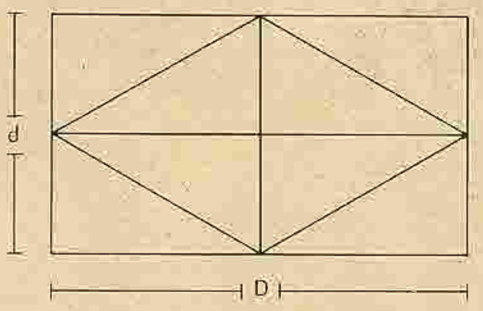
3. Cálculo del área de algunas regiones planas.

Ejercicio 3.

a) sí, b) $A = \frac{(B + b)\,h}{2}$

Ejercicio 4.

Al multiplicar $D \times d$, obtenemos el área de un rectángulo que contiene 8 triángulos congruentes. El rombo sólo contiene 4



4. Ejercicios y problemas

Ejercicio 5.

a) 13 cm^2 b) 5.25 cm^2 c) 9.81 cm^2

d) 12.56 cm^2 e) 9.75 cm^2 f) 15.375 cm^2

Ejercicio 6.

a) $l = 4.03$ b) $x = 4.28$ c) $y = 8.8$

d) $z = 2.26$ e) $z = 4.16$ f) $x = 20$

Ejercicio 7.

a) Los tres triángulos tienen la misma área. Ya que tienen la misma base y la misma altura.

b) Sí, los dos triángulos tienen igual base e igual altura.

c) Sí, ya que tienen iguales bases e igual altura.

d) No, un área es xy, la otra es $4xy$.

e) Sí, un área es xy, la otra es $\sqrt{2}y \quad \sqrt{2}x = (\sqrt{2})^2 xy = 2xy$.

f) La paralela debe trazarse a 4.24 cm del vértice C. El triángulo que se forma tiene como base $\frac{5}{\sqrt{2}}$ y como altura $\frac{6}{\sqrt{2}}$.

Problemas.

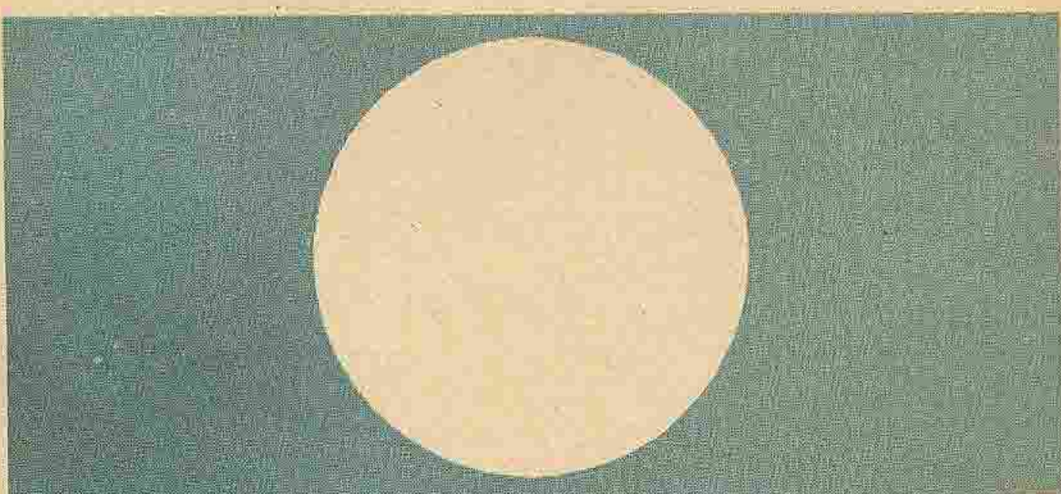
1. 680 mosaicos, 2. \$10.71 3. 1 256 m^2, 4. 7.07 m,

5. El de la izquierda requiere 338.8 cm^2, el de la derecha 954 cm^2.

6. 11 m^2, 7. 37.50 m. 8. \$ 84.38,

9. La arandela de la izquierda tiene un área de 9.42 cm^2, la de la derecha tiene un área de 10.55 cm^2

10. 23 hojas, sobra .02 m^2 de cartón.



ESTA
EDICION DE 50,000
EJEMPLARES SE TERMINO
DE IMPRIMIR
EL MES
DE MAYO
DE 1976,
EN LOS
TALLERES
DE IMPRE-
SORES Y EDI-
TORES, S. A.,
AVENA
No. 19, FRACCIONAMIENTO
ESMERALDA, MEXICO 13, D. F.