Publicaciones Electrónicas
Instituto Mexicano de
Ciencias y Humanidades

Matemáticas
Primer Curso

Emilio Lluis Riera
Humberto Cárdenas
Miguel Ángel Curiel Ariza
Fidel Peralta Corona
Cuauhtémoc Tavera Guerrero
Elías Villar Quijano

www.imch.org.mx

Academia de Ciencias. Vol. 5 (2019)

primer grado

MATEMATICAS

secundaria abierta

SEP

C. E. C. S. A.

primera parte

EJEMPLAR Nº 3963

Este libro es parte del plan de secundaria abierta, que tiene por objeto acreditar la enseñanza media a sectores de la población que no han tenido oportunidad de ir a la escuela. Se publica dentro de un convenio establecido entre la Secretaría de Educación Pública y la Cámara Nacional de la Industria Editorial, para hacer llegar libros de calidad y a precios económicos, a dichos sectores.

Primera Edición 1974.

COMPAÑIA EDITORIAL CONTINENTAL, S. A.
MEXICO - ESPAÑA - ARGENTINA - CHILE - VENEZUELA

MIEMBRO DE LA CAMARA NACIONAL DE LA INDUSTRIA EDITORIAL
Registro Núm. 43

IMPRESO EN MEXICO PRINTED IN MEXICO

primer grado
MATEMATICAS
primera parte

SEP CONAFE CNIE CECSA

Autores: Dr. Humberto Cárdenas Trigos
Instituto de Matemáticas, UNAM

Profr. Miguel Angel Curiel Ariza
Secretaría de Educación Pública

Dr. Emilio Lluis Riera
Instituto de Matemáticas, UNAM

Profr. Fidel Peralta Corona
Secretaría de Educación Pública

Profr. Cuauhtémoc Tavera Guerrero
Secretaría de Educación Pública

Profr. Elías V. Villar Quijano
Secretaría de Educación Pública

Diseño e Ilustración: *Dirección Artística:* Adolfo Falcón G
Subdirección: Luis Carlos Emerich Z
Coordinación: Martha Velasco Herrera, Herlinda Sánchez Laurel, Alicia Albo Vázquez

Ilustradores: Federico Calderón, Ulises Carbó, María de Lourdes Castro, Francisco Castro, Arnoldo Fajardo, Bruno González, José Castro, Guillermina Pérez, Rafael de León, Kiyoto Oota, Pío Pulido, Arturo Ramírez, Heraclio Ramírez, Herlinda Sánchez, Marcia Salcedo, Luis R. Miranda, Gustavo Sánchez, Susana Trejo, José Duarte, Carlos Lupercio.

Montaje: Carlos Contreras, José Luis Villanueva, Felícitas Gaspar, Jaime Becerra, Roberto Contreras, Alfonso Martínez, Eduardo Contreras, Arturo Ruiz, Fabiel Gómez, Alejandro Arellano, Alejandro Contreras.

Corrección: Dolores Yáñez
Josefina Anaya

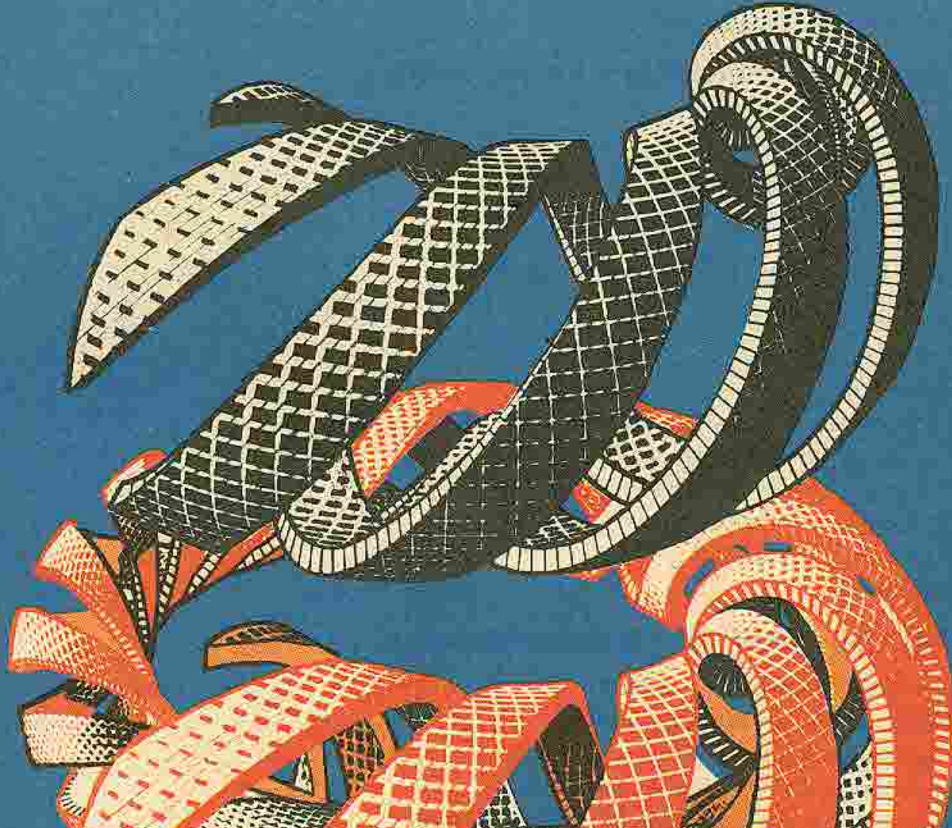
Dibujos de las páginas 11, 12, 59, 89, 141, 157, 169, 183, 200, de **M. C. Escher.**

primer grado

MATEMATICAS

secundaria abierta

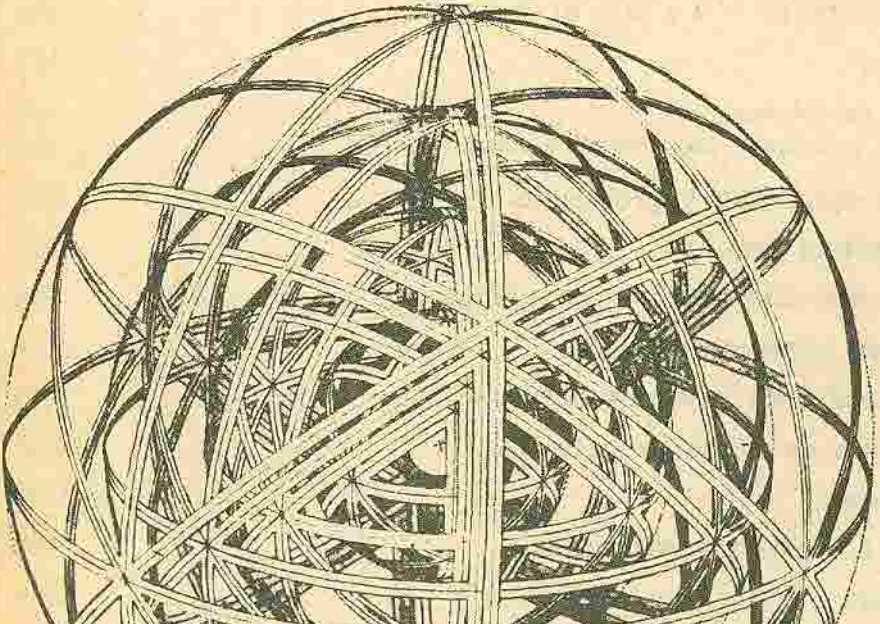
SEP



C. E. C. S. A.

primera parte

Índice



INTRODUCCIÓN

> *"El deseo de saber y de superación*
> *es innato en el corazón del hombre."*
>
> **Benito Juárez**

Estimado lector:

Uno de los objetivos más nobles del ser humano es su perfeccionamiento personal. Ahora que usted decidió realizar un esfuerzo más por instruirse y superarse, permítanos felicitarlo calurosamente.

Como ya se imaginará usted, el estudio de este libro requiere constancia y mucho trabajo; pero el esfuerzo vale la pena. Todo lo que el ser humano adquiere con su propio trabajo le resulta verdaderamente valioso y es lo que le produce las mayores satisfacciones.

A medida que vaya avanzando en el estudio de este libro irá usted adquiriendo lo siguiente:

a) Una conceptuación más precisa de las ideas matemáticas que usted obtuvo en la escuela primaria.

b) Un conocimiento más amplio de las operaciones con los números y de las propiedades que tienen esas operaciones.

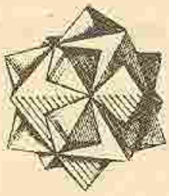
c) Una habilidad para interpretar y manejar correctamente los simbolismos matemáticos.

d) Una habilidad para analizar y resolver problemas.

e) Una habilidad para resolver y emplear adecuadamente algunas ecuaciones.

Al alcanzar estos objetivos particulares usted habrá logrado su objetivo general: Obtener la preparación suficiente para acreditar su primer curso de matemáticas, correspondiente al primer año de la escuela secundaria.

Los autores



Algunas orientaciones para el estudio de este libro

Tanto usted como nosotros, amigo lector, deseamos que el tiempo dedicado al estudio de este libro rinda los mejores frutos. Con esta idea, nos permitimos hacer a usted algunas sugerencias:

Prepare un sitio adecuado para sus estudios. Un lugar en el que se sienta cómodo y tranquilo para estudiar a gusto.

Elabore su propio horario de estudios de acuerdo con sus otras ocupaciones. Es conveniente estudiar entre 50 y 60 minutos diarios, por lo menos 5 días a la semana.

Empiece cada sesión de estudio teniendo a la mano los útiles que va a necesitar: cuaderno, lápiz, papel, pluma, goma, pinturas, etc.

Procure usted cumplir con el horario que se haya fijado para estudiar. El contenido de este libro podrá cubrirse aproximadamente en 120 horas de trabajo; pero esto es muy relativo, pues todo depende de las condiciones y necesidades de cada persona. Esperamos que usted avance normalmente y tenga la satisfacción de terminar a tiempo el material del libro.

A continuación le explicamos cómo está hecho el libro y le sugerimos cómo estudiar en él para obtener el máximo provecho.

A fin de facilitar su manipulación, el libro ha sido dividido en dos partes, pues consideramos que se puede trabajar mejor en dos tomos, relativamente delgados, que en un libro demasiado grueso. En cada tomo se presenta un capítulo del libro, y es el material que corresponde, aproximadamente, a la mitad del curso.

Cada lección en el libro consta de una breve explicación, algunos ejemplos y varios ejercicios y problemas.

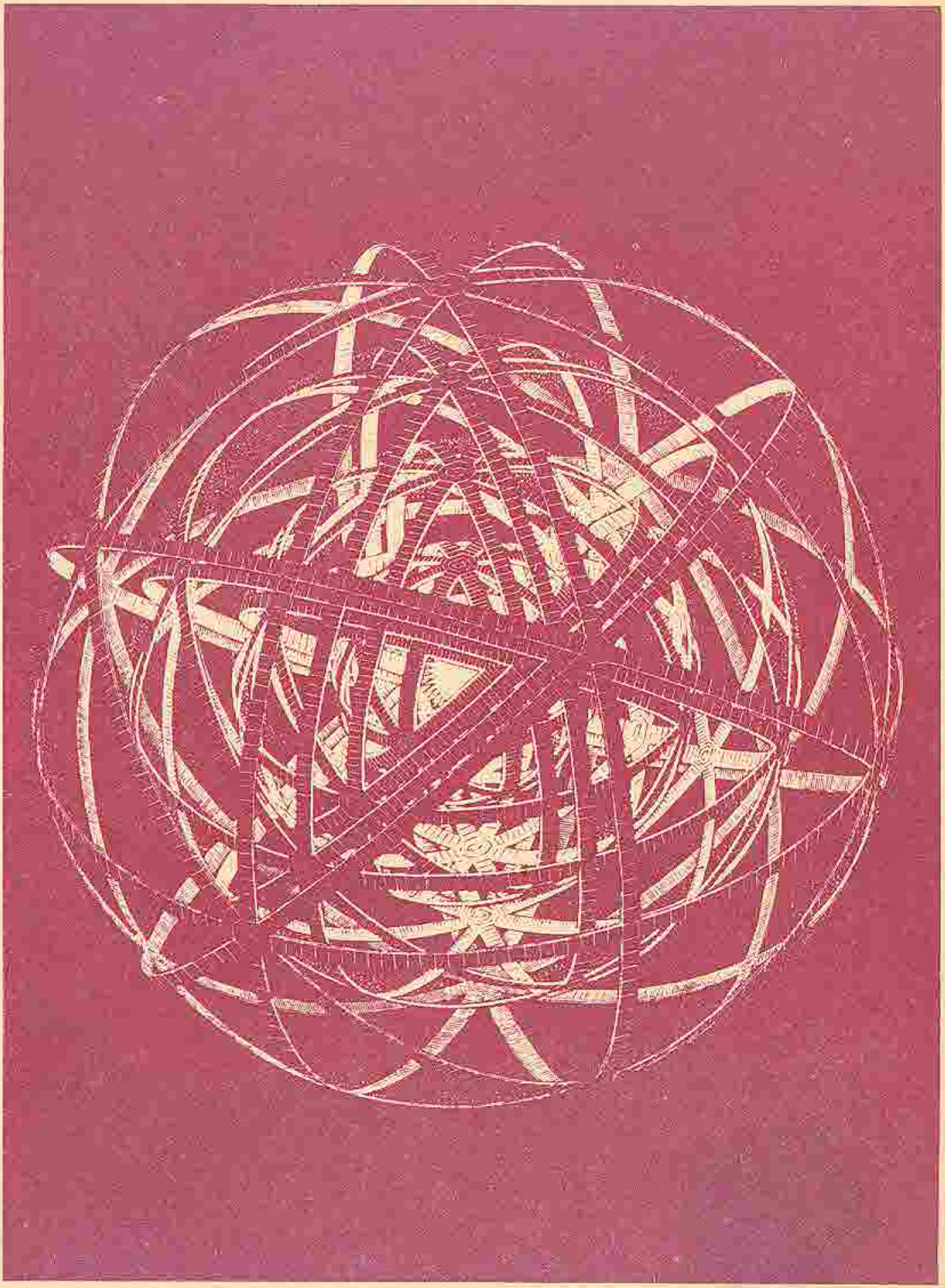
Lea cuidadosamente la explicación hasta que capte la idea que se expone. Los ejemplos ayudan a aclarar la misma idea. Por eso léalos también con mucho cuidado, sígalos con toda atención y, finalmente, resuelva los ejercicios.

La solución de todos los ejercicios se encuentra al final de cada tomo. Compare usted sus respuestas con las que ahí se dan. Si tuvo errores, analice por qué, repase las explicaciones y ejemplos y, por último, corrija las fallas que haya tenido en su resolución. No pase usted a la lección siguiente sin haber hecho este trabajo por completo. Esto es de vital importancia para lograr un aprendizaje firme.

Algunos ejercicios y problemas están marcados con una pantalla amarilla para indicar que tienen un grado de dificultad mayor que los otros. Resuélvalos con mucho cuidado.

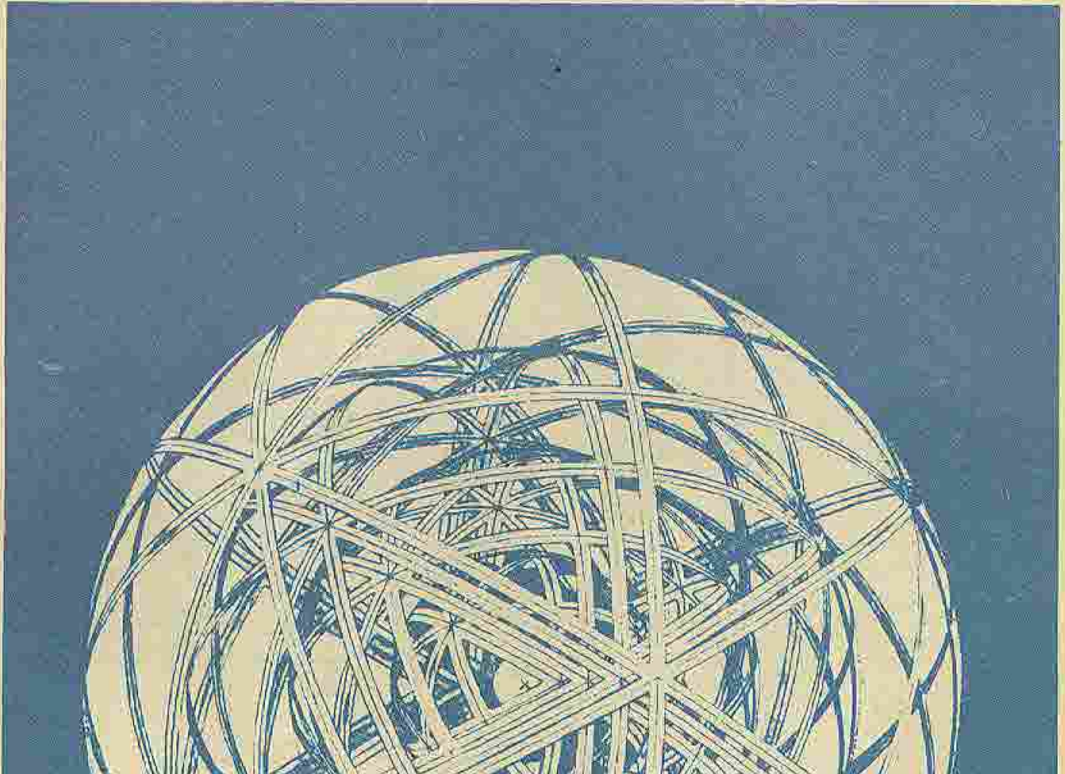
El presente libro es, al mismo tiempo, un texto y un cuaderno de trabajo. Esperamos que su estudio le ayude a lograr el objetivo que usted se ha fijado.

Capítulo primero



I

Los números naturales



I. Los números naturales y los conjuntos

El hombre, en su afán de comprender mejor el mundo que habita, ha creado muchos conceptos que le han sido de gran utilidad. Uno de estos conceptos es el de **número.**

Los números que aparecieron primero en la historia de la civilización fueron los **números naturales.**

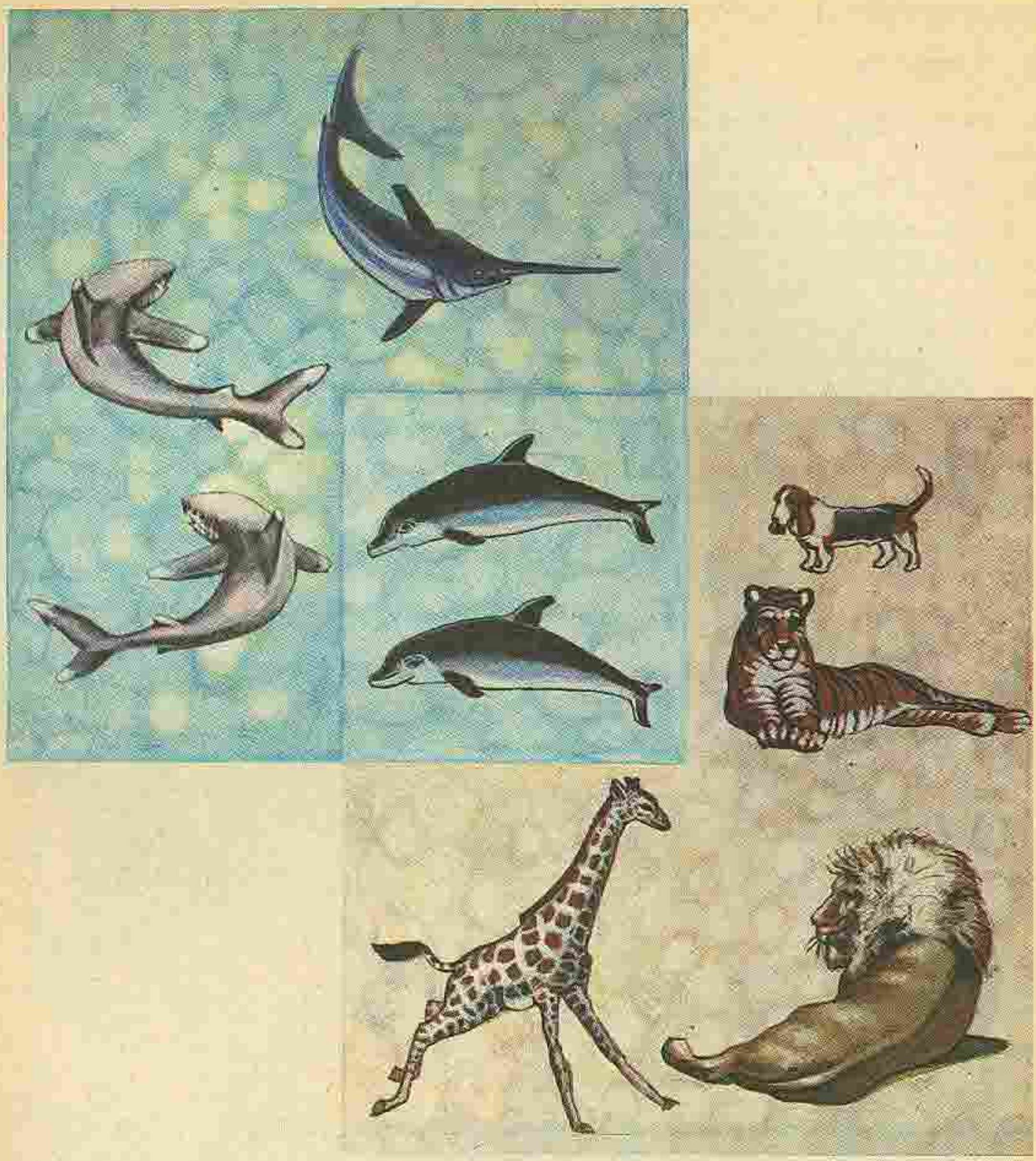
Los números naturales son 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, etc., y se usan para contar; es decir, para indicar cuántos objetos hay en un conjunto dado.

A veces es muy fácil contar los elementos que hay en un conjunto. Por ejemplo, al ver esta ilustración podemos decir rápidamente que hay 6 personas, 1 mesa, 7 sillas, 3 flores, etc.

Otras veces no es tan sencillo contar los elementos que hay en un conjunto. Por ejemplo, veamos la siguiente situación.

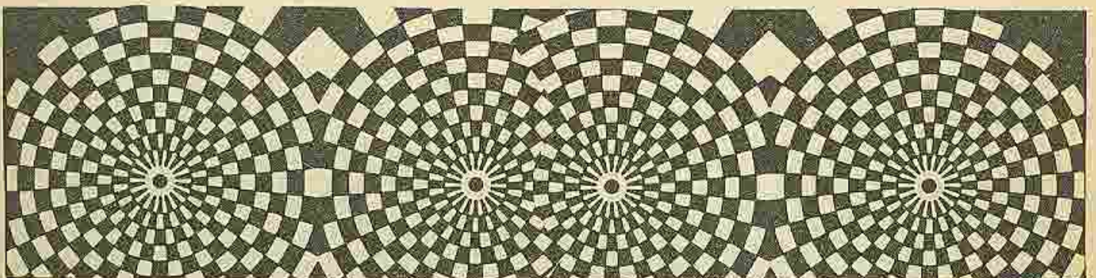
En cierto zoológico hay sólo animales acuáticos y animales mamíferos. Se nos informa que hay 150 animales que son acuáticos y 200 que son mamíferos. Si sabemos que entre esos animales hay 50 que son acuáticos y mamíferos a la vez, ¿podemos decir, con esos datos, cuántos animales tiene el zoológico?

Es posible que no vea usted ahora con claridad cómo se debe resolver este problema. Para interpretar bien este tipo de problemas conviene estudiar algunos conceptos relativos a conjuntos. Pero por lo pronto, quizá pueda usted hallar la respuesta al observar la siguiente ilustración.



Aquí tenemos 5 animales acuáticos y 6 animales mamíferos. Sin embargo, no son 11 animales en total, sólo vemos 9. Eso se debe a que hay 2 animales (los dos delfines) que son a la vez acuáticos y mamíferos.

En lo que sigue vamos a estudiar algunas ideas relativas a conjuntos.



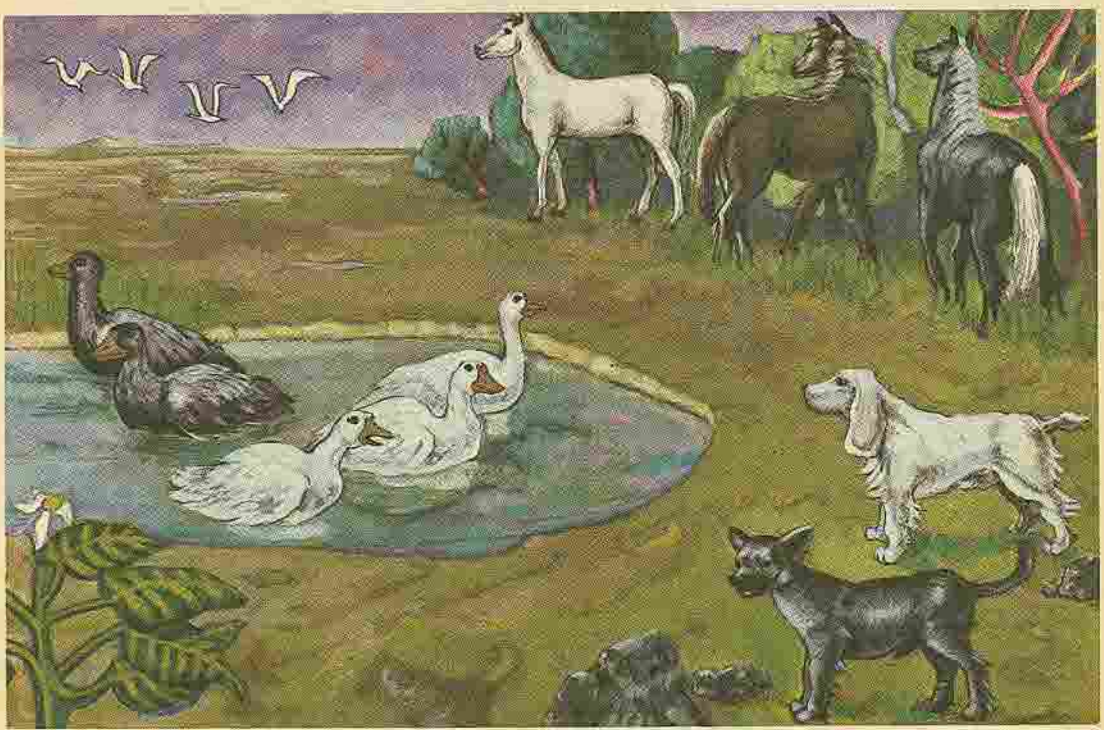
1. Conjuntos

En los párrafos anteriores encontramos expresiones relativas a algún "conjunto" de objetos, a los elementos de un "conjunto", al número de elementos de un "conjunto", etc.

En nuestro lenguaje diario usamos muchas palabras que tienen el mismo significado que la palabra "conjunto". Por ejemplo, hablamos de una "manada" de lobos; podríamos decir un "conjunto" de lobos; hablamos de una "colección" de cuadros; podríamos decir un "conjunto" de cuadros; hablamos de un "montón" de piedras; podríamos decir un "conjunto" de piedras; hablamos de un "rebaño" de vacas; podríamos decir un "conjunto" de vacas; etc.

Sin embargo, en matemáticas se emplea casi exclusivamente la palabra **conjunto** para referirse a esa idea y, además, se dice que los objetos, animales o personas que constituyen un conjunto son los **elementos** de ese conjunto.

Al observar la siguiente ilustración podemos pensar en varios conjuntos. Por ejemplo, el conjunto de patos, el de gaviotas, el de animales blancos, el de todos los animales de la figura, etc. ¿Podría usted indicar algunos otros conjuntos en la ilustración?



A fin de abreviar el lenguaje, conviene utilizar alguna letra para referirse a un conjunto determinado. Por ejemplo, podemos llamar C al conjunto de caballos de la figura. Así, C está formado por el caballo blanco (palomo), el caballo negro (azabache) y el caballo café (alazán).

Si recordamos que los elementos de un conjunto son los objetos, animales o personas que lo forman, podemos decir, por ejemplo, que el caballo alazán *es un elemento* del conjunto C.

Podríamos llamar A al conjunto de animales cuyo cuerpo está cubierto de plumas.

Así podríamos decir, por ejemplo, que el pato que tiene abierto el pico *es un elemento* de *A*.

Si denotamos con *B* al conjunto de animales blancos podemos afirmar que el perro negro *no es elemento* de *B*.

También podemos decir que:

Si *D* es el conjunto de perros, *D* tiene 2 elementos.

Si *V* es el conjunto de todos los animales de la ilustración, *V* tiene 14 elementos.

Ejercicio 1. Si llamamos *P* al conjunto de patos, *G* al de gaviotas, *N* al de animales negros y *B* al de animales blancos en la ilustración, complete las siguientes afirmaciones.

a) El conjunto *P* tiene __5__ elementos.

b) El conjunto *C* tiene ______ elementos.

c) *B* tiene ______ elementos.

d) En *N* hay ______ elementos.

e) El conjunto ______ tiene 4 elementos.

f) El conjunto ______ tiene 9 elementos.

Ejercicio 2. Considerando los conjuntos que hemos mencionado en el ejercicio anterior complete cada expresión escribiendo "es" o "no es", según corresponda

a) El perro negro __no es__ un elemento de *B*.

b) El pato del pico abierto ____________ un elemento de *P*.

c) El perro negro ____________ un elemento de *N*.

d) El caballo alazán ____________ un elemento de *N*.

e) El caballo azabache ____________ un elemento de *N*.

f) El caballo blanco ____________ un elemento de *B*.

g) El perro negro ____________ un elemento de *G*.

Sucede, a menudo, que una misma idea puede expresarse en diferentes formas. Así, por ejemplo, cuando decimos

"el caballo negro *es un elemento* de *C*",

podemos expresar la misma idea afirmando que

"el caballo negro *pertenece* a *C*".

En nuestro estudio de los conjuntos manejaremos indistintamente cualquiera de estas dos formas de expresión. De manera que al decir "el caballo blanco *no pertenece a G*", estaremos diciendo lo mismo que "el caballo blanco *no es un elemento de G*"; al decir "el perro negro *pertenece* a *N*", estaremos diciendo lo mismo que "el perro negro *es un elemento de N*"; etc.

Ejercicio 3. Complete cada expresión escribiendo la frase "pertenece a" o bien "no pertenece a", según corresponda.

a) El perro negro ____pertenece a____ *P.*

b) El caballo blanco ____________ *B.*

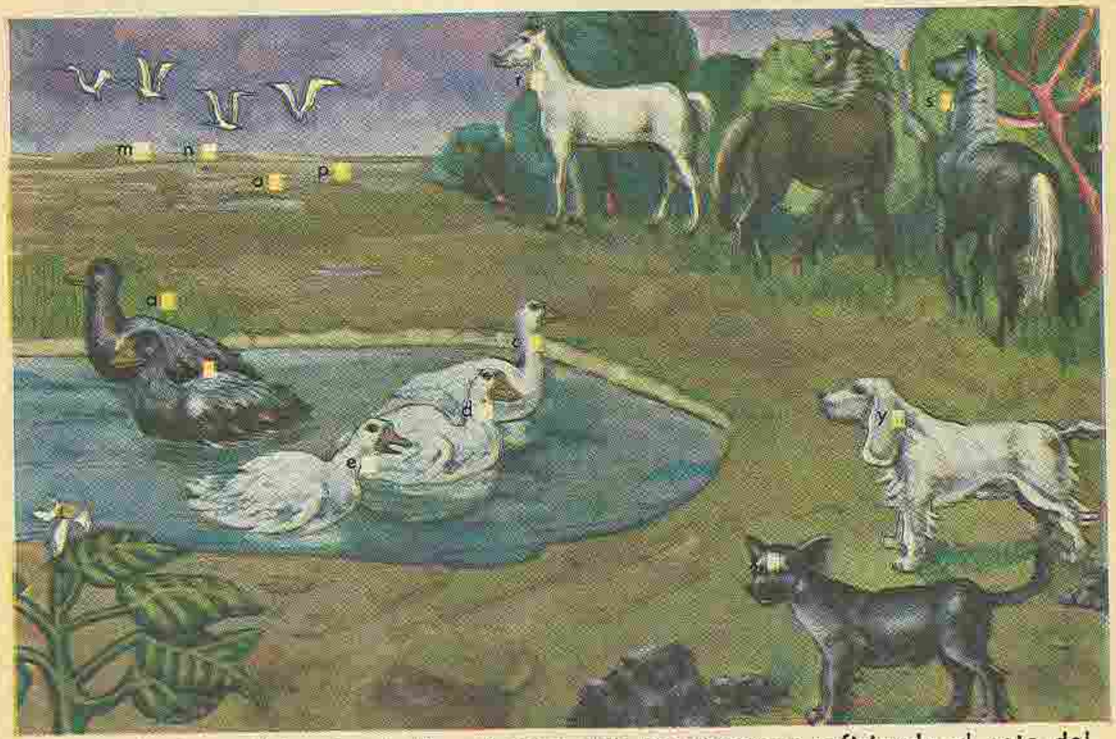
c) El caballo azabache ____________ *N.*

d) El perro blanco ____________ *N.*

e) El perro blanco ____________ *B.*

f) El perro blanco ____________ *G.*

En lo anterior hemos denotado algunos conjuntos por medio de letras. Para poder referirnos más brevemente a los elementos de un conjunto, también podemos utilizar letras. Por ejemplo, podríamos señalar los patos en la siguiente ilustración con las letras *a, b, c, d, e;* las gaviotas con *m, n, o, p;* los caballos con *r, s, t* y los perros con *x, y.*



Así, si decimos "el animal *e*", sabemos que nos estamos refiriendo al pato del pico abierto. Si hablamos del elemento *x* de la ilustración, estaremos hablando del perro negro.

Ejercicio 4. De acuerdo con la ilustración anterior, diga si son correctas o no las siguientes afirmaciones.

	correcto	incorrecto
a) b es un elemento de P	X	
b) b pertenece a B		
c) p es un elemento de N		
d) p es un elemento de G		
e) x pertenece a N		
f) y pertenece a N		

A veces es conveniente, al describir conjuntos, hacer una lista de todos sus elementos. Además, al hacer eso se acostumbra encerrar dicha lista entre "llaves". Por ejemplo, el conjunto de patos de nuestra ilustración puede describirse así:

$$\{a, b, c, d, e\}$$

Como a este conjunto también lo hemos llamado P, podemos escribir

$$P = \{a, b, c, d, e\}$$

Con este simbolismo estamos indicando que "P es el conjunto formado con los elementos a, b, c, d, e".

Ejemplo. El conjunto de los animales negros de nuestra ilustración puede denotarse así:

$$\{a, b, s, x\}.$$

Por lo tanto podemos escribir

$$N = \{a, b, s, x\}.$$

Esto se lee: "N es el conjunto cuyos elementos son a, b, s, x", o bien, "N es el conjunto formado por el pato negro a, el pato negro b, el caballo negro s y el perro negro x".

Ejercicio 5. Como se muestra en el inciso a), y de acuerdo con la discusión anterior, exprese los conjuntos que se indican.

a) $P = \{a, b, c, d, e.\}$

b) $G =$

c) $B =$

d) $N =$

Hasta aquí hemos trabajado exclusivamente con conjuntos formados por los animales de una ilustración. Veamos ahora otros ejemplos diferentes.

Ejemplo.

a) Podemos considerar el conjunto de los dígitos

$$D = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

b) El conjunto de los dígitos pares

$$P = \{0, 2, 4, 6, 8\}$$

c) El conjunto de los dígitos impares

$$I = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

d) El conjunto de nuestras vocales

$$V = \{a, e, i, o, u\}$$

e) El conjunto de figuras

Observaciones

1. Al describir un conjunto por medio de una lista de sus elementos, se acostumbra no repetir éstos. Así, por ejemplo, para indicar el conjunto de letras del alfabeto que figuran en la palabra "matemáticas" se escribe simplemente

$$\{m, a, t, e, i, c, s\}.$$

Las letras del alfabeto que aparecen en la palabra "usumacinta" forman el conjunto

$$\{u, s, m, a, c, i, n, t\}.$$

2. Hay algunos conjuntos cuya lista de elementos es imposible escribir. Por ejemplo, el conjunto de todos los números naturales. En casos así se acostumbra emplear puntos suspensivos:

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}.$$

Con esos puntos suspensivos se indica que la lista continúa indefinidamente.

Además, se conviene en llamar N al conjunto de todos los números naturales. Entonces, podemos escribir:

$$N = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}.$$

(N es el conjunto cuyos elementos son 1, 2, 3, 4, y así sucesivamente).

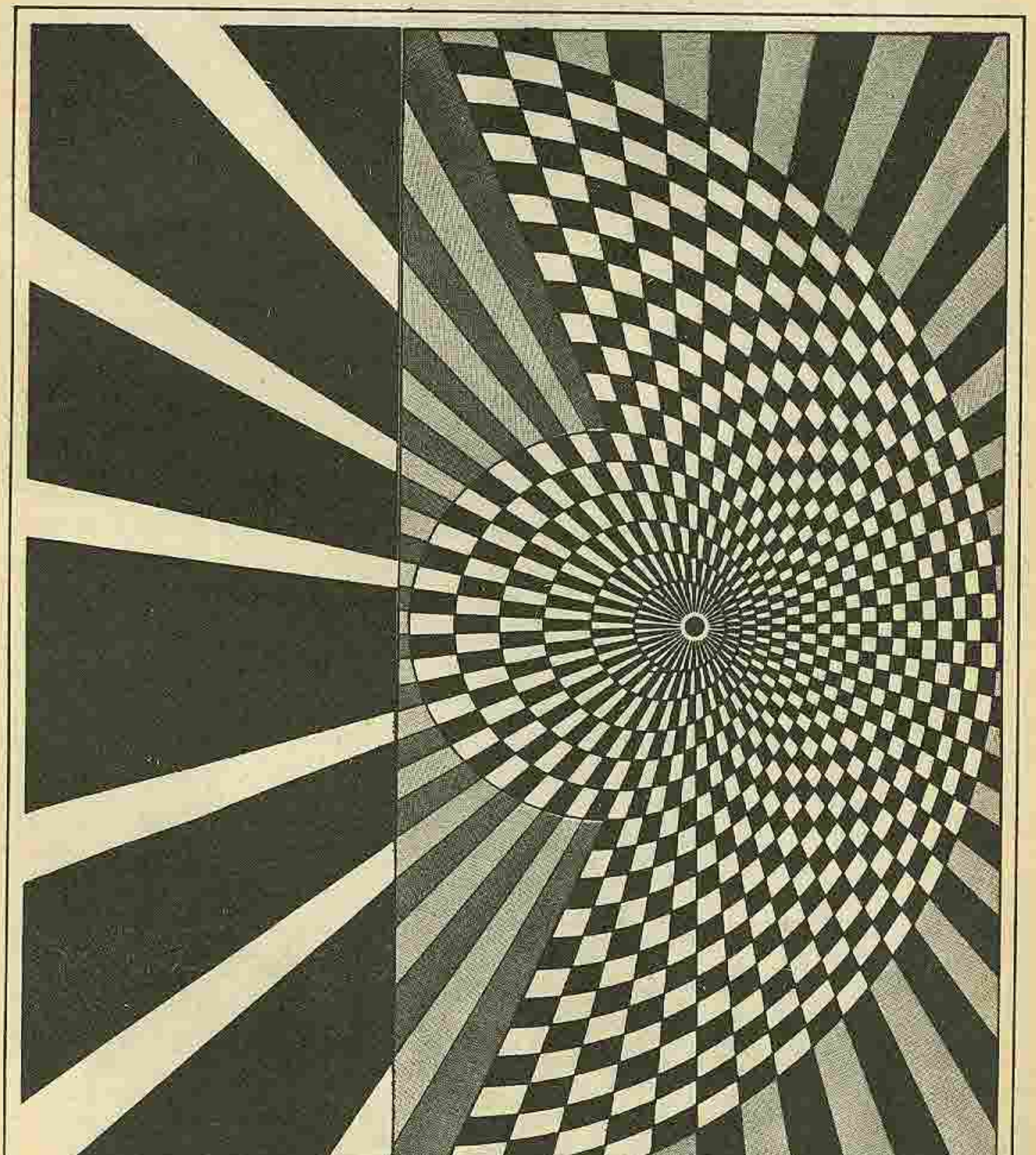
Ejercicio 6. Describa cada uno de los siguientes conjuntos poniendo entre "llaves" sus elementos.

a) Letras de la palabra "mamá" ______________________

b) Letras de la palabra "papaloapan" ______________________

c) Letras de la palabra "mississippi" ______________________

d) Vocales de la palabra "mississippi" ______________________



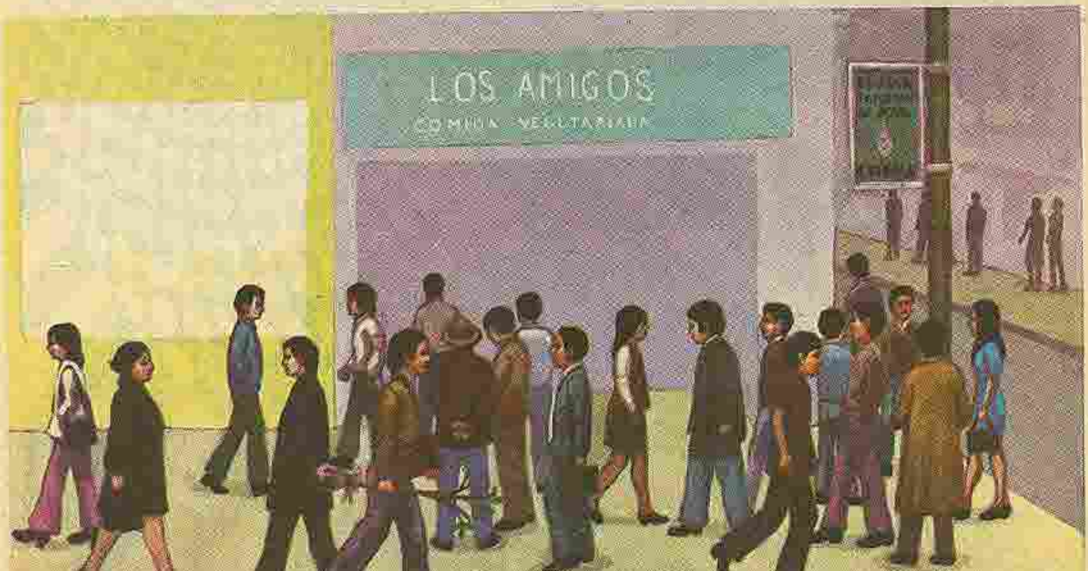
2. Subconjuntos

Observemos la siguiente ilustración:

Si nos preguntamos qué conjunto en la ilustración tiene más elementos, el conjunto *H* de los hombres o el conjunto *M* de las mujeres, contando podemos decir que hay menos hombres que mujeres.

Ahora bien, en algunos casos es posible asegurar que un conjunto tiene menos elementos que otro sin necesidad de contar los elementos que tiene cada uno de ellos.

Por ejemplo, podemos decir, con respecto a la siguiente ilustración,

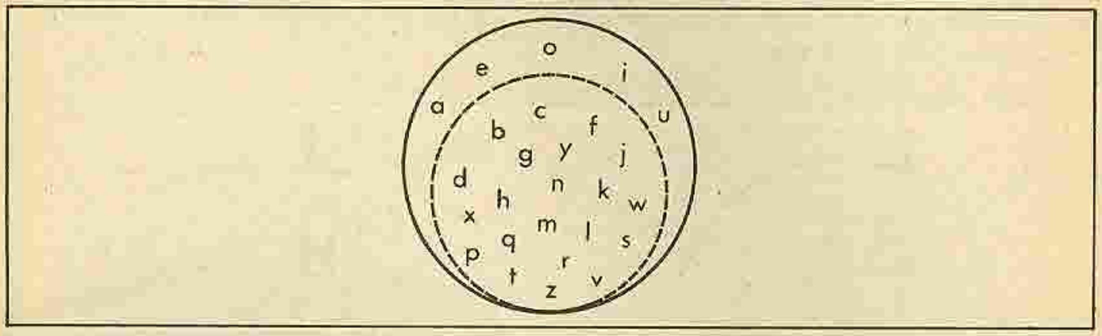


que hay menos mujeres que personas pues, como observamos, las mujeres forman parte del conjunto de todas las personas.

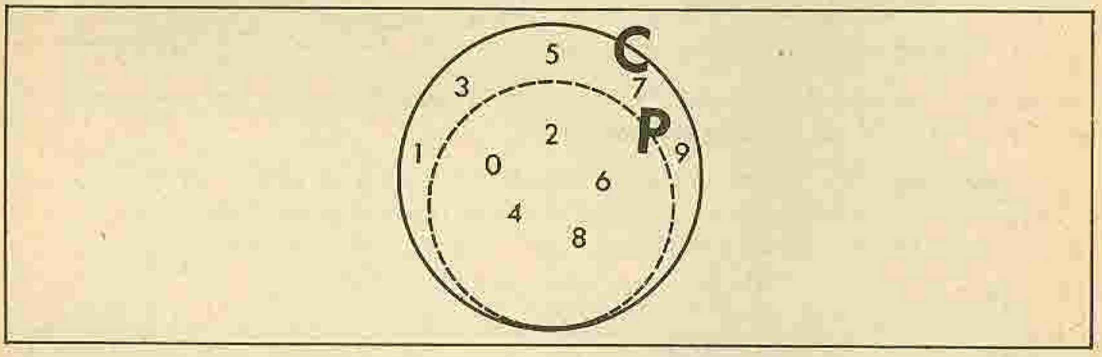
Veamos otros ejemplos.

a) Sin necesidad de contar los habitantes del estado de Veracruz ni los habitantes de la República Mexicana, podemos afirmar que el número de habitantes de Veracruz es menor que el número de habitantes de México, porque el conjunto de habitantes de Veracruz es "parte" del conjunto de habitantes de México.

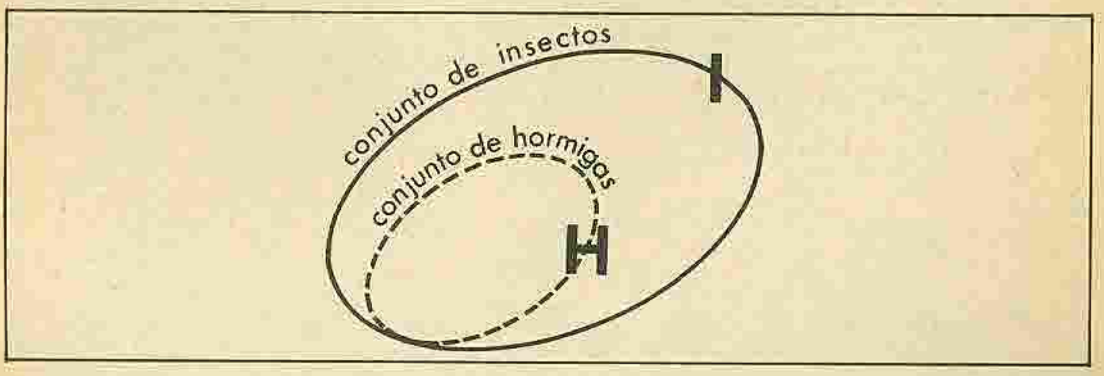
b) El número de consonantes es menor que el número de letras, pues el conjunto de consonantes es "parte" del conjunto de letras.



c) El número de elementos del conjunto $P = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ es menor que el número de elementos de $C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. pues P es "parte" de C.



d) El conjunto H de las hormigas es "parte" del conjunto I de los insectos. Podemos decir que hay menos elementos en el conjunto conjunto H que en el I, sin necesidad de contar los elementos de cada conjunto.

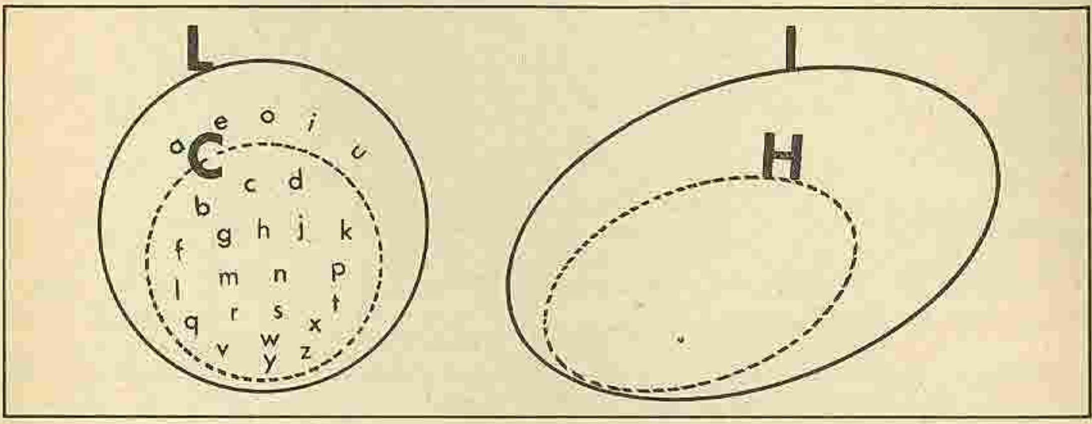


En los ejemplos anteriores hemos observado que a veces un conjunto es "parte" de otro. En matemáticas, para expresar esta idea se dice que un conjunto **está contenido** en otro.

Más precisamente,

Cuando todos los elementos de un conjunto *A* están también en un conjunto *B*, se dice que el conjunto *A* está contenido en el conjunto *B*.

Así podemos decir, por ejemplo, que el conjunto *C* de las consonantes está contenido en el conjunto *L* de letras; el conjunto *H* de las hormigas está contenido en el conjunto *I* de los insectos.



Para decir de otra manera que "el conjunto *A* está contenido en el conjunto *B*" afirmamos que "*A* **es un subconjunto de** *B*".

Con esta forma de hablar, podemos repetir los ejemplos anteriores diciendo que el conjunto *C* de consonantes es un subconjunto del conjunto *L* de letras; el conjunto *H* de hormigas es un subconjunto del conjunto *I* de insectos.

Así pues,

Para comprobar que un conjunto *A* está contenido en un conjunto *B*, basta ver que todo elemento de *A* pertenece también a *B*.

Ejercicio 7. Considerando los conjuntos

$$A = \{2, 3, 7, 6, 9\}$$

$$B = \{2, 3, 7, 6\}$$

$$C = \{3, 6, 2\}$$

$$D = \{2\}$$

indique usted si las expresiones siguientes son correctas o incorrectas.

a) B es subconjunto de A ______correcto______

b) C es subconjunto de A ________________

c) D está contenido en B ________________

d) A es subconjunto de D ________________

e) D es subconjunto de C ________________

f) A está contenido en C ________________

En general, un conjunto tiene muchos subconjuntos. Consideremos por ejemplo el siguiente conjunto A:

$$A = \{r,\ s,\ t,\ u\}$$

Los subconjuntos de A que tienen un elemento son

$\{r\}$, $\{s\}$, $\{t\}$ y $\{u\}$.

Los subconjuntos de A que tienen 2 elementos son

$\{r, s\}$, $\{r, t\}$, $\{r, u\}$, $\{s, t\}$, $\{s, u\}$ y $\{t, u\}$.

Los subconjuntos de A que tienen 3 elementos son

$\{s, t, u\}$, $\{r, t, u\}$, $\{r, s, u\}$ y $\{r, s, t\}$.

Sólo hay un subconjunto de A que tiene 4 elementos. Es el mismo conjunto A:

$\{r, s, t, u\}$.

Ejemplo.

Consideremos el conjunto

$B =$ {△ , ■ , ★}

Los subconjuntos de B de un elemento, son

{△} , {■} y {★}

Los subconjuntos de *B* de 2 elementos son

{△, ■}   {△, ★}   {■, ★}

Hay un solo subconjunto de *B* con 3 elementos. Es el mismo conjunto *B*:

{▲, ■, ★}

Ejemplo. Consideremos el conjunto

{▲, ■}

Los subconjuntos de *C* de 1 elemento son

{▲} y {■}

El único subconjunto de *C* que tiene 2 elementos es el mismo conjunto *C*:

{▲, ■}

Ejemplo. Consideremos el conjunto

$D = \{7,\ 3,\ 5\}.$

Los subconjuntos de *D* de 1 elemento son

$\{7\}$, $\{3\}$ y $\{5\}$.

Los subconjuntos de *D* de 2 elementos son

$\{7,\ 3\}$, $\{7,\ 5\}$ y $\{3,\ 5\}$.

El subconjunto de *D* con 3 elementos es *D*:

$\{7,\ 3,\ 5\}$.

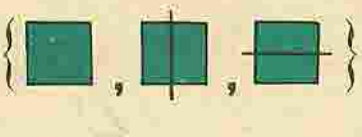
Ejercicio 8. Como en los ejemplos anteriores, en cada inciso anote los subconjuntos que se piden.

a) *F* = 

Los subconjuntos de *F* de 1 elemento son ______________________________

Los subconjuntos de *F* de 2 elementos son ______________________________

El subconjunto de *F* con 3 elementos es ______________________________

b) *G* = 

Los subconjuntos de G de 1 elemento son ________________________

Los subconjuntos de G de 2 elementos son ________________________

El subconjunto de G con 3 elementos es ________________________

c) $H = \{3, \ 9\}$.

Los subconjuntos de H de 1 elemento son ________________________

El subconjunto de H de 2 elementos es ________________________

d) $I = \{2, \ 9, \ 5\}$.

Los subconjuntos de I que tienen 2 elementos son ____________________

El subconjunto de I que tiene 3 elementos es ______________________

Los subconjuntos de I con 1 elemento son ________________________

Problema. Un profesor de educación física dispone de 4 nadadoras. Si debe hacer una selección de 3 nadadoras, ¿cuántas selecciones diferentes puede hacer?

Resolución. Llamemos N al conjunto de las 4 nadadoras. Esto es,

$N = \{a, \ b, \ c, \ d\}$.

Las selecciones de 3 nadadoras, que puede hacer el profesor, son los subconjuntos de N que tengan 3 elementos:

$$\{b, \ c, \ d\}, \{a, \ c, \ d\}, \{a, \ b, \ d\} \text{ y } \{a, \ b, \ c\}.$$

Respuesta. El profesor puede hacer 4 selecciones diferentes.

Problemas. Utilice sus conocimientos acerca de los subconjuntos para hallar la solución de los siguientes problemas.

a) Una persona tiene en su cartera 3 billetes, uno de $ 5.00, uno de $ 10.00 y uno de $ 20.00. Si de los 3 billetes únicamente saca dos, ¿cuáles son las diferentes cantidades de dinero que puede sacar?

b) A un joven le obsequian 3 obras de Julio Verne, "Un viaje a la Luna", "20 000 leguas de viaje submarino" y "Un viaje al centro de la Tierra". Si sólo desea leer dos de esas obras, ¿de cuántas maneras puede hacer su elección?

c) A un entrenador de futbol le permiten contratar 1, 2 y hasta 3 jugadores extranjeros. Los candidatos son un uruguayo, un chileno y un brasileño ¿De cuántas maneras puede el entrenador hacer la contratación?

Si contrata sólo a un jugador

____

Si contrata a dos jugadores

____

Si contrata a los 3 jugadores

____

El entrenador puede hacer la contratación en ______ maneras distintas.

d) En una feria una persona dispara 3 dardos sobre 3 globos, uno rojo, otro amarillo y otro verde. ¿De cuántas maneras diferentes puede ser el resultado?

Si no revienta ningún globo ______________

Si revienta un globo ______________

Si revienta dos ______________

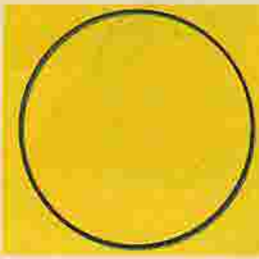
Si revienta tres ______________

Los resultados diferentes pueden ser

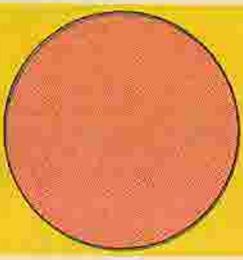
Hasta aquí hemos hablado de conjuntos de objetos, letras, números, etc. Conviene que hablemos de algunos conjuntos en relación con la geometría.

Ejemplo.

a) Las figuras geométricas constan de puntos. Son conjuntos de puntos del espacio. Aquí ilustramos algunas.

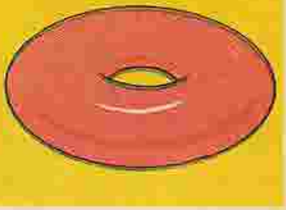


circunferencia

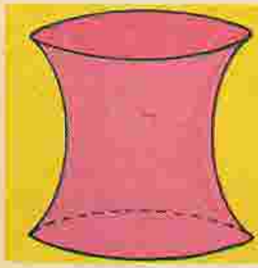


círculo

esfera

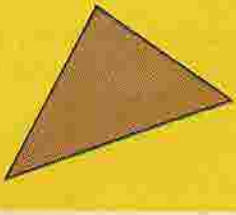


toro

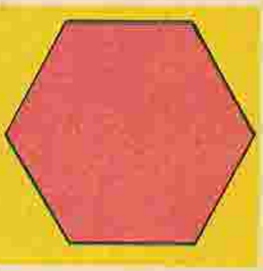


hiperboloide

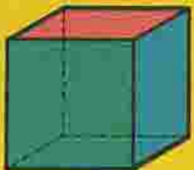
segmento



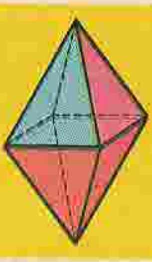
triángulo



exágono

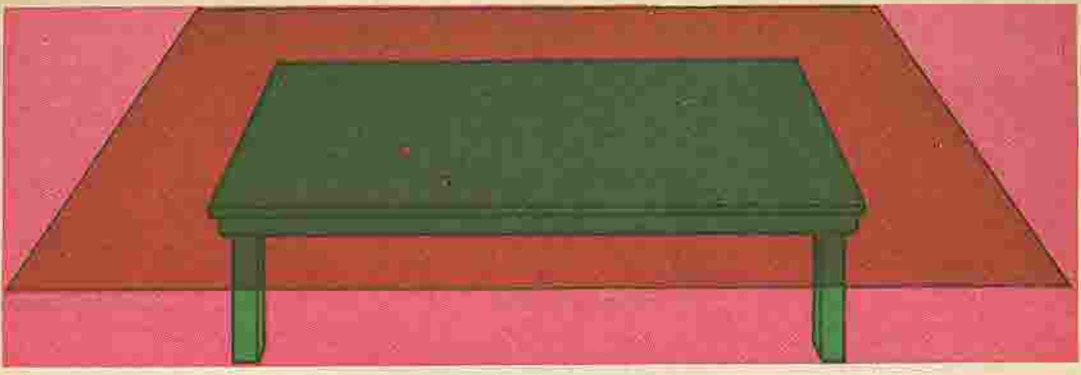


cubo

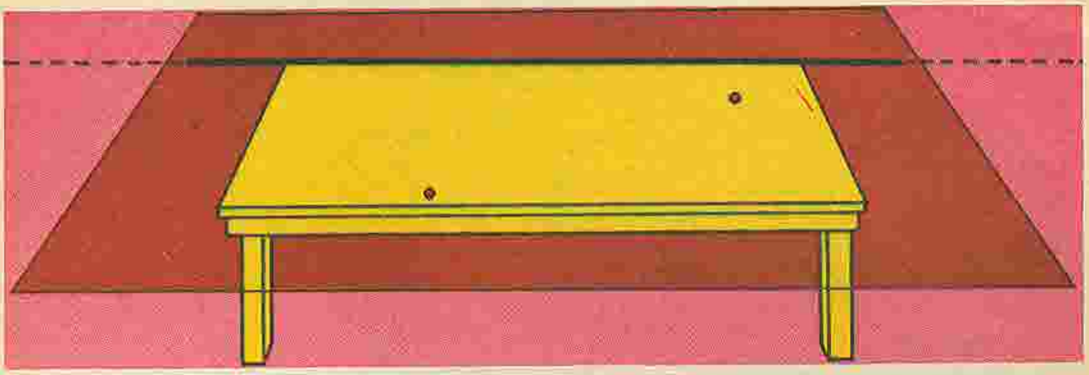


octaedro

b) La superficie de la mesa del dibujo que sigue determina un plano. Un plano es un conjunto de puntos. Con color se indican algunos puntos de dicho plano.



c) La recta determinada por un "filo" de la mesa (ilustrada en verde) está contenida en el plano pintado de rojo. Todos los puntos de la recta pertenecen al plano. La recta es un subconjunto del plano.

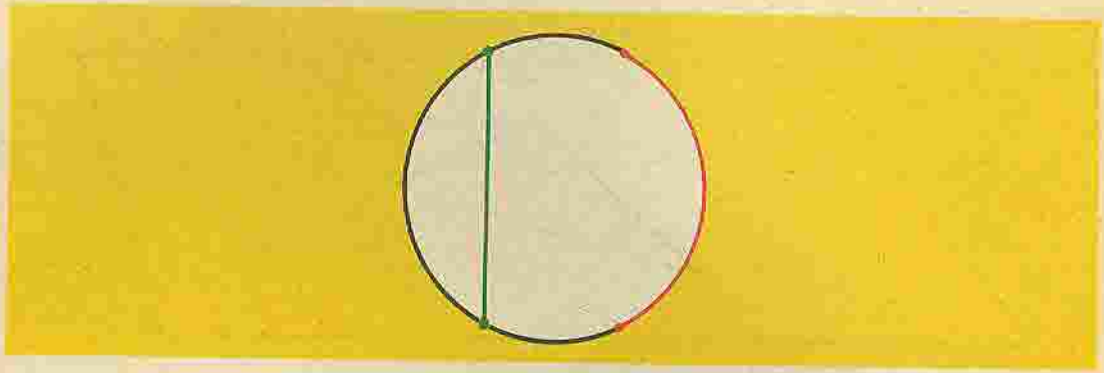


Los puntos marcados con negro pertenecen a la recta y, por lo tanto, al plano. Los marcados de rojo están en el plano, pero no en la recta.

d) El segmento pintado de rojo, en el siguiente dibujo, es un subconjunto de la recta. Todos los puntos del segmento están en la recta.

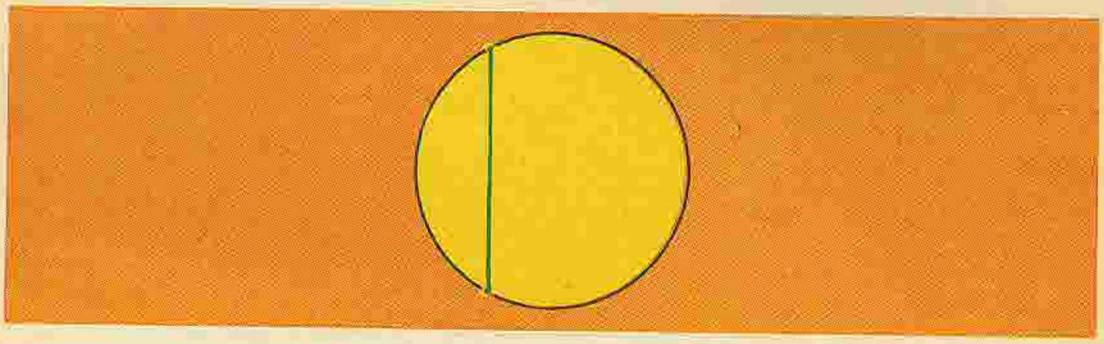
Los puntos marcados con rojo pertenecen al segmento y, por lo tanto, a la recta. Los tres puntos marcados con verde están en la recta, pero no en el segmento.

e) El arco marcado con rojo es un subconjunto de la circunferencia. Todo punto del arco pertenece a la circunferencia.

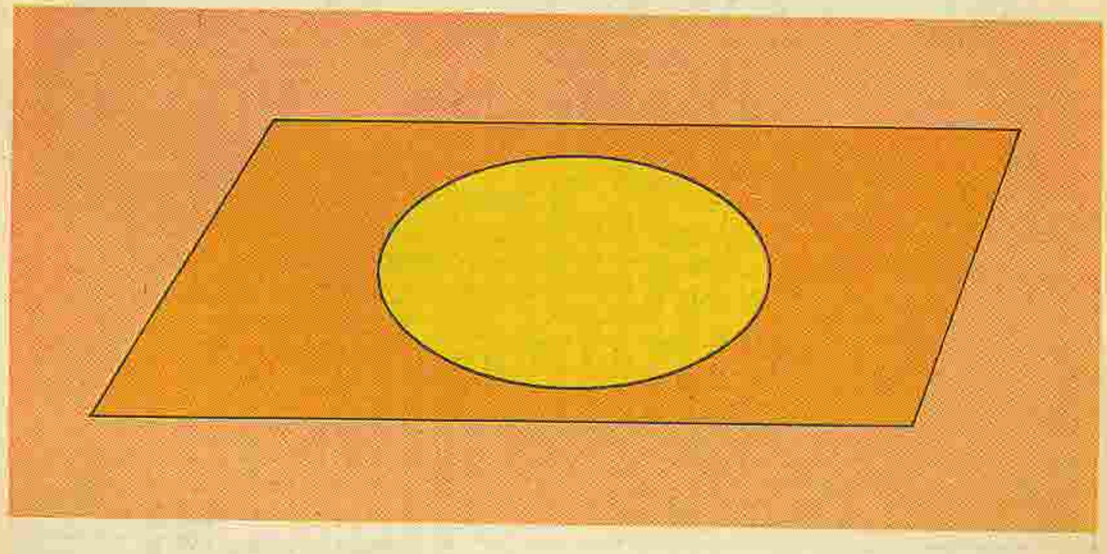


La cuerda marcada con verde no es un subconjunto de la circunferencia. Solamente los extremos de la cuerda pertenecen a la circunferencia. Sus demás puntos no.

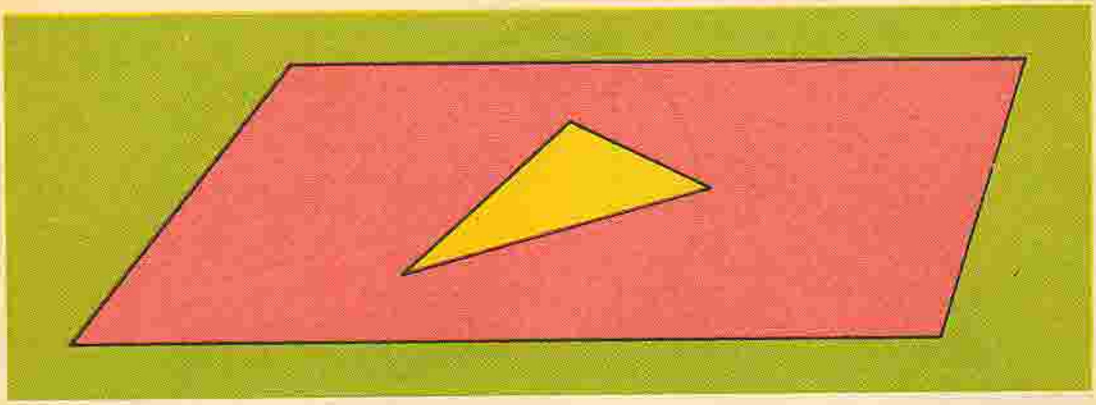
f) La cuerda marcada con verde es un subconjunto del círculo. Todos los puntos de la cuerda son puntos del círculo.



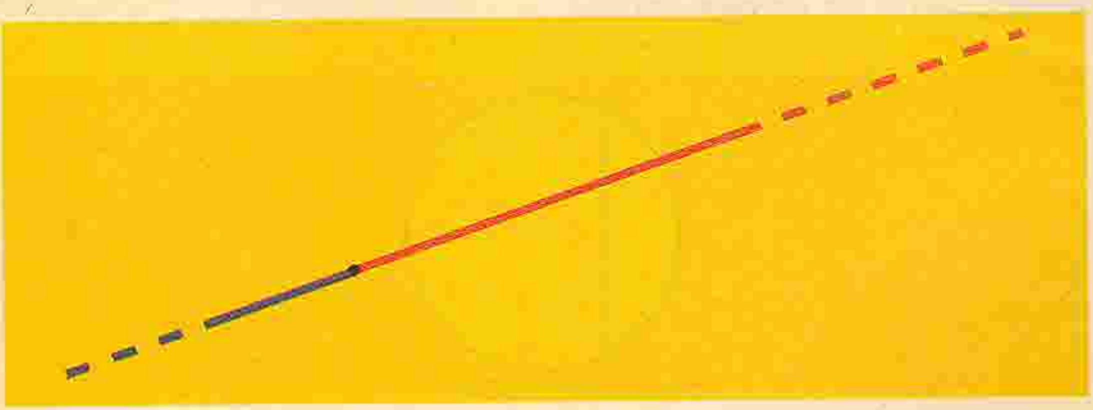
g) En el siguiente dibujo se ilustra un círculo contenido en un plano. El círculo es un subconjunto del plano. Todos los puntos del círculo pertenecen también al plano.

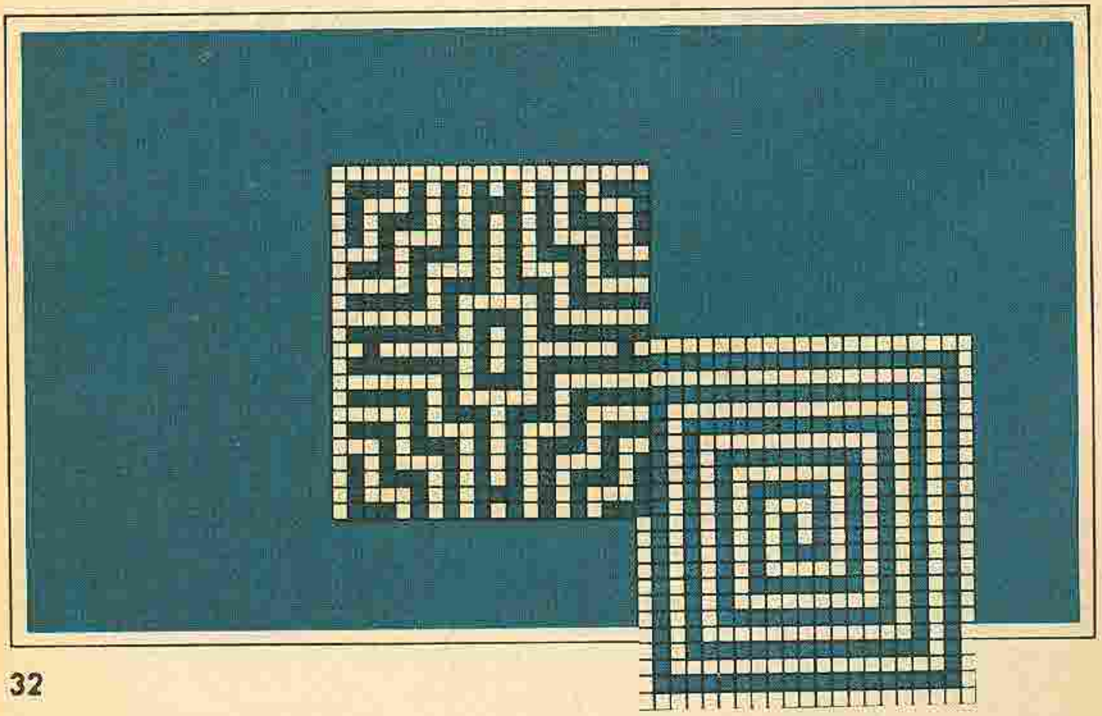


h) El triángulo que se ilustra está contenido en el plano. Es un subconjunto del plano.



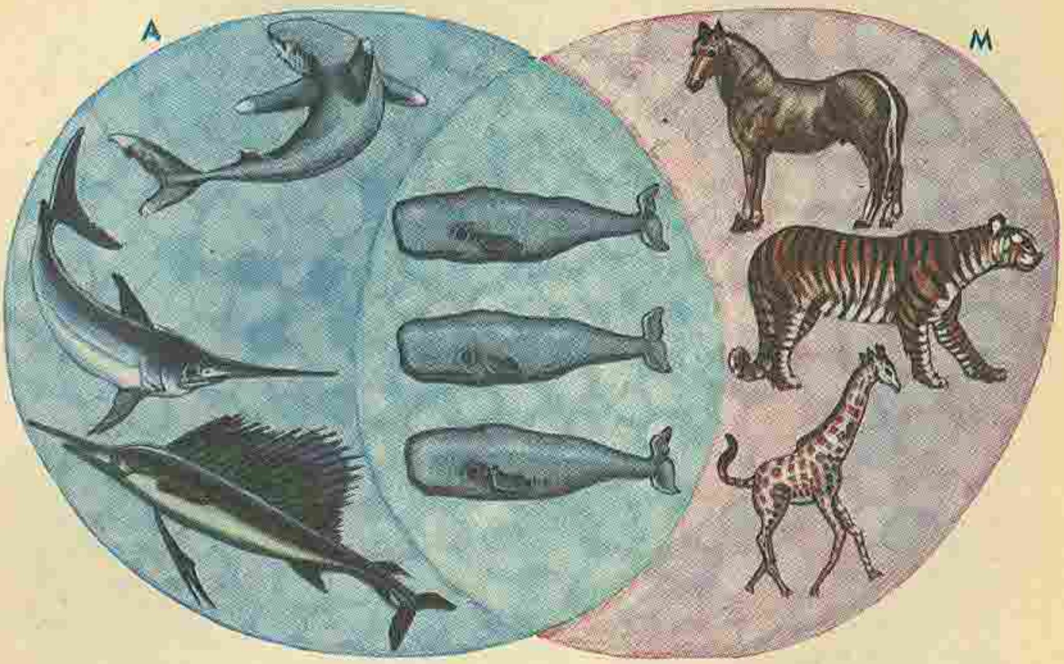
i) El rayo (o semirrecta) pintado de rojo está contenido en la recta. Es un subconjunto de ella.





3. Intersección de conjuntos

En la siguiente ilustración tenemos un conjunto *A* formado de animales acuáticos y un conjunto *M* de animales mamíferos.



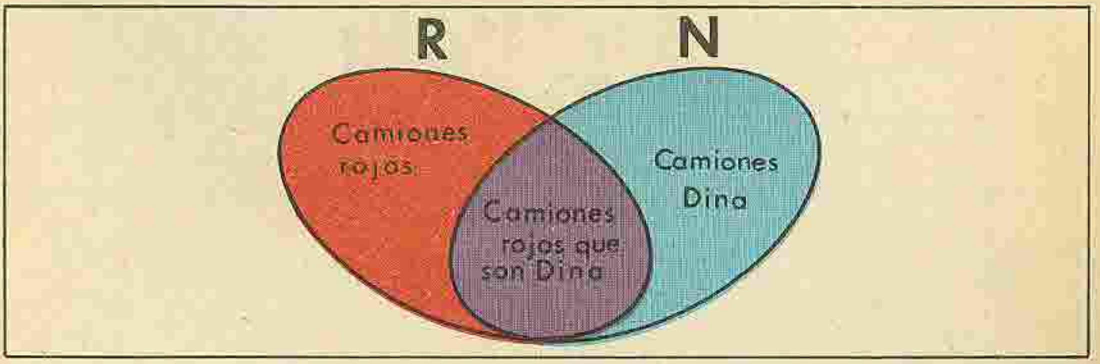
Observe usted que hay tres animales (las ballenas) que pertenecen a la vez a los dos conjuntos *A* y *M*, porque son al mismo tiempo acuáticos y mamíferos.

Al conjunto formado por esos tres animales que pertenecen simultáneamente a los dos conjuntos *A* y *M* se le llama **intersección** de *A* y *M*.

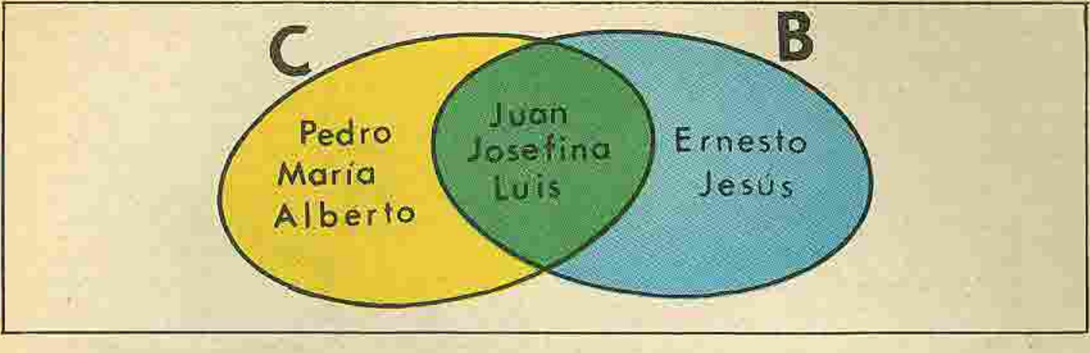
Frecuentemente observamos intersecciones de conjuntos, pues siempre hay cosas, animales o personas que pertenecen simultáneamente a dos conjuntos distintos.

Ejemplo.

a) Si pensamos en el conjunto *R* de camiones rojos que circulan en México y el conjunto *N* de camiones "Dina", la intersección de *R* y *N* será el conjunto formado con todos los camiones "Dina" de color rojo que circulan en México. Podemos ilustrar esto con el siguiente diagrama:



b) Aquí tenemos un conjunto *C* de personas que estudian inglés y un conjunto *B* de personas que estudian enfermería.



La intersección de *C* y *B* es el conjunto formado por Juan, Josefina y Luis, que son los elementos comunes a *C* y *B*. Es decir, son las personas que estudian ambas cosas, inglés y enfermería.

¿Cuántos elementos hay en *C*?

¿Cuántos elementos tiene *B*?

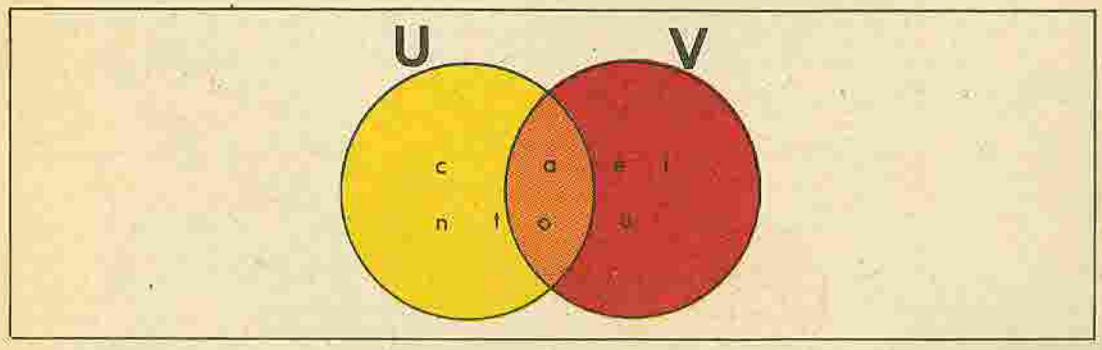
¿Cuántos elementos hay en la intersección de *C* y *B*?

c) Pensemos en el conjunto *U* de letras que aparecen en la palabra "canto" y el conjunto *V* de todas las vocales.

$U = \{c, a, n, t, o\}$.

$V = \{a, e, i, o, u\}$.

La intersección de estos dos conjuntos es $\{a, o\}$ porque *a* y *o* son los elementos que pertenecen tanto a *U* como a *V*.



Diga usted cuántos elementos tiene dicha intersección.

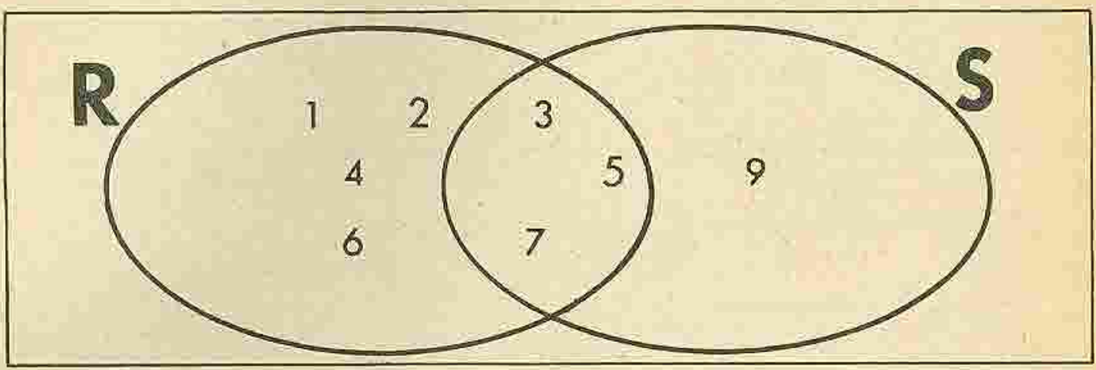
Tiene _______ elementos.

d) Consideremos ahora los conjuntos

$R = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

$S = \{3, 5, 7, 9\}$.

Los elementos comunes a ambos conjuntos, es decir, los que pertenecen a R y S simultáneamente, son los números 3, 5, 7. Por lo tanto, la intersección de R y S es el conjunto $\{3, 5, 7\}$. Podemos ilustrar esto con el siguiente diagrama:



¿Cuántos elementos tiene R?

¿Cuántos elementos hay en S?

¿Cuántos elementos tiene la intersección de R y S?

Ejercicio 9. Encuentre la intersección de cada par de conjuntos; diga cuántos elementos tiene e ilústrelo con un diagrama.

a) N = 

R = 

La intersección de N y R es el conjunto 

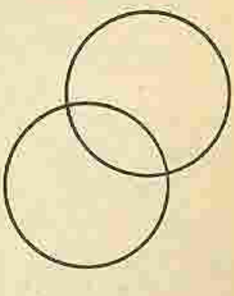
Tiene dos elementos.

b) $V = \{a, e, i, o, u\}$.

$T = \{m, a, e, s, t, r, o\}$.

La intersección de V y T es ______________.

Tiene ________ elementos.

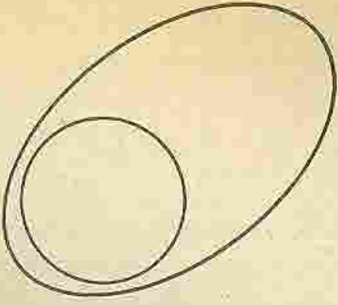


c) $P = \{0, 2, 4, 6, 8\}$.

$Q = \{2, 4, 6\}$

La intersección de P y Q es ________

Tiene ________ elementos.

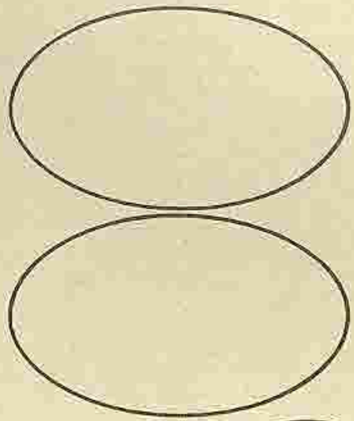


d) $M = \{$Enero, febrero, diciembre$\}$.

$N = \{$Septiembre, octubre, noviembre$\}$.

La intersección de M y N es ________

Tiene ________ elementos.

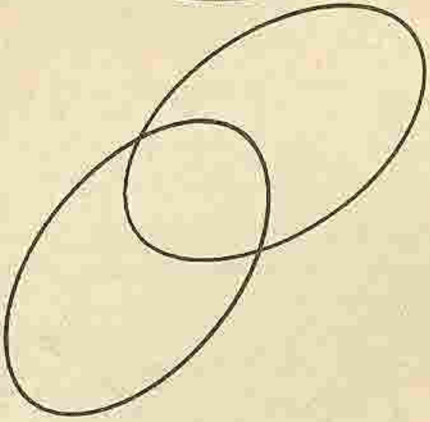


e) $P = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$.

$M = \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$.

La intersección de P y M es ________

Tiene ________ elementos.



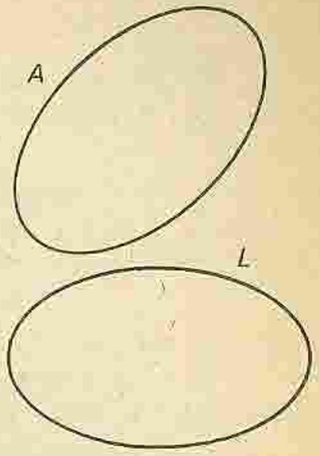
A veces ocurre, como vemos en el inciso d), del ejercicio anterior, que la intersección de dos conjuntos carece de elementos, o sea, no hay elementos comunes a los dos conjuntos. En este caso se dice que los dos conjuntos son *ajenos*. Por ejemplo, los conjuntos A y B siguientes,

$A = \{a, b, c\}$

$B = \{p, q, r, s\}$

son ajenos porque no hay ningún elemento que pertenezca simultáneamente a los dos conjuntos.

Ejercicio 10. De las siguientes parejas de conjuntos, diga cuáles son ajenos y cuáles no. Haga un diagrama de cada pareja.



a) *A* es el conjunto de árboles de Chapultepec.

L es el conjunto de leones de Chapultepec.

A y *L* son ajenos.

b) *M* es el conjunto de consonantes del castellano.

R es el conjunto de vocales del castellano.

M y *R* ______ ajenos.

c) *B* es el conjunto de médicos mexicanos.

C es el conjunto de empleados del Seguro Social.

B y *C* ______ ajenos.

d) *D* es el conjunto de artistas mexicanos.

E es el conjunto de cantantes mexicanos.

D y *E* no son ajenos.

e) *F* es el conjunto de habitantes de Jalisco.

G es el conjunto de campesinos jaliscienses.

F y *G* ______ ajenos.

En resumen, podemos decir que:

La intersección de dos conjuntos *A* y *B*, cualesquiera, es el conjunto formado con los elementos que pertenecen simultáneamente a *A* y *B*.

Algunas veces dos conjuntos no tienen elementos en común. Entonces se dice que esos dos conjuntos son ajenos.

Problemas.

Pensando en la intersección de conjuntos, trate usted de resolver los siguientes problemas.

a) En la primera función de un teatro estuvieron presentes 250 espectadores y a la segunda asistieron 200 personas. Sin embargo, para las dos funciones sólo se vendieron 400 boletos. Si ninguna persona puede entrar sin boleto, ¿cómo se explica esto?

b) Hay 19 personas que forman 2 equipos de futbol. Si cada equipo está integrado por 11 jugadores, ¿cómo es posible esto? Explíquelo.

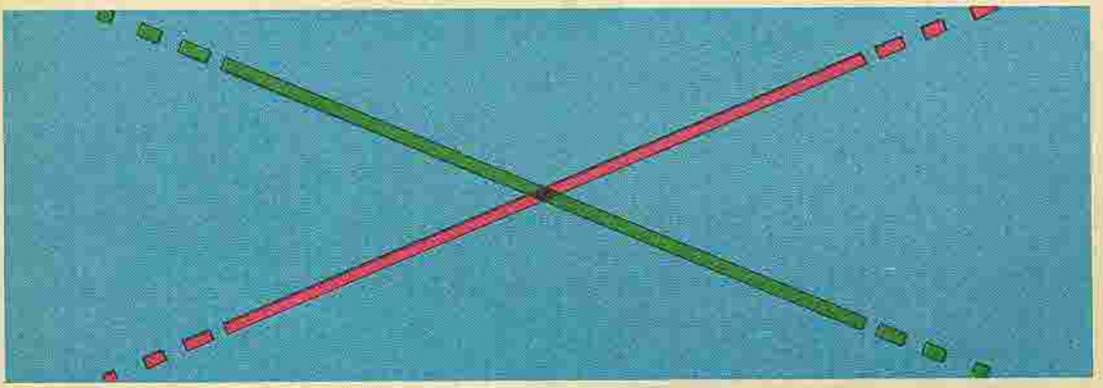
c) ¿Cuántas personas se necesitan, como mínimo, para formar dos equipos deportivos, uno de basquetbol y otro de voleibol? (Un equipo de voleibol necesita 6 personas y uno de basquetbol, 5 personas.)

d) Un tren de 12 carros se une con otro convoy de 17 furgones. ¿Puede este nuevo tren arrastrarse con una máquina cuya potencia es suficiente para jalar 25 carros? (Aquí suponemos que los carros y los furgones pesan lo mismo.)

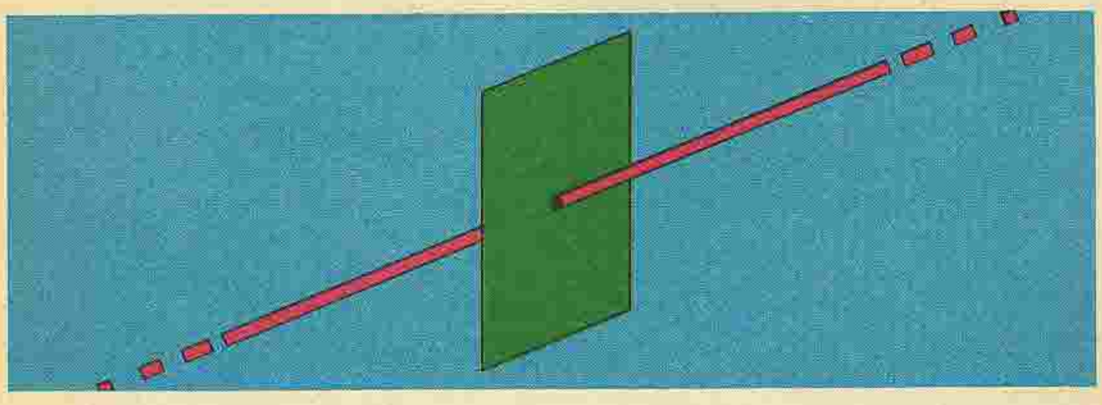
Las figuras geométricas nos proporcionan también ejemplos interesantes de intersecciones. Veamos algunos.

Ejemplo.

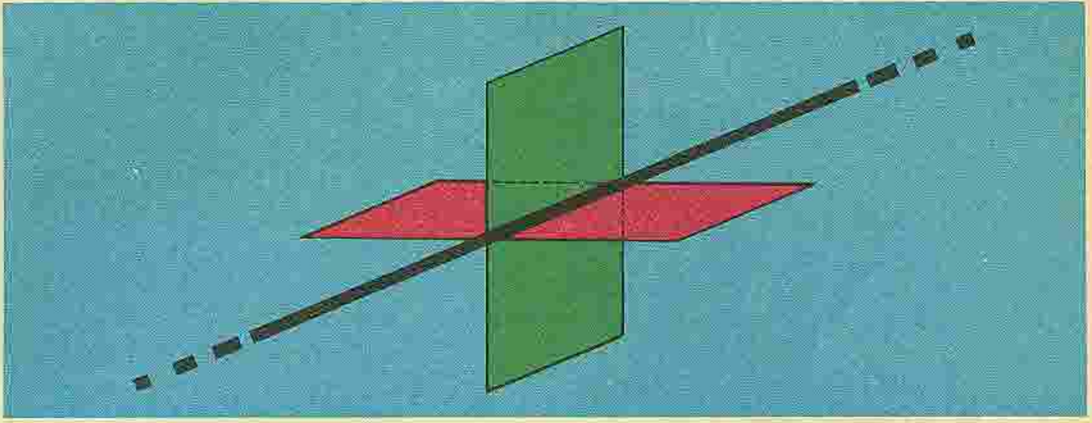
a) La intersección de la recta indicada con rojo y la recta indicada con verde es el punto *P*.



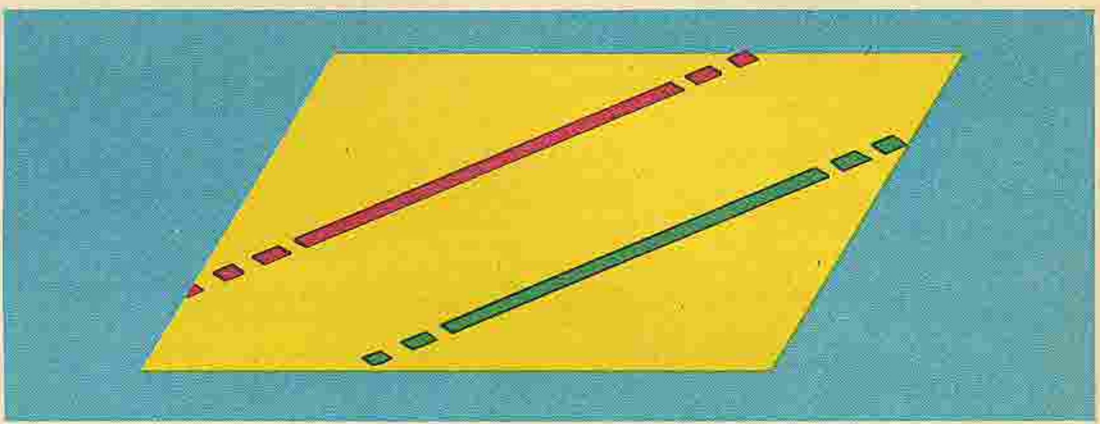
b) La intersección del plano indicado con verde y la recta indicada con rojo es el punto *Q*.



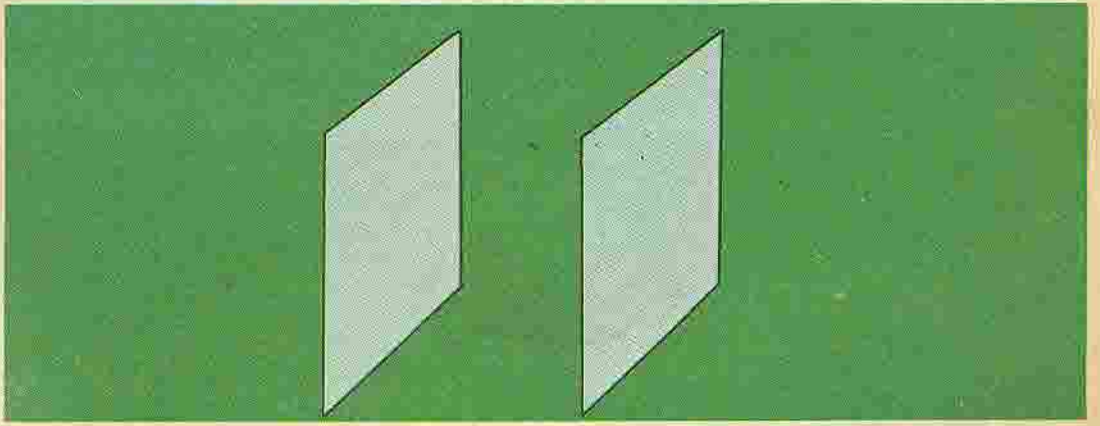
c) La intersección de los planos ilustrados con color es la recta pintada con negro.



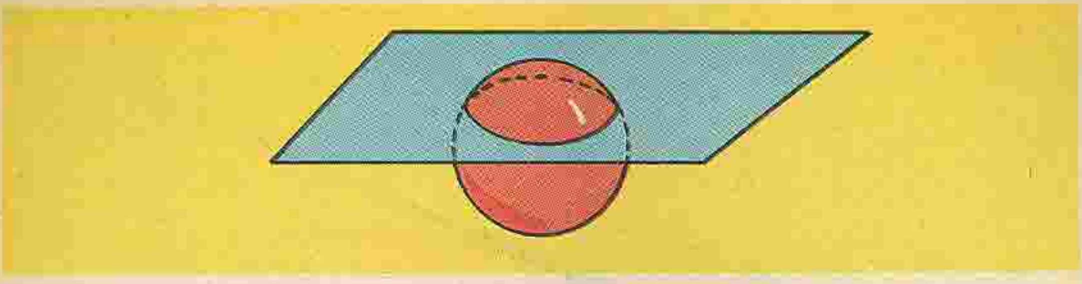
d) Las rectas indicadas en color no tienen puntos comunes; son conjuntos ajenos. O bien, dicho de otra manera, su intersección es vacía. Se dice que estas rectas son paralelas.



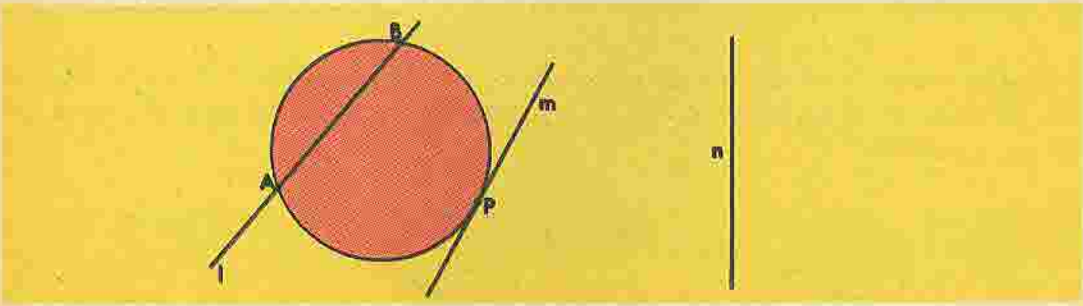
e) Análogamente, los planos ilustrados no se intersecan. Son conjuntos ajenos. Se dice que estos planos son paralelos.



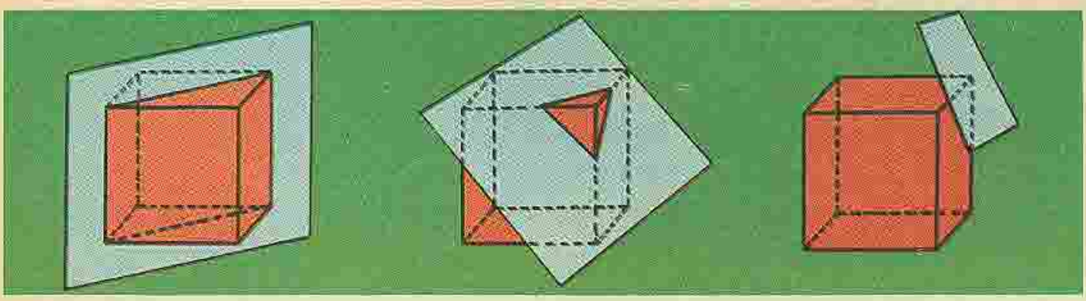
f) La intersección de la esfera y el plano ilustrados es una circunferencia.



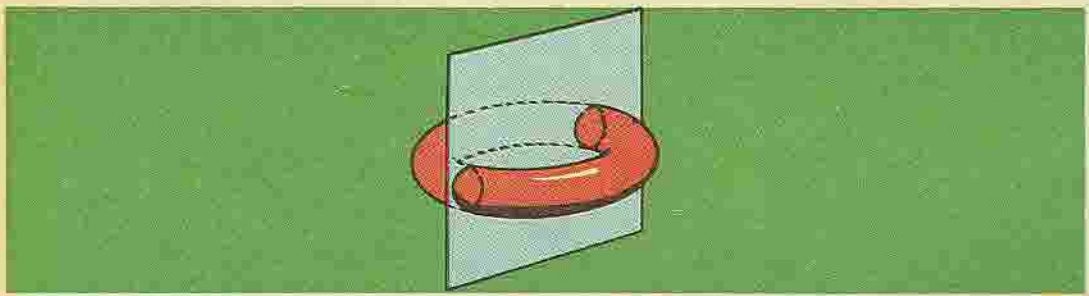
g) La intersección de la recta *l* con la circunferencia es el conjunto formado por los puntos *A* y *B*. La intersección de la recta *m* con la misma circunferencia es el punto *P*. La recta *n* y la circunferencia no se intersecan. Son conjuntos ajenos.



h) Aquí se observan tres intersecciones de cubos con planos. En la primera figura, la intersección es un rectángulo, en la segunda, un triángulo y en la tercera, un punto.



i) La intersección del toro ilustrado y el plano es el conjunto formado por dos circunferencias.



4. Unión de conjuntos

Sabemos que el conjunto de vocales de nuestro alfabeto es

$$V = \{a, e, i, o, u\}$$

y el conjunto de consonantes es

$$C = \{b, c, ch, d, f, g, h, j, k, l, ll, m, n, ñ, p, q, r, s, t, v, w, x, y, z\}.$$

¿Qué conjunto se forma con todos los elementos de V y C juntos?

Si formamos un nuevo conjunto con todos los elementos que están en V o en C, obtenemos el conjunto

$$A = \{a, b, c, ch, d, e, f, g, h, i, j, k, l, ll, m, n, ñ, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z\},$$

o sea, todo el alfabeto.

En este caso decimos que el conjunto A es la **unión** de los conjuntos V y C.

Veamos otros ejemplos de uniones de conjuntos.

Ejemplo.

Consideremos el conjunto H de todos los alumnos varones de una escuela y el conjunto M de todas las alumnas de esa misma escuela. La *unión* de H y M es el conjunto formado por todos los alumnos de la escuela.

Ejemplo.

Consideremos el conjunto C de letras que aparecen en la palabra "cántaro".

$$C = \{c, a, n, t, r, o\}$$

y el conjunto V de todas las vocales,

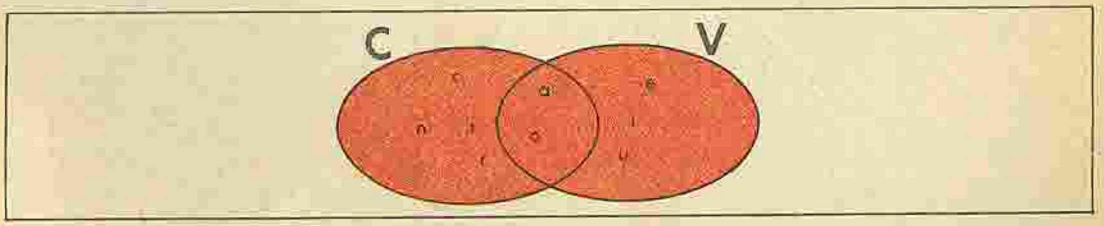
$$V = \{a, e, i, o, u\}.$$

La unión de C y V es el conjunto

$$\{c, a, n, t, r, o, e, i, u\}$$

es decir, el conjunto formado por las letras que pertenecen a C o bien a V (o a ambos).

Esto lo podemos ilustrar con el diagrama siguiente:



La región iluminada de rojo representa la unión de C y V.

Ejemplo.

La unión de los conjuntos

$P = \{0, 2, 4, 6, 8\}$

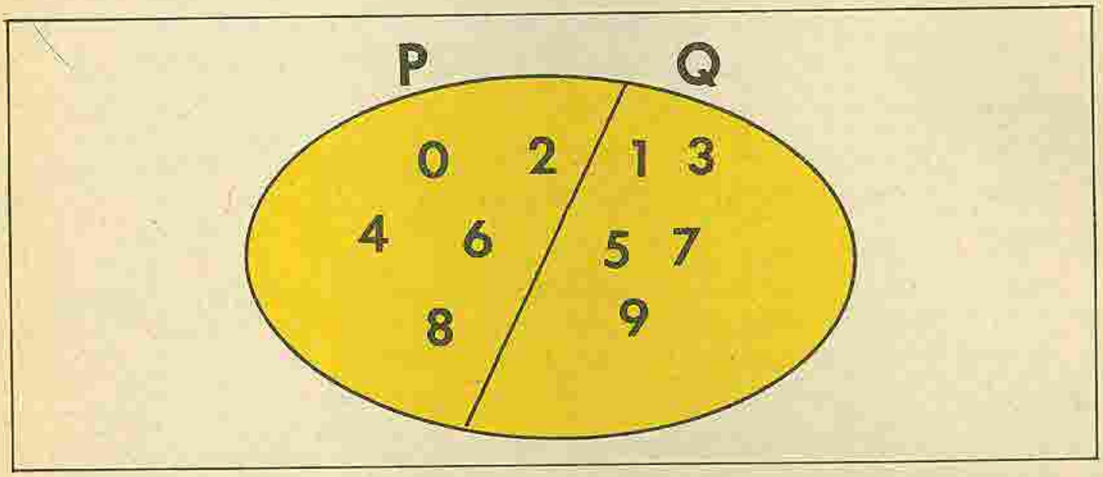
y

$Q = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

es el conjunto

$D = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

(*D* es el conjunto formado con los elementos que pertenecen a *P* o a *Q*.)

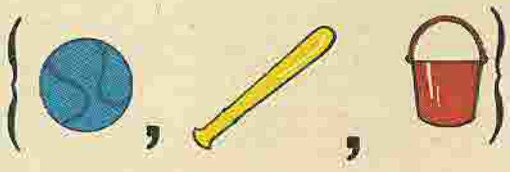


En este diagrama la región iluminada representa el conjunto *D*, o sea, la unión de *P* y *Q*.

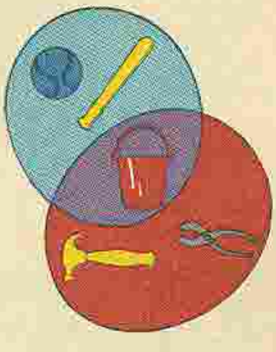
En general,

La unión de dos conjuntos *A* y *B* es el conjunto formado con todos los elementos que pertenecen a *A* o bien a *B* (o a ambos).

Ejercicio 11. En cada inciso encuentre la unión de los conjuntos dados, haga un diagrama y complete las oraciones.

a) $J =$ 

$H =$ 



La unión de *J* y *H* es el conjunto

J tiene $\boxed{3}$ elementos.

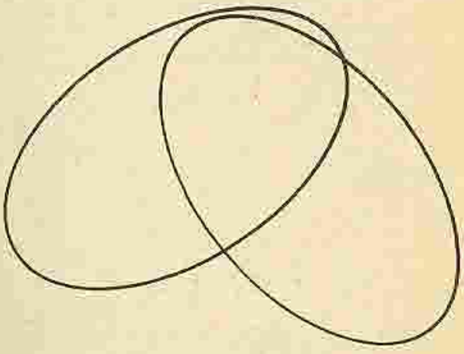
En *H* hay $\boxed{3}$ elementos.

La unión tiene $\boxed{5}$ elementos.

b) $L = \{m, e, s, a\}$.

$N = \{t, e, n, i, s\}$.

La unión de *L* y *N* es el conjunto



Hay______elementos en *L*

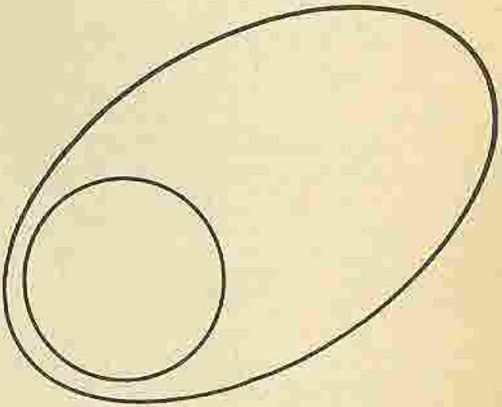
Hay______elementos en *N*

Hay______elementos en la unión.

c) $P = \{0, 2, 4, 6, 8\}$.

$Q = \{2, 4, 6\}$.

La unión de *P* y *Q* es el conjunto



P tiene________elementos.

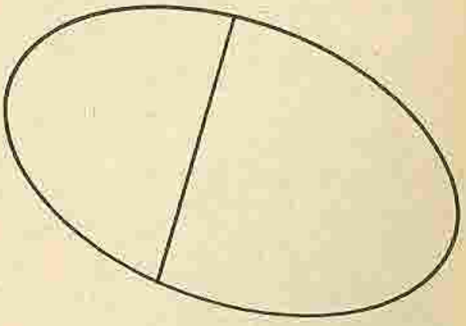
Q tiene________elementos.

En la unión hay________elementos.

d) *P* = {marzo, abril, mayo}.

V = {junio, julio, agosto}.

La unión de *P* y *V* es el conjunto



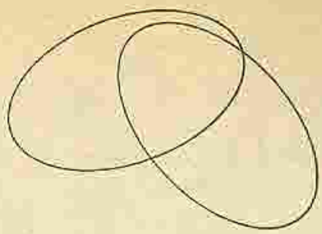
En *P* hay________elementos.

En *V* hay________elementos.

La unión tiene________elementos.

e) $P = \{a, b, c, d, e\}$,

$N = \{b, c, s, x\}$.



La unión de P y N es el conjunto ____________________________________

El número de elementos de P es __________.

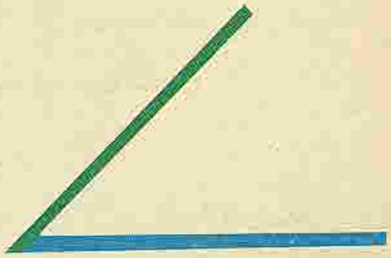
El número de elementos de N es __________.

El número de elementos de la unión es __________.

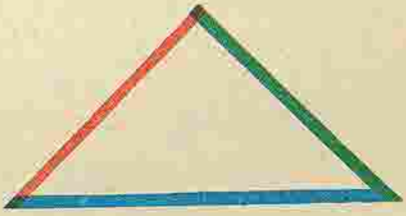
Veamos ahora algunos ejemplos de uniones de figuras geométricas.

Ejemplo.

a) La unión del rayo marcado con verde y el rayo marcado con azul es un ángulo.



b) La unión de los segmentos indicados con rojo, verde y azul es un triángulo.

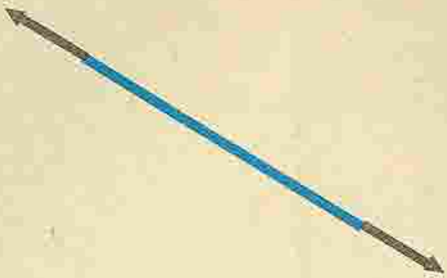


c) La unión del segmento $\overline{AB}$, marcado con rojo, y del segmento $\overline{BC}$, marcado con azul, es el segmento $\overline{AC}$.

d) La unión de los cuatro segmentos marcados con color es el rectángulo.

Ejercicio 12. Complete cada expresión escribiendo alguna de las palabras, unión, intersección o subconjunto, según corresponda.

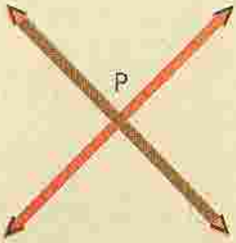
a)



El segmento indicado con color es

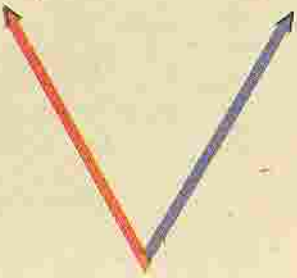
____________________ de la recta.

b)



El punto *P* es la __________ de las rectas.

c)

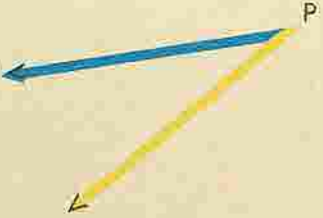


La __________ de los rayos es un ángulo.

d)

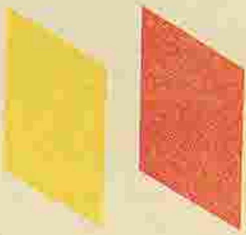
La __________ de los rayos es la recta.

e)



El punto *P* es la ____________________
de los rayos.

f)



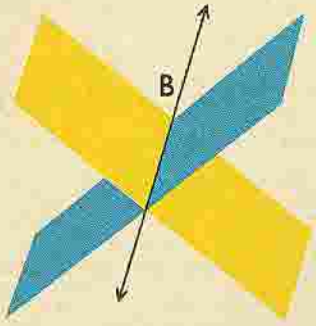
Los planos indicados con color tienen

____________________ vacía.

g)

El rayo marcado con color es
____________________ de la recta.

h)

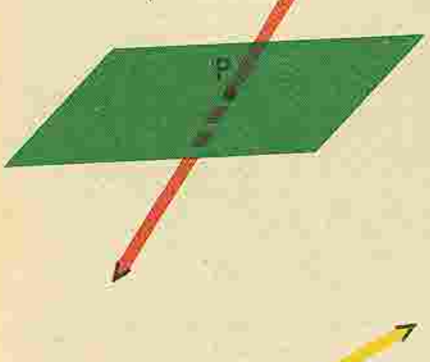


La ____________________ de los planos es la recta $\overline{AB}$.

i)

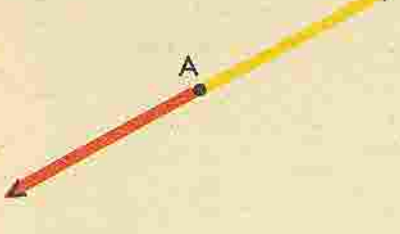
La recta es ____________________ del plano.

j)



La ____________________ de la recta y el plano es el punto *P*.

k)



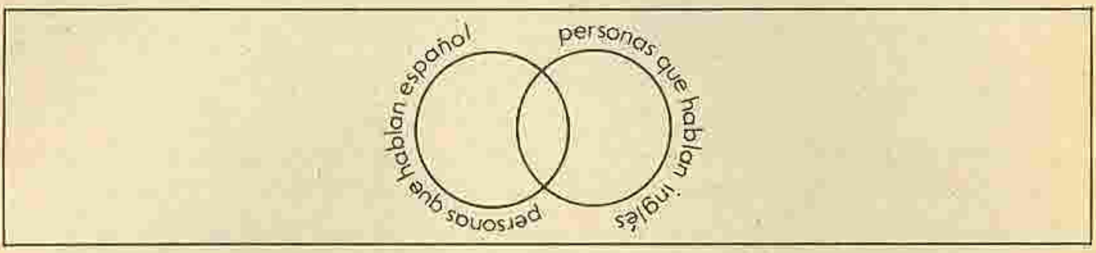
El punto *A* es la ____________________
de los rayos marcados con color.

5. Problemas

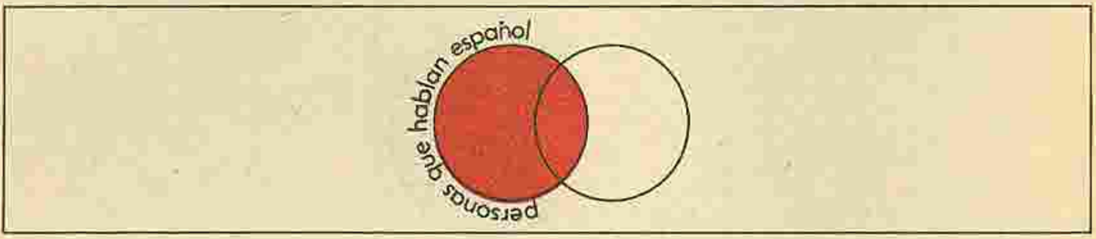
Con los conocimientos que hemos adquirido acerca de los conjuntos vamos a resolver algunos problemas de "contar". Para facilitar la resolución de tales problemas analizaremos previamente la siguiente situación por medio de diagramas.

De un grupo de personas se sabe que algunas hablan español, que otras hablan inglés y que entre ellas hay quienes hablan ambos idiomas.

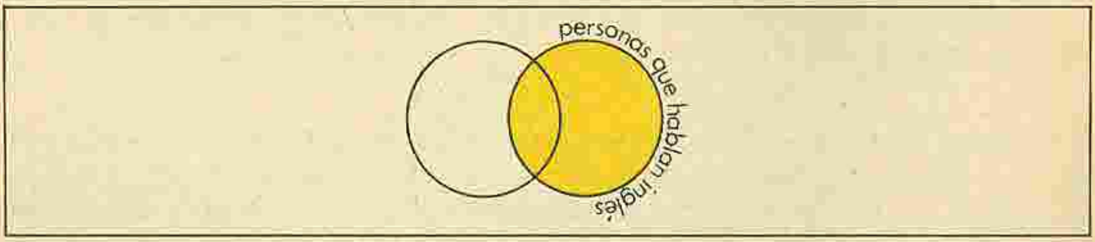
Esto se puede ilustrar de la siguiente manera:



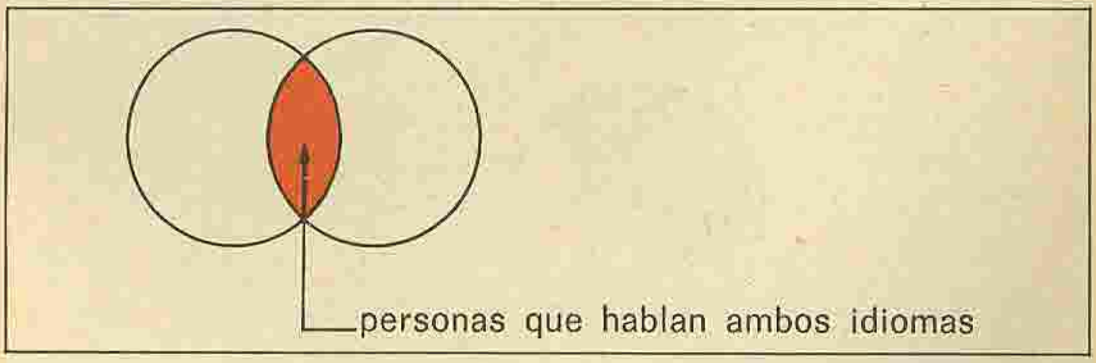
La región iluminada de rojo representa el conjunto de personas que hablan español.



La región amarilla representa el conjunto de personas que hablan inglés.

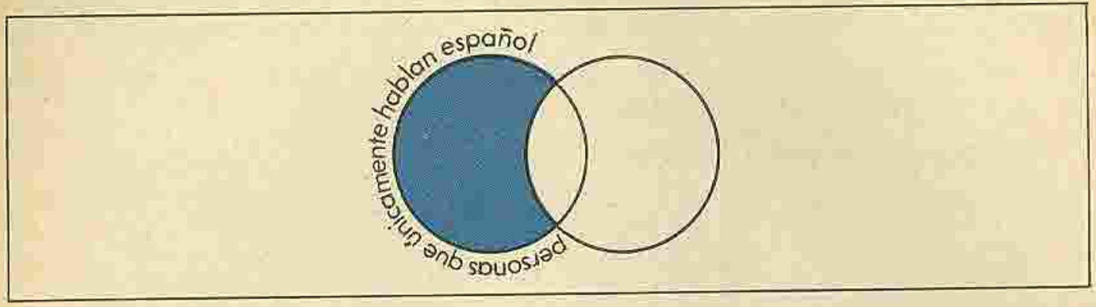


Las personas que hablan tanto español como inglés son los elementos comunes a los dos conjuntos; es decir, forman la intersección de los conjuntos. La región anaranjada representa esta intersección.



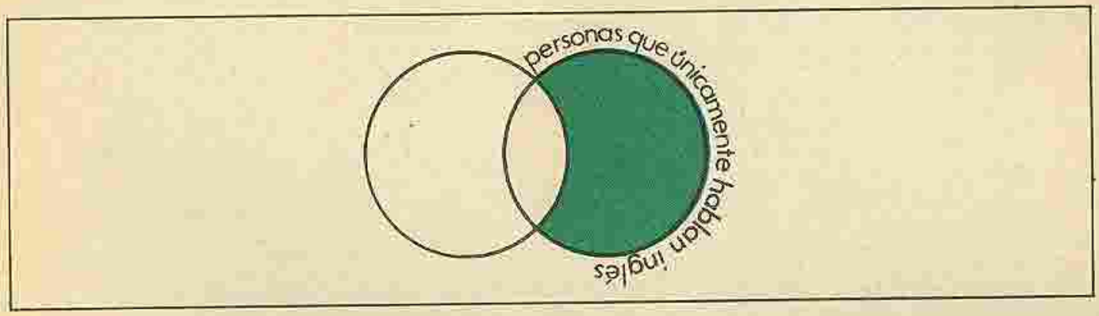
Observemos ahora que en el conjunto de personas que hablan español las hay de dos clases: las que además de español hablan inglés y las que únicamente hablan español.

La región azul ilustra al conjunto de personas que únicamente hablan español.



En forma semejante, en el conjunto de personas que hablan inglés hay dos tipos: las que además de inglés hablan español y las que solamente hablan inglés.

El conjunto de personas que solamente hablan inglés se ilustra con la región verde.

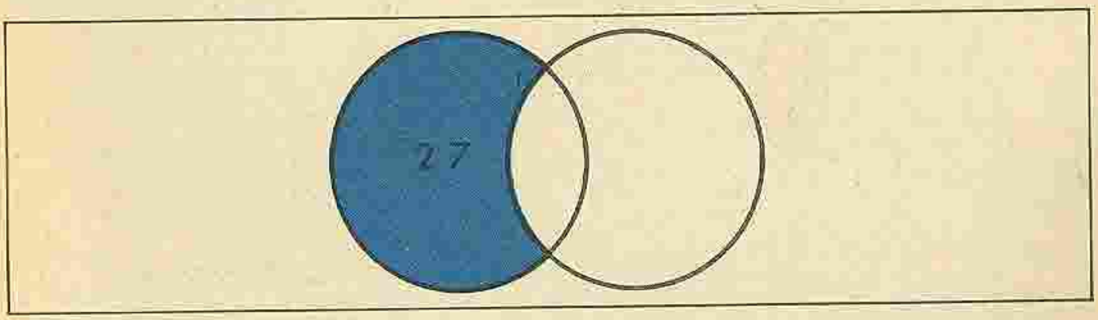


El desarrollo anterior nos ayudará, mediante razonamientos semejantes, a resolver los siguientes problemas de contar.

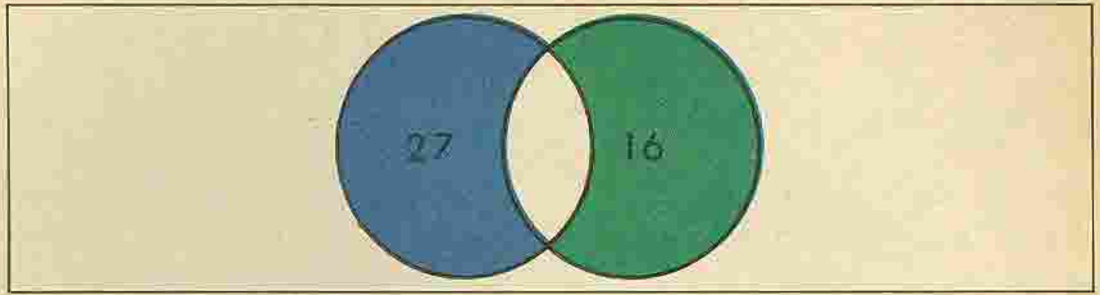
Problema. En una escuela secundaria hay dos clubes, el Club Coral y el Club de Teatro. Los alumnos que únicamente pertenecen al Club Coral son 27 y los que únicamente pertenecen al Club de Teatro son 16. Si hay 10 alumnos que forman parte de los dos clubes, ¿cuántos alumnos integran los dos clubes?

Resolución. Un diagrama para ilustrar esta situación sería el siguiente:

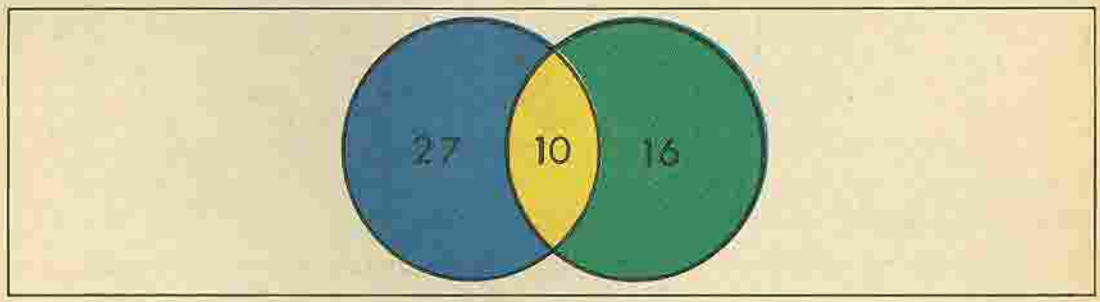
Los 27 alumnos que únicamente pertenecen al Club Coral se representan, en el diagrama, con color azul.



Con verde se representan los 16 alumnos que únicamente pertenecen al Club de Teatro.



Los alumnos que pertenecen a ambos clubes son 10 y se representan con la región amarilla.



Como vemos, el número de alumnos que integran los dos clubes es

$$\boxed{27 + 10 + 16 = 53}$$

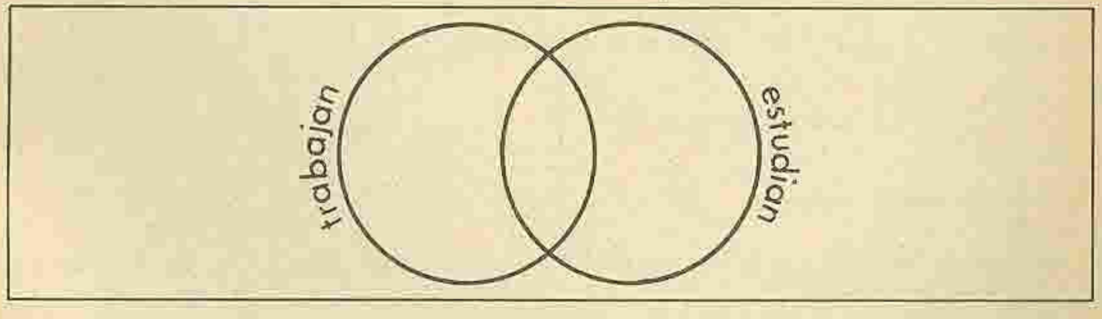
Ejercicio 13. Conteste las siguientes preguntas:

a) ¿Cuántos alumnos forman el Club Coral? ☐

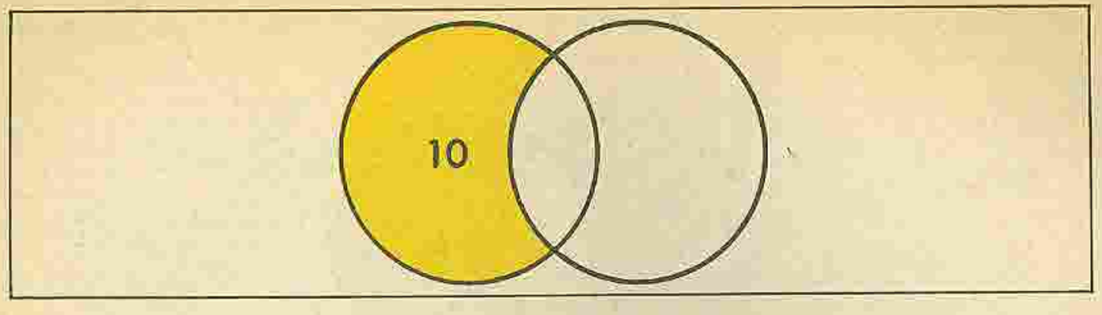
b) ¿Cuántos alumnos forman el Club de Teatro? ☐

Problema. En un grupo de 32 personas se sabe que todas trabajan o estudian o hacen ambas cosas. Si de ellas 10 únicamente trabajan y 5 tanto trabajan como estudian, ¿cuántas personas se dedican únicamente a estudiar?

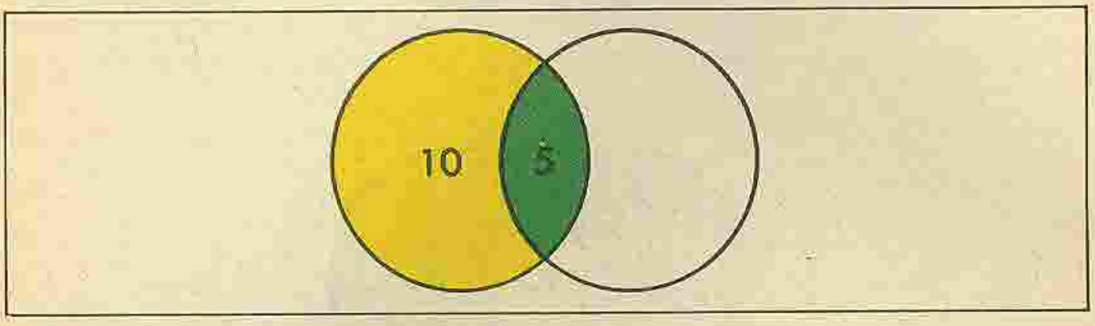
Resolución. Hagamos un diagrama que represente la situación del problema.



Las personas que únicamente trabajan son 10.

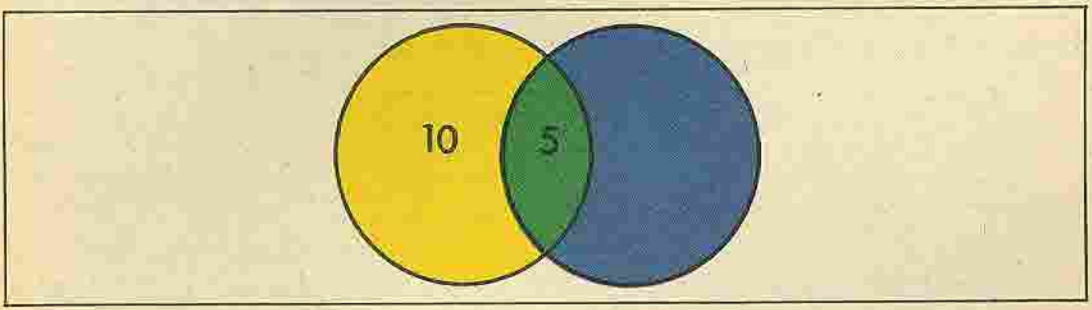


Las personas que trabajan y estudian son 5.



En los dos conjuntos descritos hay 15 personas.

La región azul representa al conjunto de personas que únicamente estudian.



Como debe haber 32 personas en total, el número de personas que únicamente estudian es

$$\boxed{32 - 15 = 17}$$

Respuesta. Hay 17 personas que únicamente estudian.

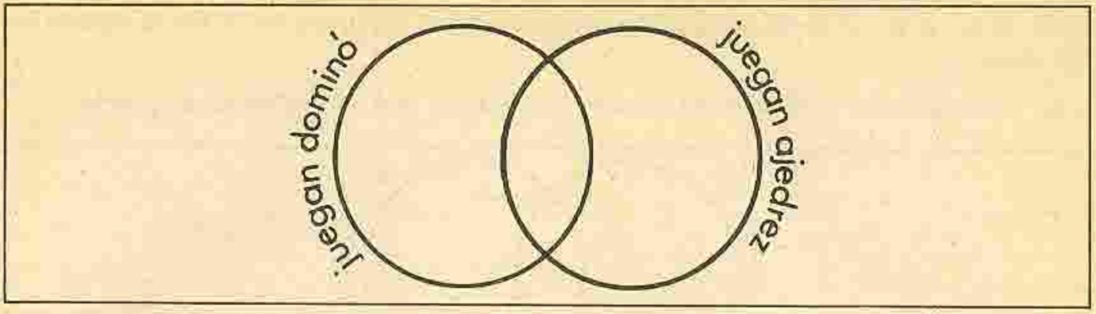
Ejercicio 14. Conteste las siguientes preguntas.

a) ¿Cuántas personas trabajan?

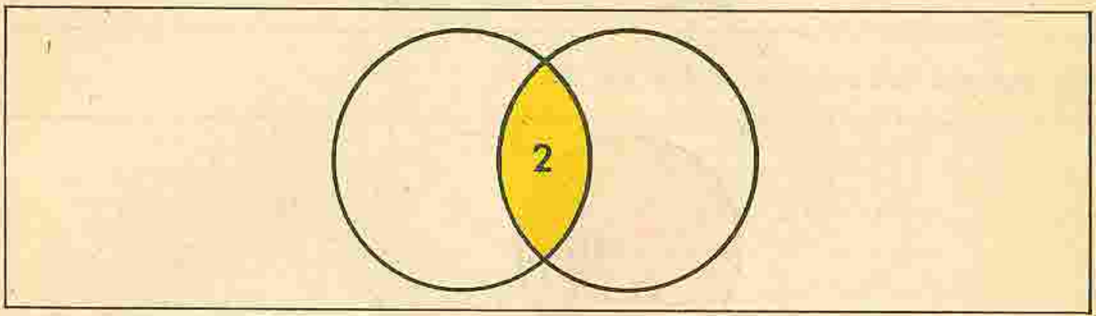
b) ¿Cuántas personas estudian?

Problema. En una familia de 11 miembros todos juegan ajedrez o dominó o ambos juegos. Si seis personas de esa familia juegan dominó y, de éstas, dos juegan también ajedrez, ¿cuántas personas de esa familia juegan ajedrez?

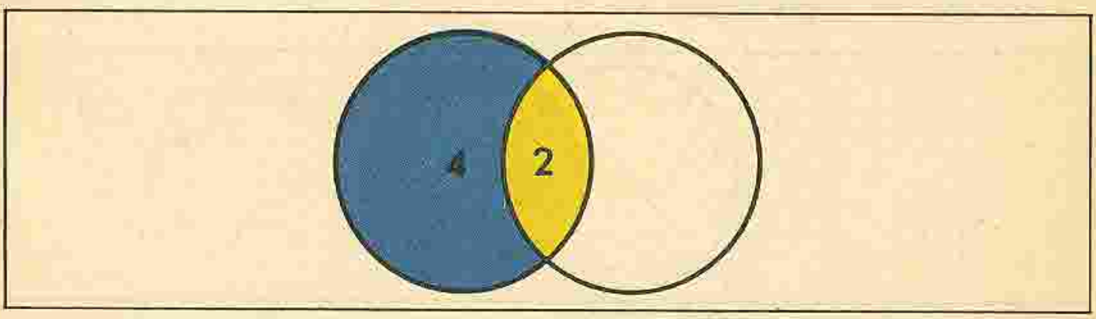
Resolución. Un diagrama de la familia sería:



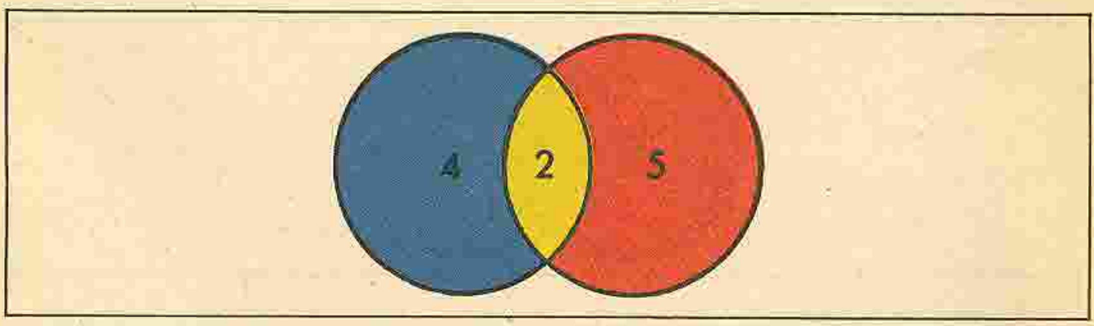
En la familia hay dos personas que juegan ajedrez y dominó.



Puesto que son seis personas las que juegan dominó, las que únicamente juegan dominó son cuatro.



Como hay 11 miembros en la familia, los que únicamente juegan ajedrez son cinco personas.

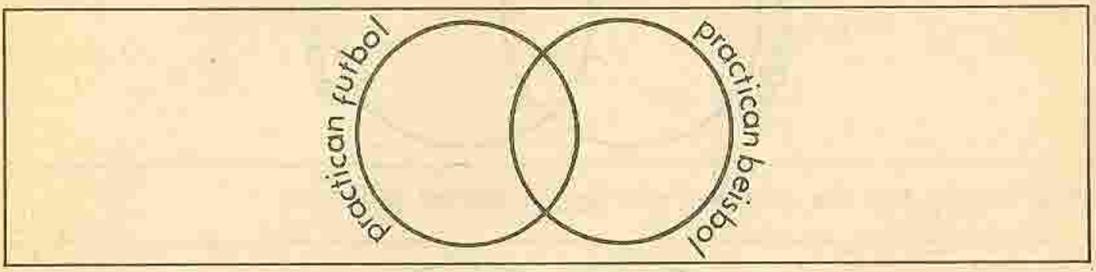


Respuesta. El número de personas que juegan ajedrez es

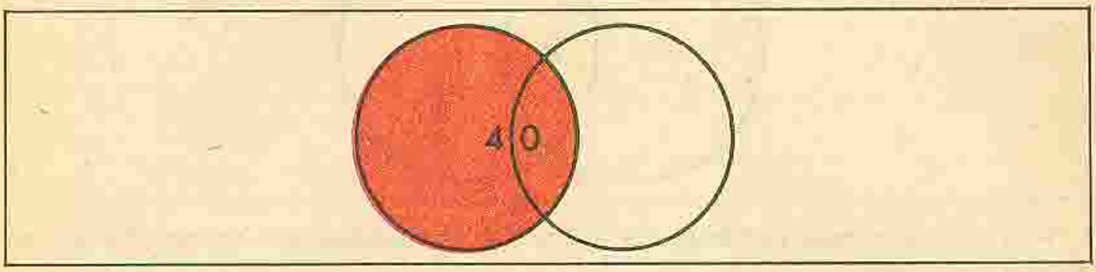
$$\boxed{5 + 2 = 7}$$

Problema. En un grupo de secundaria todos los alumnos practican como deportes el beisbol, el futbol o ambos. Si 40 alumnos practican el futbol y 20 alumnos practican el beisbol, ¿cuántos alumnos practican ambos deportes, si el grupo consta de 50 alumnos?

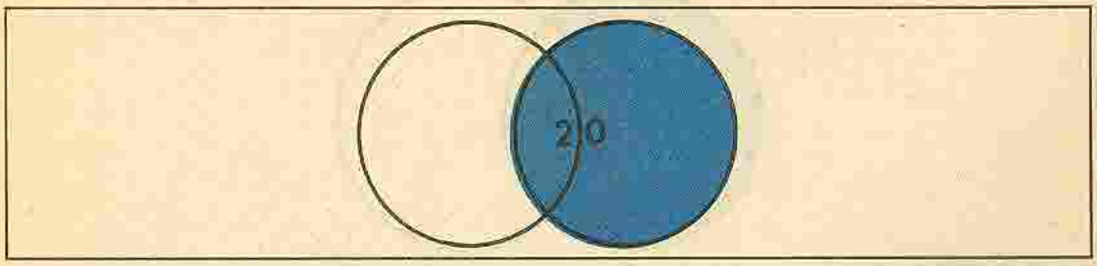
La situación del problema se puede representar con el siguiente diagrama.



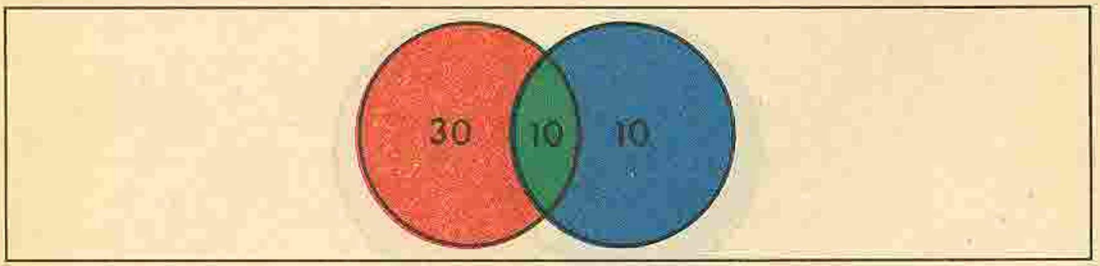
Los alumnos que practican futbol son 40.



Los alumnos que juegan beisbol son 20.



Puesto que sólo hay 50 alumnos en el grupo, la intersección de los dos conjuntos debe constar de 10 alumnos.



Ejercicio 15.

a) El número de alumnos que sólo practican el futbol es ________.

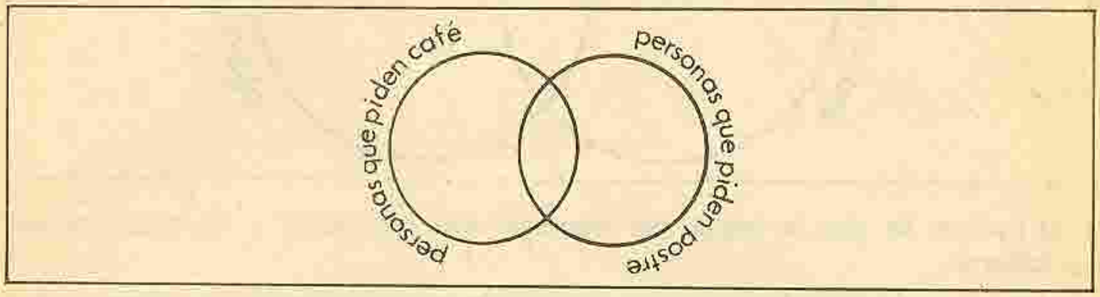
b) El número de alumnos que únicamente practican el beisbol es ________.

Problemas. Resuelva los siguientes problemas haciendo lo que se indica y completando las oraciones donde sea necesario.

---

a) A un restaurante asisten 150 personas a comer. De ellas, 60 piden únicamente café y 40 piden café y postre. ¿Cuántas personas piden únicamente postre?

Resolución.



1) En el diagrama de arriba coloree de azul la región que representa al conjunto de personas que sólo piden café.

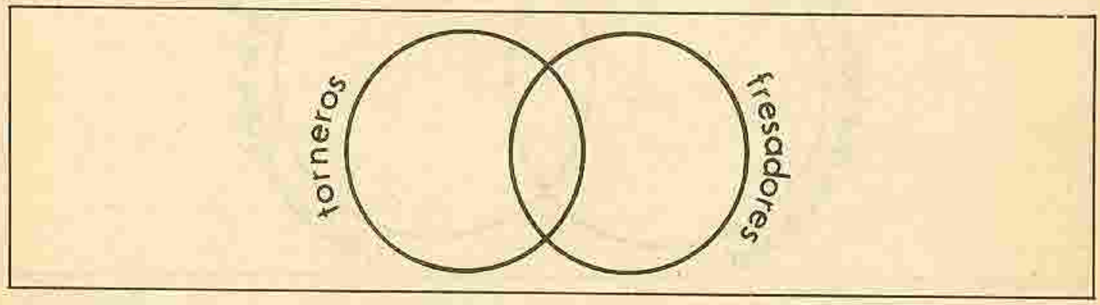
2) Coloree de rojo la región que ilustra el conjunto de personas que piden café y postre.

3) Coloree de verde la región que representa el conjunto de personas que sólo piden postre.

4) El número de personas que sólo piden postre es ________.

---

b) En una fábrica trabajan 40 obreros. De ellos, unos manejan el torno, otros la fresadora y algunos ambas máquinas. Si 15 obreros manejan únicamente el torno y 11 manejan solamente la fresadora, ¿cuántos son los obreros que manejan ambas máquinas?



1) Pinte de rojo la región que representa a los obreros que solamente manejan el torno.

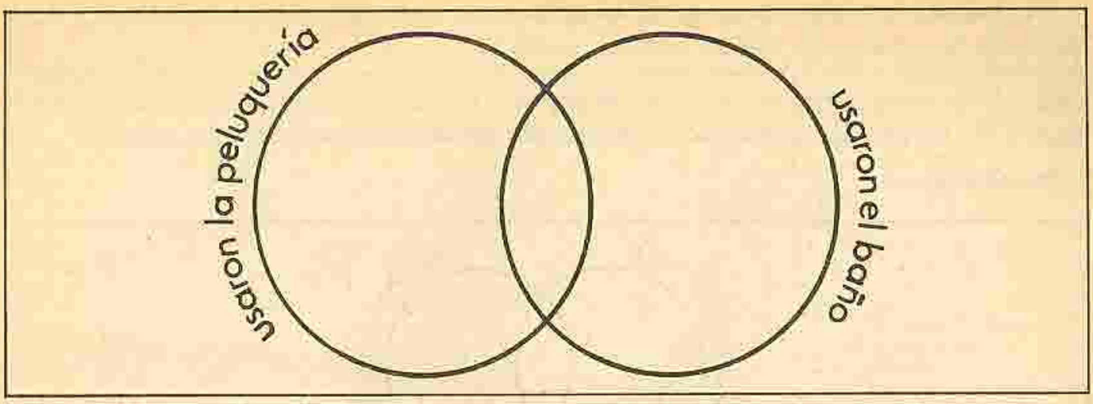
2) Pinte de azul la región que representa a los obreros que únicamente manejan la fresadora.

3) Pinte de verde la región que representa a los obreros que manejan ambas máquinas.

4) El número de obreros que manejan ambas máquinas es ________.

---

c) En unos baños públicos se dan dos servicios: el baño y la peluquería. Hubo 15 personas que asistieron a esos baños y pidieron uno o ambos servicios. Si 8 de esas personas sólo se bañaron y 4 se bañaron y cortaron el pelo, ¿cuántas fueron en total las que se cortaron el pelo?



1) Ilumine de rojo la región del diagrama que representa a las personas que se bañaron.

2) Ilumine de verde la región que representa a las personas que usaron ambos servicios.

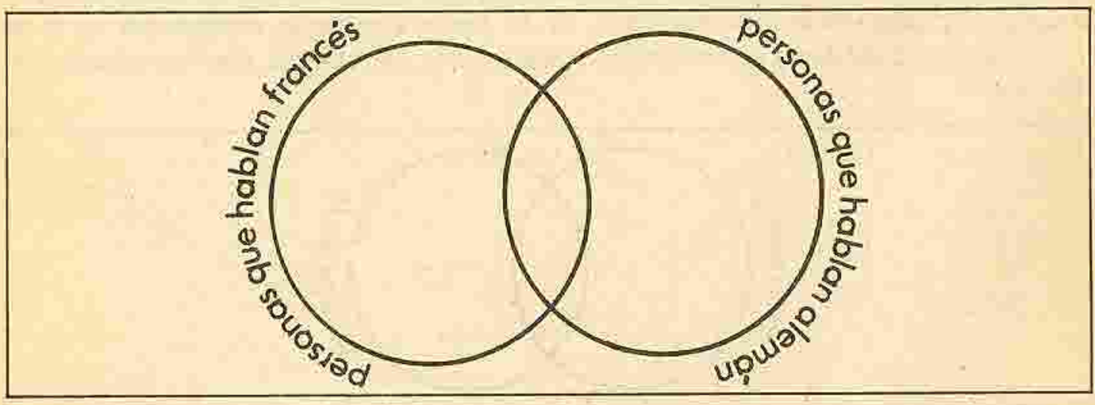
3) El número de personas que solamente se bañaron es________.

4) Ilumine de azul la región que representa a las personas que únicamente se cortaron el pelo. El número de estas personas fue ________.

5) El número total de personas que se cortaron el pelo fue________.

---

d) En un grupo de personas, 27 hablan francés y 15 hablan alemán. Si de estas personas hay 8 que únicamente hablan alemán, ¿cuántas personas hay en el grupo?



1) Pinte de rojo la región que corresponde al conjunto de personas que hablan alemán.

2) Pinte de azul la región que representa a las personas que únicamente hablan alemán.

3) El número de personas que hablan francés y alemán es________.

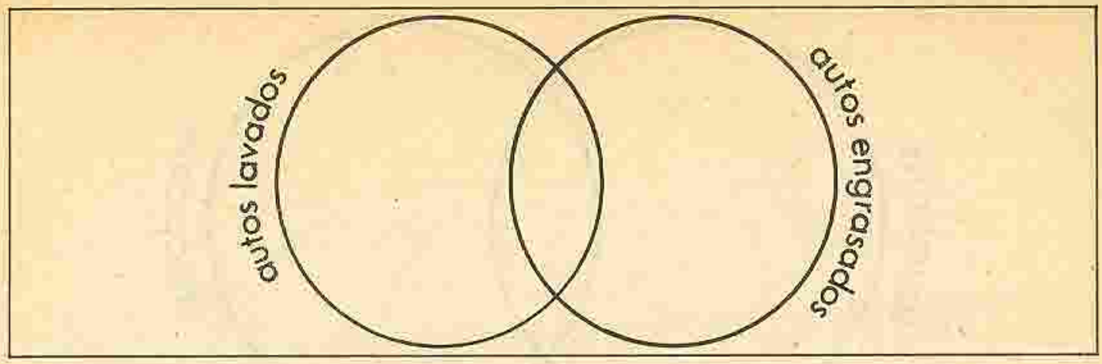
4) Pinte la región que representa a las personas que únicamente hablan francés.

5) El número de personas que sólo hablan francés es________.

6) El grupo de todas las personas consta de________miembros.

---

e) En un servicio de lavado y engrasado de automóviles, un día se atendieron 24 coches, de ellos 9 se lavaron y engrasaron. Si fueron 16 los autos lavados ¿cuántos fueron los que se engrasaron ese día?



1) En el diagrama, pinte de azul la región que representa a los autos que se lavaron y engrasaron.

2) Pinte de rojo la región que representa a los automóviles que únicamente se lavaron. ¿Cuántos autos hay en este conjunto? Hay________autos.

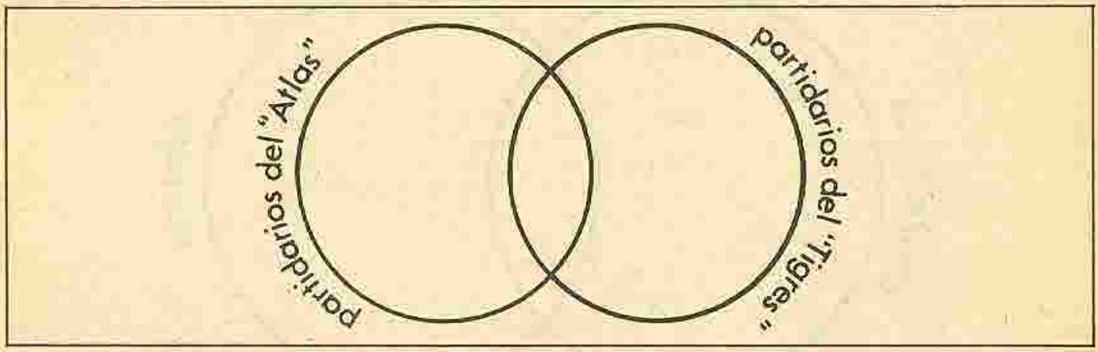
3) Pinte de amarillo la región que corresponde al conjunto de autos que sólo se engrasaron. El número de autos de este conjunto es_______.

4) El conjunto de autos que se engrasaron se representa en el diagrama con las regiones de color__________ y__________.

5) El número de autos engrasados es________.

---

f) En una reunión de amigos había 9 partidarios del equipo Atlas de futbol, y 12 partidarios del equipo Tigres de beisbol. Si únicamente había en la reunión 18 amigos, ¿cuántas personas eran partidarios tanto del Atlas como del Tigres?



1) Pinte de rojo la región que representa a las personas que eran partidarias del Atlas.

2) Ilumine de azul la región que representa al conjunto de personas que eran partidarias del Tigres.

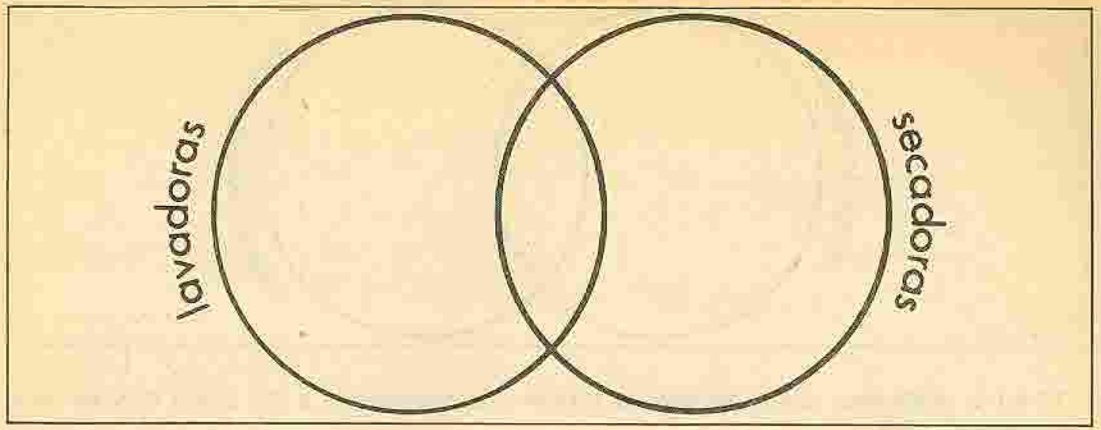
3) El número de personas que eran partidarias tanto del Atlas como del Tigres era_______.

4) ¿Cuántas personas eran partidarias únicamente del Atlas?________.

5) ¿Cuántas personas eran partidarias únicamente del Tigres?_______.

---

g) Una fábrica tiene una producción diaria de 300 aparatos para el hogar: unos que lavan, otros que secan, y otros que sirven para ambas cosas. Si se producen 180 aparatos que únicamente lavan y 40 que lavan y secan, ¿cuántos se producen que únicamente secan?



1) Ilumine de rojo la región que representa a los aparatos que únicamente lavan.

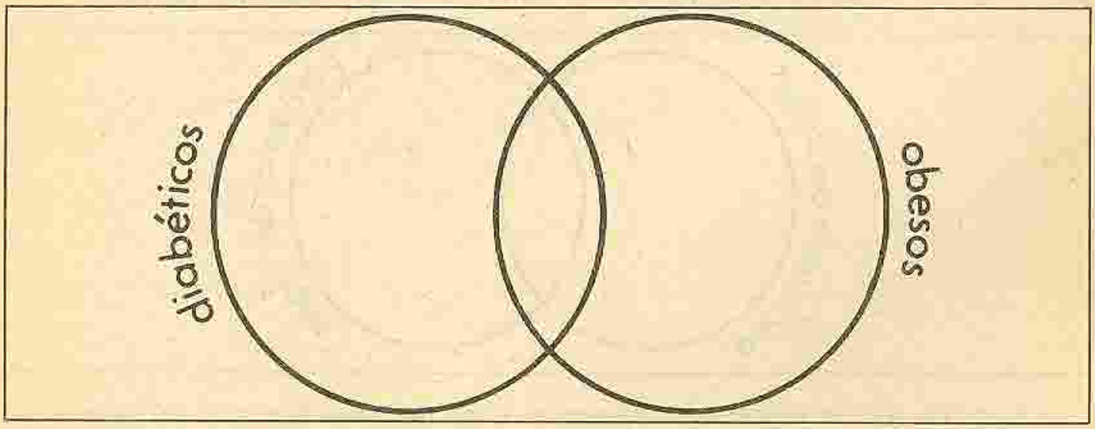
2) Ilumine de verde la región que representa a los aparatos que tanto lavan como secan.

3) Ilumine de azul la región que representa a los aparatos que únicamente secan.

4) El número de aparatos que únicamente secan es ________.

---

h) En un hospital, un grupo de pacientes asiste a escuchar una conferencia dirigida a diabéticos o a obesos. En dicha conferencia se cuentan 9 diabéticos y 15 obesos. Si de ellos hay 4 diabéticos que también son obesos, ¿cuántos pacientes asistieron a la conferencia?



1) Pinte de rojo la región del diagrama que representa a las personas diabéticas y obesas.

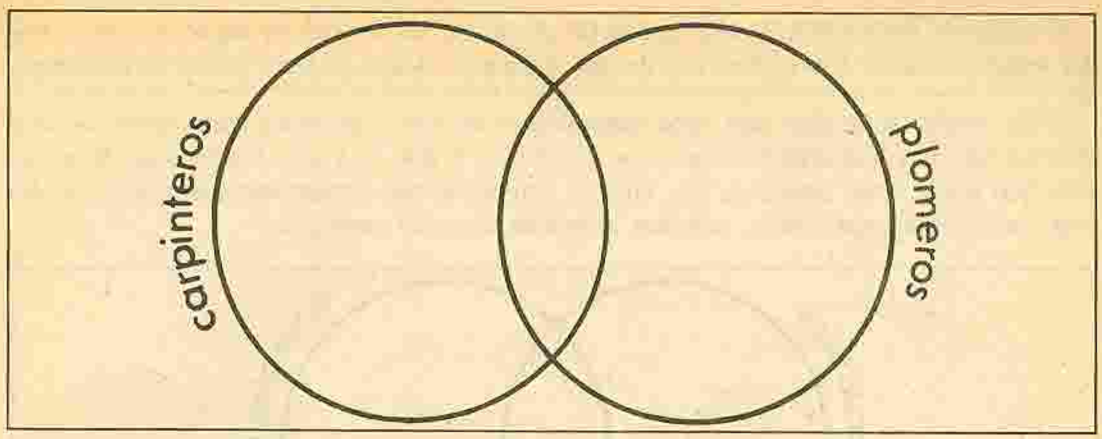
2) Pinte de azul la región que representa a las personas únicamente diabéticas. ¿Cuántas son estas personas? Son ________.

3) Pinte de verde la región que representa al conjunto de las personas que son únicamente obesas. ¿Cuántas son estas personas? Son ________.

4) El número de pacientes que asistieron a la conferencia es ________.

---

i) Un sindicato agrupa carpinteros y plomeros. (En él hay personas que poseen los dos oficios.) De los miembros del sindicato, 150 son carpinteros y 120 son plomeros. Si entre ellos hay 90 que únicamente son carpinteros, ¿cuántos miembros tiene el sindicato?



1) En el diagrama pinte de rojo la región que representa a los obreros que son únicamente carpinteros.

2) Ilumine de azul la región que representa a los miembros del sindicato que son carpinteros y además plomeros. ¿Cuántas personas forman este conjunto?

3) Pinte de verde la región que representa a las personas que sean únicamente plomeros.

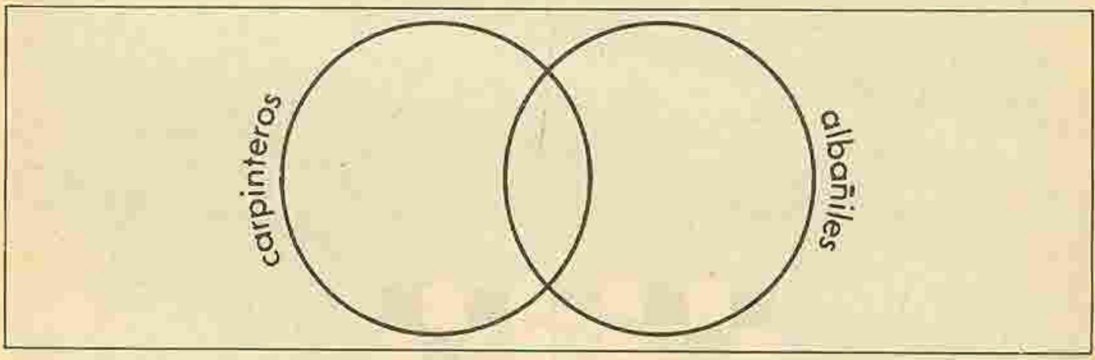
4) La región del diagrama que representa a los plomeros que además son carpinteros está pintada de ________.

5) La región pintada de verde representa a ________ (¿cuántas?) personas que son únicamente plomeros.

6) El número total de obreros del sindicato es ________.

---

j) Un sindicato de la construcción agrupa a personas que trabajan en la albañilería o la carpintería o en ambos oficios. Si el sindicato agrupa, en total, 240 miembros y se sabe que 190 son albañiles y 150 son carpinteros, ¿cuántas son las personas que tienen ambos oficios?



1) Ilumine de amarillo la región que representa al conjunto de personas que son carpinteros.

2) Ilumine de verde la región que representa al conjunto de personas que son albañiles.

3) El número de personas que poseen ambos oficios es ________.

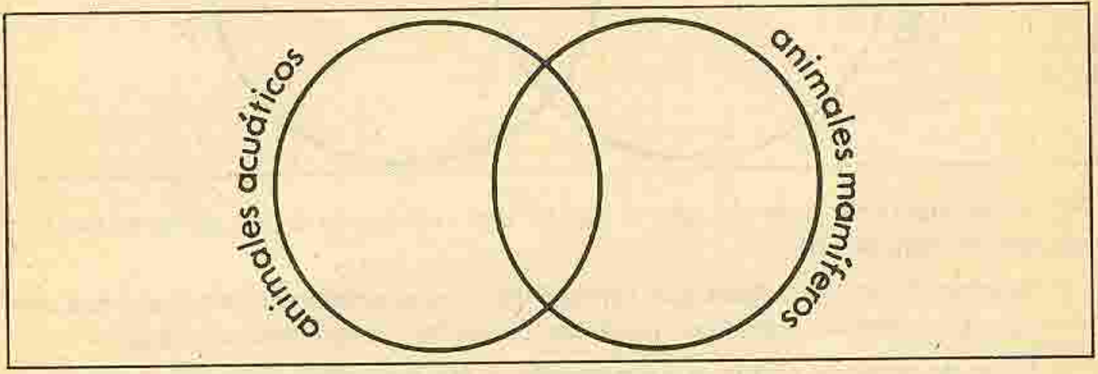
4) El número de personas que únicamente son albañiles es ________.

5) El número de personas que únicamente son carpinteros es ________.

Al inicio de este capítulo se propuso un problema en el cual se suponía que no era tan sencillo contar los elementos de ese conjunto. Ahora le será sencillo resolverlo.

---

k) En cierto zoológico hay sólo animales acuáticos y animales mamíferos. Se nos informa que hay 150 animales que son acuáticos y 200 que son mamíferos. Si sabemos que entre esos animales hay 50 que son acuáticos y mamíferos a la vez, ¿podemos decir, con esos datos, cuántos animales tiene el zoológico?

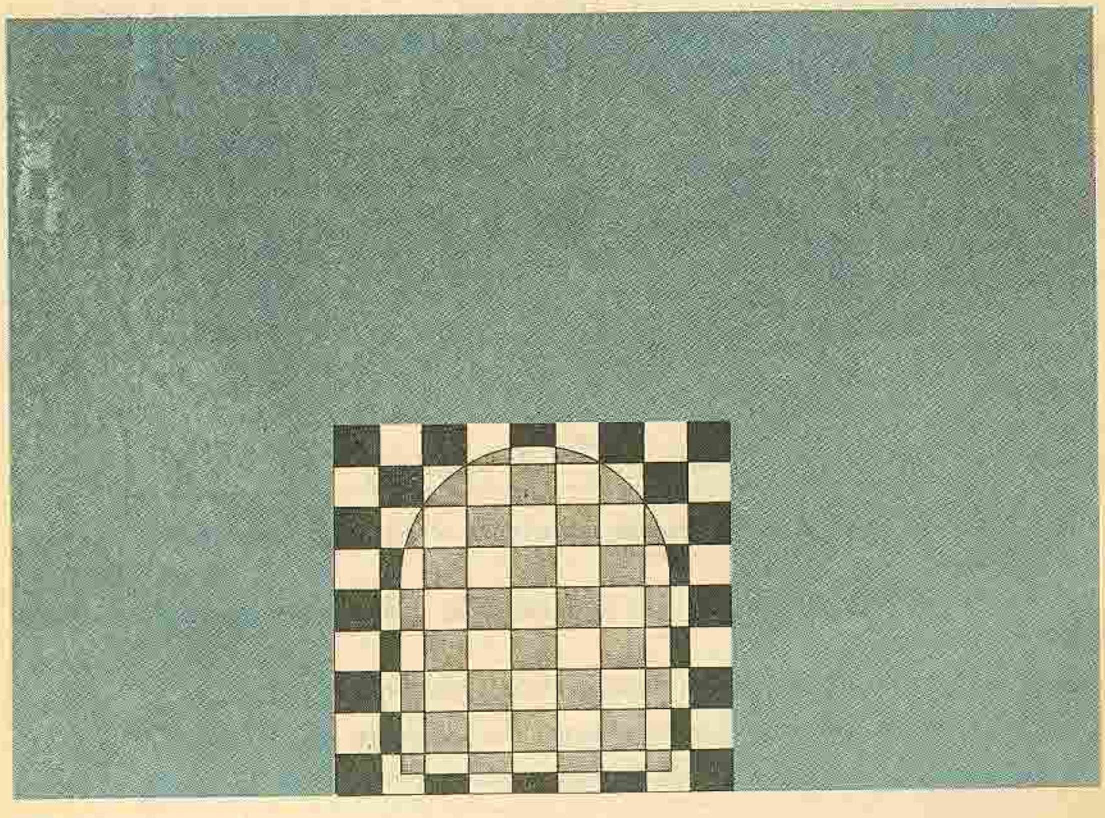


1) Pinte de verde la región del diagrama que representa a los animales que son acuáticos y mamíferos. El número de estos animales es ________.

2) Pinte de azul la región del diagrama que representa al conjunto de animales que son únicamente acuáticos. ¿Cuántos son estos animales? Son ________.

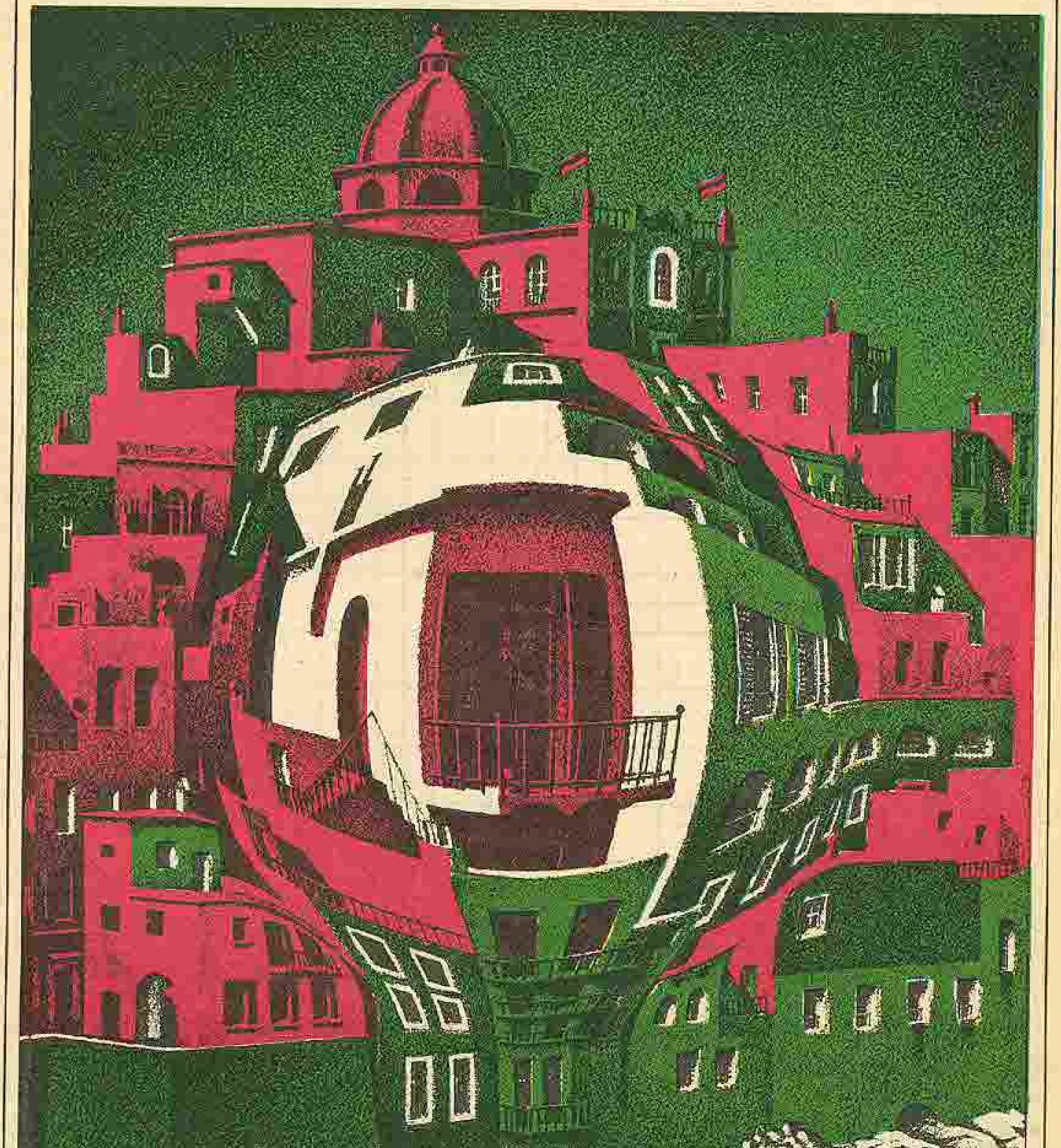
3) Pinte de rojo la región del diagrama que representa al conjunto de animales que son únicamente mamíferos. ¿Cuántos son estos animales? Son ________.

4) El número de animales que tiene el zoológico es ________.



II

Adición de números naturales



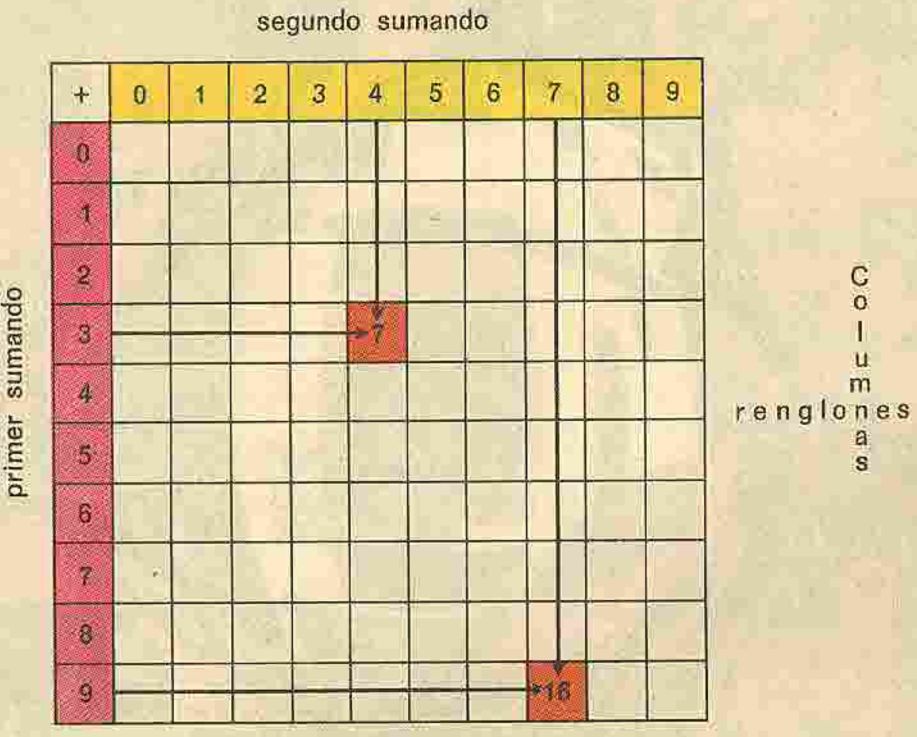
1. La tabla de adición

Usted aprendió en la escuela primaria a sumar usando los números naturales y el cero. Es decir, aprendió a efectuar con estos números la operación llamada **adición.** Los números que aparecen en una adición se denominan de la manera siguiente:

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{sumando}}}{5} + \underset{\substack{\uparrow\\ \text{sumando}}}{4} = \underset{\substack{\uparrow\\ \text{suma}}}{9}$$

"Efectuar una adición" significa "hallar la suma cuando se conocen los dos sumandos".

Existen tablas de adición como la siguiente:



+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0										
1										
2										
3					7					
4										
5										
6										
7										
8										
9								16		

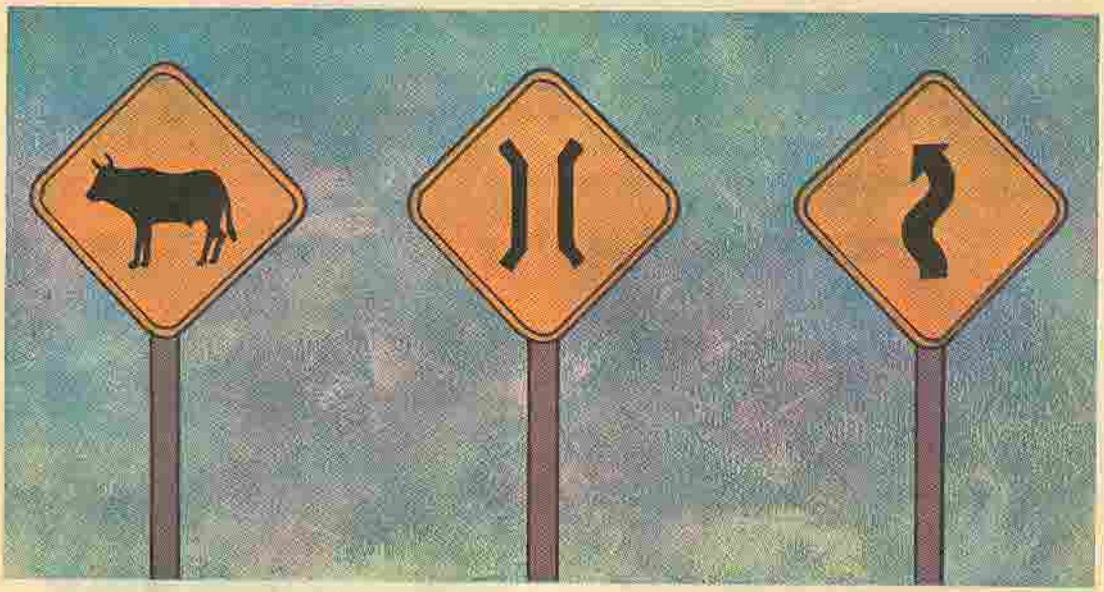
En esta tabla de adición aparecen los sumandos en el primer renglón y en la primera columna; pero faltan las sumas. Sólo están el 7 y el 16 que son las sumas correspondientes a 3 + 4 y 9 + 7, respectivamente. Observe usted que el 7 está en la intersección del renglón 3 (el primer sumando) y la columna 4 (el segundo sumando). En forma semejante, el 16 está en la intersección del renglón 9 (el primer sumando) y la columna 7 (el segundo sumando).

Ejercicio 1. Anote las sumas que faltan en la tabla. (Recuerde que la suma de 2 + 5, por ejemplo, debe anotarse en la intersección del renglón 2 y la columna 5.)

Después de llenar la tabla anterior notará usted que en ella sólo aparecen las sumas de dos sumandos menores que 10. Sin embargo, pueden aumentarse columnas y renglones tanto como uno desee para tener sumandos mayores que 9.

2. Números y letras

En la vida diaria nos encontramos con símbolos que nos ayudan a obtener cierta información. Por ejemplo, en un viaje por carretera hallamos algunas señales como las siguientes:



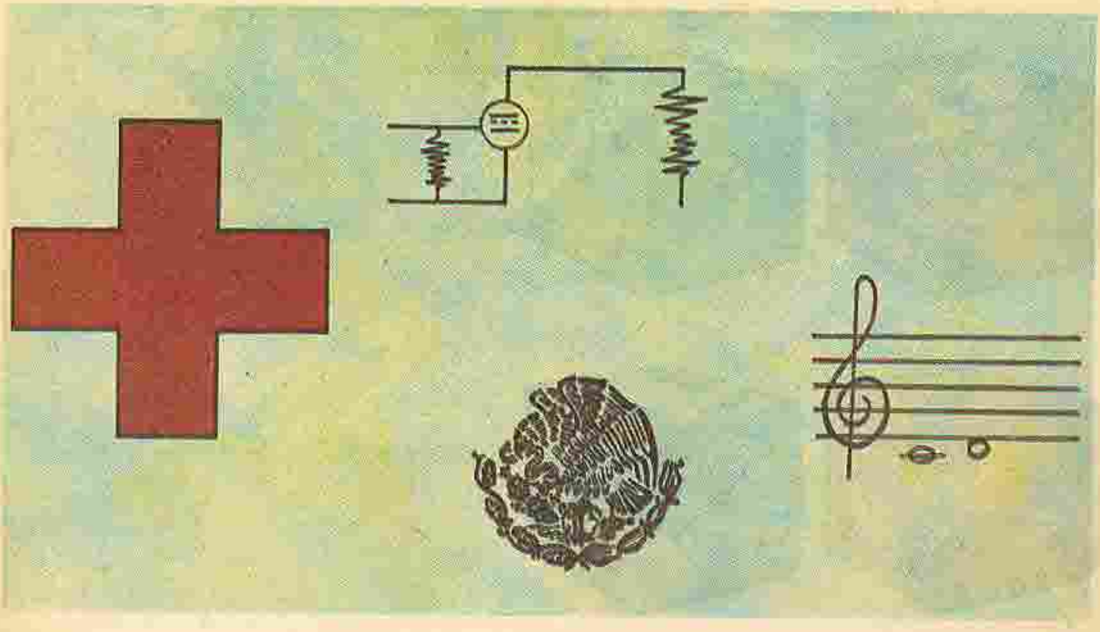
Estos símbolos nos proporcionan la siguiente información:

a) Hay ganado que atraviesa la carretera. ¡Tenga cuidado!

b) Adelante hay un puente angosto.

c) El camino que sigue es sinuoso.

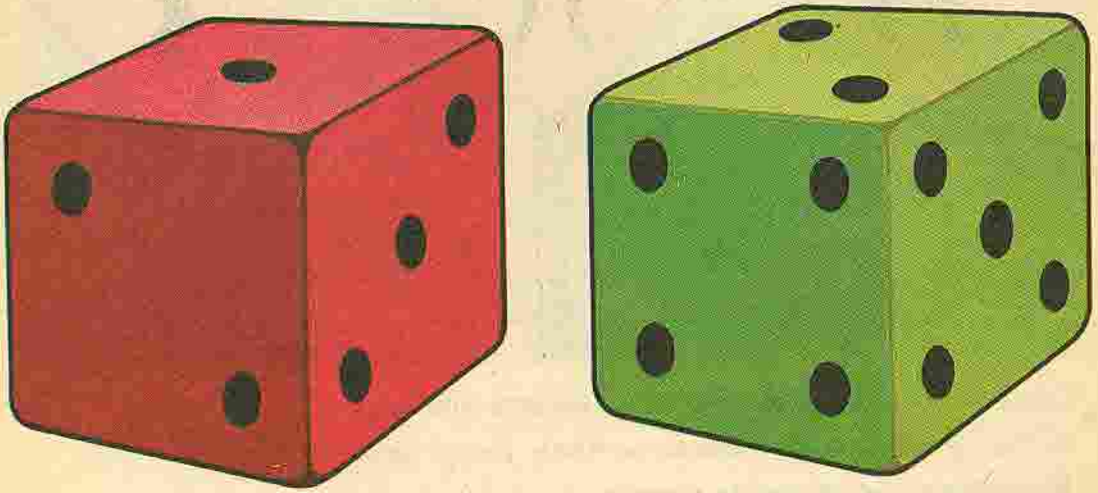
Existen símbolos que representan instituciones, otros que describen instrumentos o máquinas, otros más que expresan ideas, sonidos, etc.



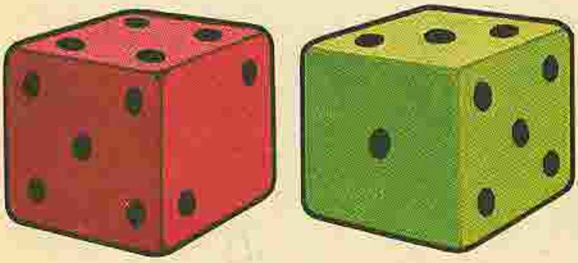
En matemáticas se usan frecuentemente símbolos. Usted ha manejado algunos de ellos como, por ejemplo,

+ 0 − × ÷ > < ∞

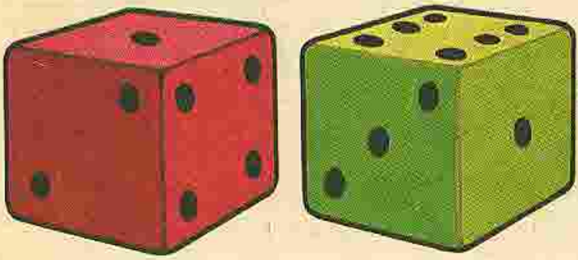
Seguramente los primeros símbolos matemáticos que aprendió a usar en la escuela primaria fueron los que se emplean para representar números. Además de esos símbolos, que usted ya conoce, también se pueden utilizar letras para simbolizar números. A continuación ilustramos esa idea.



El número de puntos que se obtiene en una jugada de dados es la suma de los puntos que aparecen en la cara superior de cada dado. Si deseamos indicar el número de puntos de cualquier jugada, podríamos usar la expresión $m + n$, donde m representaría el número de puntos que se ven en el dado rojo y n sería el número de puntos del dado verde. Así, en la ilustración inicial $m + n$ es 1 + 2.



Aquí $m + n$ es 4 + 3



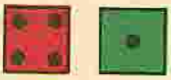
En esta jugada, $m + n$ vale 1 + 6

Si se quiere indicar que en una jugada el dado rojo marcó 6 y el dado verde marcó 5, pueden usarse las expresiones $m = 6$ y $n = 5$. En tal caso, $m + n$ es $6 + 5$.

Ejercicio 2. Diga usted qué número es $m + n$, en las siguientes jugadas.

a)

$m + n$ es $3 + 2$



b)

$m + n$ es ______

c)

$m + n$ es ______

d)

$m + n$ es ______

e)

$m + n$ es ______

f)

$m + n$ es ______

g) $m = 4, n = 4$

$m + n$ es ______

h) $m = 2, n = 5$

$m + n$ es ______

i) $m = 6, n = 6$

$m + n$ es ______

j) $m = 5, n = 4$

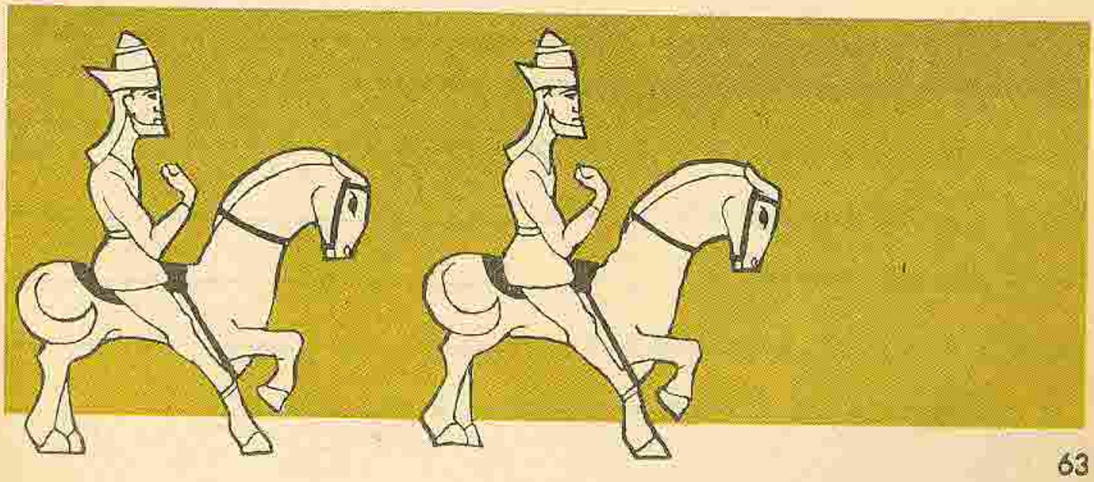
$m + n$ es ______

k) $m = 5, n = 5$

$m + n$ es ______

l) $m = 2, n = 6$

$m + n$ es ______



Ejercicio 3. Hay dos telares en un taller textil. Si designamos con x el número de metros de tela que produce uno de ellos en un día y con b el número de metros que produce el otro en el mismo día, entonces $x + b$ es la producción total en ese día. Complete usted las expresiones siguientes.

a) Si el lunes x fue 30 y b fue 47, entonces $x + b$ fue $30 + 47 = 77$.

b) El martes tuvimos $x = 65$ y $b = 43$, entonces la producción de ese día fue

$65 + 43 =$ ____

c) El miércoles la producción fue $x = 40$ y $b = 78$. Entonces,

$x + b =$ ____ + ____ = ____

d) El jueves, $x = 165$ y $b = 98$. Por consiguiente, $x + b =$ ____ + ____ = ____

e) Si $x = 400$ y $b = 96$, entonces $x + b = 400 + 96 = 496$

f) Si $x = 354$ y $b = 168$, entonces $x + b =$ ________________

g) Si $x = 0$ y $b = 87$, entonces $x + b =$ ________________

h) Si $x = 209$ y $b = 0$, entonces $x + b =$ ________________

Ejercicio 4. Considerando que a es el número 3, diga usted qué números son los siguientes:

a) $a + 2 = 3 + 2 = 5$

b) $7 + a =$ ____________

c) $a + 8 =$ ____________

d) $15 + a =$ ____________

e) $a + 0 =$ ____________

f) $27 + a =$ ____________

g) $13 + a + 2 =$ ____________

h) $a + 18 + 2 =$ ____________

i) $25 + a + 0 + a =$ ________

j) $a + a + a + 6 =$ ____________

Ejercicio 5. Complete usted las siguientes expresiones.

a) Si x es 125, entonces $x + 34 = 125 + 34 = 159$.

b) Si n es 80, entonces $74 + n =$ ________________

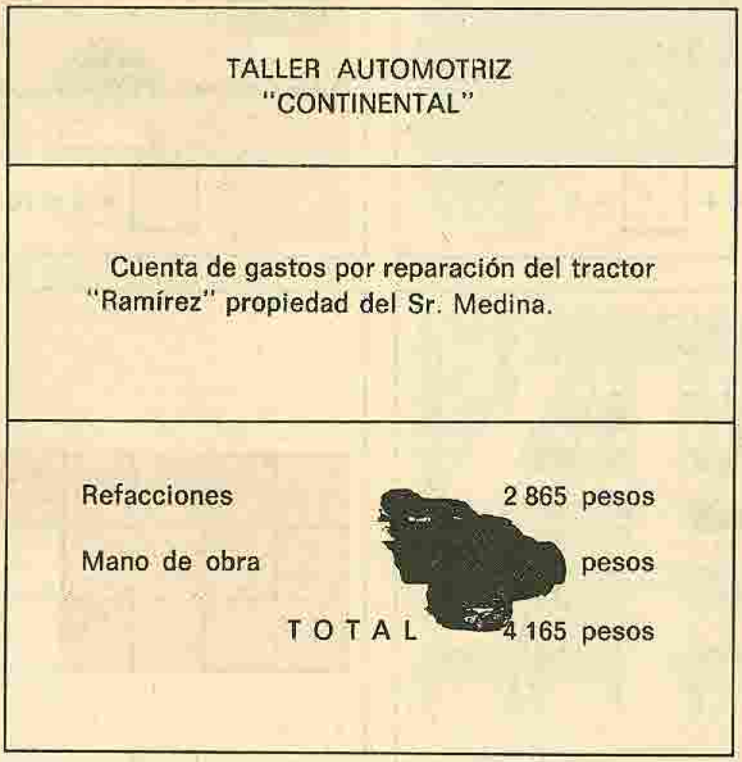
c) Si a es 250, entonces $a + a =$ ________________

d) Si $x = 8$ y $a = 2$, entonces $x + a =$ ________________

e) Si $a = 1\,754$ y $b = 2\,000$, entonces $a + b =$ ________________

3. Ecuaciones

Al ir a pagar la reparación de su tractor le presentaron al señor Medina la siguiente cuenta que estaba manchada de tinta. ¿Podría el Sr. Medina saber cuánto le cobran de mano de obra?



TALLER AUTOMOTRIZ
"CONTINENTAL"

Cuenta de gastos por reparación del tractor "Ramírez" propiedad del Sr. Medina.

Refacciones 2 865 pesos
Mano de obra [illegible] pesos
TOTAL 4 165 pesos

El señor Medina planteó la situación de la siguiente manera:

$$2\,865 + \boxed{} = 4\,165$$

(¿Qué número sumado a 2 865 da 4 165?)

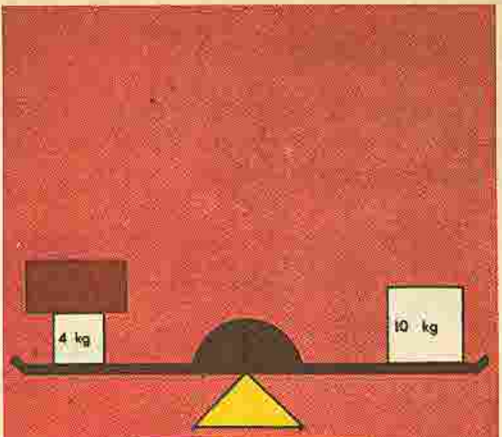
El señor Medina llegó a la conclusión de que por mano de obra le cobraron 1 300 pesos porque

$$2\,865 + \boxed{1\,300} = 4\,165$$

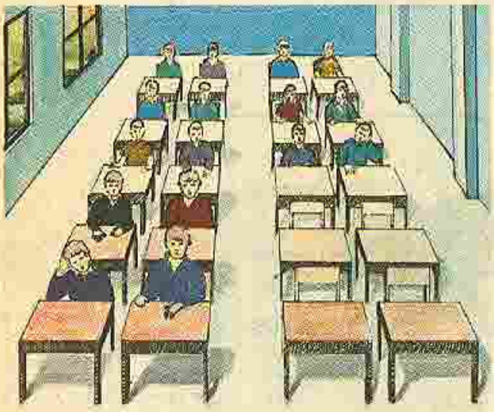
Las expresiones como $2\,865 + \boxed{} = 4\,165$ reciben el nombre de **ecuaciones**, y al número que corresponde al cuadrito se le llama **solución de la ecuación.**

Ejercicio 6. Anote en cada $\boxed{}$ la solución de la ecuación. Indique además qué representa la solución en cada caso.

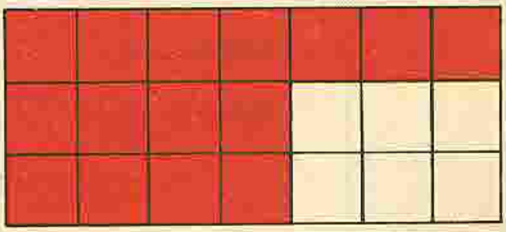
$4 + \square = 6$



$\square + 4 = 10$



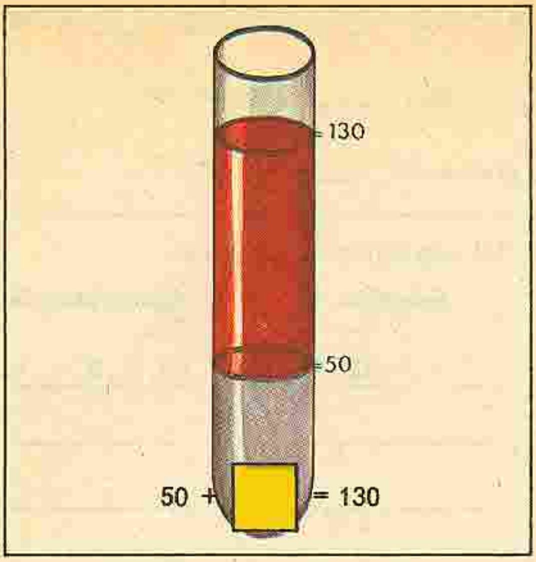
$16 + \square = 20$

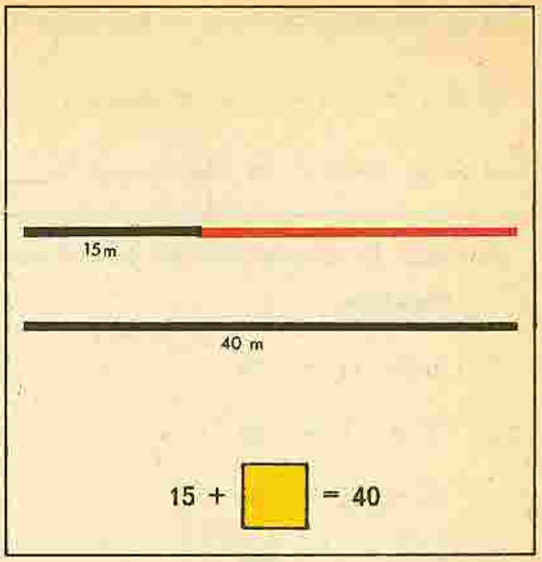


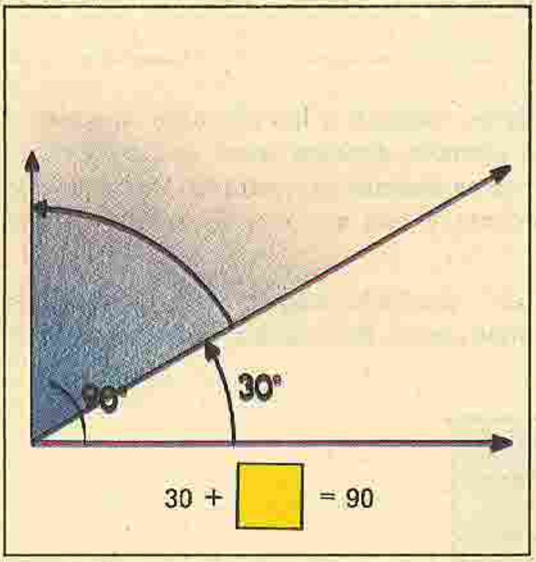
$\square + 15 = 21$

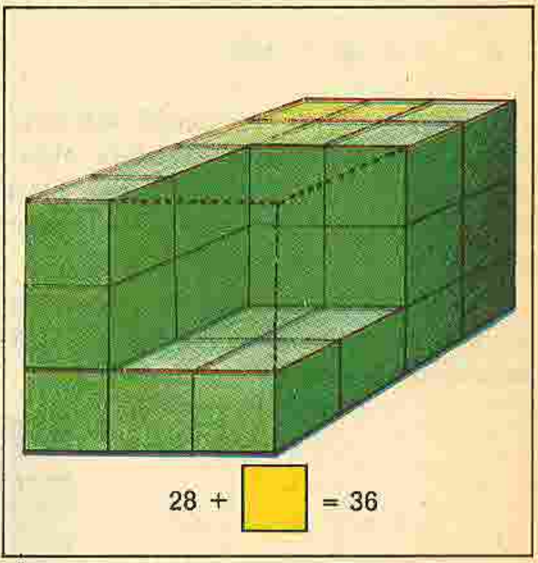
$40 + \square = 100$

$38 + \square = 78$









En una ecuación cualquiera puede escribirse alguna letra en lugar del cuadrito. Por ejemplo, la ecuación 8 + ☐ = 15 puede escribirse como $8 + x = 15$. Y en este caso la solución puede indicarse así: $x = 7$.

Ejemplo.

a) La solución de la ecuación $a + 13 = 15$ es $a = 2$ porque **2** + 13 = 15.

b) En la ecuación $17 + n = 25$, la solución es $n = 8$ porque 17 + **8** = 25.

c) Si $20 + x = 35$, entonces $x = 15$ porque 20 + **15** = 35.

Ejercicio 7. Complete usted las siguientes expresiones.

a) Dada la ecuación $45 + b = 70$, su solución es $b =$ ____ porque 45 + ____ = 70.

b) Considerando la ecuación $x + 3 = 90$, tenemos que $x =$ ____ porque ____ + 30 = 90.

c) La ecuación $50 + n = 85$ tiene la solución $n =$ ____ porque $50 +$ ____ $= 85$.

d) Si $x + 100 = 500$, entonces $x =$ ____ porque ____ $+ 100 = 500$.

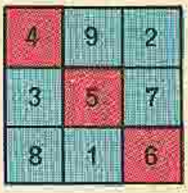
e) Si $60 + a = 87$, entonces $a =$ ____ porque $60 +$ ____ $= 87$.

Ejercicio 8. Encuentre las soluciones de las siguientes ecuaciones.

	Ecuación	Solución	Comprobación
a)	$n + 3 = 18$	$n = 15$	$15 + 3 = 18$
b)	$5 + x = 43$		
c)	$b + 42 = 60$		
d)	$150 + y = 200$		
e)	$x + 90 = 165$		

El hombre, en la antigüedad, atribuyó poderes mágicos a los números. Aún ahora hay todavía supersticiones sobre ellos. Por ejemplo, algunos creen que el 13 es de "mala suerte" y el 7 es de "buena suerte"; otros piensan lo contrario. Hoy sabemos que los números son una poderosa herramienta y que su "magia" radica en que nos ayudan a transformar el mundo.

A continuación tenemos lo que se llama un "cuadrado mágico". Se dice que lo conocía ya el emperador chino Yu (2 200 años antes de nuestra era) y que él lo denominó Lo-shu.



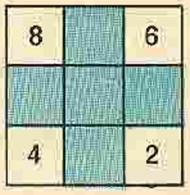
4	9	2
3	5	7
8	1	6

Este "cuadrado mágico" se forma con los números del 1 al 9 y éstos se encuentran colocados de tal modo que al sumarlos por columnas, renglones o diagonales, se obtiene el mismo resultado.

Además de éste, existen otros "cuadrados mágicos".

Ejercicio 9.

a) Complete el siguiente "cuadrado mágico", sabiendo que la suma de columnas, renglones y diagonales debe ser 15. Empiece por la diagonal.



8		6
4		2

b) En el siguiente "cuadrado mágico" se han sustituido algunos números por letras. Encuentre el valor de ellas de modo que la suma de columnas, renglones y diagonales también sea 15.

a	*c*	*b*
1	5	9
8	*d*	*e*

a = ________

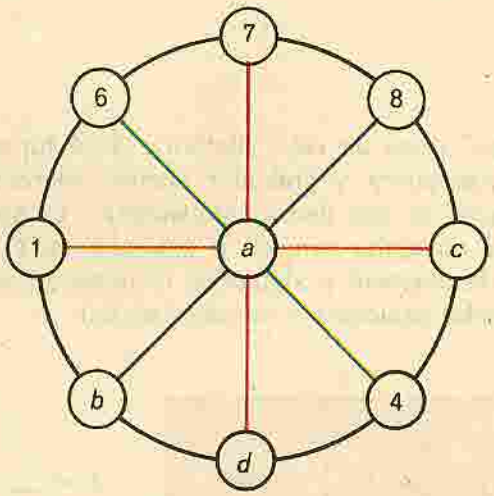
b = ________

c = ________

d = ________

e = ________

c) Existen también "círculos mágicos". En el siguiente, la suma de los tres números que aparecen en cada diámetro es 15. ¿Cuántc vale cada letra?



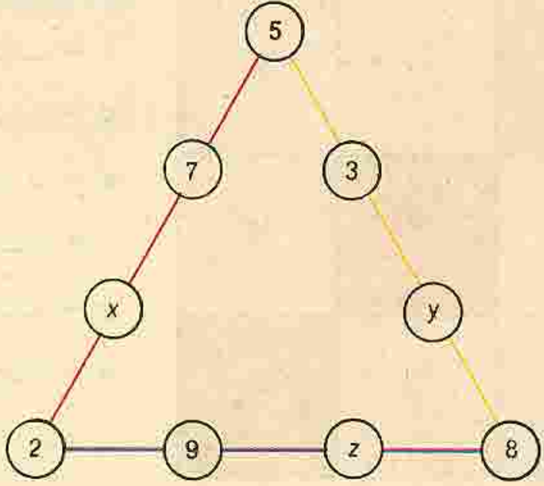
a = ________

b = ________

c = ________

d = ________

d) El siguiente es un "triángulo mágico". Sus lados siempre suman 20. ¿Cuál es el valor de las letras?

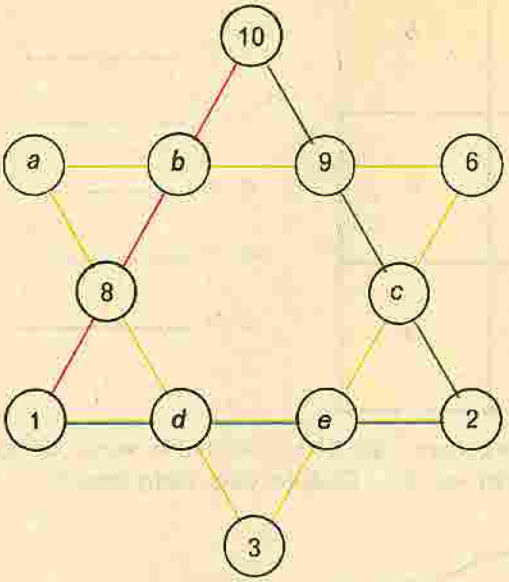


x = ________

y = ________

z = ________

e) Y ahora tenemos una "estrella mágica" formada con números del 1 al 12. Si se sabe que la suma de los cuatro números que aparecen en cada "lado" de la estrella es 26, calcule el valor de las letras. Empiece con el "lado" rojo.



a = ______________

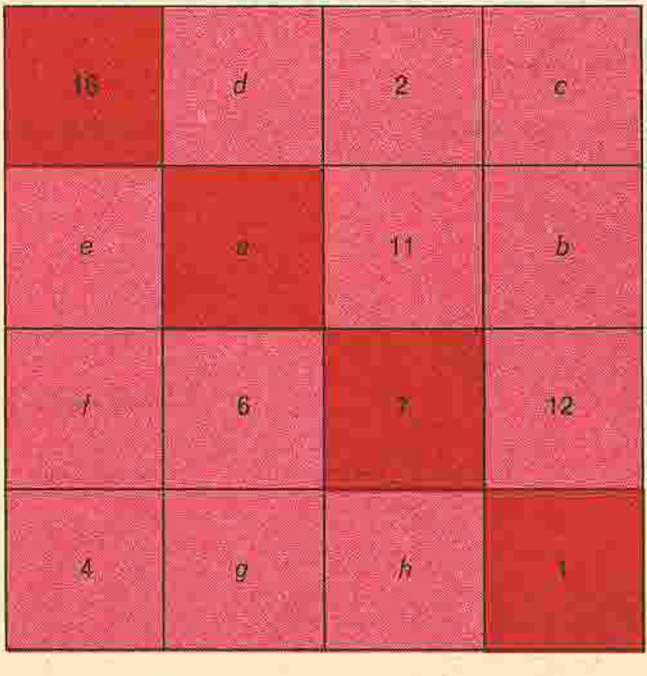
b = ______________

c = ______________

d = ______________

e = ______________

f) El siguiente "cuadrado mágico" tiene un valor histórico. Está formado con números del 1 al 16 y lo mostró el gran pintor y grabador alemán Albrecht Dürer en 1514 en un grabado de fama mundial al que llamó "Melancolía". La suma de cualquiera de las diagonales o bien de cualquier renglón o columna es 34. Calcule el valor de las letras empezando por la diagonal y siguiendo el orden alfabético. (Este ejercicio es para personas con mucha paciencia y perseverancia.)



16	*d*	2	*c*
e	*a*	11	*b*
f	6	7	12
4	*g*	*h*	1

a = ______________

b = ______________

c = ______________

d = ______________

e = ______________

f = ______________

g = ______________

h = ______________

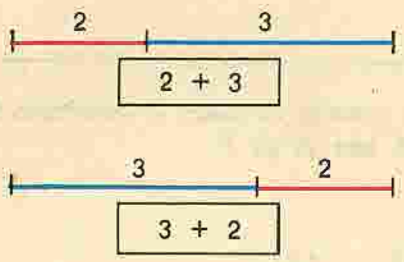
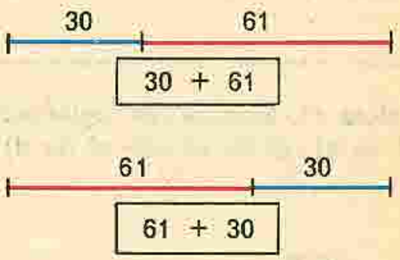
4. Propiedades básicas de la adición

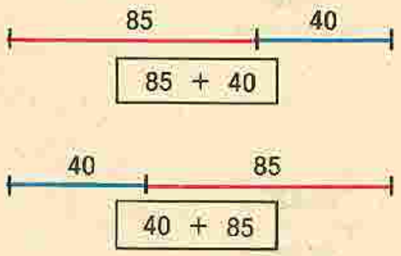
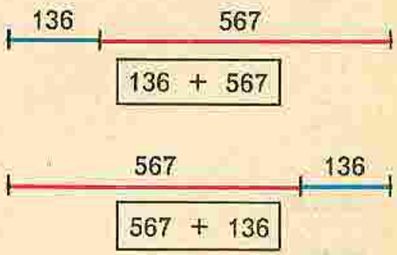
Al efectuar adiciones, el hombre descubrió que la adición posee algunas propiedades importantes. Este descubrimiento le permitió conocer más a fondo esta operación y, por lo tanto, manejarla con más facilidad. Desde la escuela primaria usted ha usado estas propiedades a las que se da el nombre de **propiedades básicas de la adición.**

Dada la importancia de estas propiedades básicas, conviene que las estudiemos ahora con más atención.

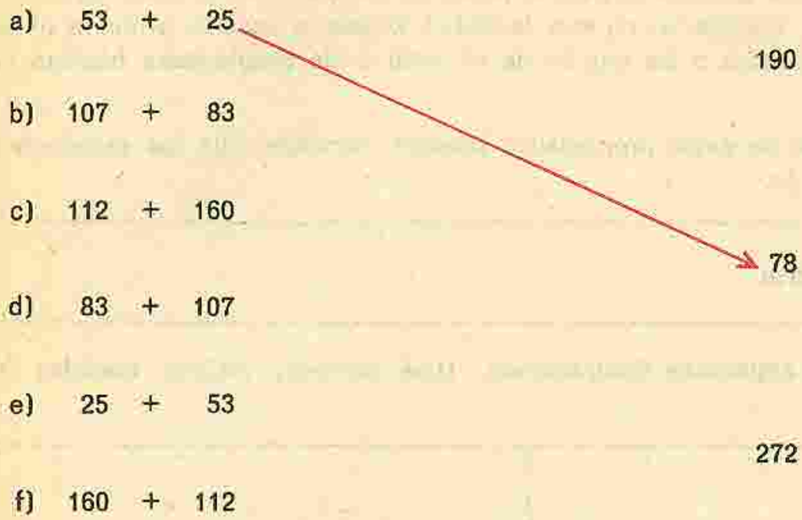
Propiedad conmutativa.

Observe usted las siguientes ilustraciones. (Los números indican medidas en metros.)

	
¿Miden lo mismo los dos segmentos?	¿Miden lo mismo los dos segmentos?

	
¿Miden lo mismo los dos segmentos?	¿Miden lo mismo los dos segmentos?

Ejercicio 10. Relacione con una línea, tal como se hace en el inciso a), cada par de sumandos con su suma.



a) 53 + 25

b) 107 + 83

c) 112 + 160

d) 83 + 107

e) 25 + 53

f) 160 + 112

190

78

272

Ejercicio 11. Efectúe las siguientes adiciones y luego compare el resultado de a) con el de b), el de c) con el de d) y el de e) con el de f).

a)
$$\begin{array}{r} 3\,678 \\ +\quad \\ 5\,627 \\ \hline \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{r} 5\,627 \\ +\quad \\ 3\,678 \\ \hline \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{r} 2\,083 \\ +\quad \\ 401 \\ \hline \end{array}$$

d)
$$\begin{array}{r} 401 \\ +\quad \\ 2\,083 \\ \hline \end{array}$$

e)
$$\begin{array}{r} 36\,275 \\ +\quad \\ 86\,427 \\ \hline \end{array}$$

f)
$$\begin{array}{r} 86\,427 \\ +\quad \\ 36\,275 \\ \hline \end{array}$$

En los ejercicios anteriores puede observarse que hay expresiones como 53 + 25 y 25 + 53, como 83 + 107 y 107 + 83, etc., cuyo resultado es el mismo número. Al efectuar adiciones, seguramente usted habrá encontrado muchos ejemplos de este tipo. En general es cierto que:

Si a y b son dos números naturales, o cero, entonces al sumar $a + b$ y al sumar $b + a$ se obtiene el mismo resultado. En símbolos,

$$a + b = b + a$$

La propiedad de la adición que enunciamos con la afirmación anterior recibe el nombre de **propiedad conmutativa.**

En virtud de esta propiedad conmutativa, estamos seguros, aun sin efectuar la operación, que 8 596 + 7 392 dará el mismo resultado que 7 392 + 8 596. Es decir, 8 596 + 7 392 = 7 392 + 8 596. También estamos seguros de que si m es un número natural, o cero, entonces $m + 5 = 5 + m$; $m + 27\,527 = 27\,527 + m$, etc.

Ejercicio 12. Use la propiedad conmutativa para completar las siguientes igualdades, como se hace en a) y en i). (Las letras representan números naturales o cero.)

a) 6 + 11 = 11 + 6__________

b) 36 + 25 = __________

c) 5 875 + 3 694 = __________

d) 26 875 + 63 472 = __________

e) $5 + a =$ __________

f) $b + 8 =$ __________

g) $15 + h =$ __________

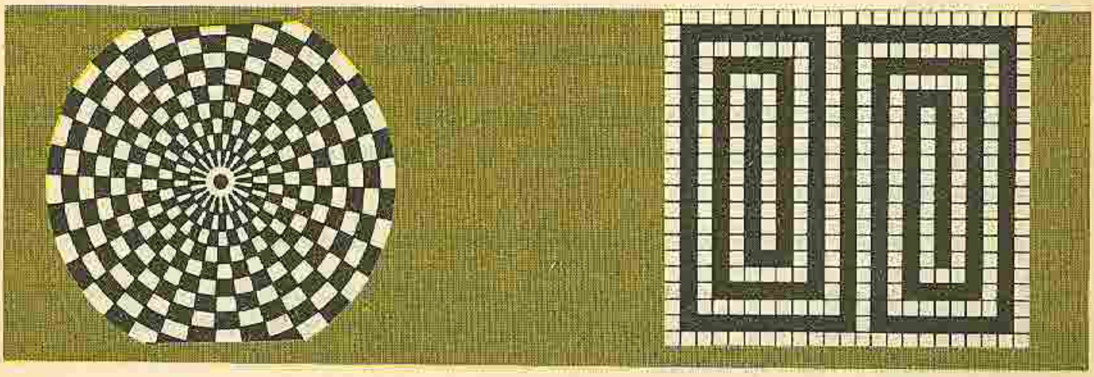
h) $r + 20 =$ __________

i) $x + y = y + x$__________

j) $m + n =$ __________

k) $r + s =$ __________

l) $a + b =$ __________



Ejercicio 13. Anote en la siguiente tabla las sumas que se indican a continuación.

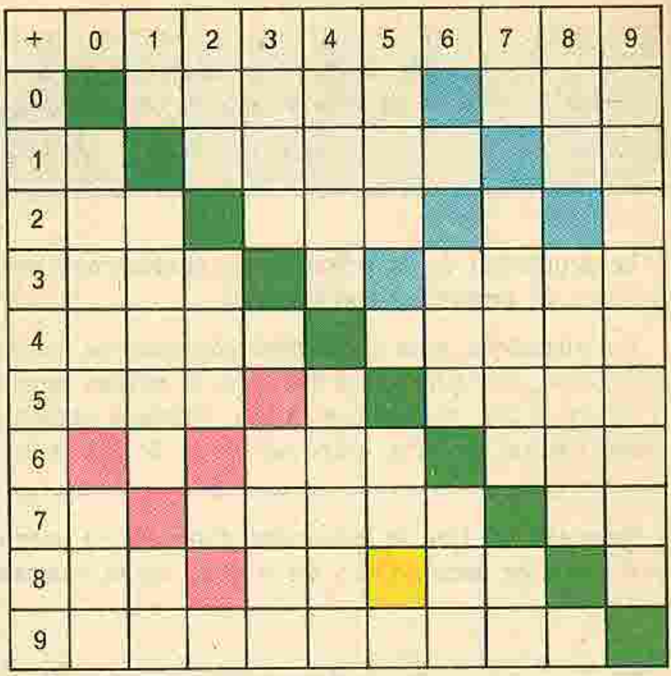
a) 6 + 2 b) 2 + 6

c) 7 + 1 d) 1 + 7

e) 6 + 0 f) 0 + 6

g) 5 + 3 h) 3 + 5

i) 8 + 2 j) 2 + 8



+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	🟩						🟦			
1		🟩						🟦		
2			🟩				🟦		🟦	
3				🟩		🟦				
4					🟩					
5				🟥		🟩				
6	🟥		🟥				🟩			
7		🟥						🟩		
8			🟥			🟨			🟩	
9										🟩

Ejercicio 14. Observe usted que, en la tabla, los cuadros de color rojo y azul semejan dos letras "T".

a) ¿Cómo están situadas estas "T" con respecto a la diagonal verde?

Supongamos que se recorta esta tabla y se dobla por la diagonal verde.

b) ¿Cómo quedan las "T" al doblarse?

c) ¿Coinciden el cuadro 6 + 2 con el cuadro 2 + 6?

d) ¿Coinciden los otros cuadros?

De las dos figuras "T" se dice que son simétricas con respecto a la diagonal verde.

e) Coloree el cuadrito que es simétrico al cuadrito amarillo, con respecto a la diagonal verde.

f) ¿Qué sumas corresponden al cuadrito amarillo y a su simétrico?

g) En general, en la tabla de adición, para todo cuadro donde haya una suma $a + b$ hay un cuadro situado simétricamente con respecto a la diagonal que corresponde a la suma_____+_____.

h) ¿Cómo son los sumandos cuya suma aparece en la diagonal?

i) La diagonal separa a nuestra tabla en dos regiones. Si conociera solamente las sumas anotadas en una de esas regiones, ¿cómo haría usted para llenar la otra región sin efectuar las adiciones?

Ejercicio 15. Aplique la propiedad conmutativa de la adición para resolver las siguientes ecuaciones. (Las letras representan números naturales o cero.)

a) 2 + 4 = 4 + ____ b) 7 + 3 = ____ + 7

c) ____ + 15 = 15 + 9 d) 23 + ____ = 18 + 23

e) 0 + 75 = 75 + ____ f) 6 + 8 = x + 6; x = ____

g) 11 + 21 = 21 + m; m = ____ h) x + 20 = 20 + 30; x = ____

i) 10 + s = 1 + 10; s = ____ j) 56 + 27 = 27 + r; r = ____

El paréntesis en la adición.

Más adelante usted encontrará expresiones como (3 + 4) + 5 y 3 + (4 + 5) en las que se usa el paréntesis. Observe usted, en los siguientes ejemplos, cómo se interpretan tales expresiones.

Ejemplo.

a) La expresión (3 + 4) + 5 indica la suma de 3 + 4 y 5. Esto es, (3 + 4) + 5 = = 7 + 5.

b) La expresión 3 + (4 + 5) indica la suma de 3 y 4 + 5. O sea,
3 + (4 + 5) = 3 + 9.

Ejercicio 16. Complete las oraciones siguientes.

a) La expresión (7 + 3) + 5 indica la suma de ____ + ____ y 5. Es decir, (7 + 3) + + 5 = ____ + 5.

b) La expresión 7 + (3 + 5) indica la suma de ____ y ____ + ____. Es decir, 7 + + (3 + 5) = 7 + ____.

c) La expresión (27 + 34) + 12 representa la suma de ____ + ____ y ____. Es decir, (27 + 34) + 12 = ____ + 12.

d) La expresión 27 + (34 + 12) indica la suma de ____ y ____ + ____. Es decir, 27 + (34 + 12) = ____.

e) La suma de 3 + 0 y 9 se indica con la expresión (3 + 0) + 9.

f) La suma de 3 y 0 + 9 se indica con la expresión ____ + (+   ).

g) La suma de 3 + 4 y 80 se indica con la expresión ____________.

h) la suma de a + b y c se indica con la expresión ____________.

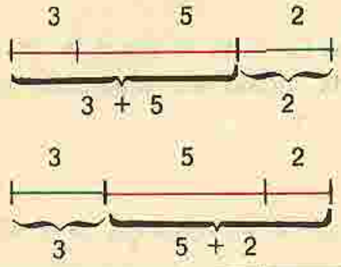
i) La expresión a + (b + c) indica la suma de ____ y ________.

Ejercicio 17. Complete las igualdades siguientes tal como se hace en el inciso a).

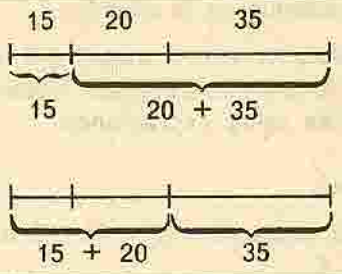
a) 5 + (4 + 3) = 5 + 7
b) (5 + 4) + 3 = ___ + ___
c) (10 + 5) + 2 = ___ + ___
d) 10 + (5 + 2) = ___ + ___
e) 7 + (9 + 1) = ___ + ___
f) (7 + 9) + 1 = ___ + ___

Propiedad asociativa.

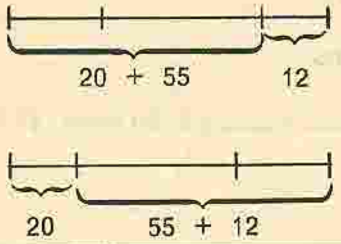
Ahora que sabemos interpretar expresiones con paréntesis podemos estudiar otra propiedad básica de la adición. Observe usted las siguientes ilustraciones. (Los números indican medidas en metros.)



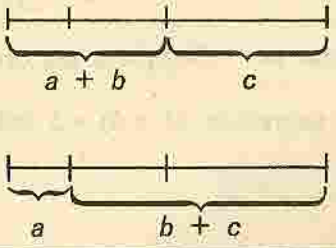
¿Miden lo mismo los dos segmentos?



¿Miden lo mismo los dos segmentos?



¿Miden lo mismo los dos segmentos?



¿Miden lo mismo los dos segmentos?

Ejercicio 18. Simplifique las siguientes expresiones tal como se hace en a).

a) 6 + (2 + 8) = 6 + 10 = 16
b) (6 + 2) + 8 = ___ + ___ = ___
c) 12 + (15 + 21) = ___ + ___ = ___
d) (12 + 15) + 21 = ___ + ___ = ___
e) (30 + 0) + 80 = ___ + ___ = ___
f) 30 + (0 + 80) = ___ + ___ = ___
g) 135 + (246 + 183) = ___ + ___ = ___
h) (135 + 246) + 183 = ___ + ___ = ___

Habrá usted observado, al resolver el ejercicio anterior, que se obtiene el mismo resultado en a) y b), en c) y d), en e) y f) y en g) y h). Esto ilustra la propiedad que enunciamos a continuación.

Si a, b y c son números naturales, o cero, y calculamos la suma de a y $b + c$, y luego la suma de $a + b$ y c, obtenemos en ambos casos el mismo resultado. En símbolos,

$$a + (b + c) = (a + b) + c.$$

Esta propiedad básica de la adición recibe el nombre de **propiedad asociativa**.

Ejercicio 19. Use la propiedad asociativa y complete las expresiones siguientes, sin efectuar las operaciones.

a) Ya que (8 + 3) + 4 = 15, entonces 8 + (3 + 4) =_____.

b) Ya que 12 + (16 + 25) = 53, entonces (12 + 16) + 25 =_____.

c) Ya que (85 + 42) + 70 = 197, entonces 85 + (42 + 70) =_____.

d) Ya que 1 300 + (1 200 + 3 000) = 5 500, entonces (1 300 + 1 200) + 3 000 =_____.

Ejercicio 20. Use la propiedad asociativa para completar las igualdades tal como se hace en a). (Las letras representan a cualquier número natural o al cero.)

a) (5 + 8) + 7 = 5 + (8 + 7)

b) (11 + 5) + 10 = __________

c) (7 + 0) + 3 = __________

d) 10 + (70 + 80) = __________

e) m + (5 + 12) = __________

f) (x + y) + z = __________

g) a + (r + s) = __________

h) (m + p) + q = __________

Las adiciones como 2 + 5 + 8 = ☐ pueden efectuarse de dos maneras distintas; pero, por la propiedad asociativa, sabemos que el resultado será el mismo. Es decir,

$$2 + 5 + 8 = 2 + (5 + 8) = 2 + 13 = 15$$

o bien,

$$2 + 5 + 8 = (2 + 5) + 8 = 7 + 8 = 15$$

Ejercicio 21. Efectúe las siguientes adiciones en dos formas diferentes, tal como se hace en a):

a) 3 + 4 + 8

1) 3 + 4 + 8 = 3 + (4 + 8) = 3 + 12 = 15

2) 3 + 4 + 8 = (3 + 4) + 8 = 7 + 8 = 15

b) 5 + 9 + 3

c) 7 + 8 + 2

d) 0 + 8 + 15

e) 15 + 0 + 7

Ejercicio 22. Encuentre el valor de la expresión $m + n + p$, para los valores de m, n y p siguientes.

a) $m = 4$, $n = 8$, $p = 15$

b) $m = 7$, $p = 1$, $n = 9$

c) $p = 3$, $m = 5$, $n = 0$

d) $m = 5$, $p = 0$, $n = 1$

El cero en la adición.

Es importante estudiar el comportamiento especial que tiene el número cero cuando aparece como sumando en una adición. El siguiente ejercicio nos permitirá observar dicho comportamiento.

Ejercicio 23. En la siguiente tabla llene el cuadro verde y los cuadros azules y amarillos con las sumas que les correspondan.

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩	🟩
1	🟩									
2	🟩									
3	🟩									
4	🟩									
5	🟩									
6	🟩									
7	🟩									
8	🟩									
9	🟩									

Ejercicio 24. Complete las expresiones siguientes.

a) Las sumas que corresponden a los cuadritos azules son:

1 + 0 = ______

2 + 0 = ______

3 + 0 = ______

___ + 0 = ______

___ + 0 = ______

6 + 0 = ______

7 + 0 = ______

___ + 0 = ______

___ + 0 = ______

b) Las sumas que están en los cuadritos amarillos son:

0 + 1 = ______

0 + 2 = ______

0 + ___ = ______

0 + ___ = ______

0 + 5 = ______

0 + 6 = ______

0 + 7 = ______

___ + 8 = ______

___ + 9 = ______

c) La suma que está en el cuadro verde es ___ + ___ = ______

d) Los cuadritos azules nos sugieren que si a es un número natural, entonces

$a + 0 =$ ______

e) Los cuadritos amarillos nos sugieren que si a representa un número natural,

entonces $0 + a =$ ___.

Las observaciones anteriores ilustran la siguiente propiedad básica de la adición.

Si a es un número natural, o cero,

$$a + 0 = 0 + a = a.$$

Por la manera como se comporta el cero en la adición, se le llama "elemento neutro" de tal operación.

Ejercicio 25. Efectúe las siguientes adiciones. (Las letras representan números naturales o cero.)

a) 3 + 0 = ______

b) 37 685 + 0 = ______

c) 1 + 0 = ______

d) $0 + p =$ ______

e) $m + 0 =$ ______

f) $(2 + a) + 0 =$ ______

g) $0 + (r + 5) =$ ______

h) $(m + n) + 0 =$ ______

Hasta aquí hemos estudiado las tres propiedades básicas de la adición de números naturales. Para finalizar resuelva usted los dos ejercicios siguientes.

Ejercicio 26. Complete usted la siguiente tabla.

Propiedades básicas de la adición	
Nombre de la propiedad	Forma simbólica de expresarla
Conmutativa	
Asociativa	
Elemento neutro	

Ejercicio 27. Indique usted qué propiedad se emplea en cada una de las siguientes igualdades.

a) $5 + 4 = 4 + 5$ ______ conmutativa ______

b) $m + n = n + m$ ______

c) $(6 + 2) + 4 = 6 + (2 + 4)$ ______

d) $r + (s + t) = (r + s) + \mathrm{t}$ ______

e) $5 + 0 = 5$ ______

f) $0 + m = m$ ______ elemento neutro ______

g) $5 + (4 + 3) = (4 + 3) + 5$ ______

h) $(a + b) + c = c + (a + b)$ ______

i) $(8 + 5) + 0 = 8 + 5$ ______

j) $0 + (8 + 4) = 8 + 4$ ______

k) $m + 0 = 0 + m$ ______

l) $(5 + 4) + (8 + 7) = (8 + 7) + (5 + 4)$ ______

m) $3 + (2 + 4) = 3 + (4 + 2)$ ______

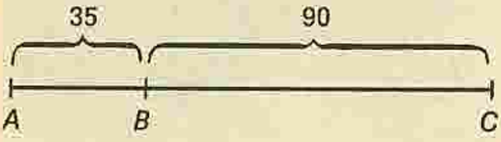
n) $5 + 3 = (5 + 3) + 0$ ______

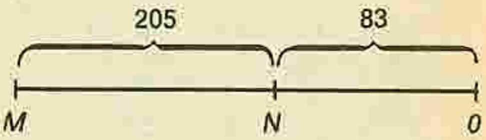
5. Problemas

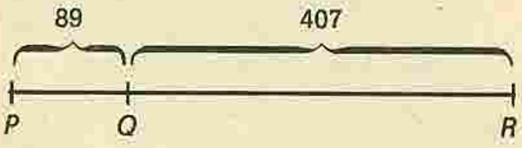
Finalmente resolveremos algunos problemas en los que interviene la adición.

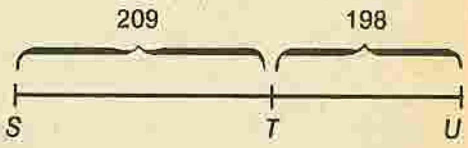
a) La distancia, por carretera, de México a Querétaro es de 220 kilómetros y de Querétaro a San Luis Potosí es de 192 kilómetros. ¿Cuál es la distancia de México a San Luis Potosí?

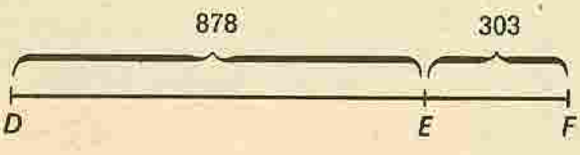
b) ¿Cuál es la longitud de cada uno de los siguientes segmentos? (Los números indican medidas en metros.)

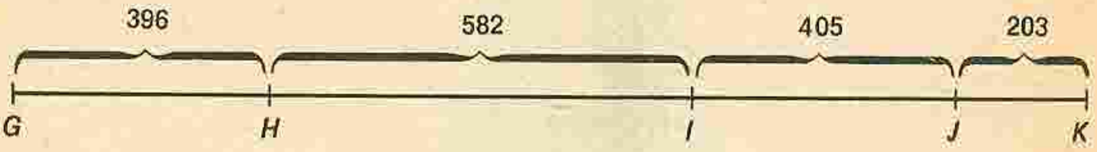






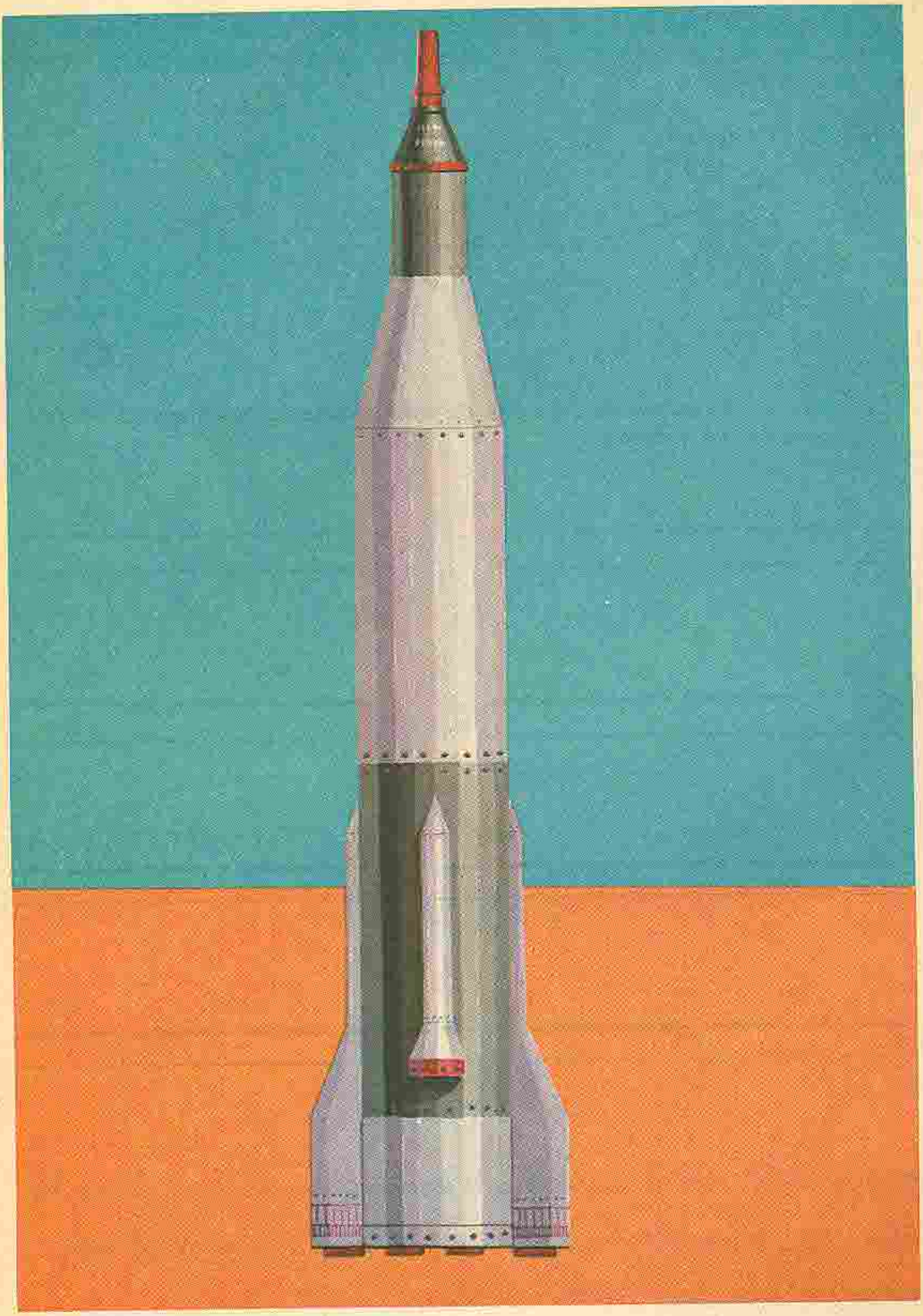




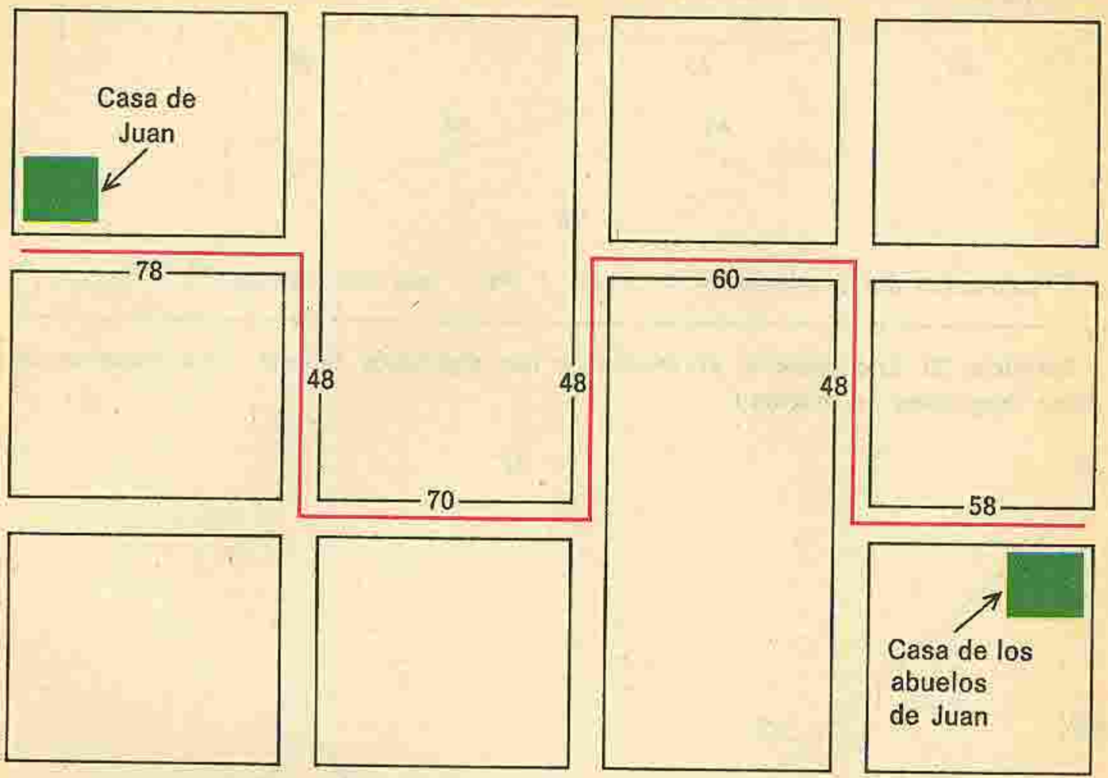


El segmento $\overline{AC}$ mide ________ metros; el segmento $\overline{MO}$ mide ________ metros; $\overline{PR}$ mide ________ metros; $\overline{SU}$ mide ______ metros; $\overline{DF}$ mide ______ metros; $\overline{XZ}$ mide ____ metros y $\overline{GK}$ mide ________ metros.

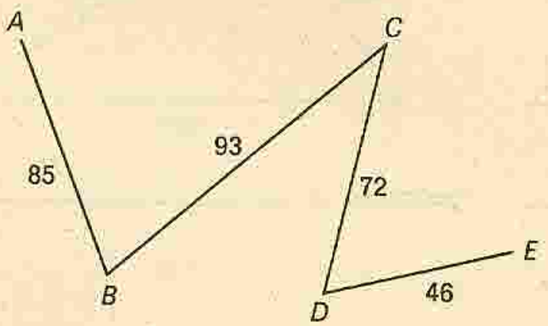
c) Un cohete de exploración cósmica consta de 3 etapas. La primera etapa impulsa el cohete hasta una altura de 57 kilómetros, la segunda etapa lo impulsa 89 kilómetros más y la tercera otros 105 kilómetros. ¿Hasta qué altura llegó en la última etapa?

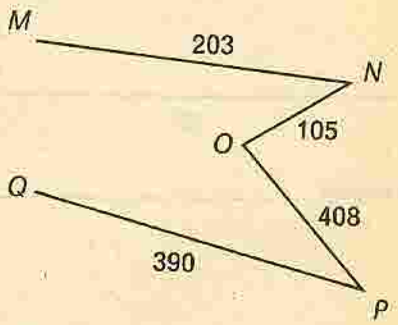


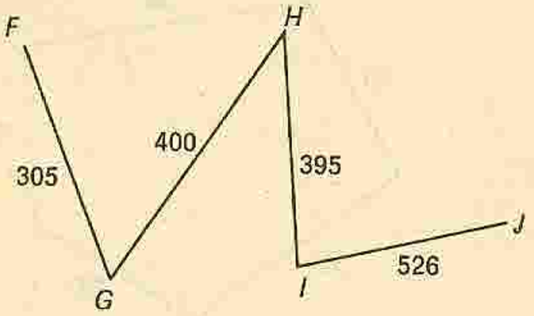
d) En el mapa está marcado el recorrido de la casa de Juan a la casa de sus abuelos. Si los números indican metros, ¿cuántos metros recorre Juan desde su casa a la de sus abuelos?

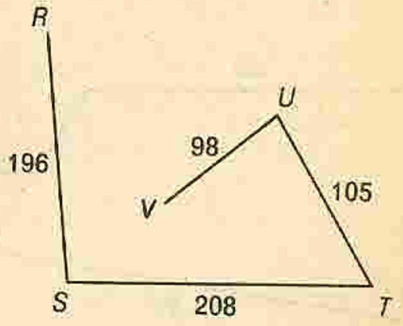


e) ¿Cuál es la longitud de las siguientes líneas? (Los números indican metros.)







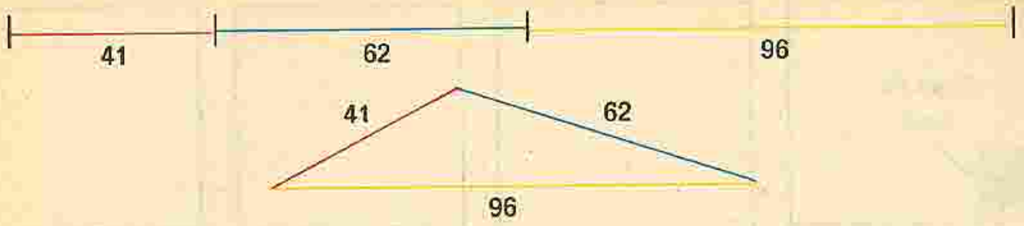


La línea *A B C D E* mide________metros; la línea *M N O P Q* mide________metros;

la línea *F G H I J* mide________metros; la línea *R S T U V* mide________metros.

El perímetro de una figura se obtiene sumando las medidas de todos sus lados; es decir, sumando las longitudes de sus lados.

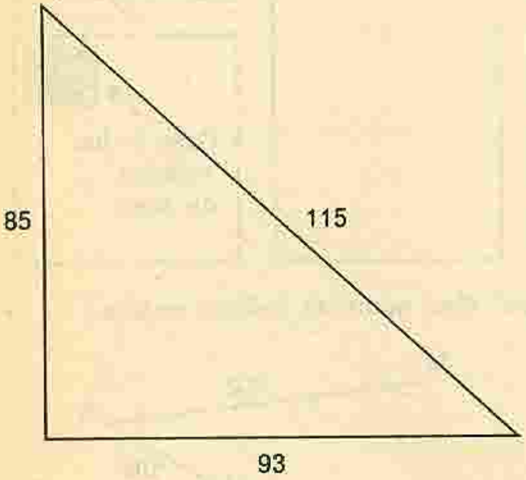
Ejemplo. Al medir un triángulo se obtuvieron las siguientes medidas en metros.



El perímetro del triángulo es 41 + 62 + 96, o sea 199 metros.

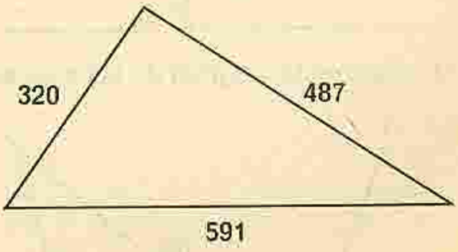
Ejercicio 28. Encuentre el perímetro de las siguientes figuras. (Los números indican longitudes en metros.)

a)



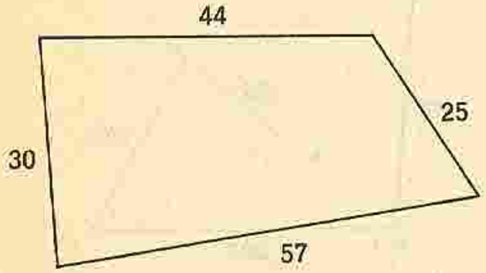
Perímetro: ____________________

b)



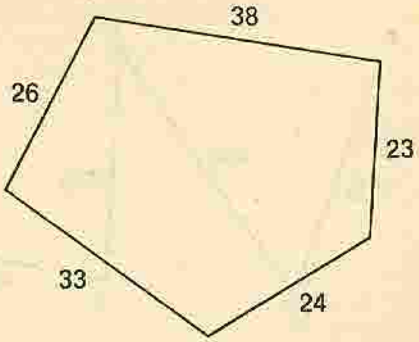
Perímetro: ____________________

c)



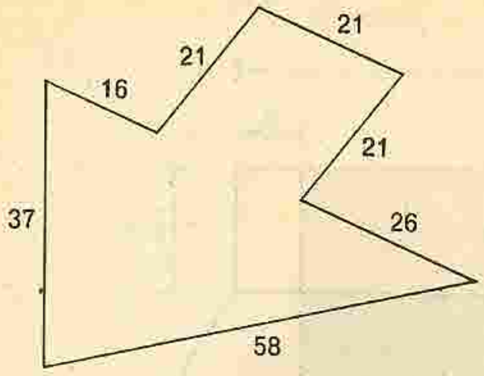
Perímetro: ____________________

d)



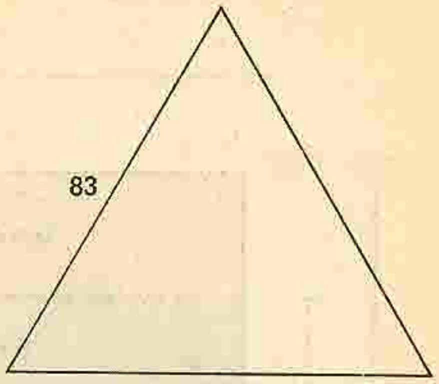
Perímetro: ____________________

e)



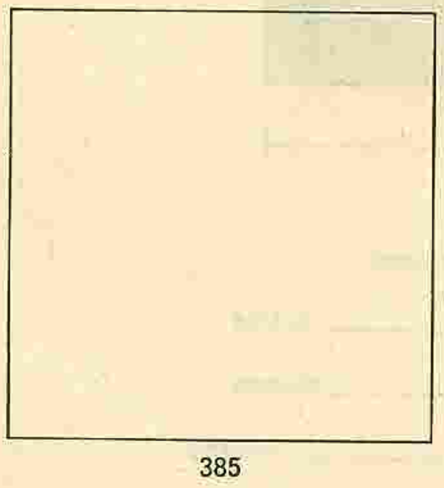
Perímetro: ______________________

f) La figura es un triángulo equilátero.



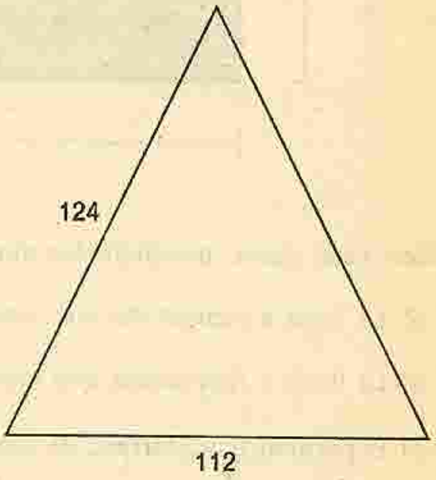
Perímetro: ______________________

g) La figura es un cuadrado



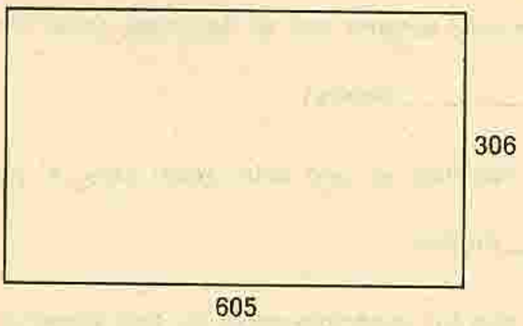
Perímetro: ______________________

h) La figura es un triángulo isósceles.



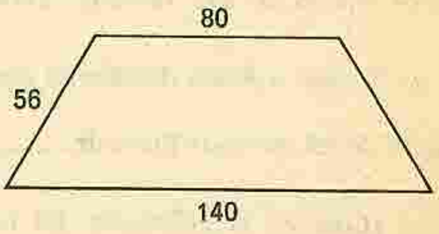
Perímetro: ______________________

i) La figura es un rectángulo.



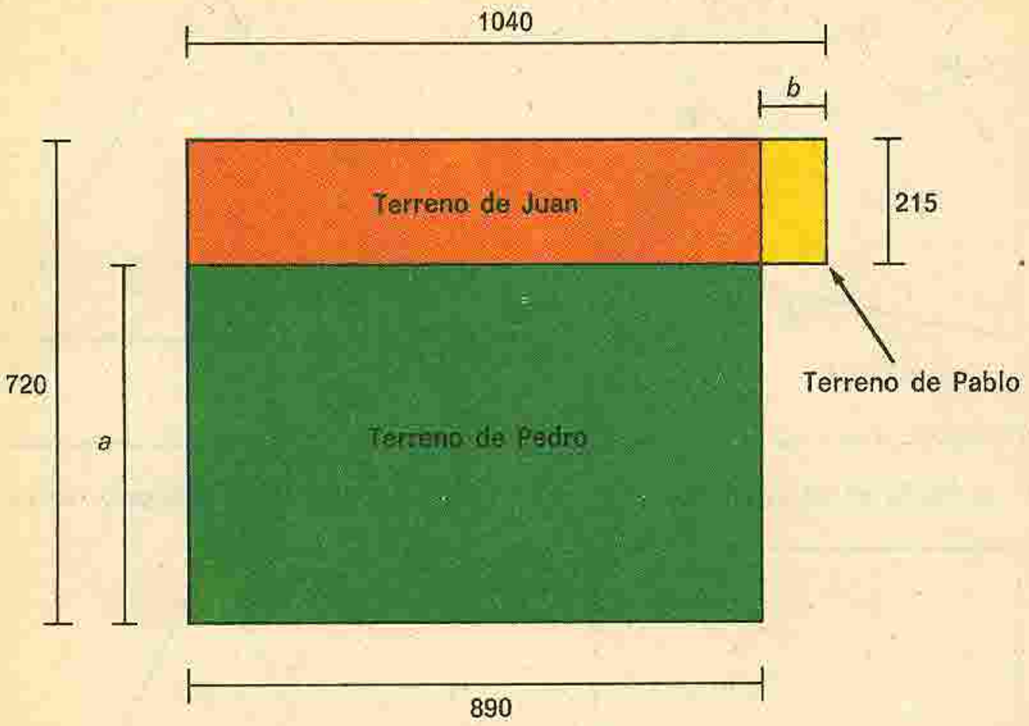
Perímetro: ______________________

j) La figura es un trapecio isósceles.



Perímetro: ______________________

Ejercicio 29. Juan, Pedro y Pablo reciben como herencia un terreno que se distribuyen entre ellos en la forma que se ilustra abajo. Las medidas están en metros.



Con esos datos, complete las siguientes oraciones.

a) La letra *a* representa una medida de__________metros.

b) La letra *b* representa una medida de__________metros.

c) El perímetro del terreno de Juan es de__________metros.

d) El terreno de Pedro tiene un perímetro de__________metros.

e) El terreno de Pablo tiene un perímetro de__________metros.

f) Si Juan y Pedro decidieran formar un solo terreno con su herencia, ¿cuál sería el perímetro de ese terreno? Sería de__________metros.

g) Si Juan y Pablo decidieran unir sus terrenos en uno solo, ¿cuál sería el perímetro de tal terreno? Sería de__________metros.

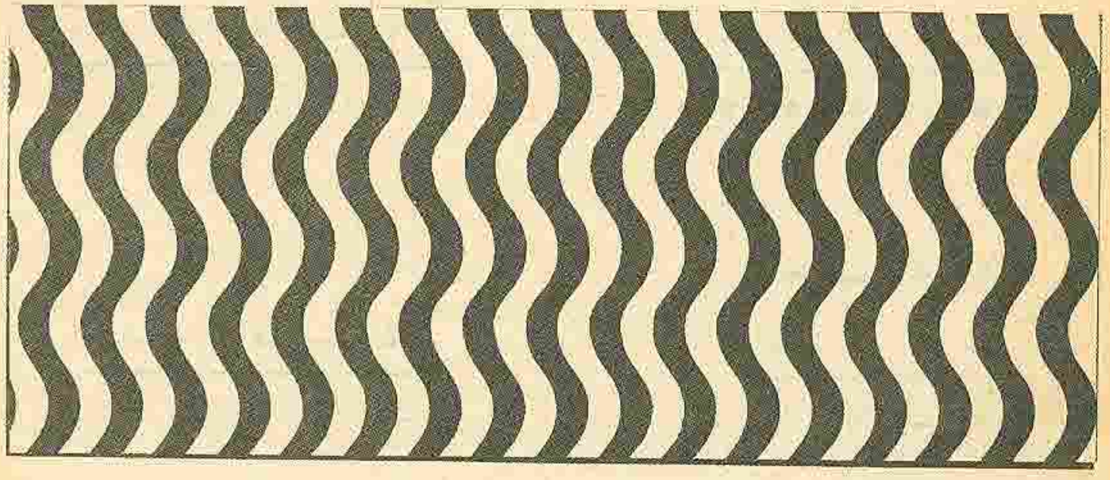
h) ¿Cuál es el perímetro del terreno que fue repartido entre las tres personas? El perímetro es de__________metros.

Ejercicio 30. En la siguiente tabla están anotadas las distancias entre algunos de los astros de nuestro sistema solar.

	Distancias en millones de kilómetros
Distancia de Mercurio al Sol	58
Distancia de Mercurio a Venus	49
Distancia de Venus a la Tierra	43
Distancia de la Tierra a Marte	74
Distancia de Marte a Júpiter	549
Distancia de Júpiter a Saturno	644

Con esos datos, complete usted la siguiente tabla.

	Distancias en millones de kilómetros
Distancia de Mercurio al Sol	58
Distancia de Venus al Sol	
Distancia de la Tierra al Sol	
Distancia de Marte al Sol	
Distancia de Júpiter al Sol	
Distancia de Saturno al Sol	



Ejercicio 31. Encuentre usted las cifras que faltan en cada una de las siguientes adiciones.

a)

$$\begin{array}{cccc} & 2 & \_ & 5 \\ + & 4 & 8 & \_ \\ \hline & \_ & 2 & 2 \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{cccc} & \_ & 8 & \_ \\ + & 2 & \_ & 6 \\ \hline & 8 & 6 & 5 \end{array}$$

c)

$$\begin{array}{cccc} & 7 & \_ & 4 \\ + & 6 & 0 & \_ \\ \hline & & 0 & 2 \end{array}$$

d)

$$\begin{array}{cccc} & 2 & \_ & 3 \\ + & 4 & 8 & \_ \\ & \_ & 7 & 4 \\ \hline & 4 & 3 & 2 \end{array}$$

e)

$$\begin{array}{cccc} & \_ & 8 & \_ \\ + & 5 & \_ & 9 \\ & 2 & 8 & 9 \\ \hline & 6 & 4 & 2 \end{array}$$

f)

$$\begin{array}{ccccccc} & & 7 & \_ & 9 & \_ & 5 \\ + & & 5 & 4 & \_ & 7 & 6 \\ \hline & \_ & \_ & 7 & 1 & 8 & \_ \end{array}$$

g)

$$\begin{array}{cccccc} & 6 & 8 & \_ & 4 & 3 \\ + & \_ & 1 & 9 & 5 & \_ \\ \hline & 0 & \_ & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

h)

$$\begin{array}{cccccc} & & \_ & 7 & \_ & 8 \\ + & & 9 & \_ & 6 & 5 \\ \hline & 1 & 5 & 4 & 2 & \_ \end{array}$$

i)

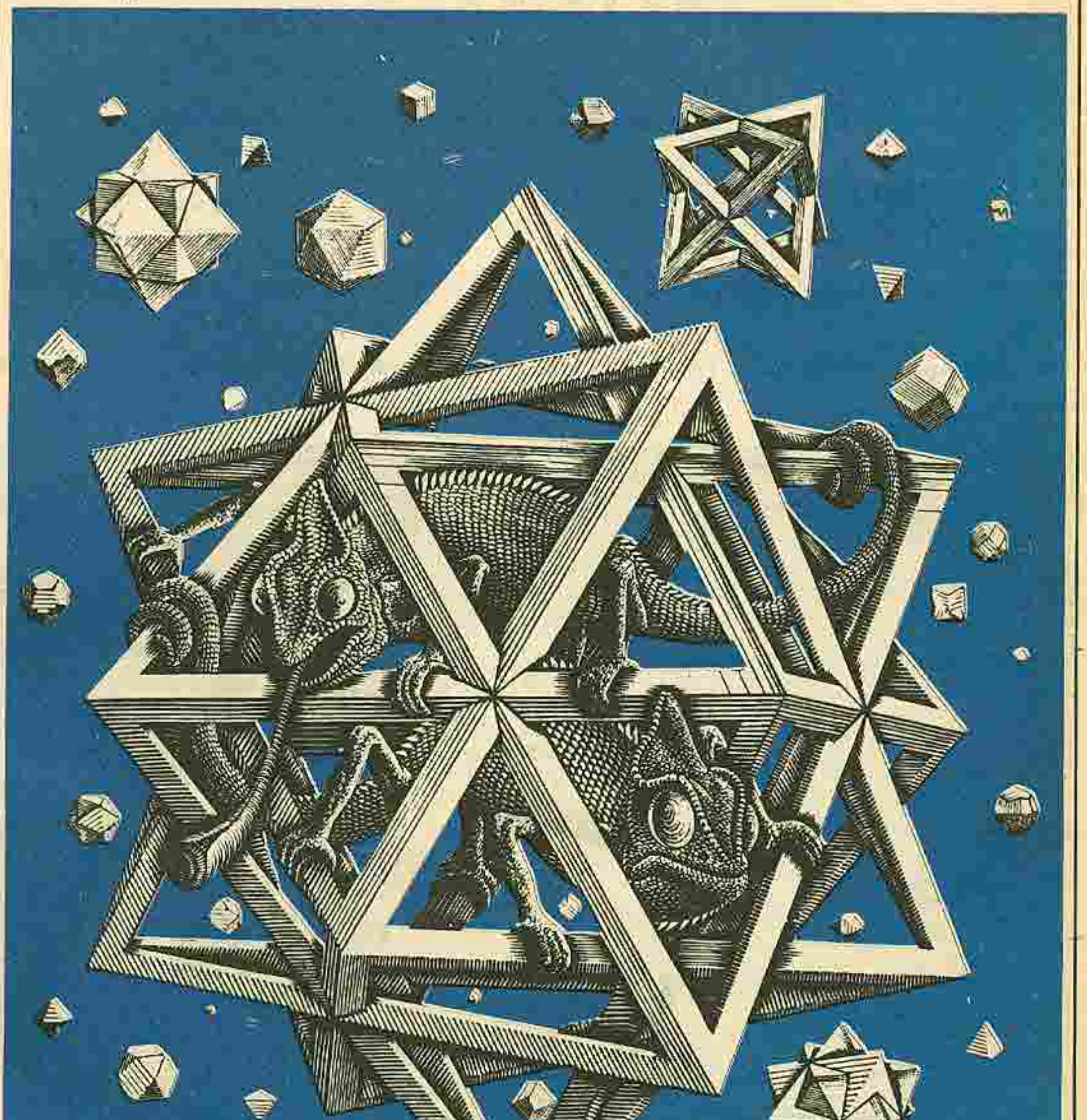
$$\begin{array}{cccccc} & & 8 & 4 & \_ & 6 \\ + & & \_ & 5 & 9 & \_ \\ \hline & 1 & 3 & \_ & 4 & 7 \end{array}$$

j)

$$\begin{array}{ccccccc} & & 7 & 1 & \_ & 2 & 8 \\ + & & 2 & \_ & 9 & \_ & \_ \\ \hline & \_ & \_ & 1 & 2 & \_ & 0 \end{array}$$

III

Multiplicación de números naturales



1. La multiplicación y la adición

En la escuela primaria usted aprendió a utilizar expresiones como las siguientes para indicar una multiplicación.

$$45 \times 6 = 270 \qquad \begin{array}{r} 45 \\ \times\ 6 \\ \hline 270 \end{array}$$

A los números que aparecían en una multiplicación les llamaba así:

$$\begin{array}{ccccc} 45 & \times & 6 & = & 270 \\ \text{factor} & & \text{factor} & & \text{producto} \end{array} \qquad \begin{array}{rl} 45 & \text{factor} \\ \times\ 6 & \text{factor} \\ \hline 270 & \text{producto} \end{array}$$

A continuación vamos a repasar y estudiar algunas ideas relativas a esta operación.

Observe usted la máquina de la fotografía. Con ella se calculan únicamente sumas.

¿Qué procedimiento usaría usted para calcular la multiplicación 3 823 × 9, usando dicha máquina?

Usted sabe que 4 × 3 quiere decir "4 veces 3", o sea "3 + 3 + 3 + 3". Para expresar esto en símbolos, escribimos

$4 \times 3 = 3 + 3 + 3 + 3$ (4 sumandos)

De igual manera, 3 × 4 es "3 veces 4", o sea 4 + 4 + 4 (3 sumandos).

De acuerdo con esto, tenemos, por ejemplo, que

$2 \times 8 = 8 + 8$ (____2____sumandos)

$8 \times 2 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2$ (____8____sumandos)

$5 \times 9 = 9 + 9 + 9 + 9 + 9$ (________sumandos)

$9 \times 5 = 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5$ (________sumandos)

$4 \times 7 = 7 + 7 + 7 + 7$ (________sumandos)

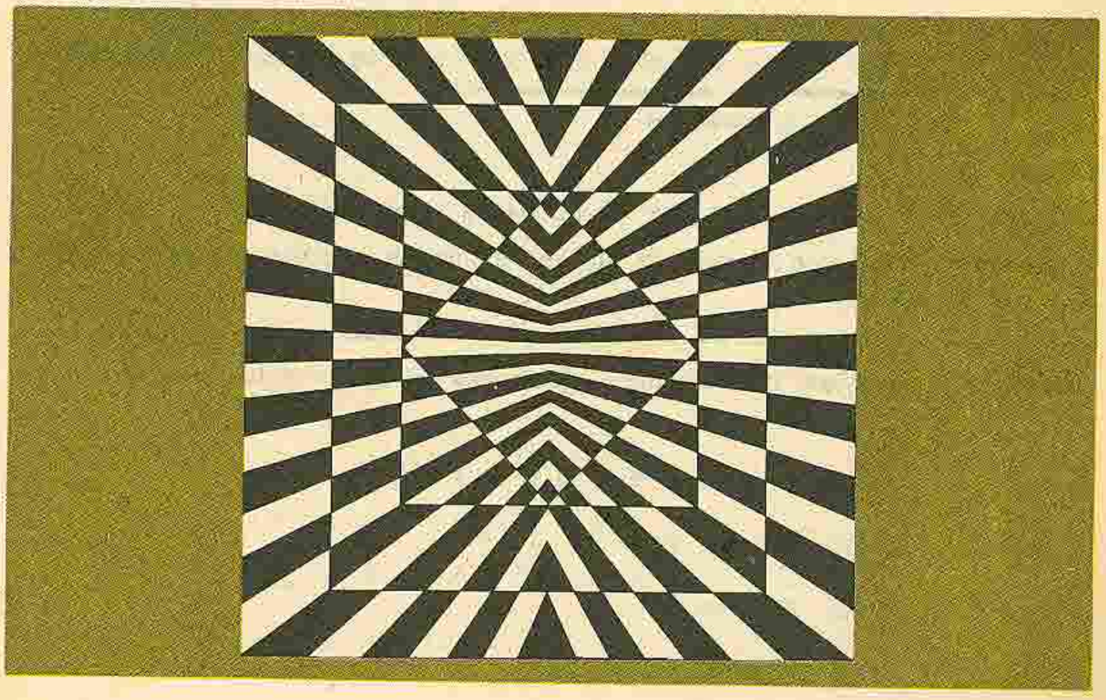
$7 \times 4 = 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4$. (________sumandos)

A la inversa, si tenemos una suma como 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5, "6 veces 5", podemos decir que es lo mismo que "6 × 5". En símbolos,

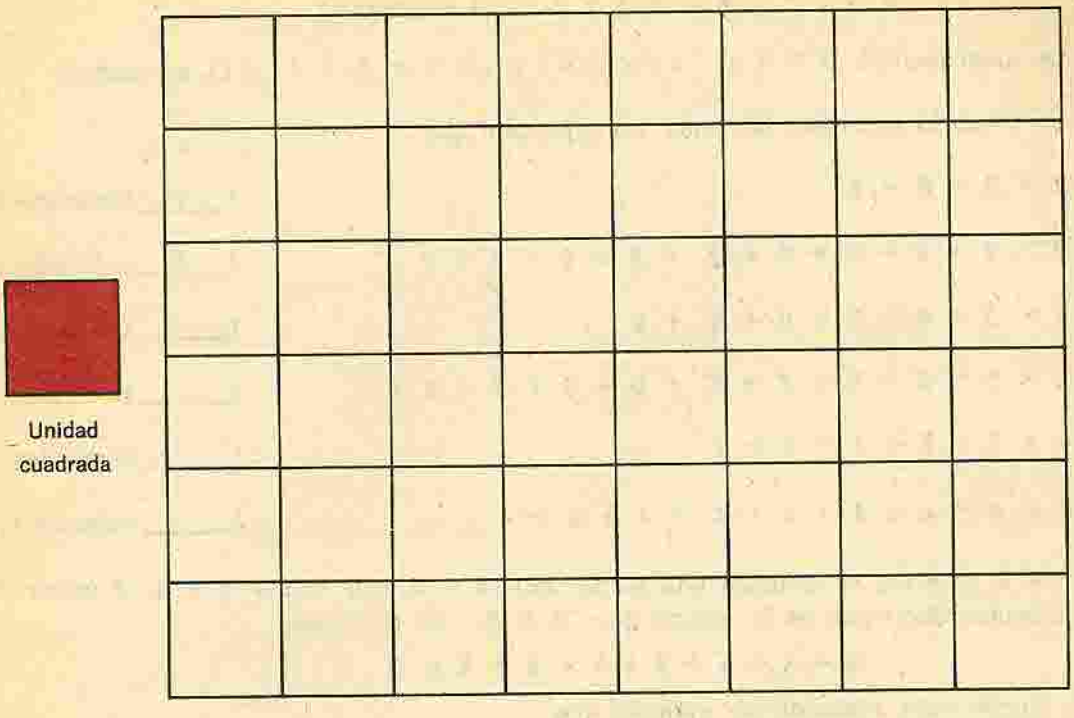
$$5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 6 \times 5$$

Según esto, tenemos por ejemplo que

$$2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 7 \times 2,$$
$$7 + 7 = 2 \times 7,$$
$$4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 5 \times 4,$$
$$5 + 5 + 5 + 5 = 4 \times 5.$$



Esta idea se presenta en forma natural en algunos casos. Por ejemplo, veamos la siguiente situación:



El área de un rectángulo es el número de unidades cuadradas que hay en él. Para calcular esa área puede emplearse la adición o la multiplicación. En este rectángulo observamos que hay 8 columnas de 6 unidades cuadradas cada una. Es decir, hay 8 veces 6. Por lo tanto, su área es

$$\underbrace{6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6}_{8 \text{ sumandos}} = 48 \text{ (unidades cuadradas)}$$

o bien,

$$8 \times 6 = 48 \text{ (unidades cuadradas).}$$

¿Recuerda usted que el área de un rectángulo se encuentra multiplicando su base por su altura?

Ejercicio 1. Complete las siguientes igualdades tal como se hace en a) y en f).

a) $5 \times 8 = 8 + 8 + 8 + 8 + 8$

b) $8 \times 5 =$

c) $2 \times 10 =$

d) $5 \times 0 =$

e) 6 × 1 =

f) 8 + 8 + 8 + 8 = 4 × 8

g) 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 =

h) 5 + 5 + 5 =

i) 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 =

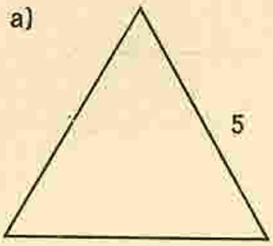
j) 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 =

k) 78 + 78 + 78 + 78 =

l) 1027 + 1027 =

Ejercicio 2. Exprese de dos maneras diferentes el perímetro de los siguientes polígonos regulares. (Un polígono es regular si todos sus lados tienen la misma medida.)

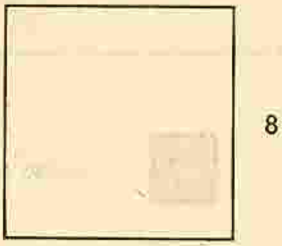
a)



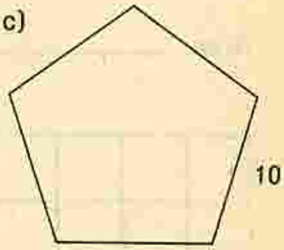
5 + 5 + 5

3 × 5

b)

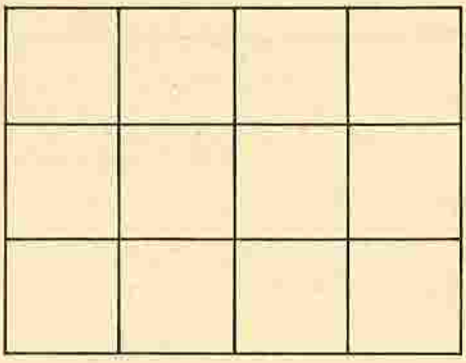


c)



Ejercicio 3. Encuentre el área de los siguientes rectángulos en dos formas diferentes.

a)

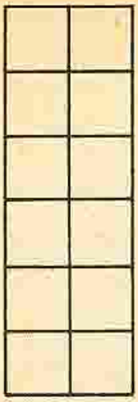


Unidad cuadrada

Área: 3 + 3 + 3 + 3 = 12 (unidades cuadradas)

Área: 4 × 3 = 12 (unidades cuadradas)

b)

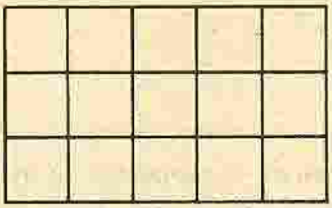


🟥 Unidad cuadrada

Área: ______________________________

Área: ______________________________

c)

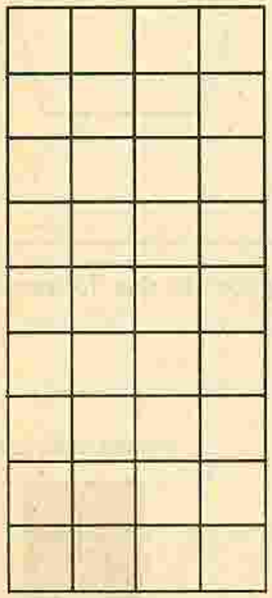


🟥 Unidad cuadrada

Área: ______________________________

Área: ______________________________

d)

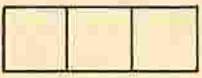


🟥 Unidad cuadrada

Área: ______________________________

Área: ______________________________

e)



Área: ______________________________

Área: ______________________________

🟥 Unidad cuadrada

En una adición debe haber, cuando menos, dos sumandos. Por eso las expresiones como 1 × 3 y 0 × 4 no se pueden interpretar como sumas, pues

1 × 3 sería 1 sumando 3,

0 × 4 sería 0 sumandos 4.

Para poder manejar en la multiplicación expresiones como las anteriores, convendremos en que

La multiplicación de 1 por cualquier número natural da como resultado ese mismo número natural.

La multiplicación de 0 por cualquier número natural da por resultado cero. También 0 × 0 = 0.

Ejemplo.

a) 1 × 15 = 15 b) 1 × 4 738 = 4 738

c) 0 × 15 = 0 d) 0 × 4 738 = 0

Ejercicio 4. Efectúe las siguientes multiplicaciones.

a) 0 × 2 = b) 0 × 4 =

c) 1 × 4 = d) 1 × 7 =

e) 0 × 1 = f) 1 × 1 =

g) 1 × 0 = h) 0 × 0 =

¿Qué indica la expresión 5 × *a*? Indica la multiplicación del número 5 por el número *a*. Esto es, 5 × *a* quiere decir 5 × 4, si *a* es el número 4. En caso de que *a* fuera el número 3, 5 × *a* querría decir 5 × 3.

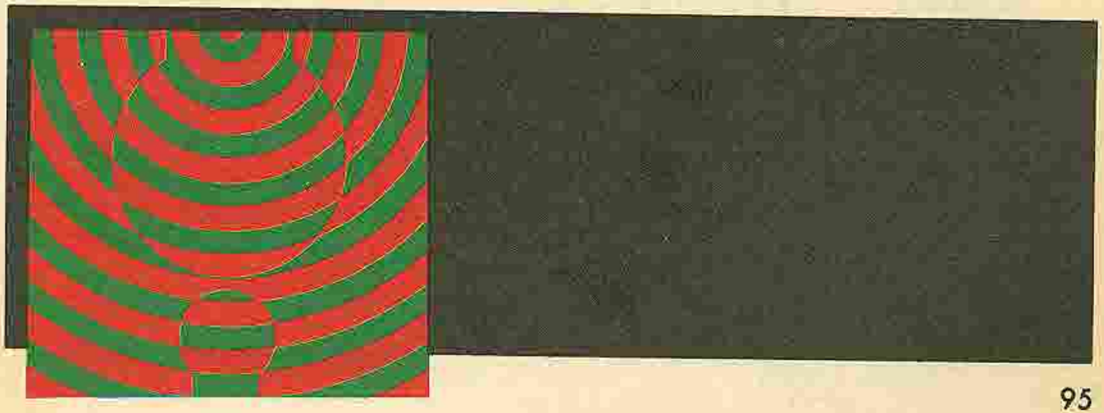
El uso de letras para representar números en la multiplicación puede, a veces, producir confusión entre la *x* y el signo de la operación. Para evitar esto se acostumbra usar un punto. Por ejemplo.

$5 \cdot 4 = 5 \times 4$ $3 \times 50 = 3 \cdot 50$

$5 \cdot a = 5 \times a$ $a \times 7 = a \cdot 7$

Es más, si no hay ninguna confusión, se acostumbra indicar la multiplicación poniendo juntos los factores. Por ejemplo,

$5 \cdot a = 5a$ $3n = 3 \cdot n$ $78b = 78 \cdot b$



Ejercicio 5. Considerando que a es el número 5, efectúe usted las siguientes multiplicaciones.

a) $3 \bullet a = 3 \bullet 5 = 15$

b) $2 \bullet a = 2 \bullet 5 = 10$

c) $7a =$ ____________________

d) $4a =$ ____________________

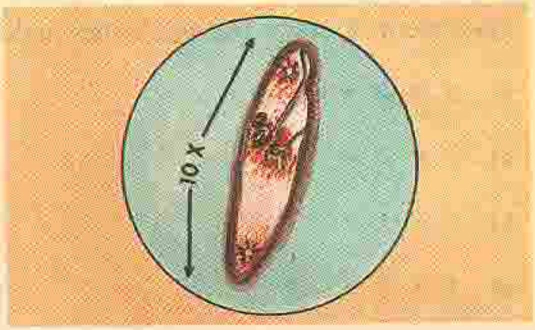
e) $a \bullet 6 =$ ____________________

f) $a \bullet 10 =$ ____________________

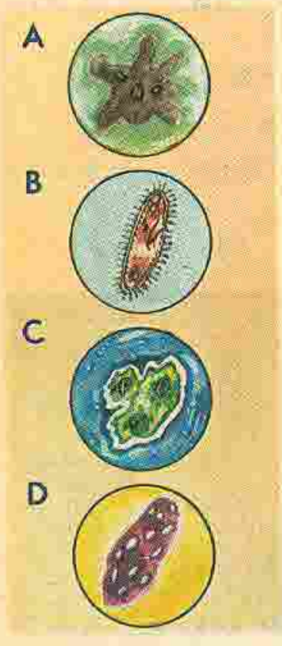
g) $1000a =$ ____________________

h) $5728a =$ ____________________

En los microscopios y lupas, para indicar su poder de aumento se usan las expresiones $10x$, $100x$, $1\,000x$, etc. El significado de esto es el siguiente: si x es la longitud de un objeto, entonces en el microscopio dicho objeto se ve con una longitud igual al producto de x por 10, por 100, o por 1 000, según el aparato de que se trate.



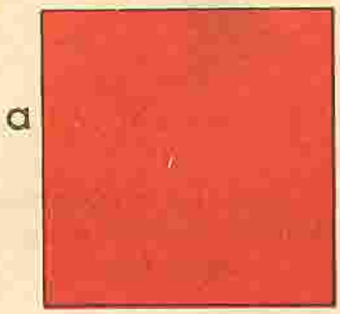
Ejercicio 6. La siguiente tabla muestra las medidas de diversos organismos microscópicos. Calcule usted las medidas con que se verían al microscopio, si éste tuviera los poderes de aumento que se indican.



	x	$10x$	$100x$	$1000x$
A	350 micras	3 500 micras		
B	250 micras			
C	150 micras			150 000 micras
D	60 micras			

Ejercicio 7. Exprese de dos maneras diferentes el dato que se pide. Tome como modelo la resolución del inciso a). Las letras representan números naturales.

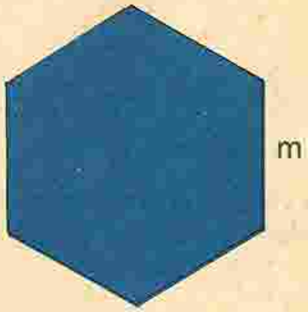
a) El perímetro del cuadrado.



$a + a + a + a$

$4\ a$

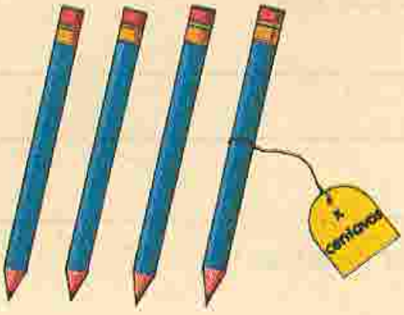
b) El perímetro del exágono regular.



___ + ___ + ___ + ___ + ___ + ___

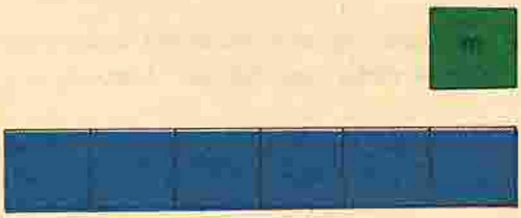
___ X ___

c) El costo de todos los lápices.

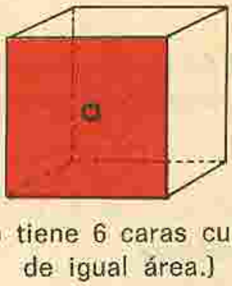


d) La distancia de *A* a *B*.
(El segmento rojo mide
r centímetros.)

e) El área de la figura azul.
(*m* es el número de centímetros
cuadrados de la figura verde.)

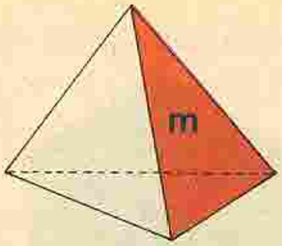


f) Área total del cubo.
(*a* es el número de centímetros
cuadrados de la cara roja.)



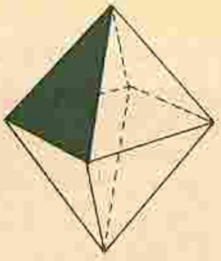
(El cubo tiene 6 caras cuadradas
de igual área.)

g) Área total del tetraedro.
(m es el número de centímetros cuadrados de la cara anaranjada.)

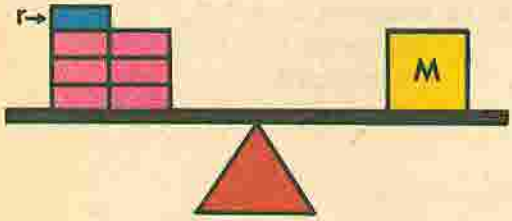


(Las cuatro caras del tetraedro son triángulos equiláteros de igual área.)

h) Área total del octaedro.
(n es el número de centímetros cuadrados de la cara café.)



(Las 8 caras del octaedro son triángulos equiláteros de igual área.)



i) Peso del cuerpo M.
(r es el peso en gramos del cuerpo azul.)

Ejercicio 8. En cada inciso encuentre el valor del producto.

a) Si $n = 2$, entonces $4n =$ ______________________

b) Si $x = 6$, entonces $2x =$ ______________________

c) Si $b = 8$, entonces $3b =$ ______________________

d) Si $z = 1$, entonces $5z =$ ______________________

e) Si $y = 0$, entonces $11y =$ ______________________

En virtud de que la expresión $5a$ indica el producto de dos números naturales cuando a representa a un número natural, podemos decir que $5a$ es "5 veces a". Esto es,

$$5a = a + a + a + a + a$$

De igual manera,

$3x = x + x + x$

$4r = r + r + r + r$

$7y = y + y + y + y + y + y + y.$

Ejercicio 9. Complete las siguientes igualdades como se hace en a) y en e). (Las letras representan números naturales o cero.)

a) $3p = p + p + p$

b) $2m =$ ____________________

c) $7n =$ ____________________

d) $5a =$ ____________________

e) $x + x + x + x + x = 5x$

f) $m + m =$ ____________________

g) $y + y + y + y =$ ____________

h) $1 \cdot s =$ ____________________

i) $0 \cdot n =$ ____________________

Con lo que sabemos, podemos ahora interpretar y simplificar expresiones como $5a + 3a$. Observe la resolución de los siguientes ejemplos:

$$5a + 3a = a + a + a + a + a + a + a + a = 8a$$

$$3m + 4m = m + m + m + m + m + m + m = 7m$$

$$3r + 2r = r + r + r + r + r = 5r$$

Ejercicio 10. Simplifique las siguientes expresiones en forma similar a como se hizo en los ejemplos anteriores.

a) $4z + 2z =$ ____________________

b) $3y + 6y =$ ____________________

c) $8t + 4t =$ ____________________

d) $2q + 6q =$ ____________________

e) $8b + b =$ ____________________

f) $3p + 2p + 4p =$ ______________

g) $c + 5c =$ ____________________

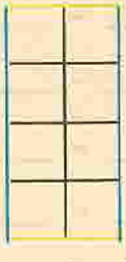
h) $4w + 8w =$ ____________________

i) $2r + 5r + 3r + 2r =$ __________

Las expresiones como ab, mn, rs, etc., indicarán la multiplicación de dos números naturales. Por ejemplo, ab indicará 5×8 si a es 5 y b es 8; ab será 6×9 si a es 6 y b es 9; ab será 3×4 si a es 3 y b es 4; etc.

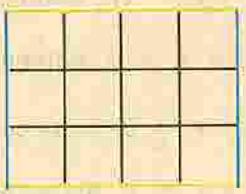
Ejercicio 11. Observe los siguientes rectángulos. Podemos indicar el área de cualquiera de ellos con la expresión ab. Considerando que a es el número de unidades de los lados amarillos y b es el número de unidades de los lados azules, encuentre usted el valor de ab para cada uno. El segmento rojo representa la unidad.

a)



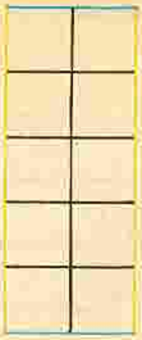
$a \cdot b = 2 \cdot 4 = 8$

b)



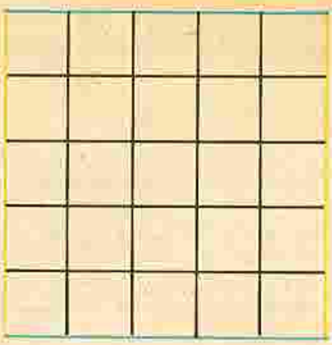
$a \cdot b =$ _____ _____ $=$ _____

c)



ab = ____________________

d)



ab = ____________________

e)

ab = ____________________

f)

ab = ____________________

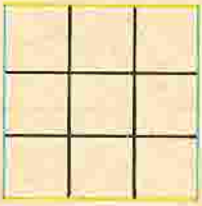
g)

ab = ____________________

h)

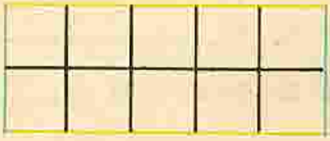
ab = ____________________

i)



ab = ____________________

j)



ab = ____________________

Ejercicio 12. Complete las siguientes expresiones, como se hace en a).

a) Si $x = 8$ y $n = 3$, entonces xn = $8 \cdot 3$ = 24

b) Si $a = 15$ y $b = 6$, entonces ab = __________ = __________

c) Si $n = 6$ y $x = 20$, entonces nx = __________ = __________

d) Si $a = 12$ y $x = 0$, entonces ax = __________ = __________

e) Si $d = 5$ y $r = 0$, entonces dr = __________ = __________

f) Si $m = 1$ y $x = 8$, entonces mx = __________ = __________

g) Si $b = 17$ y $a = 1$, entonces ba = __________ = __________

2. Cuadrado de un número natural

Con frecuencia, al hacer multiplicaciones, se presentan productos de factores iguales como 5×5, $1221 \bullet 1221$, $a \bullet a$, etc. Es útil, desde el punto de vista de la brevedad, indicar ese tipo de productos de una manera especial. Observe usted los siguientes ejemplos.

a) $5 \times 5 = 5^2$ (Léase "cinco al cuadrado" o "cinco a la segunda potencia".)

b) $1221 \times 1221 = 1221^2$ (Léase "mil doscientos veintiuno al cuadrado o a la segunda potencia".)

c) $aa = a^2$ (Léase "a al cuadrado o a la segunda potencia".)

Los números que aparecen en una expresión como 5^2 se denominan así:

base 5^2 exponente

Ejercicio 13. Complete las siguientes igualdades tal como se hace en a) y en h).

a) $7 \times 7 = \underline{7^2}$ b) $9 \times 9 =$ ____________

c) $1 \times 1 =$ ____________ d) $1000 \times 1000 =$ ____________

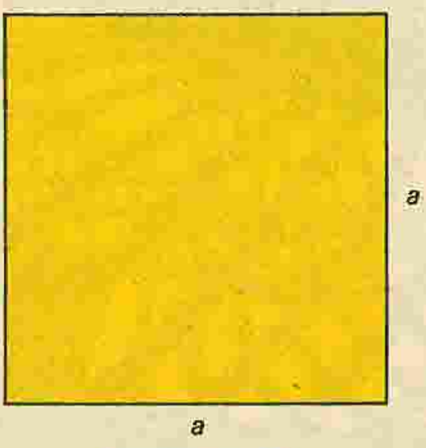
e) $0 \times 0 =$ ____________ f) $n \bullet n =$ ____________

g) $x \bullet x =$ ____________ h) $8^2 = 8 \times 8 = \underline{64}$

i) $100^2 =$ ____________ j) $350^2 =$ ____________

k) $m^2 =$ ____________ l) $r^2 =$ ____________

El uso de la expresión "al cuadrado" se justifica por la relacion que existe entre el cálculo del área del cuadrado y la multiplicación de dos factores iguales.



$a \bullet a = a^2$

Ejercicio 14. Calcule en su cuaderno el valor de las siguientes expresiones, como se hace en a).

a) $3^2 = 3 \times 3 = 9$

b) $2^2 =$ ____________________

c) $4^2 =$ ____________________

d) $5^2 =$ ____________________

e) $6^2 =$ ____________________

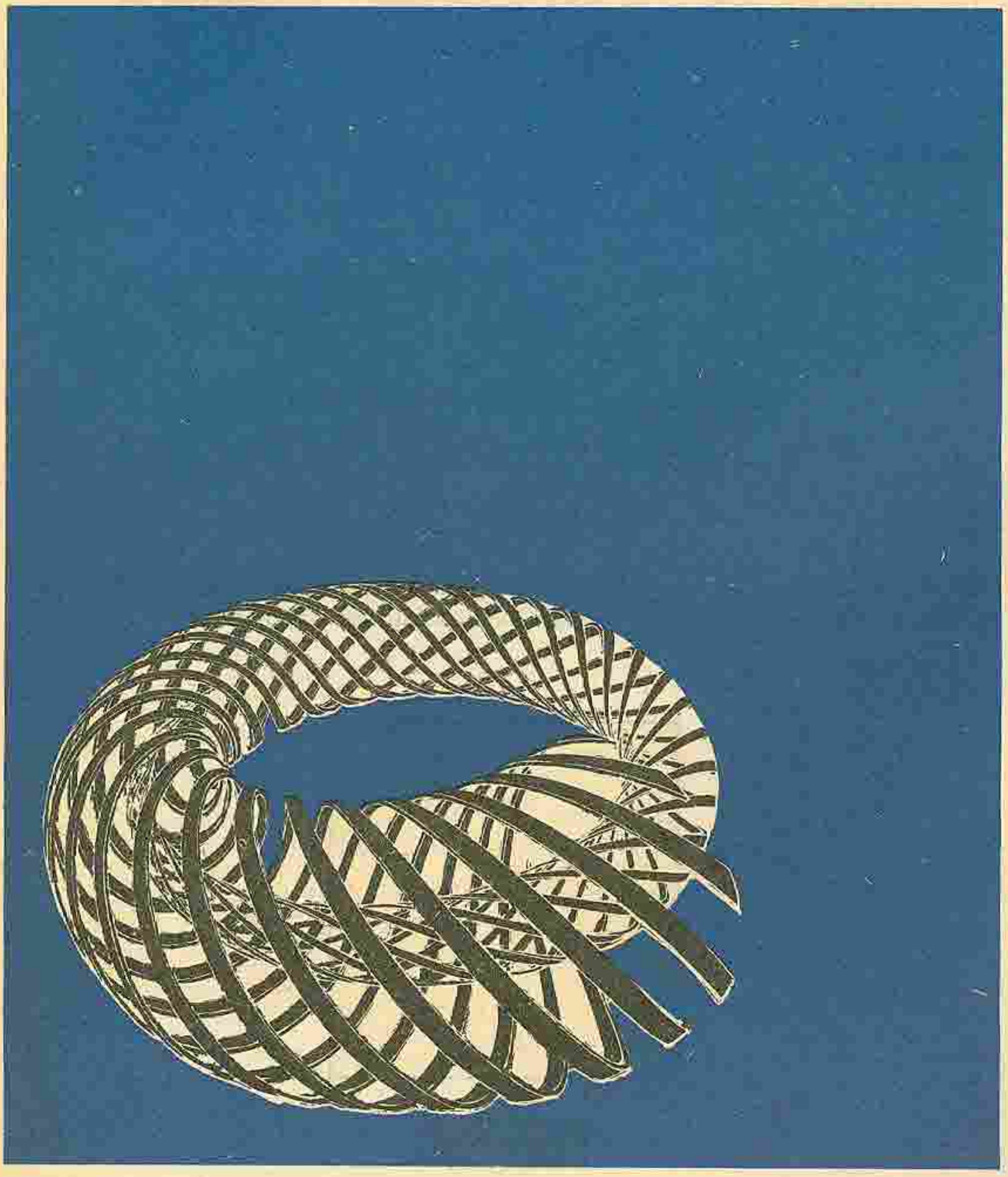
f) $10^2 =$ ____________________

g) $11^2 =$ ____________________

h) $100^2 =$ ____________________

i) $1^2 =$ ____________________

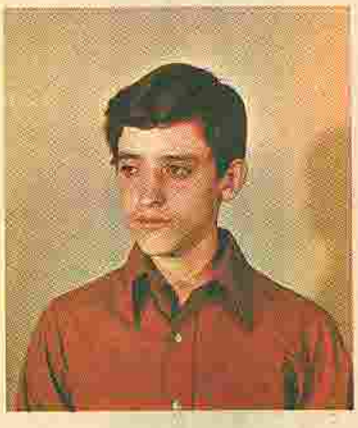
j) $0^2 =$ ____________________

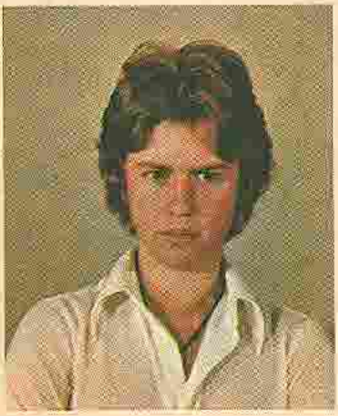


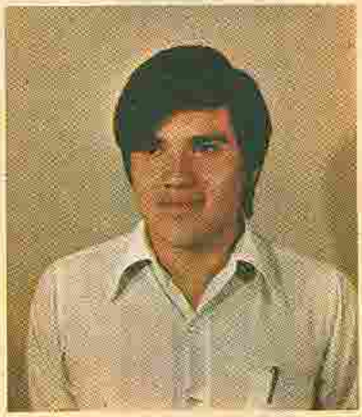
3. Problemas y ecuaciones

A continuación resolveremos algunos problemas interesantes en los que aplicaremos nuestros conocimientos de la multiplicación.

Problema. Se va a programar un baile en una fiesta escolar. Para participar en él se presentan las personas cuyas fotografías se muestran a continuación.

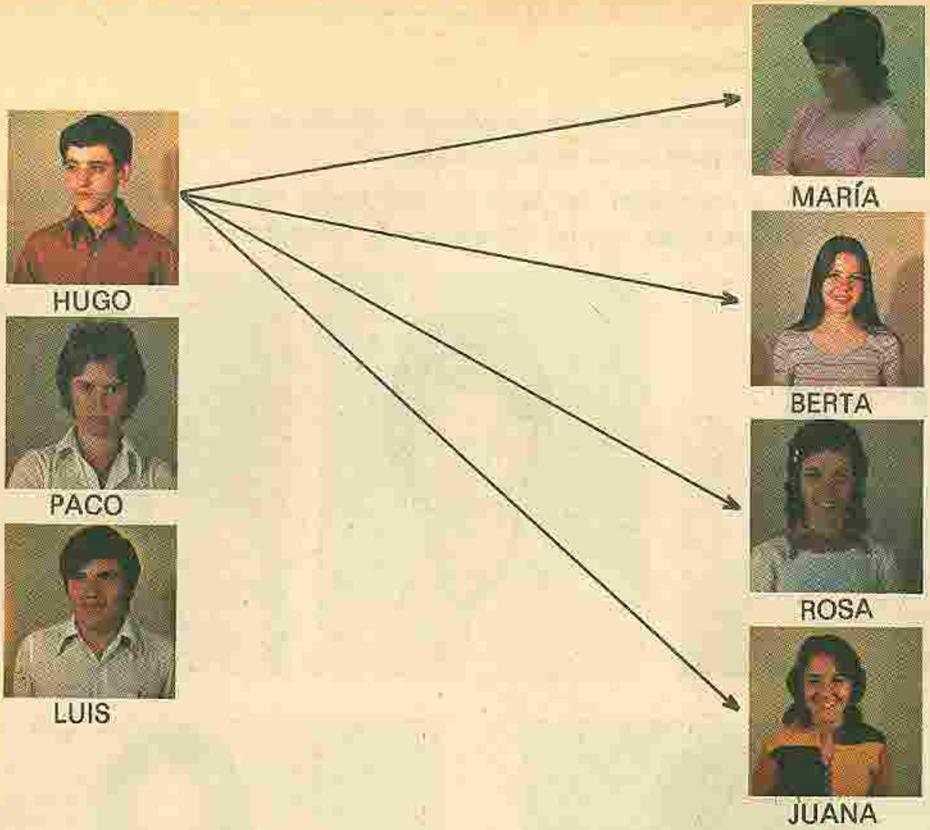






¿Podría usted decir cuántas parejas distintas se pueden formar para el baile? (Cada pareja debe formarse con un hombre y una mujer.)

Resolución. Para resolver este problema conviene que observe la siguiente ilustración, trace las flechas que se piden y luego complete las oraciones.



a) Aquí se muestran con flechas las diferentes maneras de formar una pareja donde puede estar Hugo. Tales posibles parejas son: Hugo y__________, Hugo y __________, Hugo y__________, Hugo y__________. El número de parejas donde puede estar Hugo es_____.

b) Indique con flechas rojas las diferentes maneras de formar una pareja donde esté Paco. Tales parejas pueden ser Paco y__________, Paco y__________, Paco y__________, Paco y__________. El número de parejas donde puede estar Paco es_____.

c) Muestre con flechas azules las parejas que se pueden formar con Luis y alguna de las señoritas. Se pueden formar_____parejas diferentes con Luis.

d) Ahora podemos observar que el número total de parejas diferentes que se podrían formar para el baile es_____+_____+_____= 12. También podemos pensar en que tal número es 3 ×_____=_____.

Ejercicio 15. Trace usted las flechas para indicar las diferentes parejas que se pueden formar con 2 varones y 3 señoritas. ¿Cuál es el total de estas parejas?

RUTH

JUAN

INÉS

PEDRO

OLGA

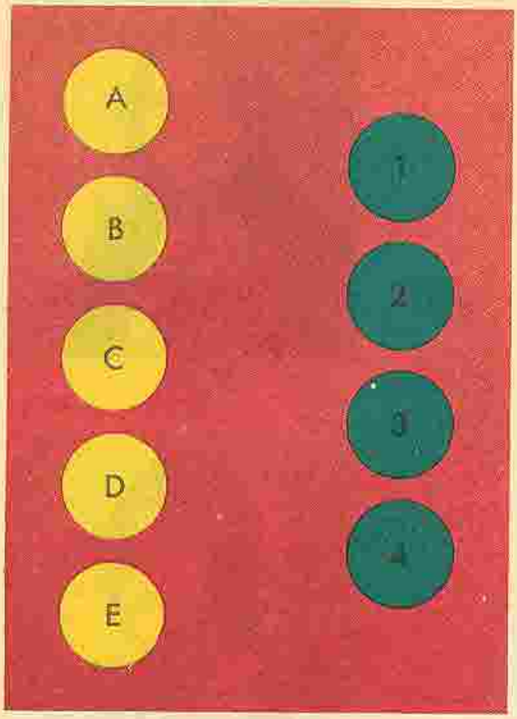
Con Juan se pueden formar_____parejas.

Con Pedro se pueden formar_____parejas.

Por lo tanto, el total de parejas distintas es_____+_____=_____O bien, _____

2 ×_____=_____.

Ejercicio 16. En la ilustración siguiente cada letra representa un varón y cada número una señorita. Haga usted lo mismo que en el ejercicio anterior.



Número de parejas con *A*: ______

Número de parejas con *B*: ______

Número de parejas con *C*: ______

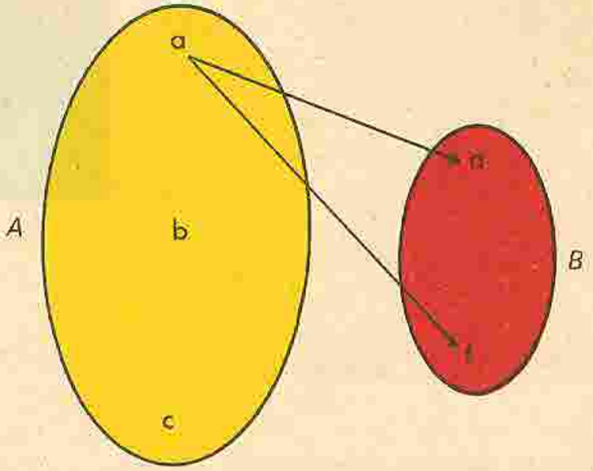
Número de parejas con *D*: ______

Número de parejas con *E*: ______

El número total de parejas diferentes es______ × ______ = ______.

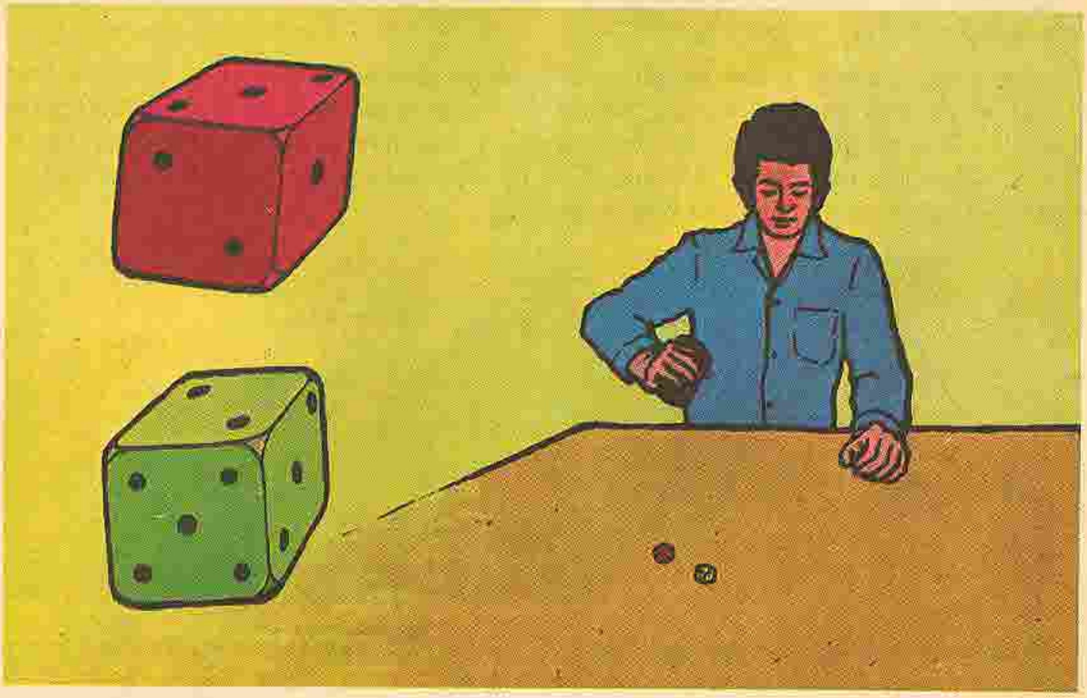
Problema. ¿Cuántas parejas diferentes se pueden formar con *m* hombres y *n* mujeres? (Cada pareja constituida por un hombre y una mujer.)

Ejercicio 17. En la siguiente ilustración indique con flechas las diferentes parejas que se pueden formar de manera que cada pareja conste de un elemento del conjunto *A* y uno del conjunto *B*.



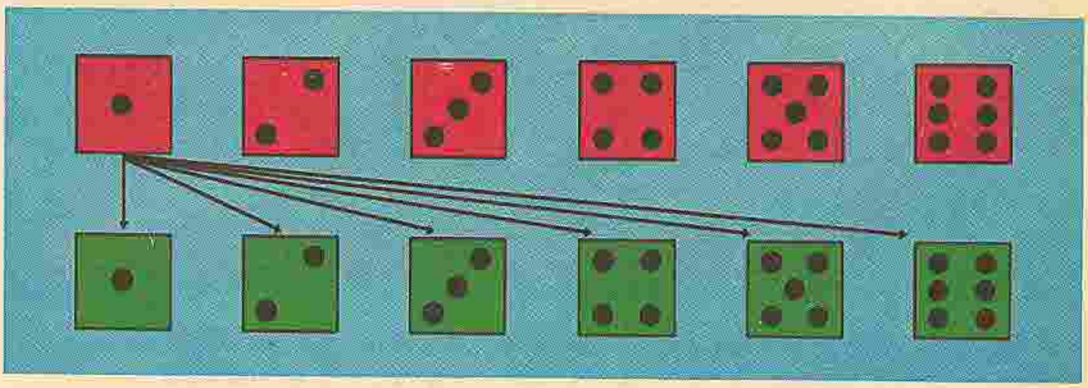
Las parejas formadas son (*a*, *d*), (*a*,), (*b*,), (*b*,), (*c*,), (*c*,).

En casi todas las ferias populares hay un juego de dados.



Problema. ¿Cuál es el número total de resultados diferentes que pueden tenerse al tirar los dados rojo y verde, ilustrados arriba?

Resolución. Si el dado rojo cayera en 1, los resultados posibles, con los dados, serían (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5) y (1, 6).



Si el dado rojo cayera en 2, los resultados posibles, con los dados, serían (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5) y (2, 6).

Si el dado rojo cayera en 3, . . . etcétera.

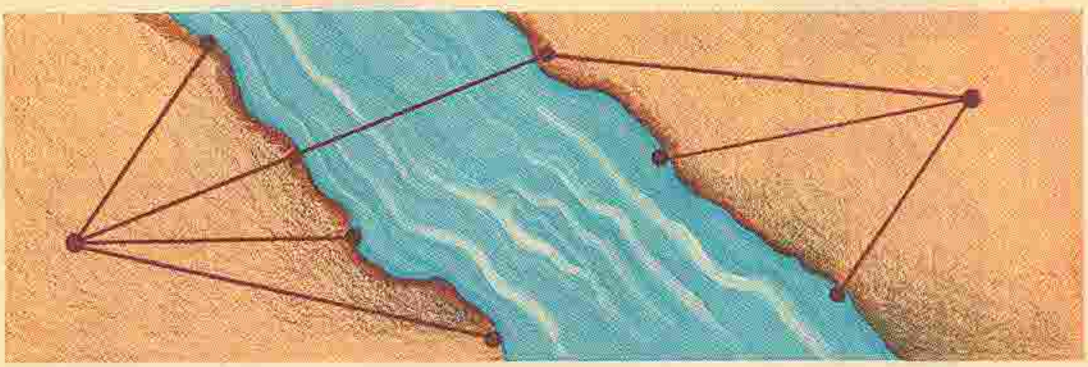
En consecuencia, la respuesta al problema es:

Respuesta. El número total de resultados diferentes que pueden tenerse al tirar los dos dados es_____×_____=_____.

Problema. En el juego de dados una persona apuesta al número 11 y otra apuesta al número 7. ¿Cuál de las dos personas tiene más probabilidades de ganar? ¿Por qué? (El número debe obtenerse sumando los puntos de los dos dados.)

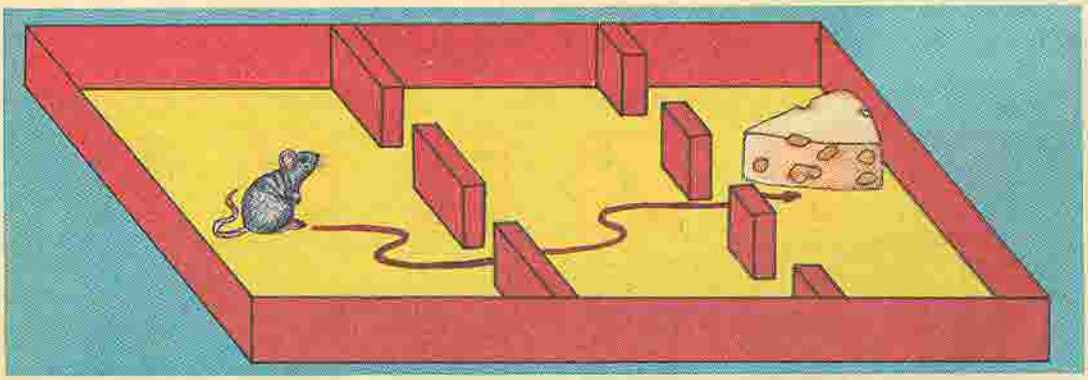
Ejercicio 18. Analice usted cada una de las siguientes situaciones y resuelva la cuestión que se plantea.

a) Un viajero quiere ir del pueblo *A* al pueblo *I*, que se muestran en el mapa. Para cruzar el río usa una lancha que puede tomar en cualquiera de los embarcaderos *B*, *C*, *D* o *E* y se puede trasladar en ella hasta cualquiera de los embarcaderos *F*, *G* y *H*. ¿Cuántos recorridos diferentes se pueden hacer de *A* a *I*? (En el dibujo se muestra en rojo uno de los posibles recorridos.)



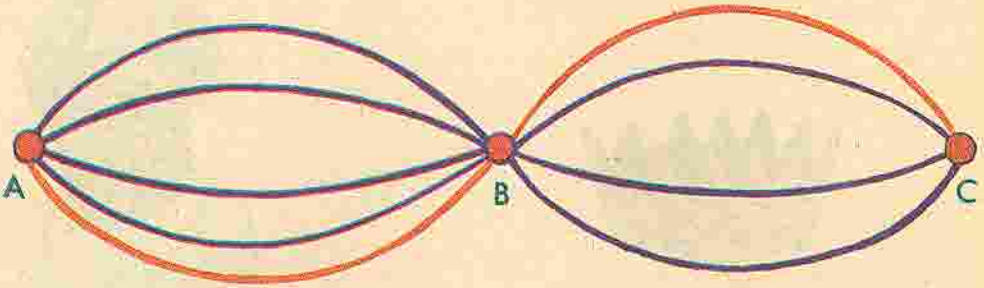
b) En el dibujo se observa una rata que quiere comerse el queso. Se ilustra también una de las formas en que puede llegar a él.

Diga usted cuántos recorridos diferentes puede hacer la rata para llegar a donde está el queso.



c) La pirámide tiene 4 escaleras para subir al primer descanso y 4 para llegar a lo alto, ¿cuántos caminos se pueden escoger para llegar a la cúspide?

d) Para ir de un pueblo A a un pueblo B hay cinco caminos, y del pueblo B al pueblo C hay cuatro caminos. ¿De cuántas maneras distintas se puede ir del pueblo A al pueblo C?



e) En una cafetería hay pasteles de moca, chocolate, nuez y limón, y para beber ofrecen leche, café, té, chocolate y malteada. ¿De cuántas maneras diferentes se puede escoger un pastel y una bebida?

f) María Elena quiere regalar a su hermano una novela y un libro de poesías. En la librería encuentra 15 novelas diferentes y 20 libros de poesía distintos. ¿De cuántas maneras diferentes puede formar su regalo?

g) Se planea pintar un granero. Si se dispone de 10 colores diferentes para el interior y 15 colores diferentes para el exterior, ¿de cuántas maneras distintas puede quedar pintado el granero?

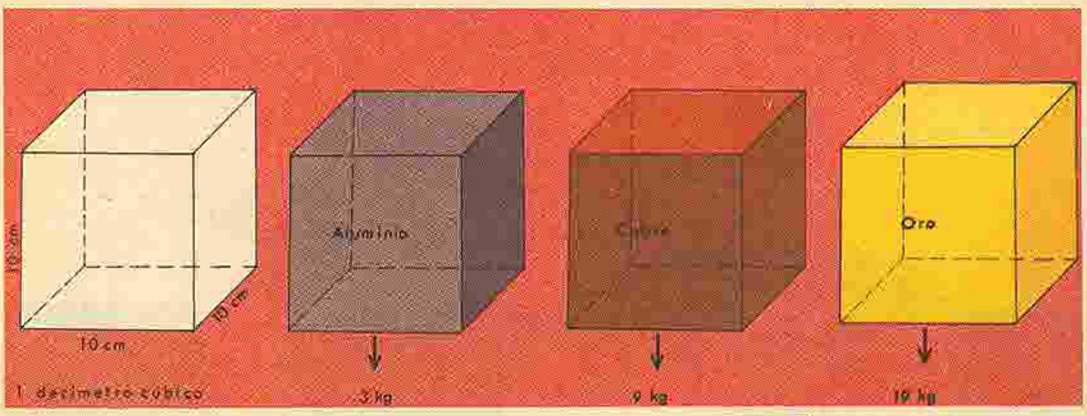
h) Para 1975 se planea lanzar al espacio una tripulación ruso-norteamericana. Si se entrenan para ello 20 cosmonautas soviéticos y 25 estadounidenses, ¿cuántas tripulaciones diferentes se pueden formar de manera que consten de un soviético y un norteamericano?

Resolución de algunas ecuaciones

El gran matemático y físico Arquímedes (287-212 antes de nuestra era), utilizó la idea de peso específico de una sustancia para saber si una corona era de oro o de otro metal.

Esta idea (la de peso específico) es muy simple.

El peso específico de una sustancia es el peso, en kilogramos, de un decímetro cúbico de esa sustancia. Por ejemplo, el peso específico del oro es 19; es decir, un decímetro cúbico de oro pesa 19 kilogramos.



El peso específico del aluminio es 3 y el del cobre es ☐

Si conocemos el peso específico de una sustancia, se pueden calcular entonces el volumen o el peso de un cuerpo hecho de esa sustancia. Por ejemplo, ¿cuánto pesa un decímetro cúbico de aluminio?

El peso específico del aluminio es 3. Por lo tanto, 1 decímetro cúbico de aluminio pesa ☐ kilogramos.

¿Cuánto pesan 2 decímetros cúbicos de aluminio?

2 × 3 = 6. *Respuesta.* Pesan 6 kilogramos.

¿Cuánto pesan 3 decímetros cúbicos de aluminio?

3 × 3 = 9. *Respuesta.* Pesan 9 kilogramos.

¿Cuánto pesan 4 decímetros cúbicos de aluminio?

$4 \times 3 = \boxed{12.}$ *Respuesta.* ☐

¿Cuánto pesan *m* decímetros cúbicos de aluminio?

$\_\_ \times \_\_ = \square$ *Respuesta.* ☐

Ejemplo. Sabemos que un objeto de aluminio pesa 18 kilogramos. ¿Cuántos decímetros cúbicos tiene de volumen?

Si al número de decímetros cúbicos del objeto lo denominamos ☐, el problema se puede expresar con la ecuación

$$\square \times 3 = 18$$

Es decir, buscamos un número ☐ (decímetros cúbicos del objeto) que multiplicado por 3 (peso específico del aluminio) nos dé 18. La solución es 6 decímetros cúbicos ya que $6 \times 3 = 18$.

Ejemplo. Un cuerpo de aluminio pesa 45 kg. ¿Cuál es su volumen?

Llamemos *v* al volumen. En tal caso, la ecuación es

$$v \times 3 = 45$$

La solución de esta ecuación es $v = \square$. Por consiguiente el volumen del cuerpo es de ☐ decímetros cúbicos.

Ejercicio 19. Resuelva los siguientes problemas planteando las ecuaciones con las letras que se indican.

a) ¿Cuál es el volumen *m* de un cuerpo de aluminio que pesa 60 kg?

La ecuación para el problema es ☐

La solución de esta ecuación es $m = \square$. Por consiguiente, el volumen de ese cuerpo es de ☐ decímetros cúbicos.

b) ¿Cuál es el volumen *x* de una estatua de cobre que pesa 54 kg?

La ecuación para este problema es ☐

La solución de la ecuación es $x = \square$. Por consiguiente, el volumen de esa estatua es de ☐ decímetros cúbicos.

c) Una mina produce 95 kilogramos de oro diariamente. ¿Cuál es el volumen v que ocupa ese oro?

La ecuación para este problema es □

La solución de esta ecuación es v = ____. Por lo tanto, el volumen que ocupa ese oro es de ____ decímetros cúbicos.

d) ¿Cuál es el peso específico e de una pieza de máquina que ocupa un volumen de 3 decímetros cúbicos y pesa 24 kilogramos?

La ecuación para este problema es □

La solución de la ecuación es e = ____. Por lo tanto, el peso específico de esa pieza es ____.

e) ¿Cuál es el peso específico e del mármol, si 5 decímetros cúbicos de dicho material pesan 15 kilogramos?

La ecuación para este problema es □

La solución de la ecuación es e = ____. Por consiguiente, el peso específico del mármol es ____.

Para resolver el problema de la corona, Arquímedes midió el volumen de la misma y luego la pesó. Como sabía que el peso específico del oro es 19, multiplicó el volumen de la corona por 19. Así pudo decidir si la corona era de oro o no.

Muchos problemas como los anteriores se resuelven por medio de alguna ecuación. Realicemos el siguiente ejercicio para adquirir destreza en la resolución de algunas ecuaciones sencillas.

Ejercicio 20. Encuentre la solución de cada ecuación.

a) $\square \times 5 = 40$

b) $\square \times 20 = 100$

c) $10 \times \square = 150$

d) $12 \times \square = 144$

e) $x \times 7 = 49$

x = ____

f) $m \times 16 = 32$

m = ____

g) $20 \times r = 400$

r = ____

h) $5 \times p = 500$

p = ____

i) $25 \times a = 200$

a = ____

j) $z \times 18 = 72$

z = ____

k) $b \times 5 \times b = 20$

$b =$ ___

l) $a \times a \times 5 = 5$

$a =$ ___

m) $b^2 \times 3 = 12$

$b =$ ___

n) $5 \times m^2 = 20$

$m =$ ___

Problema. En las siguientes multiplicaciones se han omitido algunas cifras. ¿Cuáles son esas cifras?

a)

4 ___ 3
× 2 ___
___ 8 3
___ ___ 6
___ ___ ___ ___

b)

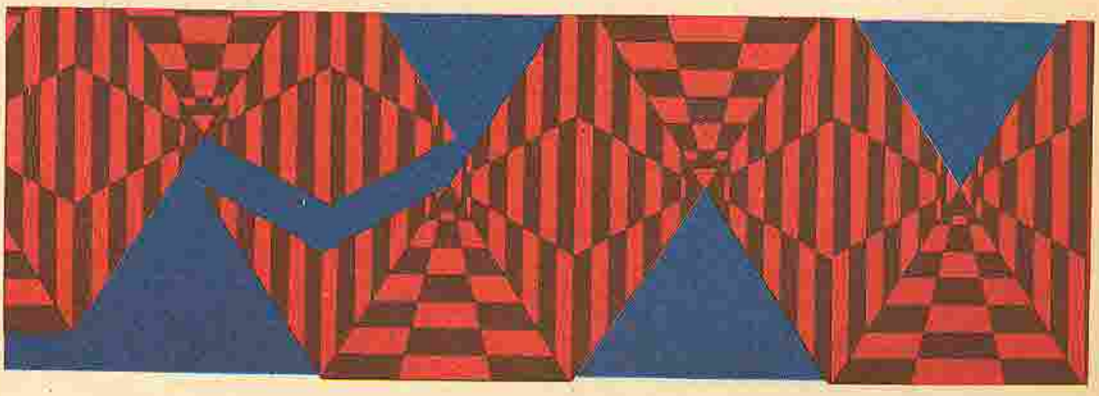
3 1 8
× ___ ___
___ ___ 9 0
___ 5 4
___ ___ ___ ___

c)

3 9 ___
× 3 ___
___ ___ 8 ___
1 1 9 1
1 ___ ___ 9 8

d)

___ ___ 5
× 4 ___
3 1 ___
___ 2 ___ ___
1 ___ ___ ___ ___



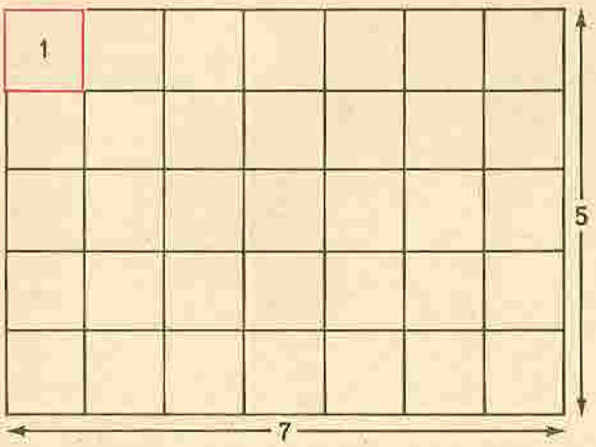
4. Propiedades básicas de la multiplicación

Así como hemos estudiado las propiedades básicas de la adición, estudiaremos ahora las propiedades básicas de la multiplicación. Éstas se descubrieron después de un largo proceso de observación y manejo de la multiplicación.

En lo que sigue vamos a estudiar estas propiedades básicas de la multiplicación y las aplicaremos para obtener algunas consecuencias interesantes.

Propiedad conmutativa

Observe usted la siguiente ilustración:



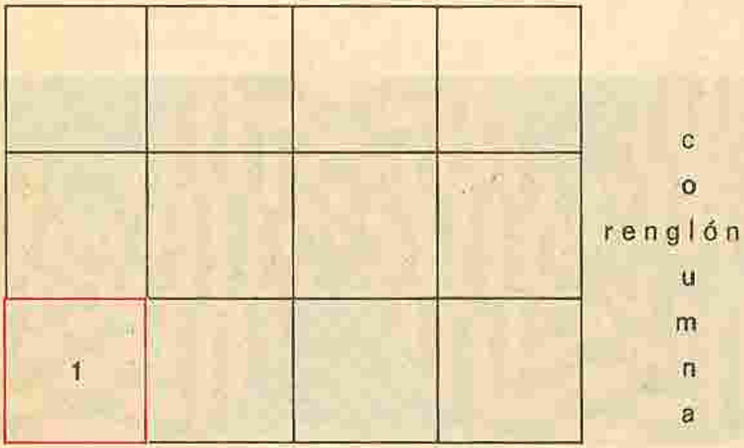
Vemos que en este rectángulo hay 7 columnas de 5 unidades cuadradas cada una. Por lo tanto, el área del rectángulo, en unidades cuadradas, es

"7 veces 5", o sea, *7 × 5.*

También podemos ver que en el mismo rectángulo hay 5 renglones de 7 unidades cuadradas cada uno. Por consiguiente, su área en unidades cuadradas es

"5 veces 7", o sea, *5 × 7.*

Ahora calculemos el área del rectángulo ilustrado a continuación.



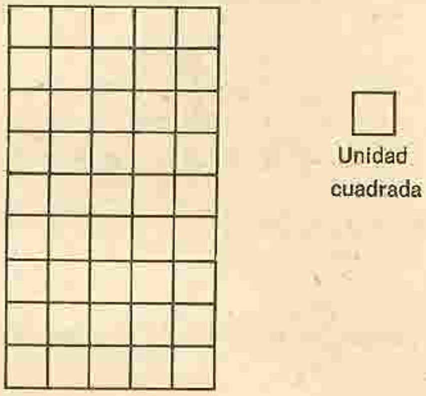
Hay □ columnas de □ unidades cuadradas cada una. El área será, entonces, "4 veces 3", o sea, □ × □

Hay □ renglones de □ unidades cuadradas cada uno. Por lo tanto, el área será "□ veces □" o sea, □ × □

En consecuencia, el área del rectángulo anterior se calcula así:

_____×_____, o así:_____×_____

¿Cuál es el área del siguiente rectángulo?



El área de este rectángulo se puede calcular así:

_____×_____

o así:_____×_____

El área de un rectángulo que mide *m* unidades de base y *n* unidades de altura se puede calcular así:

□ × □, o así: □ × □

Ejercicio 21. Efectúe las siguientes multiplicaciones en su cuaderno y compare los resultados de las multiplicaciones de cada inciso.

a) $\begin{array}{r}30\\ \times\ 40\\ \hline\end{array}$ $\begin{array}{r}40\\ \times\ 30\\ \hline\end{array}$	b) $\begin{array}{r}60\\ \times\ 56\\ \hline\end{array}$ $\begin{array}{r}56\\ \times\ 60\\ \hline\end{array}$	c) $\begin{array}{r}600\\ \times\ 400\\ \hline\end{array}$ $\begin{array}{r}400\\ \times\ 600\\ \hline\end{array}$

Los ejemplos y ejercicios anteriores y la práctica de usted al hacer multiplicaciones sugieren que la multiplicación tiene la propiedad conmutativa, y efectivamente así es:

Si *a* y *b* son dos números naturales cualesquiera, o cero, el producto de *a* por *b*, es igual al producto de *b* por *a*.

En símbolos,

$$a \cdot b = b \cdot a$$

Ejercicio 22. Observe usted las multiplicaciones ya hechas y luego indique el resultado de las demás (sin hacer la operación).

a) 5 318 × 9 = 47 862 28 × 780 = ☐

b) 34 × 915 = 31 110 9 150 × 55 = ☐

c) 780 × 28 = 21 840 9 × 5 318 = ☐

d) 1 617 × 202 = 326 634 202 × 1 617 = ☐

e) 55 × 9 150 = 503 250 915 × 34 = ☐

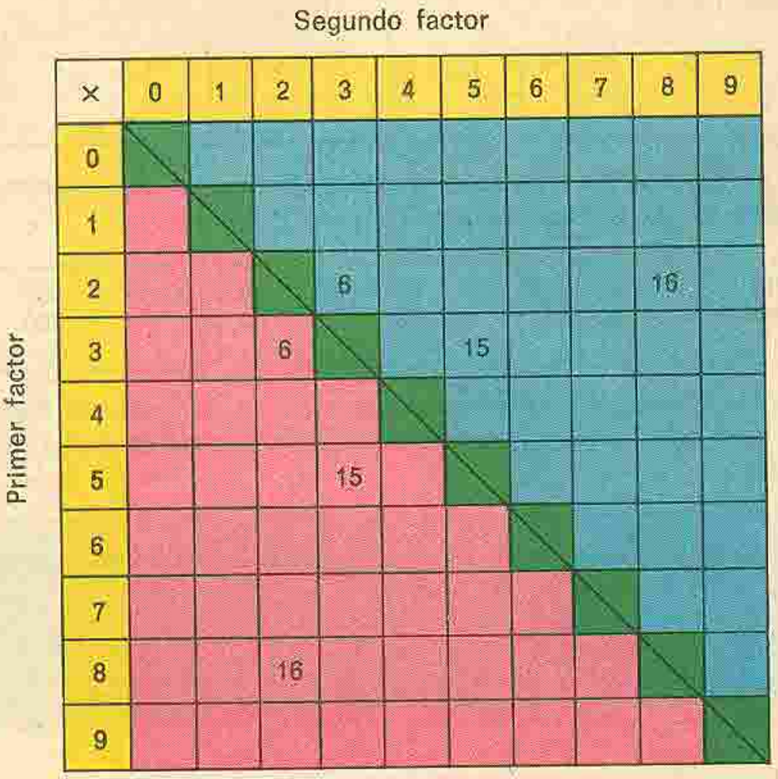
Ejercicio 23. Aplicando la propiedad conmutativa, resuelva las siguientes ecuaciones.

a) $4 \bullet 5 = 5 \bullet$ ☐ b) ☐ $\bullet\ 45 = 45 \bullet 74$ c) $x \bullet$ ☐ $= n \bullet x$

d) $x \bullet 5 = 5 \bullet 8$ $x =$ ——— e) $3 \bullet a = 12 \bullet 3$ $a =$ ———

f) $40 \bullet 13 = 13 \bullet n$ $n =$ ——— g) $18 \bullet z = 35 \bullet 18$ $z =$ ———

La siguiente ilustración es una tabla de multiplicación. En ella se anotan algunos productos.



Segundo factor

Primer factor

×	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0										
1										
2				6					16	
3			6			15				
4										
5				15						
6										
7										
8			16							
9										

Vea que el producto de 2 × 3 se anotó en un cuadro azul y el producto de 3 × 2 se anotó en un cuadro rojo. Lo mismo pasa con 3 × 5 y 5 × 3 cuyos productos están en cuadros azul y rojo respectivamente.

Para completar adecuadamente la tabla es necesario considerar cuál es el primer factor y cuál el segundo en cada caso.

Si dobla usted la tabla por la diagonal notará que coinciden el cuadro rojo que tiene el 16 y el cuadro azul que tiene el mismo número. Sucede lo mismo con los cuadros que tienen el 15 y el 6. Se dice que los cuadros que coinciden están situados simétricamente o que son simétricos con respecto a la diagonal.

Ejercicio 24.

a) Coloque el producto de 8 × 4 en el cuadro de la tabla que le corresponda. El producto aparece en un cuadro rojo. ¿Cuál es el cuadro azul simétrico a este cuadro rojo? En ese cuadro azul se anota el producto de____× ____.

b) Coloque el producto de 2 × 7 en la tabla. ¿Cuál es el cuadro rojo simétrico al cuadro donde aparece este producto? En ese cuadro rojo se anota el producto de____×____.

c) Llene los cuadros rojos de la tabla con los productos que les correspondan.

d) Si tenemos llenos los cuadros rojos, ¿podría usted llenar los cuadros azules copiando los productos de esa región roja?

e) Si en la parte roja se muestran los productos de a • b, entonces en la parte azul se mostrarán los productos de____•____.

f) Llene los cuadros verdes.

g) En estos cuadros verdes se muestran los productos de la forma *a* •____.

En esta tabla de multiplicaciones apreciamos que la propiedad conmutativa de la operación hace que los productos *a* • *b* y *b* • *a* aparezcan situados simétricamente con respecto a la diagonal.

El conocimiento de esta propiedad conmutativa permite efectuar algunas multiplicaciones de manera cómoda. Por ejemplo, si nos piden que multipliquemos

$$\begin{array}{r} 25 \\ \times\ 32\,408 \\ \hline \end{array}$$

cambiamos la disposición de nuestros factores en la siguiente forma:

$$\begin{array}{r} 32408 \\ \times\ 25 \\ \hline \end{array}$$

y efectuamos la operación con la seguridad de que el resultado será el mismo.

Propiedad asociativa

Para estudiar esta propiedad es necesario que interpretemos previamente expresiones como las siguientes:

$$8 \times (4 \times 3) \quad \text{y} \quad (8 \times 4) \times 3.$$

Con expresiones como éstas se indican diferentes procedimientos de cálculo:

$$8 \times (4 \times 3) = 8 \times 12,$$

$$(8 \times 4) \times 3 = 32 \times 3.$$

Es decir, $8 \times (4 \times 3)$ indica que se multiplica 8 por el resultado de 4×3. En cambio, $(8 \times 4) \times 3$ indica que el producto de 8×4 se multiplica por 3.

Ejemplo.

a) $6 \times (9 \times 7) = 6 \times 63$ $\qquad (6 \times 9) \times 7 = 54 \times 7$

b) $7 \times (2 \times 5) = 7 \times 10$ $\qquad (7 \times 2) \times 5 = 14 \times 5$

Ejercicio 25. Interprete usted las siguientes expresiones, tal como se hace en a).

a) $9 \times (5 \times 8) = 9 \times 40$

b) $(8 \times 4) \times 6 = \underline{\quad} \times \underline{\quad}$

c) $7 \cdot (9 \cdot 6) = \underline{\quad} \times \underline{\quad}$

d) $(10 \cdot 5) \cdot 20 = \underline{\quad} \times \underline{\quad}$

e) $(6 \cdot 4) \cdot 9 = \underline{\quad} \times \underline{\quad}$

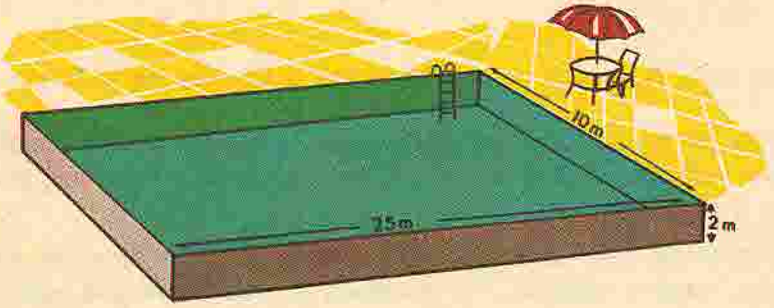
f) $r \cdot (7 \cdot 2) = \underline{\quad} \times \underline{\quad}$

g) $5 \cdot (a \cdot a) = \underline{\quad} \times \underline{\quad}$

h) $m \cdot (b \cdot b) = \underline{\quad} \times \underline{\quad}$

i) $(n \cdot n) \cdot c = \underline{\quad} \times \underline{\quad}$

Problema. El ingeniero Rodríguez desea saber cuántos metros cúbicos de agua necesita para llenar una alberca que tiene la forma y las medidas (en metros) que se indican en el dibujo.



Sus ayudantes saben que para resolver el problema deben multiplicar las tres medidas de la alberca (*largo, ancho* y *alto*).

Uno de ellos lo hizo así: $(25 \times 10) \times 2$, y el otro lo hizo así: $25 \times (10 \times 2)$.

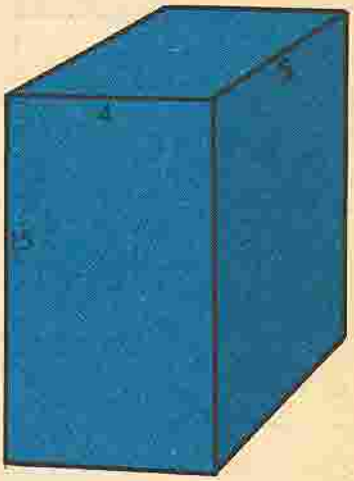
a) ¿Plantearon ambos el problema correctamente?

b) ¿Obtuvieron ambos el mismo resultado?

En este problema, al calcular las expresiones (25 × 10) × 2 y 25 × (10 × 2) se obtuvo el mismo resultado, que es 500. Es decir, (25 × 10) × 2 = 25 × (10 × 2).

Ejercicio 26. Calcule el volumen de cada paralelepípedo en las dos formas que se indican. (Las medidas están dadas en metros.)

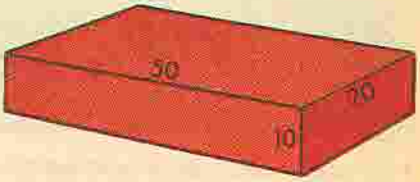
a)



V = (15 × 4) × 5 = ___ × ___ = ___

V = 15 × (4 × 5) = ___ × ___ = ___

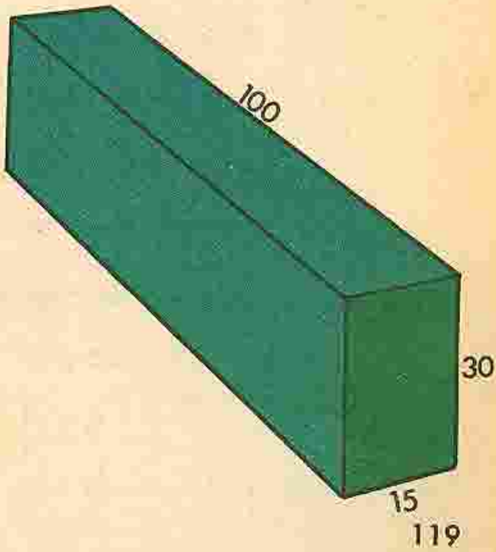
b)



V = 50 × (10 × 20) = ___ × ___ = ___

V = (50 × 10) × 20 = ___ × ___ = ___

c)



V = 100 (15 • ___) = ___ × ___ = ___

V = (100 • 15) • ___ = ___ × ___ = ___

Con la expresión $a \bullet (b \bullet c)$ se indica el producto de a por $b \bullet c$ y con la expresión $(a \bullet b) \bullet c$, el producto de $a \bullet b$ por c.

Ejercicio 27. En la primera columna calcule el valor de $a \bullet (b \bullet c)$ y en la segunda columna el valor de $(a \bullet b) \bullet c$, para los valores de a, b y c que se dan a la izquierda. Proceda como se hace en a)

$a,\ b,\ c$	$a \bullet (b \bullet c)$	$(a \bullet b) \bullet c$
a) $a = 3,\ b = 2,\ c = 5$	$3 \bullet (2 \bullet 5) = 3 \bullet 10 = 30$	$(3 \bullet 2) \bullet 5 = 6 \bullet 5 = 30$
b) $a = 2,\ b = 8,\ c = 3$		
c) $a = 1,\ b = 3,\ c = 2$		
d) $a = 8,\ b = 0,\ c = 10$		
e) $a = 9,\ b = 1,\ c = 1$		

Como habrá usted observado en los ejercicios anteriores, hay parejas de expresiones que, aunque indican cálculos diferentes, al hacer la operación dan resultados iguales.

En general, es cierto que

> **Si a, b, c son números naturales, o cero, al multiplicar $a \bullet b$ por c se obtiene el mismo resultado que al multiplicar a por $b \bullet c$. En símbolos,**
>
> $$(a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c).$$

La propiedad que enunciamos con la expresión anterior recibe el nombre de **propiedad asociativa de la multiplicación.**

Ejercicio 28. Trace rayas para unir las expresiones que dan el mismo resultado.

$(7 \times 40) \times 80$	$(30 \times 52) \times 10$
$(500 \times 4) \times 6$	$1800 \times (3 \times 10)$
$30 \times (52 \times 10)$	$500 \times (4 \times 6)$
$(1800 \times 3) \times 10$	$7 \times (40 \times 80)$

Ejercicio 29. Resuelva las siguientes ecuaciones.

a) $(7 \bullet 2)$ ☐ $= 7 \bullet (2 \bullet 9)$

b) $(8 \bullet 4) \bullet 3 = 8 \bullet ($ ☐ $\bullet 3)$

c) $m \bullet (5 \bullet 7) = (6 \bullet 5) \bullet 7$; $m =$ _____

d) $(7 \bullet x) \bullet 3 = 7 \bullet (10 \bullet 3)$; $x =$ _____

e) $5 \bullet (12 \bullet 8) = (r \bullet 12) \bullet 8$; $r =$ _____

f). $m \bullet (3 \bullet 2) = (8 \bullet 3) \bullet 2$; $m =$ _____

Ejercicio 30. Aplique la propiedad asociativa para cambiar las expresiones, tal como se hace en a). (Las letras representan números naturales).

a) $a \bullet (b \bullet c) = \underline{(a \bullet b) \bullet c}$ b) $m \bullet (n \bullet p) =$ ____________

c) $(a \bullet b) \bullet n =$ ____________ d) $f \bullet (n \bullet t) =$ ____________

e) $(a^2 \bullet b^2) \bullet m^2 =$ ____________ f) $r^2 \bullet (m^2 \bullet n^2) =$ ____________

Las multiplicaciones como $8 \bullet 4 \bullet 3 =$ _______ se pueden efectuar de dos maneras diferentes: $(8 \bullet 4) \bullet 3$, o bien, $8 \bullet (4 \bullet 3)$. La propiedad asociativa nos asegura que el resultado es el mismo en ambos casos. Por lo tanto, podemos escoger indistintamente cualquiera de las dos maneras para efectuarlas.

Ejemplo.

a) $6 \times 9 \times 7 = 6 \times (9 \times 7)$; o bien, $6 \times 9 \times 7 = (6 \times 9) \times 7$.

b) $2 \bullet 7 \bullet 10 = (2 \bullet 7) \bullet 10$; o bien, $2 \bullet 7 \bullet 10 = 2 \bullet (7 \bullet 10)$.

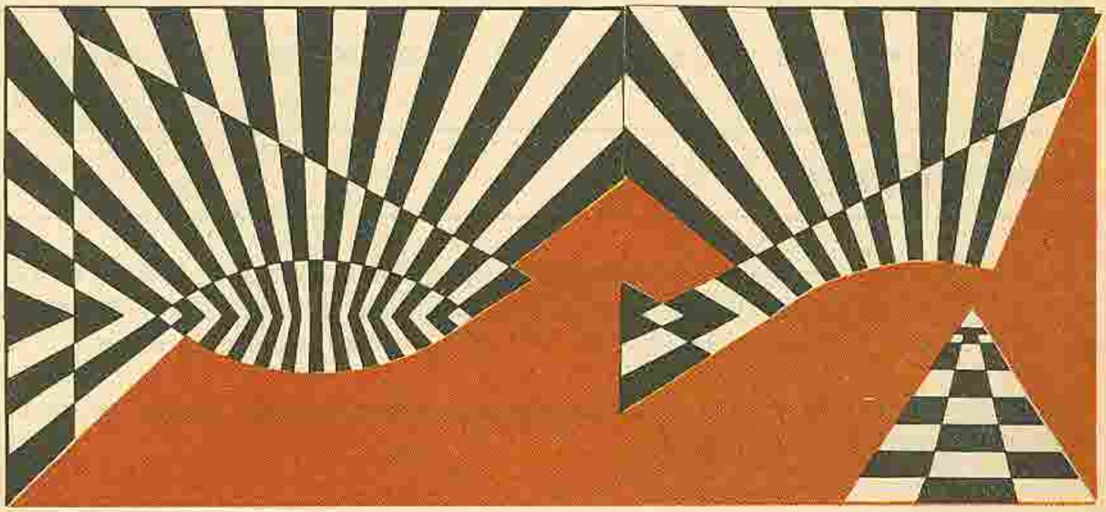
Ejercicio 31. Efectúe las multiplicaciones que se indican usando el procedimiento que usted guste.

a) $8 \times 10 \times 4$ b) $12 \times 10 \times 5$ c) $6 \times 12 \times 10$

d) $5 \times 10 \times 100$ e) $20 \times 10 \times 5$ f) $30 \times 5 \times 20$

g) $100 \times 8 \times 5$ h) $5 \times 0 \times 100$ i) $1 \times 42 \times 10$

Para indicar la multiplicación de tres números naturales cualesquiera *a*, *b* y *c* se usan expresiones como $a \bullet b \bullet c$ o *abc*. En ambos casos leemos: "*a* por *b* por *c*".



Ejercicio 32. Indique en su cuaderno cuál es el producto de $m\,n\,p$, considerando los valores de m, n y p que se dan en cada inciso.

a) $m = 5,\ n = 8,\ p = 10.$ $\underline{mnp = 5 \times 8 \times 10 = 400}$

b) $m = 10,\ p = 3,\ n = 2.$ c) $p = 10,\ m = 5,\ n = 1.$

d) $m = 8,\ n = 5,\ p = 2.$ e) $m = 3,\ n = 0,\ p = 100.$

f) $m = 10,\ n = 10,\ p = 10.$ g) $m = 1,\ n = 1,\ p = 1.$

La multiplicación de 4 números (por ejemplo 3, 4, 5 y 6) se indica así: $3 \times 4 \times 5 \times 6$ y se puede calcular de la siguiente manera:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] 3 \arrow[rr, bend left] & \times & 4 \arrow[rr, bend left] & \times & 5 \arrow[rr, bend left] & \times & 6 \end{tikzcd}$$

(multiplicamos primero 3×4; luego multiplicamos este resultado por 5 y, finalmente, este segundo resultado lo multiplicamos por 6. El resultado final es 360).

Aplicando la propiedad asociativa y la propiedad conmutativa, se puede efectuar una multiplicación de varios factores en diversas formas; pero el resultado siempre es el mismo. Por lo tanto, cada quien puede efectuarla en la forma que considere más fácil o más conveniente.

Ejemplo.

a) $2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 = 240$

b) $3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 = 1\,440$

Ejercicio 33. Efectúe las siguientes multiplicaciones en su cuaderno.

a) $8 \times 3 \times 2 \times 4$ b) $5 \times 2 \times 3 \times 2$

c) $6 \times 5 \times 10 \times 2$ d) $6 \times 3 \times 5 \times 2$

e) $10 \times 5 \times 2 \times 10$ f) $3 \times 9 \times 2 \times 2 \times 3$

g) $5 \times 2 \times 2 \times 5 \times 3$ h) $3 \times 3 \times 3 \times 0$

i) $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$ j) $1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1$

Notación exponencial

En la práctica se presentan frecuentemente expresiones como $5 \times 5 \times 5 \times 5$ o $7 \times 7 \times 7$. Estas expresiones pueden ser representadas en forma breve. Por ejemplo, $5 \times 5 \times 5 \times 5$ se indica como 5^4; y $7 \times 7 \times 7$ se representa como 7^3.

Esta forma breve de representar un producto de varios factores iguales recibe el nombre de **notación exponencial.**

Ejemplo.

a) $2 \times 2 \times 2 = 2^3$ — 2^3 se lee "2 al cubo" o "2 a la tercera potencia"

b) $4 \times 4 \times 4 = 4^3$ — Léase: "4 al cubo" o "4 a la tercera potencia"

c) $5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^4$ — Léase: "5 a la cuarta potencia"

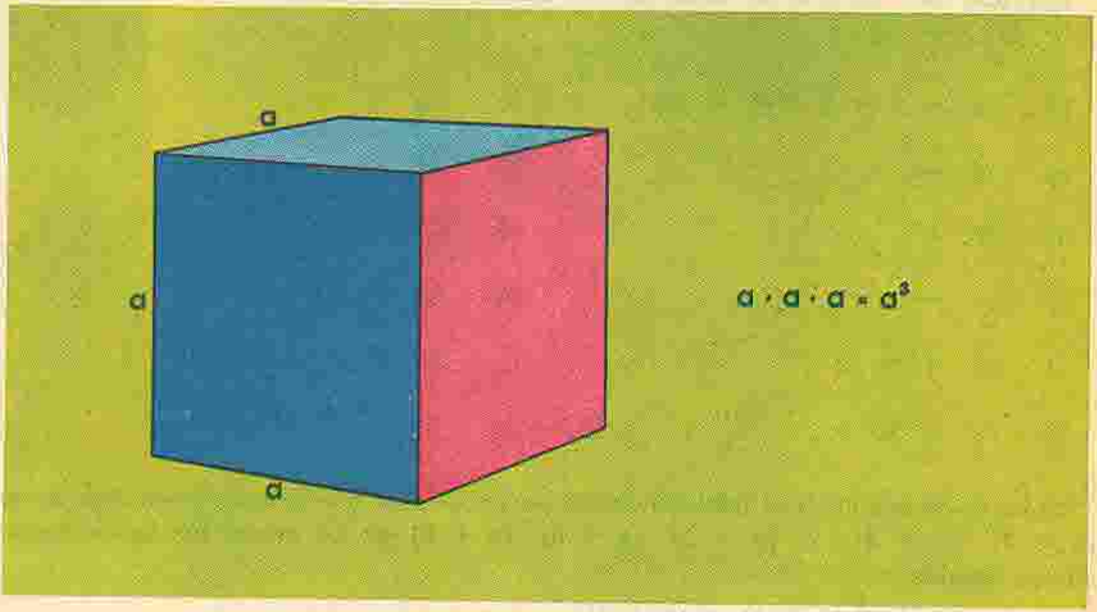
d) $7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 = 7^5$ — Léase: "7 a la quinta potencia"

e) $m \bullet m \bullet m = m^3$

f) $x \bullet x \bullet x \bullet x \bullet x = x^5$

g) $b \bullet b \bullet b \bullet b = b^4$

h) $y \bullet y \bullet y \bullet y \bullet y \bullet y = y^6$



El uso de la expresión "al cubo" se justifica por la relación que existe entre el cálculo del volumen del cubo y el producto de tres factores iguales.

En la notación exponencial se acostumbra nombrar a los números en la siguiente forma:

$$\text{base} \longrightarrow 4^3 \longleftarrow \text{exponente}$$

Ejercicio 34. Exprese los siguientes productos en notación exponencial. (Las letras representan números naturales o cero.)

a) $8 \bullet 8 \bullet 8$

b) $3 \bullet 3 \bullet 3 \bullet 3$

c) $p \bullet p \bullet p$

d) 7×7

e) $m \bullet m$

f) $t \quad t \quad t \quad t \quad t$

g) $6 \bullet 6 \bullet 6 \bullet 6 \bullet 6$

h) $5 \bullet 5 \bullet 5 \bullet 5 \bullet 5 \bullet 5$

i) $x \bullet x \bullet x \bullet x$

j) $a \bullet a \bullet a \bullet a \bullet a \bullet a \bullet a \bullet a \bullet a \bullet a$

Ejercicio 35. Escriba las siguientes expresiones como productos de factores iguales, tal como se hace en a). (Las letras representan números naturales.)

a) $5^4 = 5 \bullet 5 \bullet 5 \bullet 5$

b) $8^5 =$

c) $10^6 =$

d) $b^4 =$

e) $m^3 =$

f) $z^2 =$

g) $k^7 =$

h) $1\ 000^2 =$

Ejercicio 36. Calcule el valor de las siguientes expresiones, considerando que $a = 5$, $b = 10$ y $c = 2$.

a) $a^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$

b) $c^4 =$

c) $b^2 =$

d) $2a^2 =$

e) $2b^3 =$

f) $3ab =$

g) $2ac =$

h) $5b + 3b =$

i) $2a + 3b =$

j) $2a^2 + 5 =$

k) $4a + 3c^2 =$

l) $3a^2 + 2b + c^2 =$

La notación exponencial también es útil para expresar brevemente productos como $(5 + 4)\ (5 + 4)$ y $(a + b)\ (a + b)\ (a + b)$, en los cuales los factores son sumas iguales.

$$(5 + 4)(5 + 4) = (5 + 4)^2$$

$$(a + b)(a + b)(a + b) = (a + b)^3$$

Ejemplo.

a) $(3 + 2)(3 + 2)(3 + 2)(3 + 2) = (3 + 2)^4$

b) $(m + n)(m + n) = (m + n)^2$

c) $(8 + 5)^3 = (8 + 5)(8 + 5)(8 + 5)$

d) $(r + s)^2 = (r + s)(r + s)$

Ejercicio 37. Exprese los siguientes productos en notación exponencial. (Las letras representan números naturales.)

a) $(5 + 2)(5 + 2)(5 + 2) =$

b) $(4 + 3)(4 + 3) =$

c) $(a + 2)(a + 2)(a + 2) =$

d) $(m + 1)(m + 1) =$

e) $(m+n)\ (m+n) =$

f) $(a+5)\ (a+5)\ (a+5)\ (a+5) =$

Ejercicio 38. Escriba en su cuaderno las siguientes expresiones como productos de sumas iguales. Las letras representan números naturales.

a) $(a+5)^2$

b) $(a+b)^2$

c) $(m+n)^3$

d) $(r+s)^4$

e) $(2+t)^3$

f) $(a+b)^4$

g) $(x+y)^3$

h) $(2x+y)^2$

i) $(x+a)^5$

Hay ocasiones en que necesitamos multiplicar una expresión como $5a$ por otra como $12a$. Esta operación puede efectuarse aplicando las propiedades asociativa y conmutativa.

$$5a \bullet 12a = 5 \bullet a \bullet 12 \bullet a$$

Si consideramos el producto de $a \bullet 12$,

$$5 \bullet a \bullet 12 \bullet a,$$

y aplicamos la propiedad conmutativa a ese producto tenemos

$$5 \bullet 12 \bullet a \bullet a.$$

Ahora podemos multiplicar así:

$$5 \bullet 12 \bullet a \bullet a = 60 \bullet a^2.$$

Ejemplo.

a) $3b \bullet 7b = 3 \bullet 7 \bullet b \bullet b = 21b^2$

b) $5m \bullet 3m = 5 \bullet 3 \bullet m \bullet m = 15m^2$

c) $8x \bullet 2x = 16 \bullet x \bullet x = 16x^2$

d) $10y \bullet 4y = 40 \bullet y^2$

Ejercicio 39. Efectúe las siguientes multiplicaciones.

a) $3m \bullet 12m$

b) $10y \bullet 10y$

c) $2s \bullet 21s$

d) $m \bullet 8m$

e) $10t \bullet t$

f) $p \bullet 5p$

g) $8x \bullet 15x$

h) $2a \bullet 3b$

i) $3m \bullet 12n$

j) $10x \bullet 3y$

k) $x \bullet 3y$

l) $a \bullet 5b$

El número uno en la multiplicación

Sabemos ya que la multiplicación de 1 por cualquier número natural o cero da como resultado ese mismo número.

Con símbolos podemos expresar lo anterior de la siguiente manera:

Si a es un número natural o cero, entonces,

$$a \bullet 1 = 1 \bullet a = a.$$

Es importante hacer notar que el 1 es el único número que tiene esta propiedad. A este número también se le llama **elemento neutro** de la multiplicación.

Ejercicio 40. En la siguiente multiplicación se han sustituido las cifras por letras:

$$\begin{array}{cccc} & a & b & a \\ & x & a & b \\ \hline & b & b & b \\ a & b & a & \\ \hline a & b & a & b \end{array}$$

$a =$

$b =$

¿Qué cifras fueron sustituidas por la a y la b?

Propiedad distributiva

A continuación vamos a estudiar una propiedad que relaciona la multiplicación con la adición.

Durante dicho estudio tendremos que calcular y conocer el significado de expresiones tales como $5 \bullet (4 + 3)$ y otras como $8 \times 7 + 3 \times 2$, que ahora analizaremos.

La primera expresión $5 \bullet (4 + 3)$ nos indica la multiplicación de 5 por $4 + 3$, es decir, $5\ (4 + 3) = 5 \bullet 7 = 35$

La segunda indica la suma de $8 \bullet 7$ y $3 \bullet 2$. Esto es,
$8 \bullet 7 + 3 \bullet 2 = 56 + 6 = 62$.

Ejemplo.

a) $(7 + 3) \bullet 8 = 10 \bullet 8 = 80$

b) $a \bullet (7 + 9) = a \bullet 16$

c) $(10 + 5)\ b = 15 \bullet b$

d) $9 \bullet 10 + 11 \bullet 2 = 90 + 22 = 112$

e) $300 \bullet 2 + 400 \bullet 10 = 600 + 4\,000 = 4\,600$.

Ejercicio 41. Calcule en su cuaderno el valor de la expresión $a\ (b + c)$ para los siguientes valores de a, b y c

a) $a = 8,\ b = 5,\ c = 1$ $\quad a\ (b + c) = 8\ (5 + 1) = 8 \bullet 6 = 48$

b) $a = 6,\ b = 0,\ c = 1$ $\qquad$ c) $a = 0,\ b = 5,\ c = 5$

d) $c = 2,\ a = 100,\ b = 12$ $\qquad$ e) $a = m,\ b = 8,\ c = 2$

Ejercicio 42. Calcule en su cuaderno el valor de la expresión $a \bullet b + c \bullet d$ para los valores que se indican.

a) $a = 5,\ b = 2,\ c = 3,\ d = 4$ $\quad ab + cd = 5 \bullet 2 + 3 \bullet 4 = 10 + 12 = 22$

b) $a = 4,\ b = 10,\ c = 1,\ d = 6$

c) $a = 2,\ b = 4,\ c = 1,\ d = 20$

d) $a = 0,\ b = 100,\ c = 300,\ d = 100$

e) $a = m,\ b = 1,\ c = 3,\ d = 3.$

Ejercicio 43. Calcule en su cuaderno el valor de las siguientes expresiones, tal como se hace en a) y en d).

a) $8 \bullet 3 + 5 \bullet 7 = \boxed{24 + 35 = 59}$

b) $10 \bullet (3 + 2)$

c) $9 \bullet (8 + 1)$

d) $m \bullet (5 + 3) = \boxed{m \bullet 8 = 8m}$

e) $3 \bullet 5 + 2 \bullet 1$

f) $(6 + 4) \bullet 12$

g) $(3 + 4) \bullet n$

h) $3 \bullet 3 + 2 \bullet 2$

i) $3 \bullet 2 + a \bullet 1$

j) $a \bullet 1 + b \bullet 0$

Problema. Elías y Pedro quieren conocer el área de un terreno que heredaron. En el testamento, el terreno heredado se dividió así:

Resolución. Elías calcula el área del terreno multiplicando el ancho por el largo. Es decir, multiplicando 8 por 10 + 6.

$$8\ (10 + 6) = 8 \bullet 16 = 128.$$

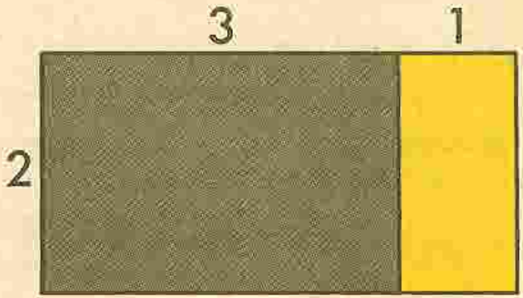
Pedro la calcula sumando el área del terreno de su hermano ($8 \bullet 10$) con el área de su propio terreno ($8 \bullet 6$).

$$8 \bullet 10 + 8 \bullet 6 = 80 + 48 = 128$$

Elías y Pedro usaron diferentes procedimientos de cálculo para conocer el área del terreno heredado. Sin embargo, los dos obtuvieron el mismo resultado. Esto significa que para calcular el área de terrenos como el del problema se puede usar indistintamente cualquiera de esos dos procedimientos.

Ejercicio 44. Calcule el área de las figuras mostradas, usando los dos procedimientos anteriores.

a)



Procedimiento usado por Elías:

$2 \times (3 + 1) = 2 \cdot 4 = 8$

Procedimiento usado por Pedro:

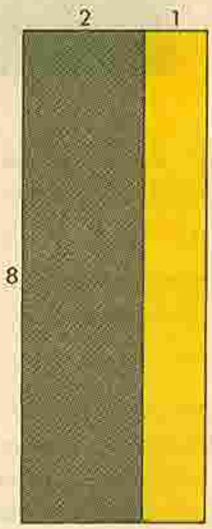
$2 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 6 + 2 = 8$

b)

Procedimiento usado por Elías:

Procedimiento usado por Pedro:

c)



Procedimiento usado por Elías:

Procedimiento usado por Pedro:

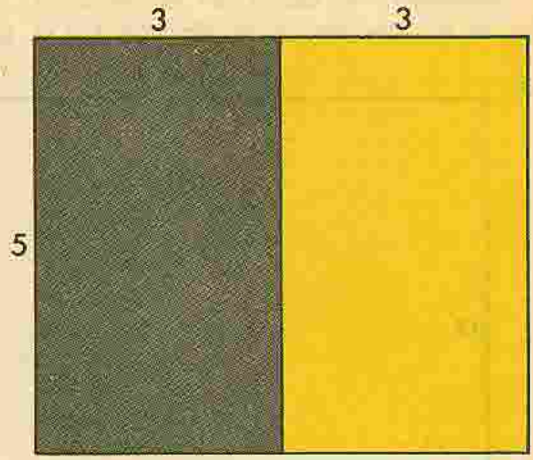
d)

Procedimiento usado por Elías:

____

Procedimiento usado por Pedro:

____



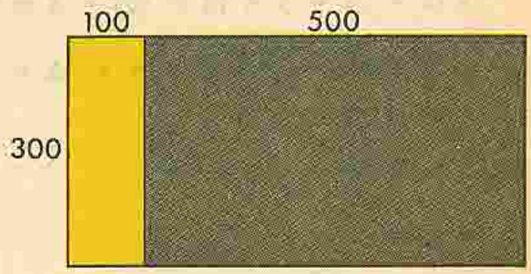
e)

Procedimiento usado por Elías:

____

Procedimiento usado por Pedro:

____



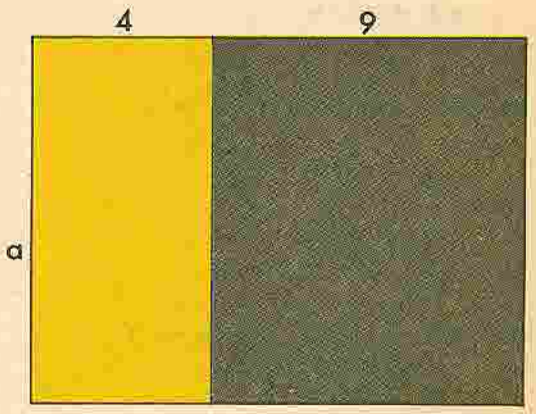
f)

Procedimiento usado por Elías:

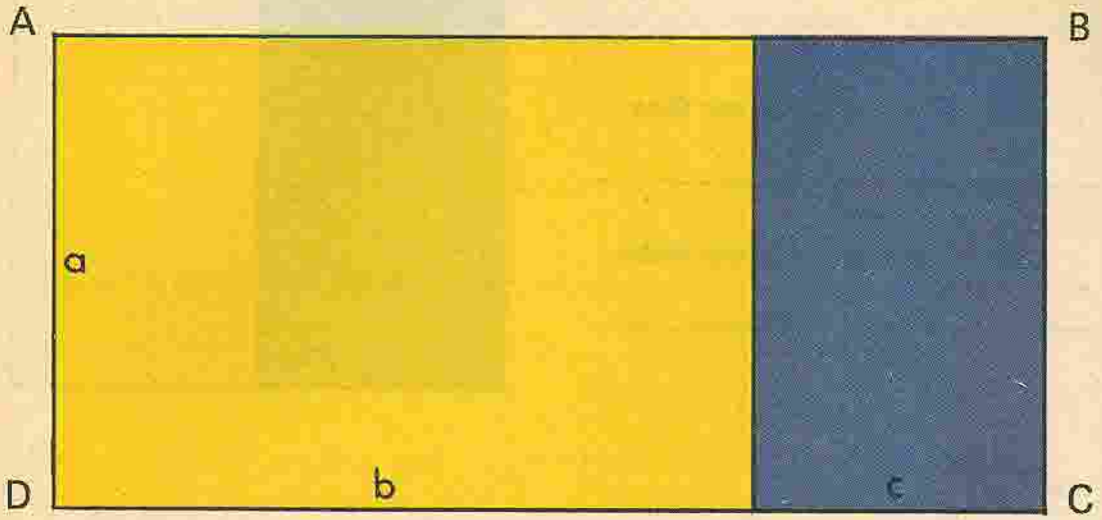
____

Procedimiento usado por Pedro:

____



Ejercicio 45. Como en el inciso a), use dos procedimientos distintos para calcular el área de un rectángulo *ABCD*, que tenga las medidas propuestas.



a) $a = 5, \quad b = 8, \quad c = 12$

$a\,(b + c) = 5 \times (8 + 12) = 5 \times 20 = 100$

$a\,b + a\,c = 5 \times 8 + 5 \times 12 = 40 + 60 = 100$

b) $a = 7, \quad b = 9, \quad c = 4$

$a\,(b + c) =$

$ab + ac =$

c) $a = 8, \quad b = 10, \quad c = 1$

$a\,(b + c) =$

$a\,b + ac =$

d) $a = 43, \quad b = 4, \quad c = 1$

$a\,(b + c) =$

$ab + ac =$

e) $a = 2, \quad b = 17, \quad c = 1$

$a\,(b + c) =$

$ab + ac =$

Observe usted que, en todos los casos anteriores hemos llegado al mismo resultado con las expresiones $a(b + c)$ y $ab + ac$. Esto nos sugiere lo siguiente:

> **Si a, b y c son números naturales, o cero, el resultado de multiplicar a por $b + c$ es igual al resultado de sumar ab más ac. En símbolos,**
>
> $$a(b + c) = ab + ac.$$
>
> **O bien, escrito en otra forma,**
>
> $$ab + ac = a(b + c).$$

Este hecho recibe el nombre de **propiedad distributiva** de la multiplicación con respecto a la adición.

Esta propiedad es importante porque nos permite sustituir un procedimiento de cálculo por otro, según nos convenga.

Ejercicio 46. Usando la propiedad distributiva, complete (en su cuaderno) las igualdades, tal como se hace en a) y en d).

a) $5(8 + 2) = (5 \times 8) + (5 \times 2) = 40 + 10 = 50$

b) $9(4 + 7) =$

c) $12(48 + 36) =$

d) $m(5 + 2) = m \bullet 5 + m \bullet 2 = 5m + 2m = 7m$

e) $a(8 + 4 =$

f) $p(5 + q) =$

g) $x(n + 1) =$

h) $p(a + b) =$

i) $r(m + n) =$

j) $q(a^2 + b^2) =$

k) $n^2(a + b) =$

l) $(5 + 9)b^2 =$

m) $(7 + 13)y =$

n) $(a + 5)c =$

o) $(8 + t)p =$

p) $(p + q)r =$

Ejercicio 47. Tal como se hace en los primeros incisos, complete las siguientes igualdades (en su cuaderno).

a) $5 \bullet 8 + 5 \bullet 6 = 5(8 + 6)$

b) $5t + 7t = (5 + 7)t$

c) $5 \bullet 10 + 5 \bullet 15 =$

d) $7 \bullet 9 + 7 \bullet 4 =$

e) $4 \bullet 6 + 4 \bullet 17 =$

f) $12 \bullet 15 + 12 \bullet 28 =$

g) $19 \bullet 14 + 23 \bullet 14 =$

h) $5 \bullet x + 5 \bullet 9 =$

i) $a \bullet 8 + a \bullet 17 =$

j) $b \bullet 6 + b \bullet 12 =$

k) $8 \bullet t + 1 \bullet t =$

l) $14p + 7p =$

m) $7a + a =$

n) $4(a + b) + 8(a + b) =$

Gracias a la existencia de la propiedad distributiva, las expresiones como

$$8\ (5 + 4 + 7)$$

pueden sustituirse por expresiones como

$$8 \bullet 5 + 8 \bullet 4 + 8 \bullet 7$$

pues aunque se indiquen procedimientos diferentes de cálculo, ambas expresiones darán siempre el mismo resultado. Efectivamente,

$$8\ (5 + 4 + 7) = 8\ (16) = 128$$

$$8 \bullet 5 + 8 \bullet 4 + 8 \bullet 7 = 40 + 32 + 56 = 128$$

Por lo tanto, podemos afirmar que

$$8\ (5 + 4 + 7) = 8 \bullet 5 + 8 \bullet 4 + 8 \bullet 7$$

Conviene que observe usted cómo están relacionadas las dos expresiones de la igualdad anterior. Véalo en el siguiente esquema:

$$8\ (5 + 4 + 7) = 8 \bullet 5 + 8 \bullet 4 + 8 \bullet 7.$$

Ejercicio 48. Complete las igualdades como se hace en b) y en f).

a) $5\ (2 + 8 + 6) = 5 \bullet 2 + 5 \bullet 8 + 5 \bullet 6$

b) $3\ (6 + 4 + 5) = 3 \bullet 6 + 3 \bullet 4 + 3 \bullet 5$

c) $10\ (9 + 5 + 1) =$ ______ + ______ + ______

d) $7\ (12 + 11 + 3) =$ ______ + ______ + ______

e) $100\ (10 + 1 + 8) =$ ______ + ______ + ______

f) $(10 + 9 + 2)\ 10 = 10 \bullet 10 + 9 \bullet 10 + 2 \bullet 10$

g) $(8 + 4 + 7)\ 6 =$ ______ + ______ + ______

h) $(7 + 2 + 1)\ 9 =$ ______ + ______ + ______

i) $(10 + 5 + 3)\ 11 =$ ______ + ______ + ______

j) $8\ (3 + 2 + 5 + 4) =$ ______ + ______ + ______ + ______

k) $5\ (9 + 4 + 3 + 2 + 1) =$ ______ + ______ + ______ + ______ + ______

l) $(9 + 10 + 3 + 6 + 9)\ 10 =$ ______ + ______ + ______ + ______ + ______

m) $a\ (b + c + d + e + f) =$ ______ + ______ + ______ + ______ + ______

Ejercicio 49. Calcule en su cuaderno el valor de las expresiones del ejercicio anterior y compruebe que el resultado es efectivamente el mismo. Por ejemplo, en el inciso a) tenemos que

$$5 \bullet (2 + 8 + 6) = 5 \bullet 16 = 80$$

$$5 \bullet 2 + 5 \bullet 8 + 5 \bullet 6 = 10 + 40 + 30 = 80.$$

En los ejercicios anteriores debíamos obtener una expresión del tipo $ab + ac + ad$ a partir de una expresión $a\,(b + c + d)$. Ahora vamos a plantearnos el ejercicio inverso. Es decir, vamos a obtener expresiones del tipo $a\,(b + c + d)$ a partir de una expresión $ab + ac + ad$. La siguiente ilustración nos ayudará a resolver tal ejercicio. Observe usted bien los colores.

$$ab + ac + ad = a\,(b + c + d)$$

$$nx + ny + nz = n\,(x + y + z)$$

$$6a + 6b + 6c = 6\,(a + b + c)$$

Ejercicio 50. Complete usted las expresiones siguientes.

a) $7 \bullet 8 + 7 \bullet 5 + 7 \bullet 3 = \square\ (8 + 5 + 3)$

b) $8 \bullet 10 + 8 \bullet 7 + 8 \bullet 9 = (8 \bullet (\square + \square + \square)$

c) $na + nb + nf = \square \bullet (a + b + f)$

d) $xp + xy + xz = x\,(\square + \square + \square)$

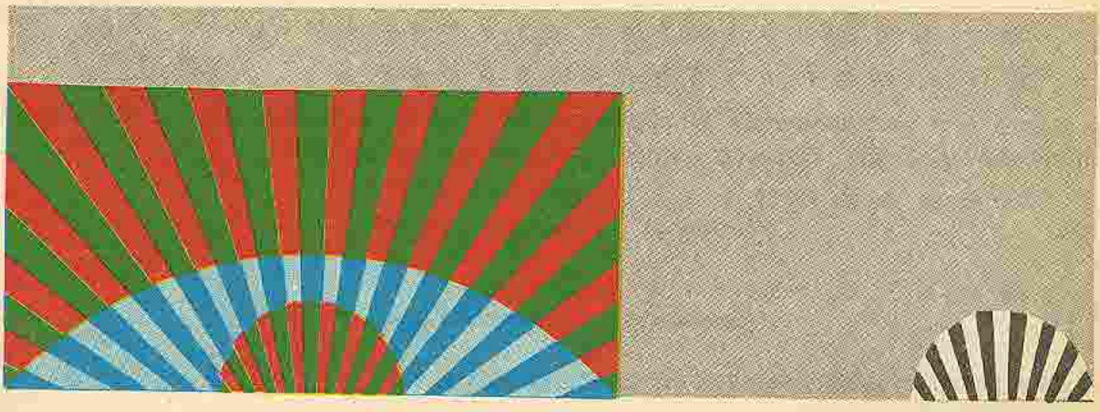
e) $\square \bullet 3 + \square \bullet 2 + \square \bullet 5 = 8\,(3 + 2 + 5)$

f) $5 \bullet \square + 5 \bullet \square + 5 \bullet \square = 5\,(7 + 9 + 10)$

g) $a\square + a\square + a\square = a\,(x + y + z)$

h) $\square m + \square n + \square p = x\,(m + n + p)$

i) $\square r + \square s + \square t = m\,(\square + \square + \square)$



Ejercicio 51. Complete las igualdades siguientes, como se hace en a) y b).

a) $5 \bullet 3 + 5 \bullet 6 = 5\ (3 + 6)$

b) $6 \bullet 7 + 6 \bullet 9 + 6 \bullet 12 = 6 \bullet (7 + 9 + 12)$

c) $8 \bullet 5 + 8 \bullet 12 =$

d) $9 \bullet 4 + 9 \bullet 7 + 9 \bullet 1 =$

e) $3 \bullet 7 + 2 \bullet 7 + 5 \bullet 7 =$

f) $3 \bullet 12 + 8 \bullet 12 =$

g) $5 \bullet 12 + 12 \bullet 7 + 10 \bullet 12 =$

h) $9 \bullet 12 + 9 \bullet 15 =$

i) $m \bullet 5 + m \bullet 8 + m \bullet 3 =$

j) $a \bullet 2 + a \bullet 3 + a \bullet 8 =$

k) $3m + 2m + 5m =$

l) $7x + 2x + 5x =$

m) $3r + 2r + 7r + 5r =$

n) $mn + mp + mq + mr =$

Ejercicio 52. Calcule en su cuaderno el valor de las expresiones del ejercicio anterior que aparecen en los incisos de la a) a la j) y compruebe que se cumple la propiedad distributiva, es decir, que las dos expresiones dan el mismo resultado.

Cuando se tienen expresiones del tipo $ab + ac + ad$ y se sustituyen por expresiones del tipo $a\ (b + c + d)$, se dice que se efectúa una *factorización*. Algunos de los ejercicios anteriores han sido de factorización.

Dos aplicaciones de la propiedad distributiva

Al iniciar el estudio de la multiplicación aprendimos a simplificar expresiones como $2a + 3a + 2a$ y como $2b + b + 3b$, en la siguiente forma:

$$2a + 3a + 2a = a + a + a + a + a + a + a = 7a,$$

$$2b + b + 3b = b + b + b + b + b + b = 6b.$$

Ahora que ya conocemos la propiedad distributiva, podemos usarla para llegar al mismo resultado. Observe usted los siguientes ejemplos:

$$2a + 3a + 2a = \underset{\text{factorizando}}{(2 + 3 + 2)}\ \underset{\text{efectuando la suma}}{a = 7a}$$

$$2b + b + 3b = \underset{\text{factorizando}}{(2 + 1 + 3)}\ \underset{\text{efectuando la suma}}{b = 6b}$$

Este procedimiento nos será útil posteriormente.

Ejercicio 53. Simplifique las siguientes expresiones usando la propiedad distributiva, como se hace en a) y en b). Las letras representan números naturales o cero.

a) $3b + 2b + 11b = (3 + 2 + 11)\ b = 16b$

b) $14a + 12a = (14 + 12)\ a = 26a$

c) $12m + 7m + 3m + 2m =$

d) $7a + 8a + 9a + 5a + a =$

e) $b + 2b + b =$

f) $3p + 2p + 5p =$

g) $75r + 2r + 18r =$

h) $40q + 12q + 15q + 16q =$

i) $5a^2 + 3a^2 =$

j) $2ab + 3ab + 5ab =$

k) $xy + xy =$

l) $mn + mn + mn =$

m) $pq + pq =$

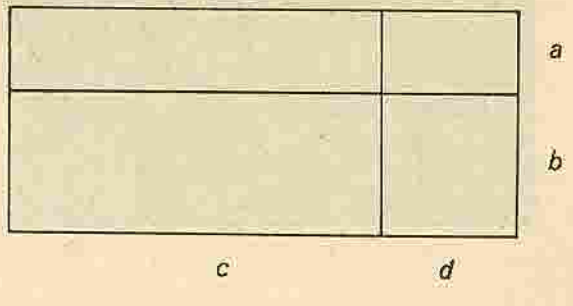
n) $3m + 6m + 4m =$

o) $6a^2 + 3a^2 + 7a^2 =$

p) $x^2 + x^2 + x^2 =$

Frecuentemente se presentan expresiones como $(a + b)\ (c + d)$, que nos indican la multiplicación de $a + b$ por $c + d$. Estas expresiones pueden sustituirse por otras que dan el mismo resultado. Para ello se utiliza la propiedad distributiva. Observe usted a continuación cómo se hace esto.

Consideremos la figura siguiente:



Como el área de un rectángulo se obtiene multiplicando la base por la altura, el área de esta figura se obtendrá multiplicando

$$(a + b)\ (c + d).$$

Ahora bien, se puede aplicar la propiedad distributiva a esta expresión en la siguiente forma:

$$(a + b)\ (c + d) = (a + b)\ c + (a + b)\ d.$$

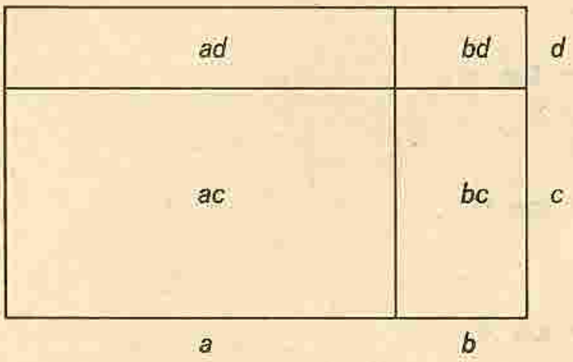
Ahora volvemos a usar la propiedad distributiva y tenemos que

$$(a + b)\ c + (a + b)\ d = \mathrm{a} \bullet \mathrm{c} + \mathrm{b} \bullet \mathrm{c} + \mathrm{a} \bullet \mathrm{d} + \mathrm{b} \bullet \mathrm{d}.$$

En conclusión,

$$(a + b)\ (c + d) = ac + ad + bc + bd.$$

Este resultado puede ilustrarse en la figura así:

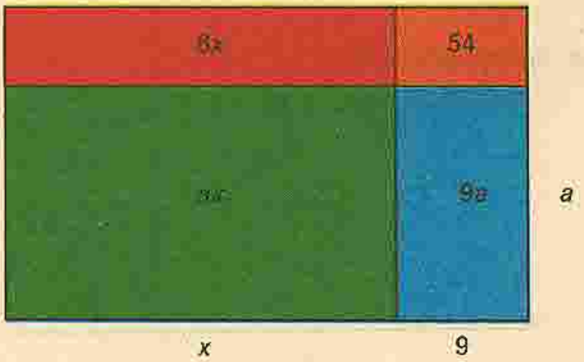


El área del rectángulo es la suma de las áreas ac, ad, bc y bd.

Ejemplo. En lo que sigue, se aplica la propiedad distributiva. Observe usted cómo.

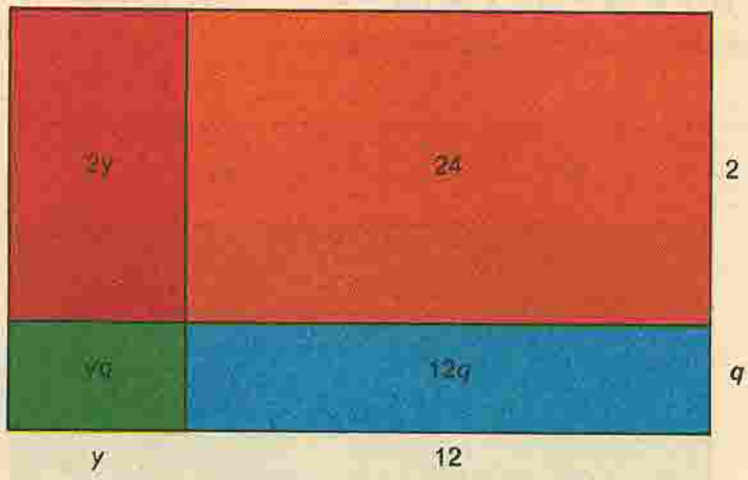
a) $(x + 9)\ (a + 6) = x\ (a + 6) + 9\ (a + 6) = ax + 6x + 9a + 54.$

Esto puede ilustrarse con la siguiente figura:



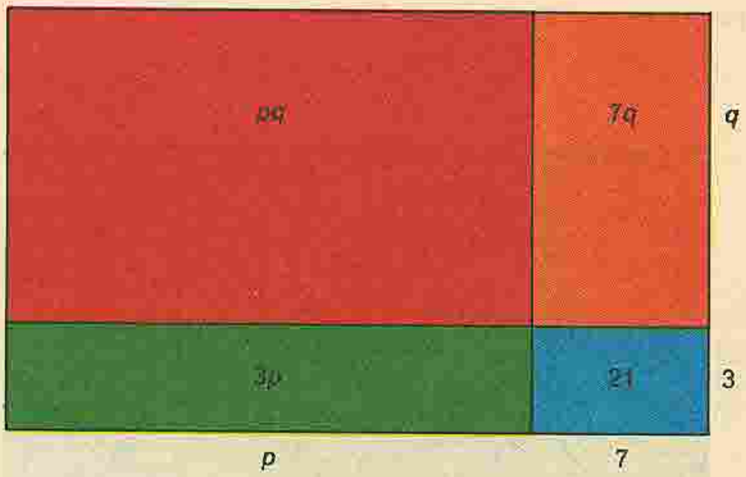
b) $(y + 12)(q + 2) = (y + 12)q + (y + 12)2 = yq + 12q + 2y + 24.$

Esto puede ilustrarse con la siguiente figura:



c) $(p + 7)(3 + q) = p(3 + q) + 7(3 + q) = 3p + pq + 21 + 7q.$

Esto puede ilustrarse con la siguiente figura:



d) $(x + 8)(x + 5) = (x + 8)x + (x + 8)5 = xx + 8x + 5x + 40.$

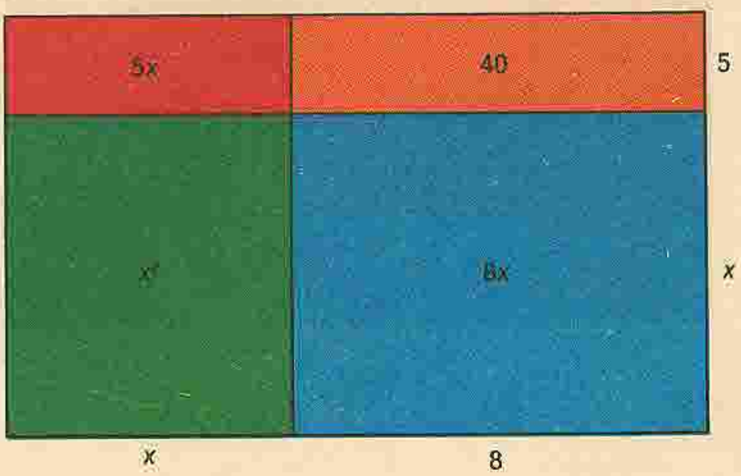
Usted ya sabe que $xx = x^2$ y que $8x + 5x = 13x$.

Por eso, la suma $xx + 8x + 5x + 40$ puede expresarse como

$$x^2 + 13x + 40.$$

Por lo tanto, $(x + 8)(x + 5) = x^2 + 13x + 40$.

Esto puede ilustrarse con la siguiente figura:



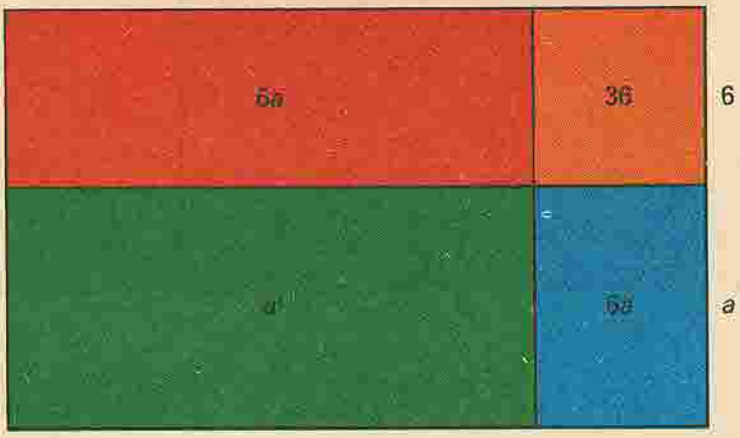
e) $(a + 6)(a + 6) = a(a + 6) + 6(a + 6) = aa + 6a + 6a + 36 =$

$$= a^2 + 12a + 36.$$

Observe usted que $(a + 6)\ (a + 6)$ se puede expresar como $(a + 6)^2$. Por lo tanto, podemos escribir

$$(a + 6)^2 = a^2 + 12a + 36.$$

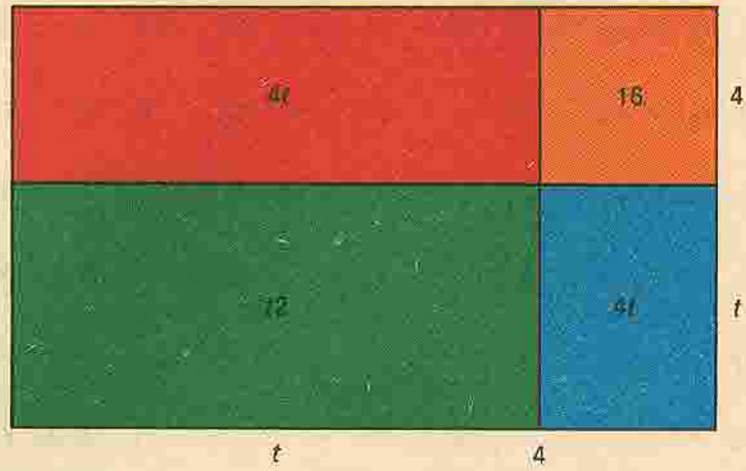
Esto puede ilustrarse con la siguiente figura:



f) $(t + 4)^2 = (t + 4)\,(t + 4) = (t + 4)\,t + (t + 4)\,4 =$

$$= tt + 4t + 4t + 16 = t^2 + 8t + 16.$$

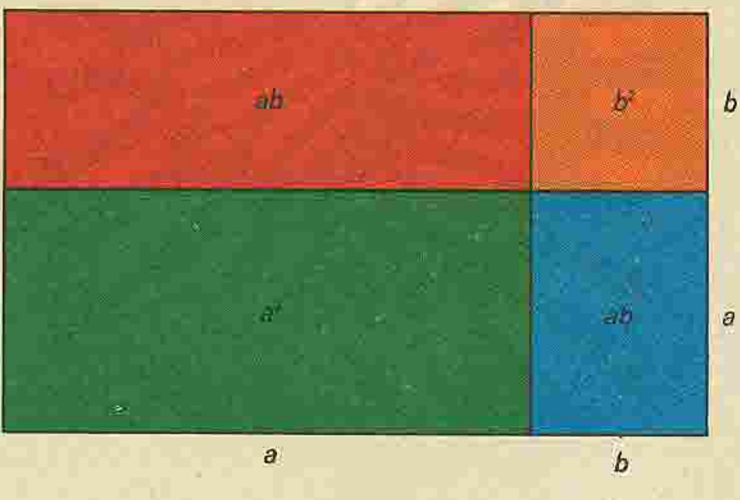
Esto puede ilustrarse con la siguiente figura:



g) $(a + b)^2 = (a + b)\,(a + b) = (a + b)\,a + (a + b)\,b =$

$$= aa + ab + ab + bb = a^2 + 2ab + b^2.$$

Esto puede ilustrarse con la siguiente figura:



Ejercicio 54. Efectúe las siguientes multiplicaciones aplicando la propiedad distributiva. Las letras representan números naturales o cero.

a) $(a + 2)\ (b + 8)$

b) $(b + 9)\ (d + 4)$

c) $(5 + a)\ (b + 1)$

d) $(x + 10)\ (y + 7)$

e) $(z + 1)\ (2 + w)$

f) $(p + 3)\ (q + 4)$

g) $(6 + r)\ (s + 2)$

h) $(d + f)\ (p + 12)$

i) $(a + 4)\ (a + 5)$

j) $(y + 7)\ (y + 4)$

k) $(z + 9)\ (z + 1)$

l) $(y + 1)\ (y + 4)$

m) $(x + a)\ (x + b)$

n) $(p + 4)\ (p + 10)$

o) $(t + 3)\ (t + 3)$

p) $(a + 5)\ (a + 5)$

q) $(n + y)\ (n + y)$

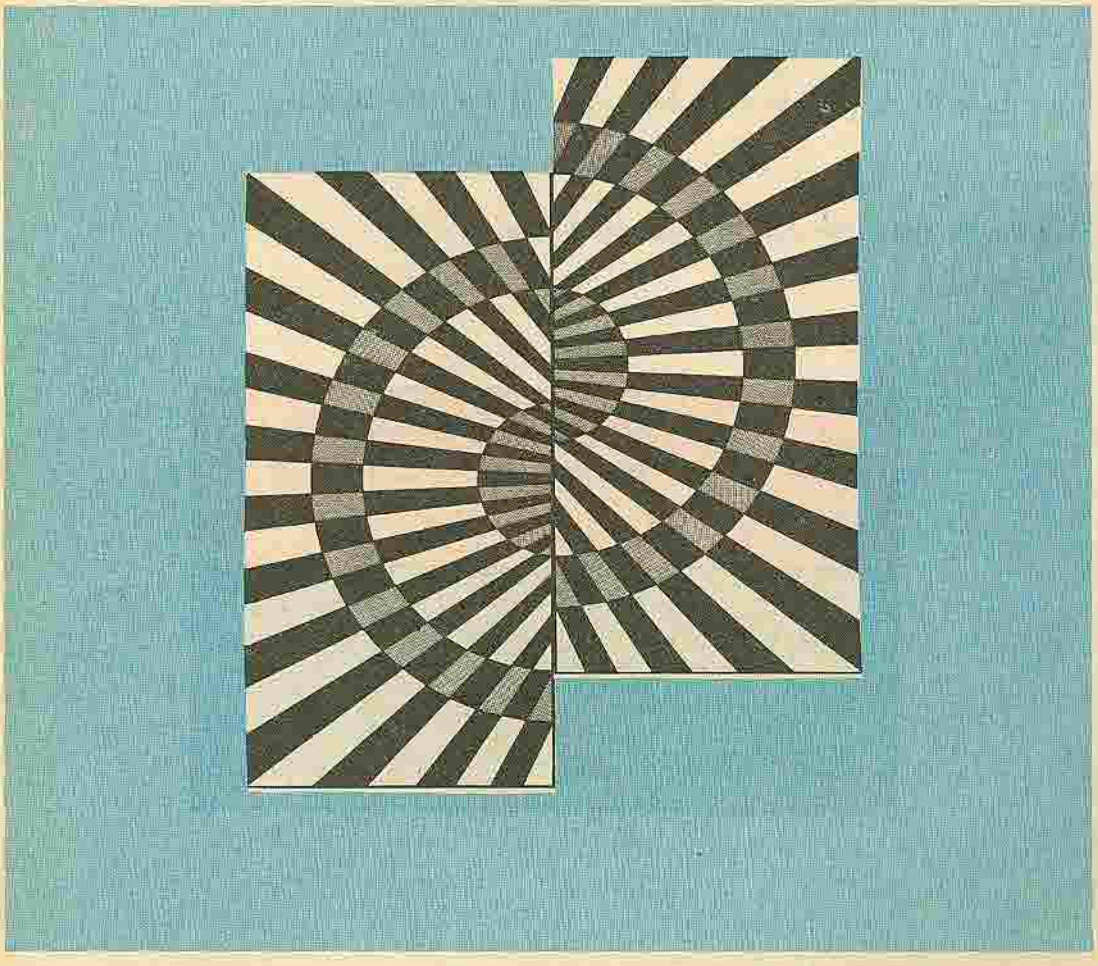
r) $(x + 9)\ (x + 9)$

s) $(q + 7)^2 = (q + 7)\ (q + 7) =$

t) $(z + 8)^2 =$

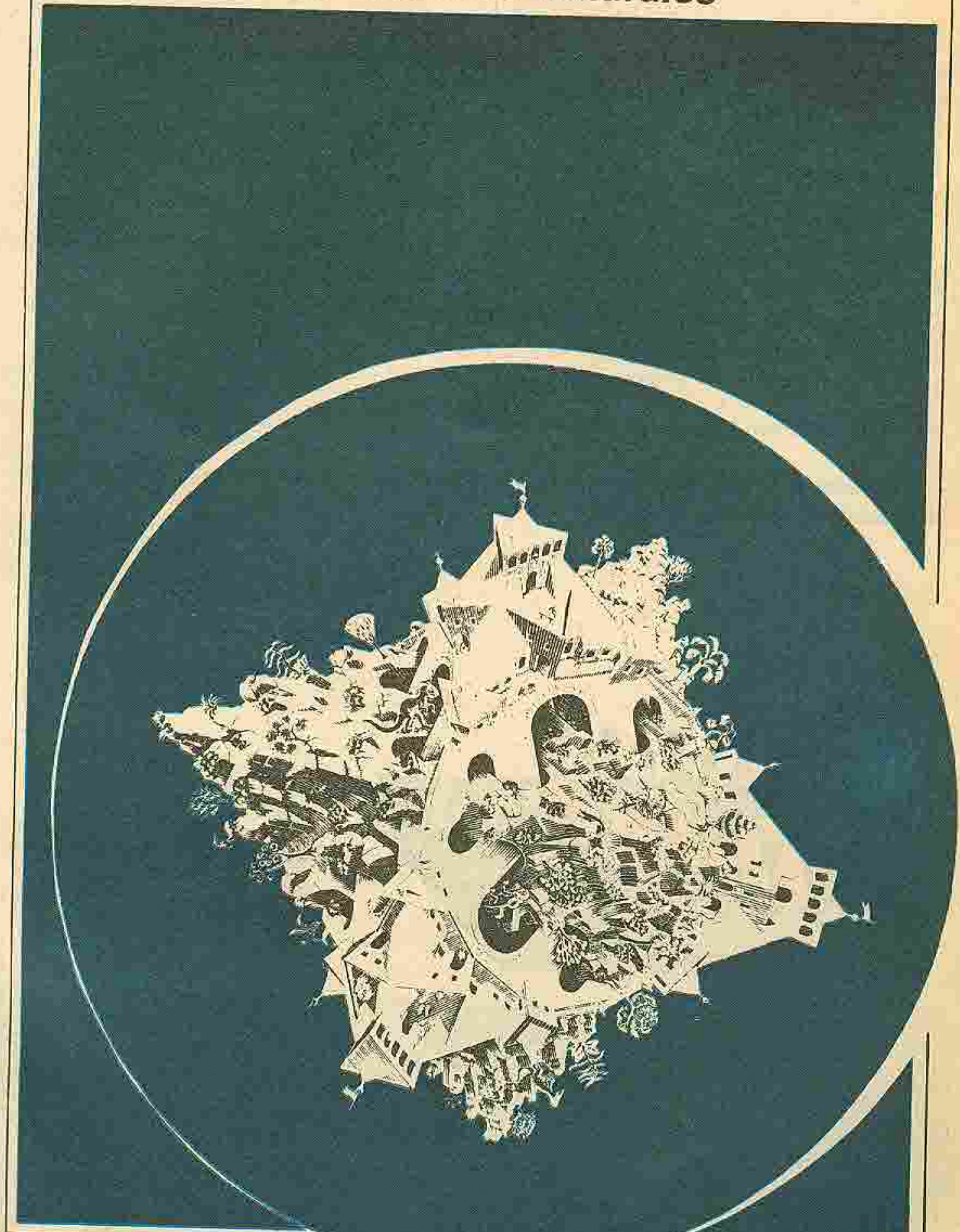
u) $(y + 9)^2 =$

v) $(x + y)^2 =$



IV

Sustracción de números naturales



1. La sustracción

En la escuela primaria, al considerar expresiones como 24 − 8 = 16, o como

$$\begin{array}{r} 24 \\ -\ 8 \\ \hline 16 \end{array}$$

se dijo que indican una sustracción. Los números que aparecen en una sustracción se nombran de la siguiente manera:

24	—	8	=	16
minuendo		*sustraendo*		*resta o diferencia*

24	*minuendo*
— 8	*sustraendo*
16	*resta o diferencia*

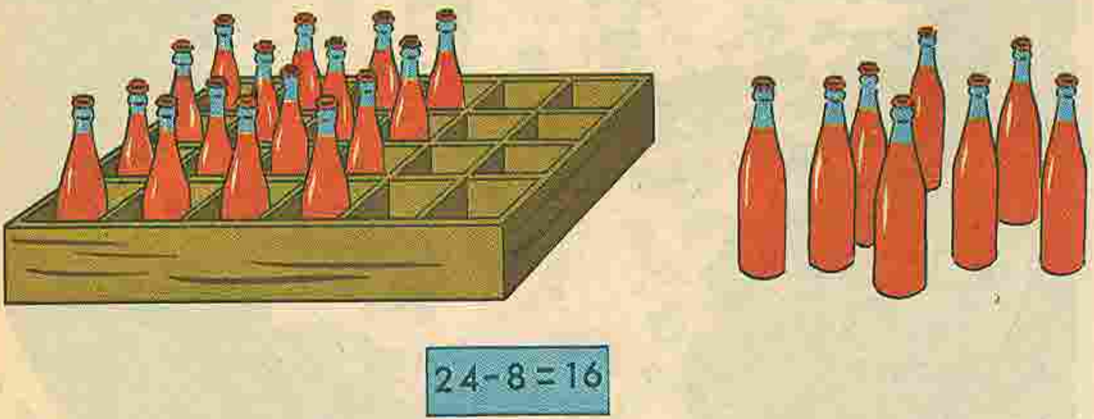
Cuando "efectuábamos una sustracción" se nos daba el minuendo y el sustraendo y buscábamos, con el procedimiento que todos sabemos, la resta o diferencia.

La sustracción nos sirve para resolver algunos problemas. Por ejemplo, si consideramos nuestra expresión inicial,

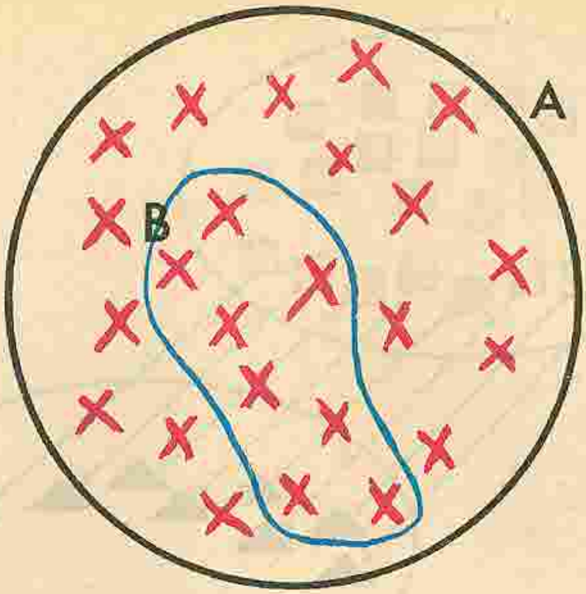
$$24 - 8 = 16$$

podemos resolver los siguientes problemas.

Problema 1. Para una fiesta se compra una caja con 24 refrescos. Si se reparten 8, ¿cuántos refrescos quedan?

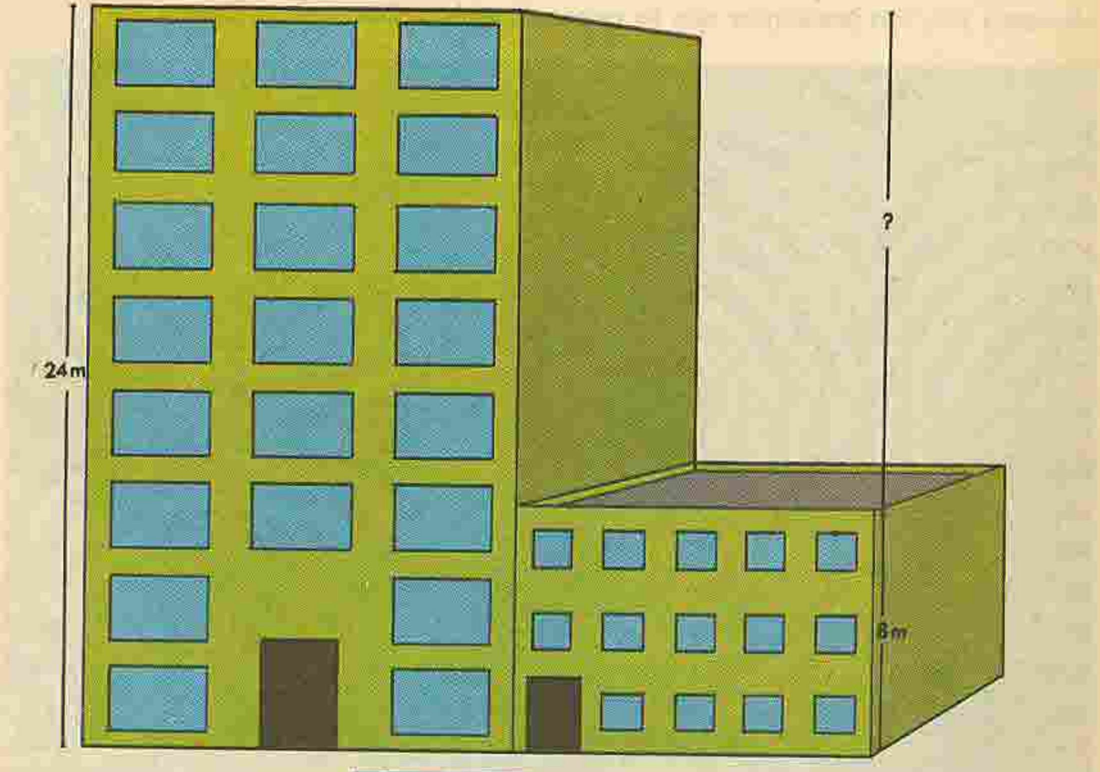


Problema 2. ¿Cuál es el número de elementos del conjunto *A* que no pertenecen al subconjunto *B*?



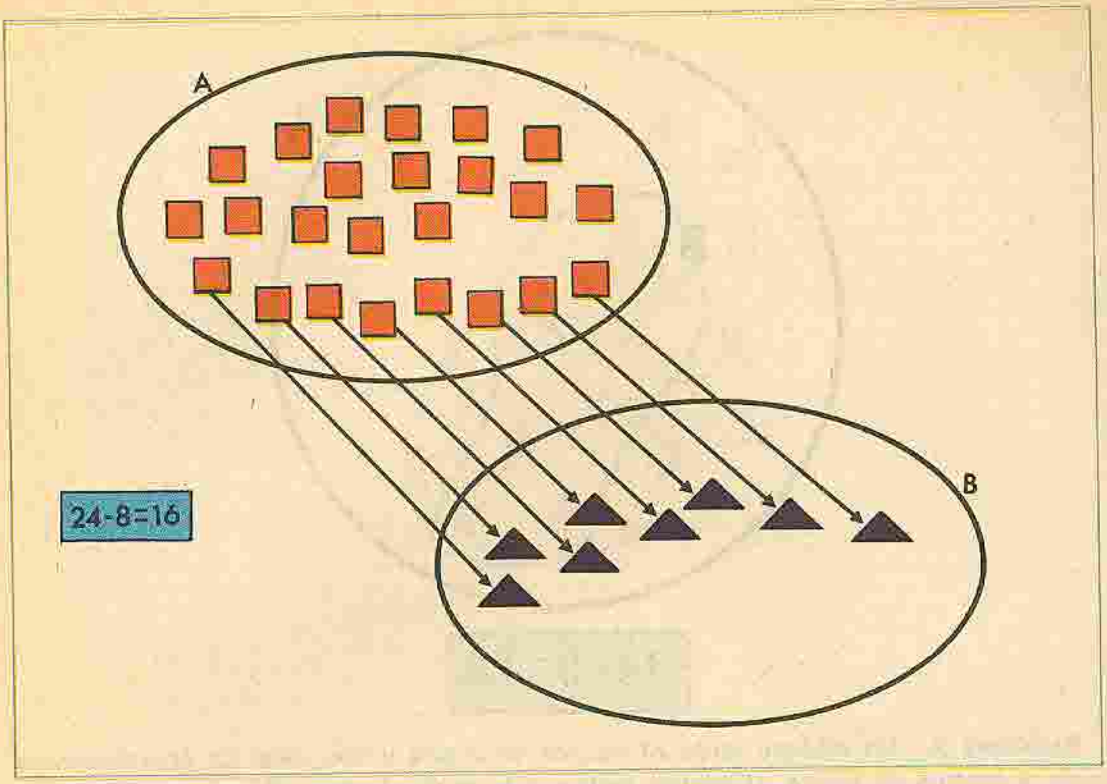
24-8=16

Problema 3. Un edificio mide 24 metros de altura y una casa de apartamientos mide 8 metros de altura. ¿Cuántos metros más mide el edificio?

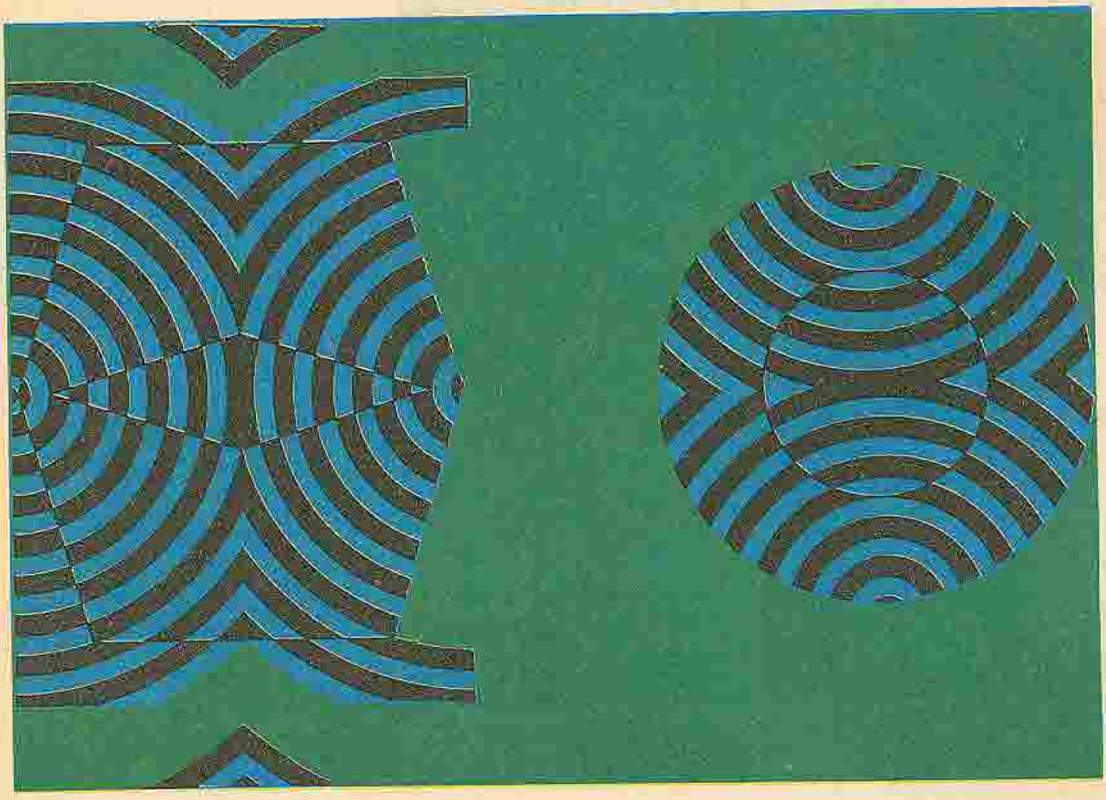


24-8=16

Problema 4. ¿Cuántos elementos más tiene el conjunto *A* que el conjunto *B*?

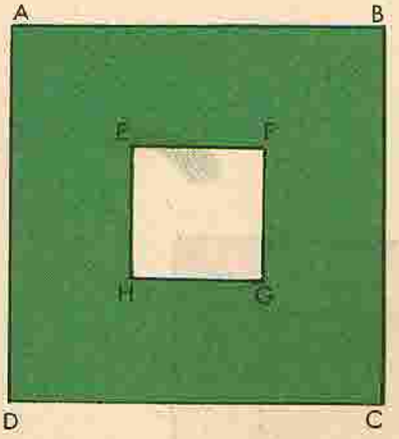


Problemas de "quitar", como los problemas 1 y 2, y de "comparar", como los problemas 3 y 4, son problemas que se pueden resolver con sustracciones.

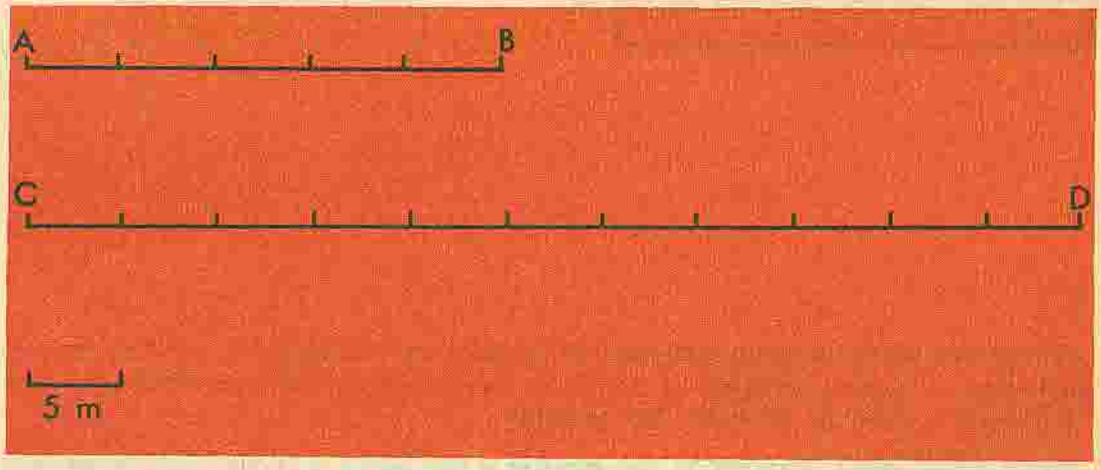


2. Problemas

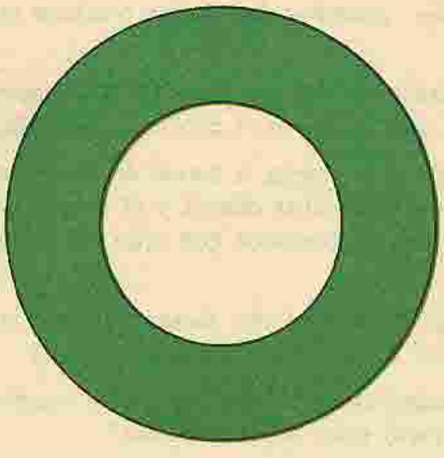
a) El cuadrado *ABCD* tiene un área de 225 unidades cuadradas y el cuadrado *EFGH* tiene un área de 121 unidades cuadradas. ¿Cuál es el área de la región verde?



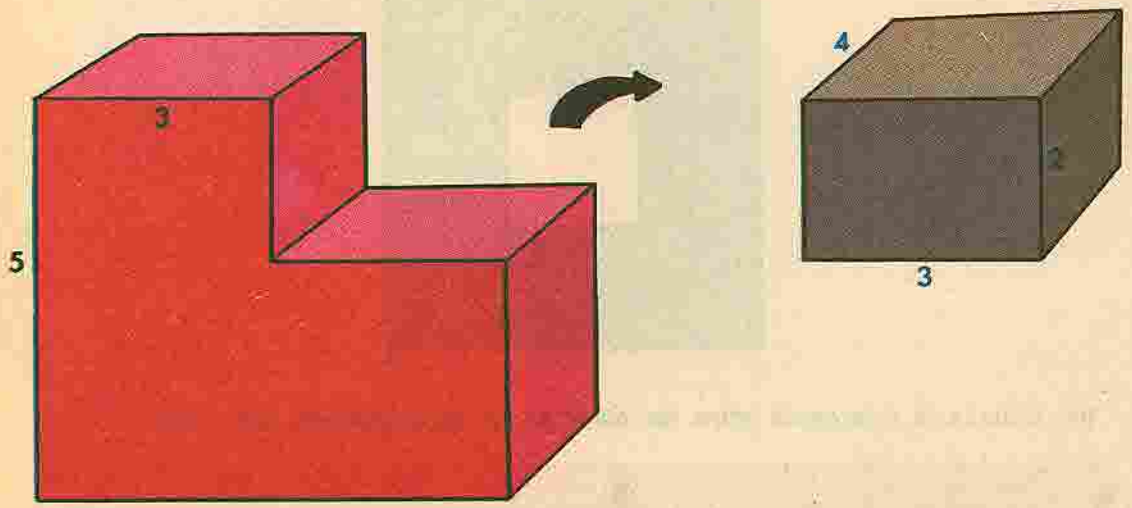
b) Calcule la diferencia entre las medidas de los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$.



c) El círculo exterior tiene 489 metros cuadrados de área. El círculo interior tiene un área de 210 metros cuadrados. ¿Cuál es el área de la región verde?



d) Calcule el volumen de la figura roja (la unidad de medida usada es el metro).



e) De una pieza de acero que pesa 343 gramos se va a hacer un tornillo. Después de tornear la pieza y construir el tornillo se observa que el material desechado pesa 58 gramos. ¿Cuál es el peso del tornillo?

f) La Edad Media comprende del año 476 al año 1453 y la Época Moderna de 1453 a 1789. ¿Cuántos años más duró la Edad Media que la Época Moderna?

g) Una fábrica produce 53 875 bombillas eléctricas por día. Si de ellas se encuentran 1 653 defectuosas, ¿cuántas bombillas produce la fábrica diariamente para la venta?

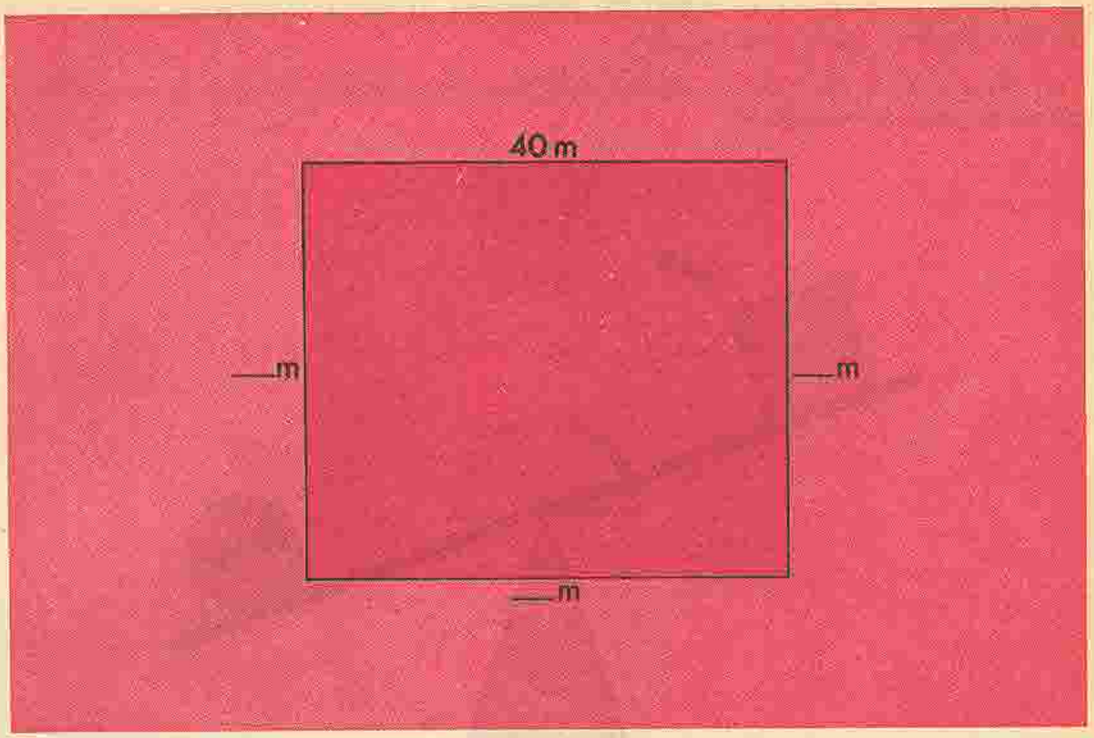
h) La población de Suiza en 1968 era de 6 147 000 habitantes y de ellos 307 431 eran católicos. ¿Cuántos suizos no eran católicos en 1968?

i) Del total de pollos de una granja, a causa de una epidemia murieron 5 durante un día. Al día siguiente murieron otros cuatro y al tercer día murieron 12. Al contar los pollos que se salvaron encontraron que eran 45. ¿Cuántos pollos había al principio?

j) Una señora que pesa 72 kilogramos desea reducir su peso a lo normal, que es 60 kilogramos. ¿Cuántos kilogramos necesita reducir?

k) El gran pintor mexicano Diego Rivera, de fama mundial, nació en 1886 y murió en 1957. ¿Cuántos años vivió este notable pintor?

l) El perímetro de la siguiente figura rectangular es de 150 metros. Complete



m) En 1968 México importó productos por valor de 1 943 millones de dólares y exportó mercancías por 1 254 millones de dólares. ¿Cuántos millones de dólares de diferencia hay entre la importación y la exportación de ese año?

n) En 1969 México recuperó el primer lugar como productor mundial de plata. La producción de ese metal en ese año fue de 1 334 toneladas. Si en 1968 fue de 1 245, ¿en cuántas toneladas se incrementó la producción de plata de 1968 a 1969?

o) Nuestro Sol es una estrella roja y Rigel es una estrella blanca. El color de las estrellas lo determina la temperatura de su superficie. Si el Sol tiene 5 530 grados centígrados de temperatura en su superficie y Rigel tiene en su superficie 6 770 grados centígrados más que el Sol, ¿cuál es la temperatura superficial de Rigel?

p) La cima del monte Everest, la montaña más alta del mundo, está a 8 848 metros sobre el nivel del mar. La cima del Popocatépetl está a 5 542 metros del nivel del mar. ¿Cuántos metros es más alto el Everest que el Popocatépetl?

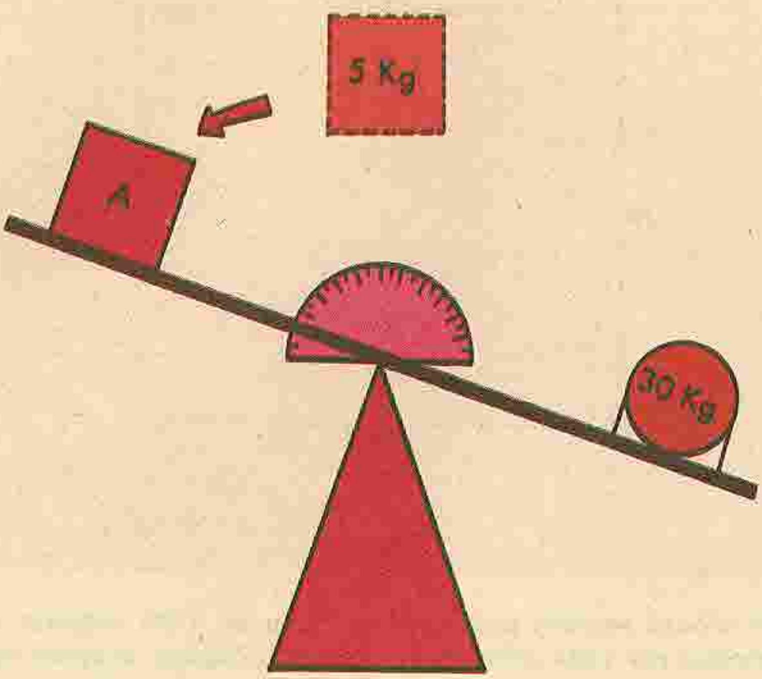
q) El Nilo es el río más largo del mundo y tiene una longitud de 6 450 kilómetros. Nuestro río Bravo tiene una longitud de 2 912 kilómetros. ¿Cuántos kilómetros es menor el río Bravo que el río Nilo?

r) La Tierra, nuestro planeta, ha durado miles de millones de años. Su historia se ha dividido en eras o edades geológicas. La Edad Paleozoica o Primaria se considera desde hace 600 millones de años hasta hace 220 millones de años. La Edad Secundaria o Mesozoica se considera desde hace 220 millones de años hasta hace 70 millones de años. ¿Cuántos años duró la Edad Primaria? ¿Cuántos duró la Era Secundaria? ¿Cuántos años más duró una que la otra?

s) En 1970 la U.R.S.S. tenía 242 770 000 habitantes y EE. UU. tenía 206 511 000 habitantes. ¿Cuántos habitantes tenía más la U.R.S.S. que Estados Unidos en 1970?

t) En esta década llegaron por primera vez máquinas terrestres a Venus y Marte. La distancia de nuestra Tierra a Marte es de 54 700 000 kilómetros y la distancia de la Tierra a Venus es de 38 600 000 kilómetros. ¿Cuántos kilómetros está más lejos de nosotros Marte que Venus?

u) La siguiente balanza se puede equilibrar si se agrega el peso que se indica. ¿Cuánto pesa el cuerpo *A*?

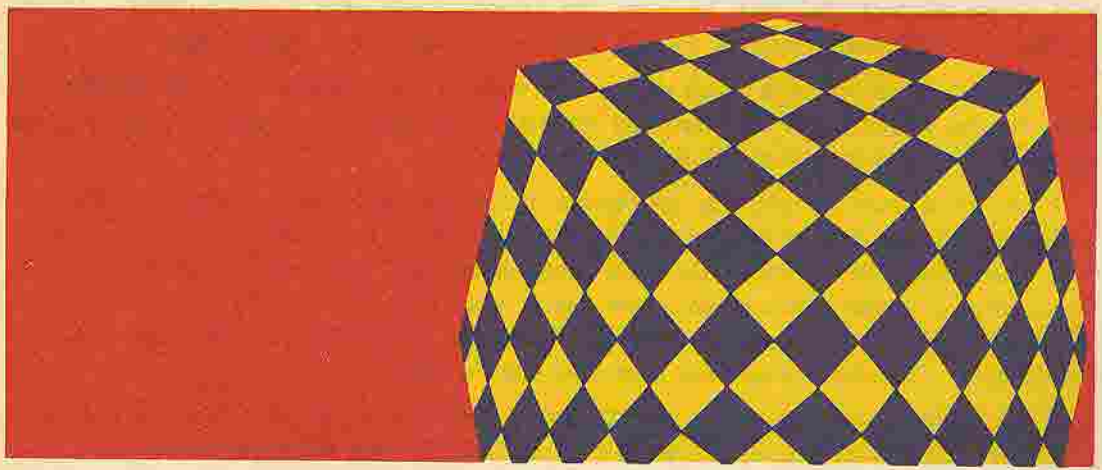


v) Busque la diferencia entre los pesos de 2 estatuas hechas de dos sustancias diferentes. Se sabe que la primera tiene un peso específico de 5 y ocupa un volumen de 53 decímetros cúbicos y la otra tiene un peso específico de 3 y ocupa un volumen de 85 decímetros cúbicos.

Ejercicio 1. Invente 2 problemas de "quitar" y 2 problemas de "comparar" que se resuelvan con las siguientes sustracciones.

a) 6 — 4 = 2

b) 65 — 18 = 47



3. La sustracción y las ecuaciones

Una tercera forma de utilizar la sustracción se presenta al resolver ecuaciones. Por ejemplo, consideremos la ecuación.

$$\boxed{} + 8 = 24.$$

Hemos encontrado mentalmente la solución pensando en el número que sumado con 8 nos da 24. (Solución: 16.) Sin embargo, podríamos también encontrar dicha solución observando que el sumando que falta se obtiene así:

$$24 - 8 = 16.$$

Este procedimiento es útil cuando las ecuaciones que deseamos manejar no se pueden resolver mentalmente. Por ejemplo,

a) $625 + \boxed{} = 13\,825.$

Resolución. $13\,825 - 625 = \boxed{13\,200}$

Comprobación. $625 + \boxed{13\,200} = 13\,825.$

b) $x + 1\,123 = 1\,872$

Resolución. $1\,872 - 1\,123 = 749;$ $\boxed{x = 749}$

Comprobación. $\boxed{749} + 1\,123 = 1\,872.$

c) $725 + m = 1\,029.$

Resolución. $1\,029 - 725 = 304;$ $\boxed{m = 304}$

Comprobación. $725 + \boxed{304} = 1\,029$

Ejercicio 2. Resuelva con una sustracción cada una de las siguientes ecuaciones. (Compruebe si las soluciones son correctas.)

a) $\boxed{} + 437 = 1\,286$

b) $285 + \boxed{} = 385$

c) $\boxed{} + 1\,236 = 4\,827$

d) $3\,697 + \boxed{} = 6\,432$

e) $x + 137 = 242$

$x =$ ________

f) $m + 735 = 6\,092$

$m =$ ________

g) $3\,027 + z = 10\,786$

$z =$ ________

h) $3\,097 + r = 7\,936$

$r =$ ________

i) $8\,092 + n = 10\,973$

$n =$ ________

j) $385 + p = 60\,901$

$p =$ ________

k) $50 + x = 5$

l) $1 + \boxed{} = 0$

Al manejar las sustracciones seguramente usted ya observó una propiedad muy importante entre los números que las forman:

La suma de la resta y el sustraendo es igual al minuendo.

Ejemplo.

a)	80	—	25	=	55	55	+	25	=	80
	minuendo		*sustraendo*		*resta*	*resta*		*sustraendo*		*minuendo*
b)	13 285	—	625	=	12 660	12 660	+	625	=	13 285
	minuendo		*sustraendo*		*resta*	*resta*		*sustraendo*		*minuendo*

Esta propiedad es la que usted usaba en la escuela primaria para comprobar si una sustración estaba bien efectuada. Por ejemplo,

1 834		
— 675	sumando el sustraendo	675
		+
+ 1 159	con la diferencia	1 159
1 834	se obtiene el minuendo	1 834

Ejercicio 3. Compruebe usted si las siguientes sustracciones están bien efectuadas o no. Tache las que estén mal.

a)
$$\begin{array}{rcccc} & 2 & 7 & 2 & 8 \\ - & 1 & 3 & 4 & 5 \\ \hline & 1 & 3 & 8 & 3 \\ \hline \end{array}$$

— — — —

b)
$$\begin{array}{rcccc} & 5 & 6 & 9 & 1 \\ - & 4 & 6 & 8 & 5 \\ \hline & & 9 & 0 & 6 \\ \hline \end{array}$$

— — — —

c)
$$\begin{array}{rcccc} & 4 & 8 & 9 & 6 \\ - & 2 & 7 & 4 & 9 \\ \hline & 1 & 1 & 4 & 7 \\ \hline \end{array}$$

— — — —

d)
$$\begin{array}{rcccc} & 7 & 3 & 4 & 8 \\ - & 1 & 6 & 8 & 7 \\ \hline & 6 & 6 & 6 & 1 \\ \hline \end{array}$$

— — — —

e)
$$\begin{array}{rcccc} & 6 & 3 & 9 & 2 \\ - & 3 & 7 & 9 & 6 \\ \hline & 2 & 5 & 9 & 6 \\ \hline \end{array}$$

— — — —

f)
$$\begin{array}{rccccc} & 2 & 7 & 4 & 3 & 9 \\ - & & 9 & 8 & 5 & 2 \\ \hline & 1 & 7 & 5 & 8 & 7 \\ \hline \end{array}$$

— — — — —

Lo anterior ilustra que

La resta es el número que sumado con el sustraendo da el minuendo.

Esta propiedad de la resta será utilizada posteriormente en nuestro estudio. Téngala usted presente.

Ejercicio 4. En las siguientes sustracciones faltan algunas cifras. Anótelas en los cuadritos.

a)
$$\begin{array}{r} 2\ \square\ 5\ \square \\ -\ 2\ 4\ \square\ 1 \\ \hline \square\ 2\ 8\ 2 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{r} \square\ \square\ 5\ 7\ 8 \\ -\ 3\ 9\ 7\ \square\ \square \\ \hline \square\ 7\ \square\ 8\ 9 \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{r} \square\ 7\ 0\ 8\ \square \\ -\ 1\ \square\ 1\ 9\ 3 \\ \hline 2\ 6\ \square\ \square\ 2 \end{array}$$

d)
$$\begin{array}{r} 3\ 0\ \square\ \square\ 0 \\ -\ \square\ \square\ 9\ 5\ 7 \\ \hline \square\ 9\ 1\ 2\ \square \end{array}$$

Si a y b son números naturales o cero, para indicar que al número a se le resta el número b, escribimos

$$a - b$$

(Léase: "a menos b")

Así, si $a = 8$ y $b = 2$, entonces $a - b$ es igual a $8 - 2$, o sea 6;
si $a = 15$ y $b = 10$, entonces $a - b = 15 - 10 = 5$;
si $a = 1$ y $b = 0$, entonces $a - b = 1 - 0 = 1$.

Ejercicio 5. Encuentre el valor de la expresión $m - n$ para los valores que se indican.

a) $m = 42$, $n = 17$
b) $m = 183$, $n = 182$
c) $m = 1024$, $n = 785$
d) $m = 825$, $n = 123$
e) $m = 10$, $n = 10$
f) $m = 72$, $n = 72$
g) $m = 12$, $n = 0$
h) $m = 85$, $n = 0$
i) $m = 0$, $n = 0$
j) $m = 1$, $n = 1$
k) $m = 70$, $n = 80$
l) $m = 0$, $n = 1$

En el ejercicio anterior habrá usted observado que para las expresiones $30 - 60$, $70 - 80$ y $0 - 1$ no existen restas que sean números naturales. Además se ve que en esos casos el minuendo es menor que el sustraendo. Esto indica que para "efectuar una sustracción" con números naturales es necesario que el minuendo sea mayor que el sustraendo. Es decir,

Si a y b son números naturales, el número que obtenemos al restar $a - b$ es un número natural solamente si a es mayor que b.

Desde luego, si a un número x le restamos el mismo x, el resultado es cero. Es decir,

$$x - x = 0$$

Ejercicio 6. Resuelva las siguientes ecuaciones.

a) $\square - 4 = 8$

b) $\square - 10 = 30$

c) $\square - 10 = 10$

d) $8 - \square = 4$

e) $12 - \square = 5$

f) $10 - \square = 10$

g) $x - 7 = 12$

$x =$ ____

h) $m - 17 = 3$

$m =$ ____

i) $y - 20 = 0$

$y =$ ____

j) $n - 15 = 0$

$n =$ ____

k) $p - 0 = 30$

$p =$ ____

l) $r - 0 = 100$

$r =$ ____

m) $100 - t = 50$

$t =$ ____

n) $1000 - m = 1000$

$m =$ ____

o) $595 - v = 594$

$v =$ ____

p) $125 - z = 0$

$z =$ ____

q) $f - 0 = 0$

$f =$ ____

r) $8 - g = 16$

$g =$ ____

Ejercicio 7. Calcule el valor de las siguientes expresiones si $a = 3$, $b = 2$, $c = 4$

a) $a - b =$

b) $c - b =$

c) $2a - 5 =$

d) $5b - 10 =$

e) $3b - a =$

f) $2c - 2b =$

g) $4a - 2c =$

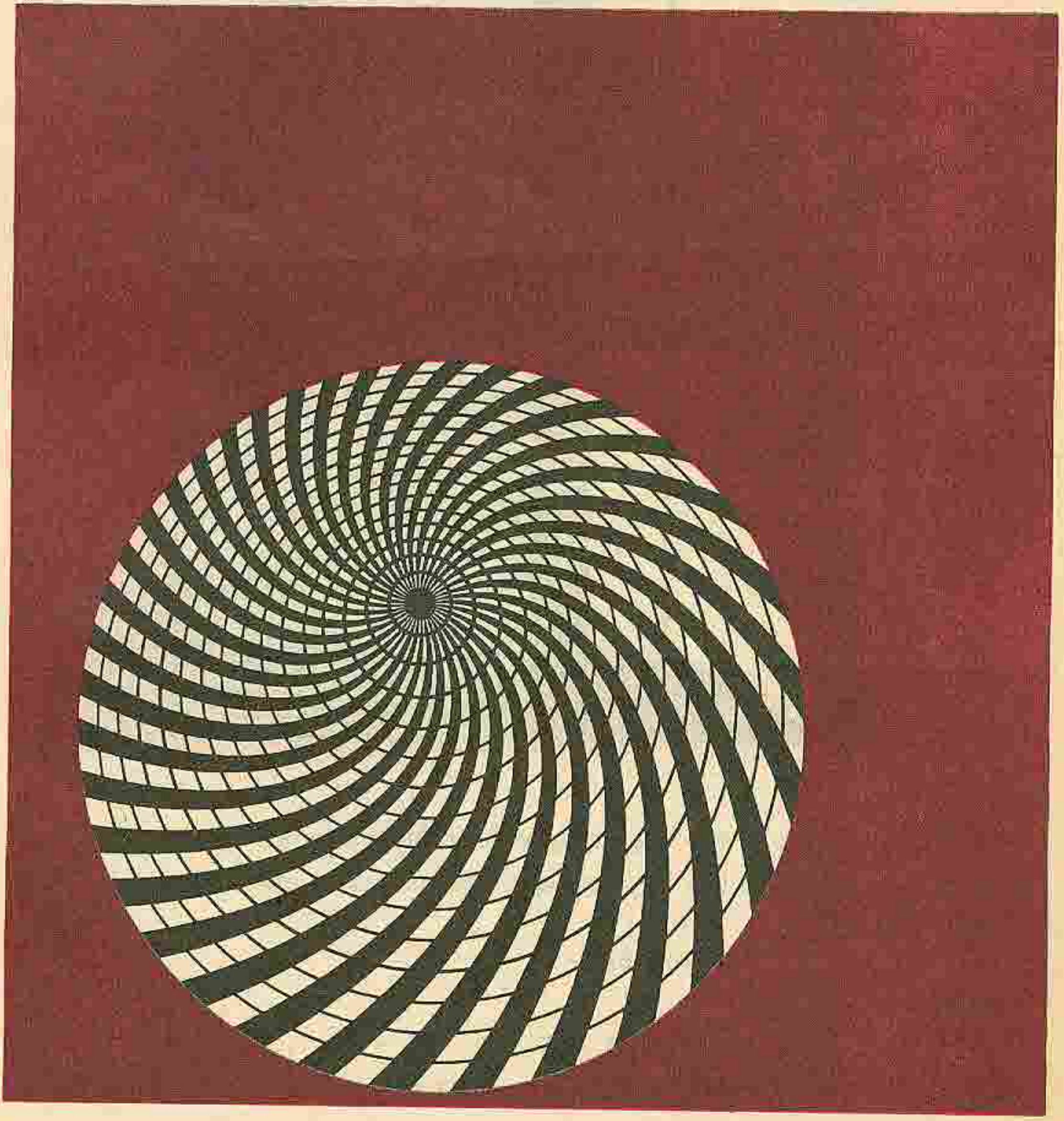
h) $a^2 - b =$

i) $b^3 - a =$

j) $2a^2 - b =$

k) $a^2 - b^2 =$

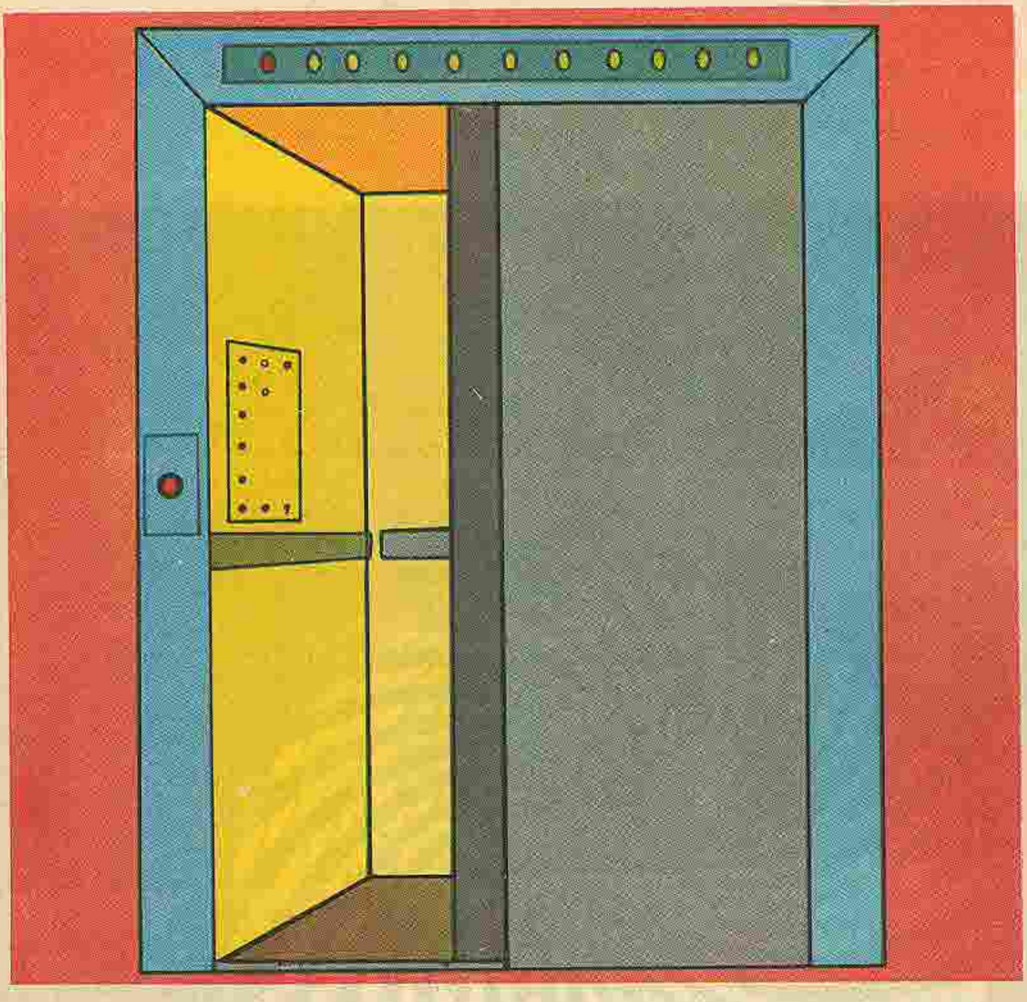
l) $c^2 - 3b^2 =$



4. Las expresiones $(a + b) - b$ y $(a - b) + b$

A continuación vamos a considerar algunos problemas cuyo planteamiento y resolución nos serán de gran utilidad en el estudio de las ecuaciones.

Problema. Un elevador se encuentra en el cuarto piso de un edificio. Si sube cinco pisos y después baja cinco pisos, ¿en qué piso se encuentra el elevador al final?



Resolución. El piso al que llega el elevador cuando sube se calcula así: $4 + 5$.

Para calcular el piso a que llega al bajar, restamos 5 al resultado anterior. Esto lo expresamos así:

$$(4 + 5) - 5.$$

Esto es,

$$(4 + 5) - 5 = 9 - 5 = 4.$$

La solución es 4. Es decir, el elevador quedó en el mismo piso de donde partió.

Problema. Un día en la mañana, el termómetro registró una temperatura de 16 grados centígrados. En la tarde la temperatura se elevó 9 grados con respecto a la temperatura de la mañana y en la noche el termómetro indicó que había bajado 9 grados con respecto a la temperatura de la tarde. ¿Cuál fue la temperatura que marcó el termómetro esa noche?

Resolución.

Temperatura de la mañana : 16

Temperatura de la tarde : 16 + 9

Temperatura de la noche : (16 + 9) − 9

(16 + 9) — 9 = 25 — 9 = 16.

Respuesta. Esa noche el termómetro marcó la misma temperatura que en la mañana.

Problema. Una señora que pesa 73 kilogramos se pone a dieta y reduce 12 kilogramos de peso. Por desgracia, la señora abandonó la dieta y aumentó 12 kilogramos de peso. ¿Cuál fue su peso al final?

Resolución.

Peso inicial : $\boxed{73}$ (kilogramos)

Peso al reducir : $\boxed{73 - 12}$ (kilogramos)

Peso al engordar : $\boxed{(73 - 12) + 12}$ (kilogramos)

(73 — 12) + 12 = 61 + 12 = 73.

Respuesta. La señora quedó con el mismo peso con que empezó.

Problema. Un obrero tiene un sueldo de $500.00 semanales y en la caja de ahorros le descuentan $80.00. Si en una semana gana por horas extras $80.00, ¿cuánto recibe de sueldo esa semana?

Resolución.

Sueldo del obrero : $\boxed{500}$ (pesos)

Sueldo menos descuento : $\boxed{500 - 80}$ (pesos)

Sueldo descontado más horas extras : $\boxed{(500 - 80) + 80}$ (pesos.)

(500 — 80) + 80 = 420 + 80 = 500.

Respuesta. Esa semana el obrero recibió su sueldo completo.

Ejercicio 8. Simplifique las siguientes expresiones, como se muestra en los incisos a) y b).

a) (7 + 12) − 12 = $\boxed{19 - 12 = 7}$

b) (19 − 5) + 5 = $\boxed{14 + 5 = 19}$

c) (23 + 9) − 9 = ____________

d) (57 + 18) − 18 = ____________

e) (67 − 26) + 26 = ____________

f) (43 − 29) + 29 = ____________

Los problemas y ejercicios anteriores nos ilustran dos hechos importantes: Si a un número *a* le sumamos un número *b* y a esa suma le restamos el mismo número *b* el resultado es el número *a*.

En símbolos,

Si *a* y *b* son números naturales, o cero, $(a + b) - b = a$.

Por otra parte, si a un número *a* le restamos un número *b* y a esa diferencia le sumamos el mismo número *b*, el resultado es el número *a*.

En símbolos,

Si *a* y *b* son números naturales, o cero, $(a - b) + b = a$.

Recuerde que, en este último caso, para poder efectuar la sustracción $a - b$ es necesario que *a* sea mayor o igual que *b*.

Ejercicio 9. Aplique las propiedades anteriores para simplificar las siguientes expresiones. Las letras indican números naturales.

a) $(23 + 5) - 5 =$

b) $(46 - 18) + 18 =$

c) $(4\,728 - 694) + 694 =$

d) $(p + 46) - 46 =$

e) $(q - 18) + 18 =$

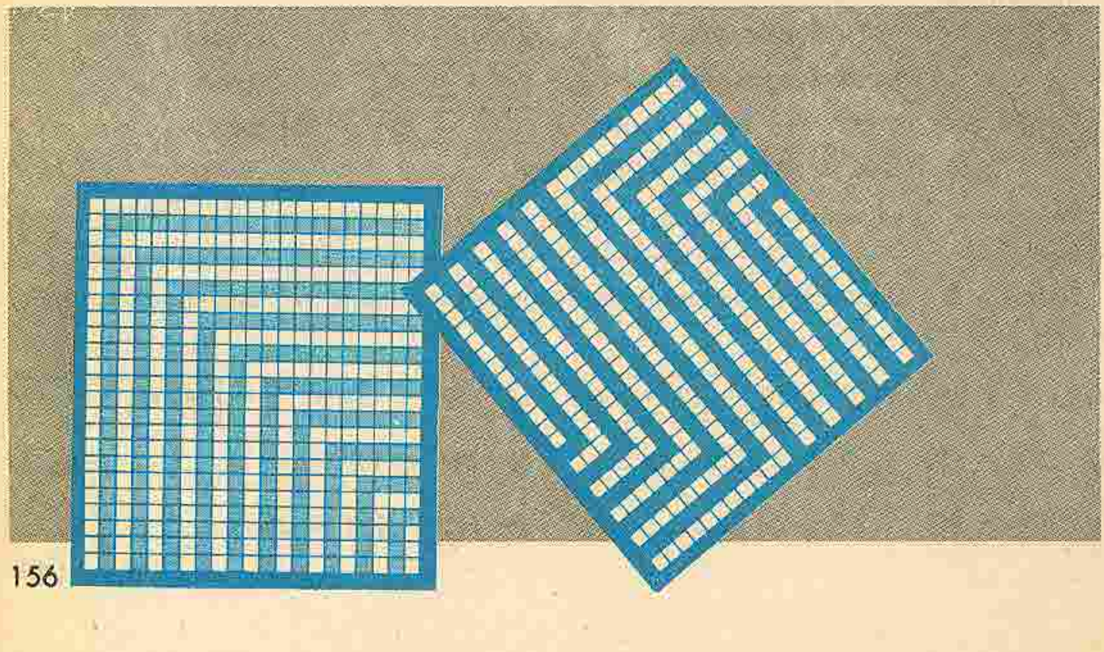
f) $(x + 93) - 93 =$

g) $(a - 29) + 29 =$

h) $(14 + q) - q =$

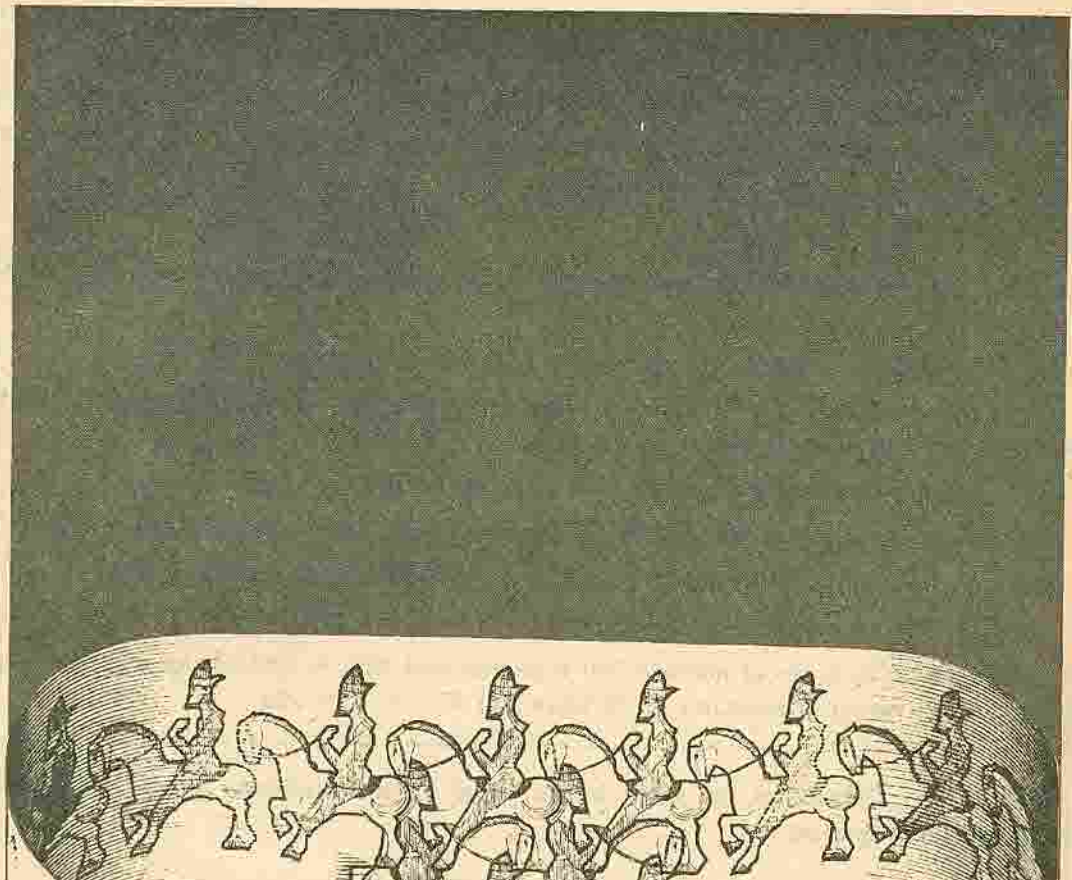
i) $(16 - p) + p =$

j) $(x + a) - a =$



V

Ecuaciones



1. Resolución de ecuaciones

Hasta el momento hemos trabajado con ecuaciones muy simples, cuya solución hemos podido encontrar mentalmente. Sin embargo, hay ecuaciones en las que no es fácil hacer esto. Por ejemplo, ¿cuál es la solución de las ecuaciones $x + 4\,726 = 5\,621$ y $2\,538 + x = 3\,443$?

A continuación estudiaremos un procedimiento que nos permitirá calcular, en lugar de adivinar, la solución de ecuaciones como las anteriores.

Antes que nada vamos a insistir un poco en la idea de **solución de una ecuación.**

a) ¿Cómo sabemos si 18 es o no la solución de la ecuación $\boxed{} + 57 = 75$?

Escribimos 18 en la casilla y vemos que

$$\boxed{18} + 57 = 75.$$

18 **sí** es la solución de la ecuación porque es el número que sumado con 57 nos da 75.

b) ¿Es 748 la solución de la ecuación $x + 273 = 1\,021$?

Si sustituimos la x por el número 748 vemos que 748 + 273 es igual a 1 021. Por lo tanto, 748 **sí** es solución de la ecuación $x + 273 = 1\,021$.

c) ¿Es 298 solución de la ecuación $a + 467 = 675$?

Al sustituir la a por el número 298 encontramos que 298 + 467 es igual a 765.

Por consiguiente, 298 **no** es la solución de la ecuación $a + 467 = 675$.

d) ¿Es 290 la solución de la ecuación $576 - b = 292$?

Sustituyendo la b por el número 290 tenemos que 576 − 290 es igual a 286. Por lo tanto, 290 **no** es la solución de la ecuación $576 - b = 292$.

Ejercicio 1. Determine, en cada inciso, si el número indicado es solución o no de la ecuación que se da.

a) 14	$x + 23 = 35$
b) 29	$57 + b = 86$
c) 56	$y - 17 = 29$
d) 274	$215 = a - 59$
e) 187	$p - 39 = 127$
f) 475	$841 = 1\,326 - n$
g) 162	$145 = t - 17$
h) 286	$r + 139 = 525$
i) 2 893	$275 + d = 2\,868$
j) 598	$2\,396 = h + 1\,798$

Ejercicio 2. ¿Es 27 la solución de cada una de las siguientes ecuaciones? Compruébelo en cada inciso y complete la expresión.

a) $x + 39 = 66$.

27 sí es solución porque 27 + 39 sí es igual a 66.

b) $y - 10 = 15$.

27 no es solución porque 27 − 10 no es igual a 15.

c) $475 + g = 500$.

27__ es solución porque 475 + 27 ___ es igual a 500.

d) $69 = 96 - r$.

27__ es solución porque 69 ___ es igual a 96 − 27.

e) $298 = 271 + t$.

27__ es solución porque 298 ___ es igual a 271 + 27.

Observamos aquí que un mismo número puede ser solución de varias ecuaciones diferentes, como sucede en los incisos a), d) y e) del ejercicio anterior.

Con el fin de dar unidad al procedimiento para resolver ecuaciones, que veremos más adelante, consideraremos que expresiones como

$$x = 5, \quad y = 8, \quad r = 112, \quad m = 40, \quad \text{etc.}$$

son también ecuaciones. La solución de cada una de ellas es obvia. Por ejemplo, la solución de $x = 5$ es 5; la solución de $y = 8$ es 8; etc. 7 no es solución de $x = 5$; 60 no es solución de $y = 8$; etc.

Problema. Juanito resolvió las siguientes ecuaciones y encontró que todas tienen la misma solución. ¿Cuál es esa solución?

$$x + 2\,458 = 2\,494$$

$$x + 25 = 61$$

$$x + 1\,389 = 1\,425$$

$$x = 36$$

$$x + 1\,040 = 1\,076$$

Resolución.

Puesto que todas las ecuaciones tienen la misma solución, si resolvemos cualquiera de ellas habremos resuelto el problema.

Por economía de esfuerzo conviene resolver la más simple, $x = 36$, donde se ve obviamente que la solución es 36. Entonces, la solución de todas esas ecuaciones es el número 36. (Verifíquelo usted.)

El problema anterior nos ilustra una idea importante:

Si se sabe que varias ecuaciones tienen la misma solución, resolviendo una se resuelven todas. Conviene siempre resolver la más simple.

En las ecuaciones que estamos estudiando vamos a distinguir dos partes: Todo lo que esté a la izquierda del signo = se llamará **primer miembro** de la ecuación y lo que esté a la derecha del signo = recibirá el nombre de **segundo miembro.**

Observemos los siguientes ejemplos:

$$\underset{\textit{primer miembro}}{x + 17} = \underset{\textit{segundo miembro}}{36}$$

$$\underset{\textit{primer miembro}}{78} = \underset{\textit{segundo miembro}}{x - 126}$$

Las ecuaciones tienen algunas propiedades cuyo conocimiento nos ayudará a manejarlas mejor. Una de estas propiedades es la siguiente:

Propiedad 1. Si a los dos miembros de una ecuación se les suma un mismo número, se obtiene otra ecuación; pero ambas ecuaciones tienen la misma solución.

Ejemplo. Consideremos la ecuación $x + 8 = 14$, cuya solución es el número 6.

a) Sumemos un número, por ejemplo 12, a sus dos miembros:

$$(x + 8) + 12 = 14 + 12.$$

Así obtenemos una nueva ecuación cuya solución es también el número 6:

$$\underbrace{(6 + 8) + 12}_{26} = \underbrace{14 + 12}_{26}.$$

b) Sumemos 104 a los dos miembros de nuestra ecuación:

$$(x + 8) + 104 = 14 + 104.$$

Obtenemos así otra ecuación que también tiene como solución el número 6:

$$\underbrace{(6 + 8) + 104}_{118} = \underbrace{14 + 104}_{118}.$$

Ejercicio 3.

a) Dada la ecuación $x + 35 = 226$, cuya solución es 191, sume 30 a sus dos miembros y compruebe que la nueva ecuación obtenida tiene la misma solución.

b) Considere la ecuación $267 + y = 498$, que tiene por solución al número 231. Sume 68 a ambos miembros de dicha ecuación y compruebe que la nueva ecuación que resulta tiene la misma solución.

c) La ecuación $p - 47 = 32$ tiene como solución al número 79. Sume 47 a sus dos miembros y compruebe que la ecuación resultante tiene la misma solución.

Otra propiedad de las ecuaciones es la siguiente:

Propiedad 2. Si a los dos miembros de una ecuación se les resta un mismo número, se obtiene otra ecuación; pero ambas ecuaciones tienen la misma solución.

Es claro que, al estar trabajando con números naturales, esta segunda propiedad sólo puede aplicarse cuando el sustraendo es menor o igual que el minuendo.

Ejemplo. Consideremos la ecuación $x + 8 = 14$, cuya solución es el número 6.

a) Si restamos 3 a sus dos miembros obtenemos la ecuación

$$(x + 8) - 3 = 14 - 3$$

La solución de esta nueva ecuación también es 6.

$$\underbrace{(6 + 8) - 3}_{11} = \underbrace{14 - 3}_{11}$$

b) Si restamos 7 a los dos miembros obtenemos la ecuación

$$(x + 8) - 7 = 14 - 7$$

La solución de esta nueva ecuación también es 6.

$$\underbrace{(6 + 8) - 7}_{7} = \underbrace{14 - 7}_{7}$$

Ejercicio 4.

a) Considere la ecuación $a + 425 = 693$, cuya solución es 268; reste 186 a sus dos miembros y compruebe que la ecuación resultante tiene la misma solución.

b) Considere la ecuación $x + 75 = 98$, cuya solución es 23. Reste 50 a ambos miembros de la ecuación y compruebe que la ecuación resultante tiene la misma solución.

Hagamos un resumen de lo que hemos estudiado hasta aquí acerca de las ecuaciones.

Si sabemos que varias ecuaciones tienen la misma solución, basta con resolver una para resolver todas.

Si a los dos miembros de una ecuación se les suma o se les resta un mismo número, la ecuación que se obtiene tiene la misma solución que la ecuación original.

Este último hecho nos permite, a partir de una ecuación dada, obtener otras ecuaciones distintas que tengan la misma solución.

Ahora podemos aprovechar todas estas ideas para hallar la solución de alguna ecuación que no podamos resolver mentalmente. El procedimiento, básicamente, es el siguiente:

Considerada la ecuación que deseamos resolver, buscamos otra ecuación más simple que tenga la misma solución que ella. Esto puede hacerse aplicando las propiedades 1 y 2 que ya conocemos.

Ejemplo.

a) Consideremos la ecuación $x + 37 = 82$.
Para resolverla, primero restamos 37 a sus dos miembros y tenemos que

$$(x + 37) - 37 = 82 - 37.$$

Ya que $(x + 37) - 37 = x$ y que $82 - 37 = 45$, sustituyendo en la ecuación anterior, obtenemos

$$x = 45.$$

La solución de esta ecuación es 45. Por lo tanto, la ecuación $x + 37 = 82$ también tiene como solución al número 45. Para probar esto sustituimos la x por la solución y vemos que, efectivamente,

$$45 + 37 = 82.$$

b) Consideremos la ecuación $m - 18 = 73$.

Primero sumamos 18 a sus dos miembros para tener la ecuación

$$(m - 18) + 18 = 73 + 18.$$

Como $(m - 18) + 18 = m$ y $73 + 18 = 91$, escribimos

$$m = 91.$$

La solución de esta ecuación es, obviamente, el número 91. Por consiguiente, la ecuación $m - 18 = 73$ también tiene como solución al 91. Esto es cierto porque

$91 - 18$ sí es igual a 73.

Ejemplo.

a) Consideremos la ecuación $r + 29 = 67$.

¿Qué número debemos sumar o restar a sus dos miembros para obtener una ecuación más simple, como las que hemos obtenido en el ejemplo anterior?

Queremos que en el primer miembro de la nueva ecuación sólo aparezca la r

y sabemos que $(r + a) - a = r$. En consecuencia, debemos restar 29 a los dos miembros de la ecuación $r + 29 = 67$ para que nos quede

$$(r + 29) - 29 = 67 - 29,$$

o sea,

$$r = 38.$$

Entonces, la solución de $r + 29 = 67$ es 38. Comprobémoslo:

¿Es $38 + 29 = 67$? Sí. La solución es correcta.

b) Considerando la ecuación

$$t - 44 = 18,$$

¿qué número debemos sumar o restar a sus dos miembros para obtener otra ecuación más simple?

Según sabemos, $(t - 44) + 44 = t$. Entonces, el número que debemos sumar es 44:

$$(t - 44) + 44 = 18 + 44.$$

Es decir,

$$t = 62.$$

La solución de nuestra ecuación es el número 62, y vemos que así es porque

62 — 44 sí es igual a 18.

Para mayor comodidad, vamos a indicar la solución de una ecuación por medio de la ecuación más simple que tenga la misma solución que ella. Esto ya lo hemos hecho antes. Por ejemplo,

a) Para indicar que 35 es la solución de la ecuación $n + 50 - 85$, podemos escribir simplemente $n = 35$.

b) La ecuación $x - 12 = 47$ tiene la solución $x = 59$.

c) $m = 65$ es la solución de la ecuación $m + 32 = 97$.

Ejercicio 5. En cada inciso diga usted cómo se puede obtener la ecuación más simple que tenga la misma solución que la ecuación mostrada.

a) $x + 65 = 183$ restando 65 a ambos miembros

b) $y - 43 = 26$ sumando 43 a los dos miembros

c) $z + 174 = 898$ ____________________

d) $345 + a = 695$ ____________________

e) $b - 57 = 32$ ____________________

f) $c - 84 = 96$ ____________________

g) $p + 258 = 396$ ____________________

h) $q - 65 = 324$ ____________________

i) $x - m = p$ ____________________

j) $x + r = s$ ____________________

Ejercicio 6. Resuelva en su cuaderno las siguientes ecuaciones tal como se hace en los incisos a) y k). Compruebe en cada caso si la solución es correcta.

a) $x + 49 - 276$

$(x + 49) - 49 = 276 - 49$

$x = 227$

comprobación

227 + 49

sí es igual a

276.

b) $a + 235 = 247$

c) $b + 68 = 72$

d) $y + 257 = 259$

e) $z + 39 = 126$

f) $p + 364 = 407$

g) $r + 89 = 123$

h) $t + 377 = 386$

i) $s + 429 = 698$

j) $w + 2\,386 = 3\,689$

k) $a - 19 = 36$

$(a - 19) + 19 = 36 + 19$

$a = 55$

comprobación

55 − 19

sí es igual a

36.

l) $z - 38 = 7$

m) $h - 75 = 89$

n) $k - 276 = 17$

o) $x - 56 = 27$

p) $476 = y - 6$

q) $278 = y - 193$

r) $261 = b - 789$

s) $526 = p - 349$

t) $670 = r - 2\,386$

2. Resolución de problemas por medio de ecuaciones

Existen diferentes métodos para resolver problemas y cada persona puede emplear el que sea de su agrado.

A continuación vamos a estudiar un método para resolver problemas por medio de ecuaciones. A fin de ilustrar dicho método empezaremos con problemas muy sencillos. Aunque usted pueda fácilmente resolver tales problemas en otra forma, conviene que siga el método que le proponemos para que vaya acostumbrándose a él y lo pueda aplicar posteriormente en problemas más complicados.

Problema. ¿Qué número sumado con 36 nos da 87?

Para resolver este problema, primero lo enunciamos por medio de una ecuación. Esto puede hacerse si representamos el número que desconocemos, con una letra cualquiera. Por ejemplo, la x. La ecuación sugerida por el problema sería entonces

$$x + 36 = 87.$$

La solución de esta ecuación será la solución del problema. Resolvámosla.

$$\begin{aligned} x + 36 &= 87 \\ (x + 36) - 36 &= 87 - 36 \\ x &= 51. \end{aligned}$$

Conviene que comprobemos la solución para estar seguros de que no nos hemos equivocado al resolver la ecuación

51 + 36 sí es igual a 87.

Respuesta. El número que sumado con 36 da 87 es 51.

Ejercicio 7. Resuelva usted los siguiente problemas por medio de ecuaciones, tal como se hace en a).

a) La suma de un número y 86 es 392. ¿Cuál es ese número?

Resolución. Sea x el número que buscamos. Entonces,

$$\begin{aligned} x + 86 &= 392 \\ (x + 86) - 86 &= 392 - 86 \\ x &= 306. \end{aligned}$$

Comprobación. 306 + 86 sí es igual a 392.

Respuesta. Ese número es 306.

b) La suma de dos números es 476. Si uno de ellos es 389, ¿cuál es el otro número?

c) Si a un número le restamos 52 el resultado es 524. ¿Cuál es ese número?

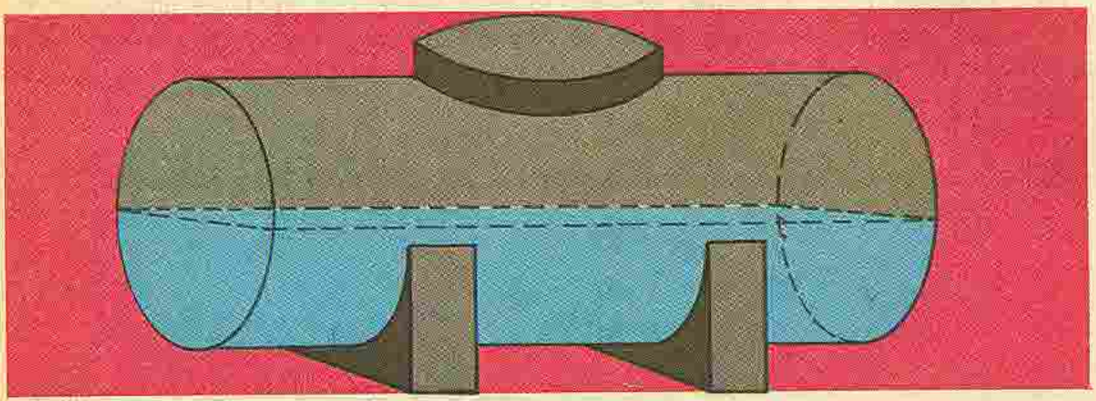
d) La diferencia de dos números es 86. Si el número menor es 75, ¿cuál es el número mayor?

e) Al sumar 875 a un número se obtiene 3 642. ¿Cuál es ese número?

f) A un número se le resta 496 y el resultado es 675. ¿Qué número es ese?

Ejercicio 8. De las ecuaciones que se dan en cada inciso, elija la que se adapta al problema, resuélvala y diga cuál es la solución del problema, tal como se hace en a). (Trabaje usted en su cuáderno.)

a) En un tinaco caben 448 litros. Si le faltan 215 litros para llenarse, ¿cuántos litros contiene ahora?



$x + 448 = 215$ $\qquad$ $x - 215 = 448$ $\qquad$ $x + 215 = 448$

Ecuación para el problema. $x + 215 = 448$

Solución. $x = \boxed{233}$

Respuesta. El tinaco contiene 233 litros ahora.

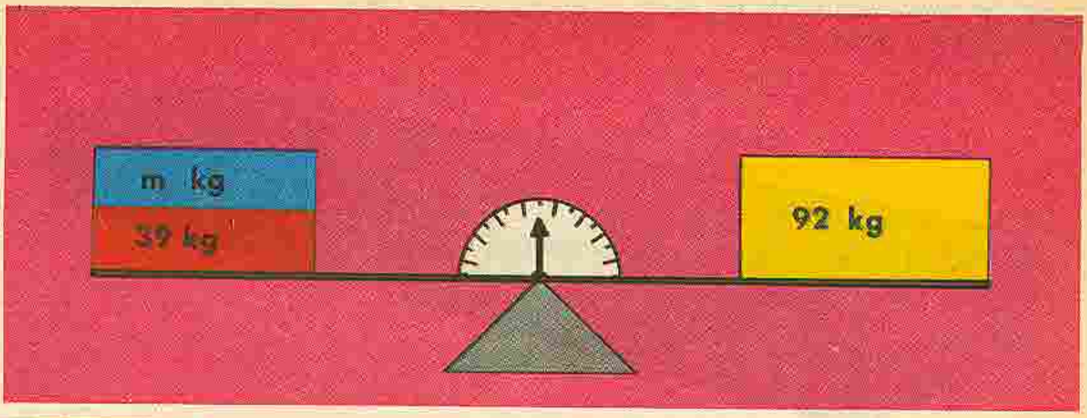
b) Juntas, las dos barras que se ilustran miden 86 metros. Si la azul mide 19 metros, ¿cuánto mide la roja?

$x - 86 = 19$ $\qquad$ $x + 19 = 86$ $\qquad$ $x - 19 = 86$

c) Un mediodía el termómetro marcaba t grados y por la noche marcó 15 grados. Si la temperatura había bajado 8 grados, ¿cuál fue la temperatura de ese mediodía?

$t - 15 = 8$ $\qquad$ $t + 8 = 15$ $\qquad$ $t - 8 = 15$

d) ¿Cuánto pesa el cuerpo iluminado de azul en la siguiente balanza?



$m + 39 = 92$

$m - 39 = 92$

$m - 92 = 39$

e) Antes de ponerse a dieta, una señora pesa p kilogramos. Si en la dieta reduce 15 kg y llega a pesar 56 kg, ¿cuál era su peso inicial?

$p + 15 = 56$

$p - 56 = 15$

$p - 15 = 56$

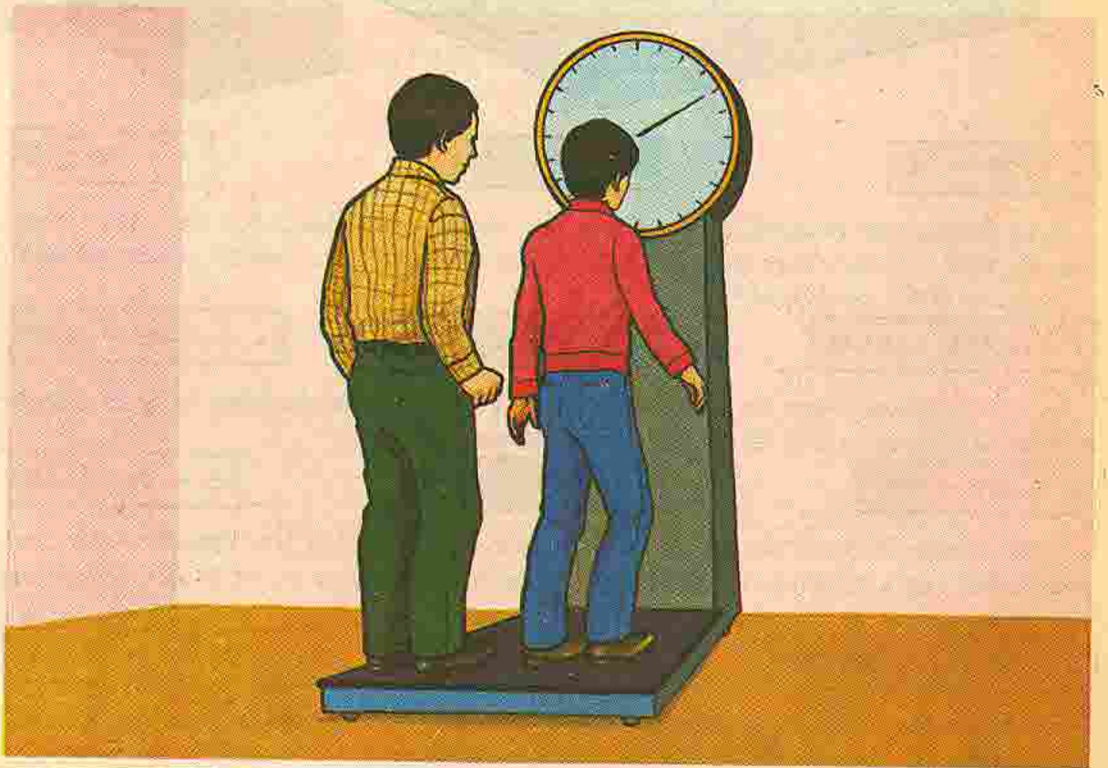
f) Se calcula una cosecha en x toneladas de maíz. Si debido a una sequía sólo se cosecharon 450 toneladas y sabemos que se perdieron 85 toneladas, ¿cuánto maíz se habría cosechado si no hubiera habido sequía?

$x - 85 = 450$

$x + 85 = 450$

$450 - x = 85$

g) Una báscula registra 143 kilogramos cuando se suben juntos Juan y Ricardo. Si al bajarse Juan la báscula registra 63 kilogramos, ¿cuál es el peso de Juan?

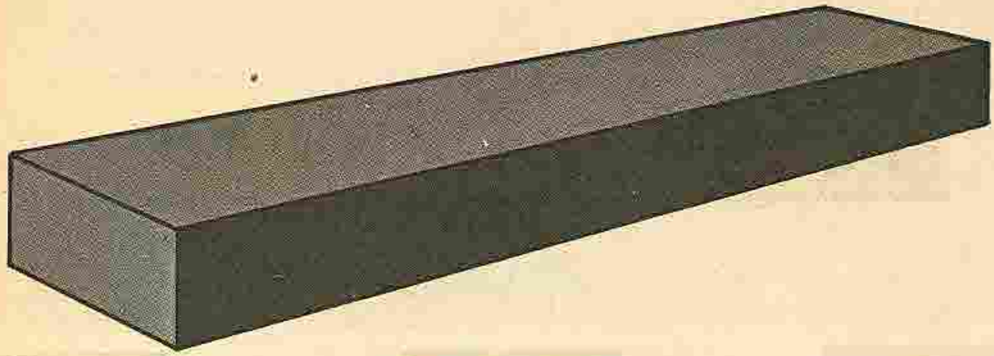


$j - 63 = 143$

$j + 63 = 143$

$j + 143 = 63$

h) Una barra que pesa 790 gramos se construyó con una aleación de hierro y aluminio. Si para construirla se usaron 285 gramos de hierro, ¿cuántos gramos de aluminio contiene la barra?

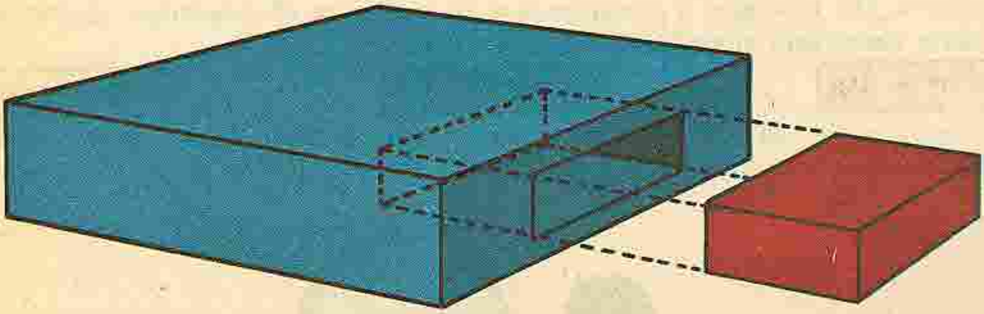


$x - 285 = 790$

$x - 790 = 785$

$x + 285 = 790$

i) El cuerpo mostrado en azul pesa 78 kilogramos después de haberle extraído la pieza en rojo, que pesa 35 kg. ¿Cuál era el peso del cuerpo antes de extraerle la pieza?



$x - 35 = 78$

$x + 35 = 78$

$x + 78 = 35$

j) La producción mundial de mercurio, un metal muy valioso, fue de 9 440 toneladas en 1969. ¿Cuánto mercurio produjo México ese año si los demás países, en total, produjeron 8 664 toneladas?

$x + 8\,664 = 9\,440$

$x - 8\,664 = 9\,440$

$x - 9\,440 = 8\,664$

k) De un tinaco lleno de agua se utilizan 210 litros. Si después de eso aún le quedan 460 litros, ¿cuál es la capacidad de ese tinaco?

$c + 210 = 460$

$c - 460 = 210$

$c - 210 = 460$

l) El territorio de la península Ibérica, que está formada por España y Portugal, abarca 862 760 kilómetros cuadrados. Si el área de Portugal es de 91 971 kilómetros cuadrados, ¿cuál es el área de España?

$x + 91\,971 = 862\,760$

$x - 862\,760 = 91\,970$

$x - 91\,971 = 862\,760$

m) Al Sr. González le descuentan mensualmente $ 385.00 de su sueldo. Si cada mes recibe un cheque de $2 183.00, ¿cuál es su sueldo mensual?

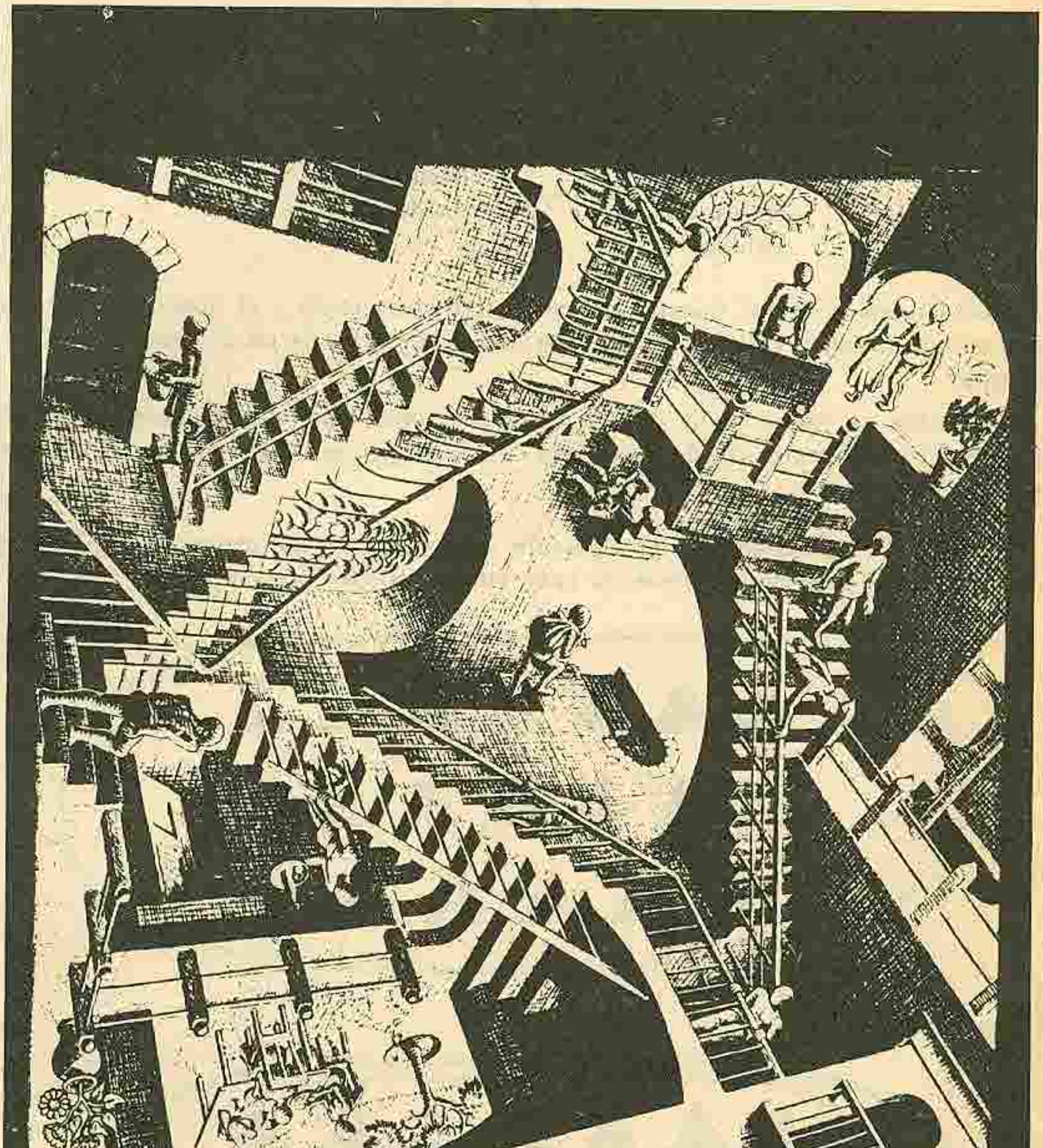
$x - 385 = 2\,183$

$x + 385 = 2\,183$

$x - 2\,183 = 385$

VI

División de números naturales



1. Uso de la división

Las expresiones como

$$\begin{array}{rl} & 3 \\ 8 & \overline{\left|\,26\right.} \\ & 2 \end{array}$$

indican una división.

Los números que aparecen en una división se llaman así:

$$\begin{array}{rrl} & & 3 \leftarrow \text{cociente} \\ \text{divisor} \longrightarrow & 8 & \overline{\left|\,26\right.} \leftarrow \text{dividendo} \\ \text{residuo} \longrightarrow & & 2 \end{array}$$

"Efectuar una división" consiste en encontrar el cociente y el residuo cuando se conocen el dividendo y el divisor. Esto se hace por medio de un proceso que ya conocemos.

La división se aplica en la resolución de problemas como los siguientes. (Observe usted la interpretación de cada una de las partes de la división en la solución de cada problema.)

Problema 1. Consideremos el siguiente conjunto con 20 elementos. ¿Cuántos subconjuntos ajenos de 7 elementos cada uno se pueden formar?

Resolución.

Se pueden formar 2 subconjuntos de 7 elementos cada uno y sobran 6 elementos.

El problema también lo podemos resolver con una división.

2←—número de subconjuntos
número de elementos de cada subconjunto ——→7 ⌐ 20←—número de elementos del conjunto
6←—elementos que sobran

Problema 2. Una señora tiene 35 manzanas y quiere repartirlas por partes iguales entre sus 6 hijos. ¿Cuántas manzanas le tocan a cada hijo?

Resolución. El problema se puede resolver con la siguiente división. (Escriba en los rectángulos lo que representa cada uno de los números.)

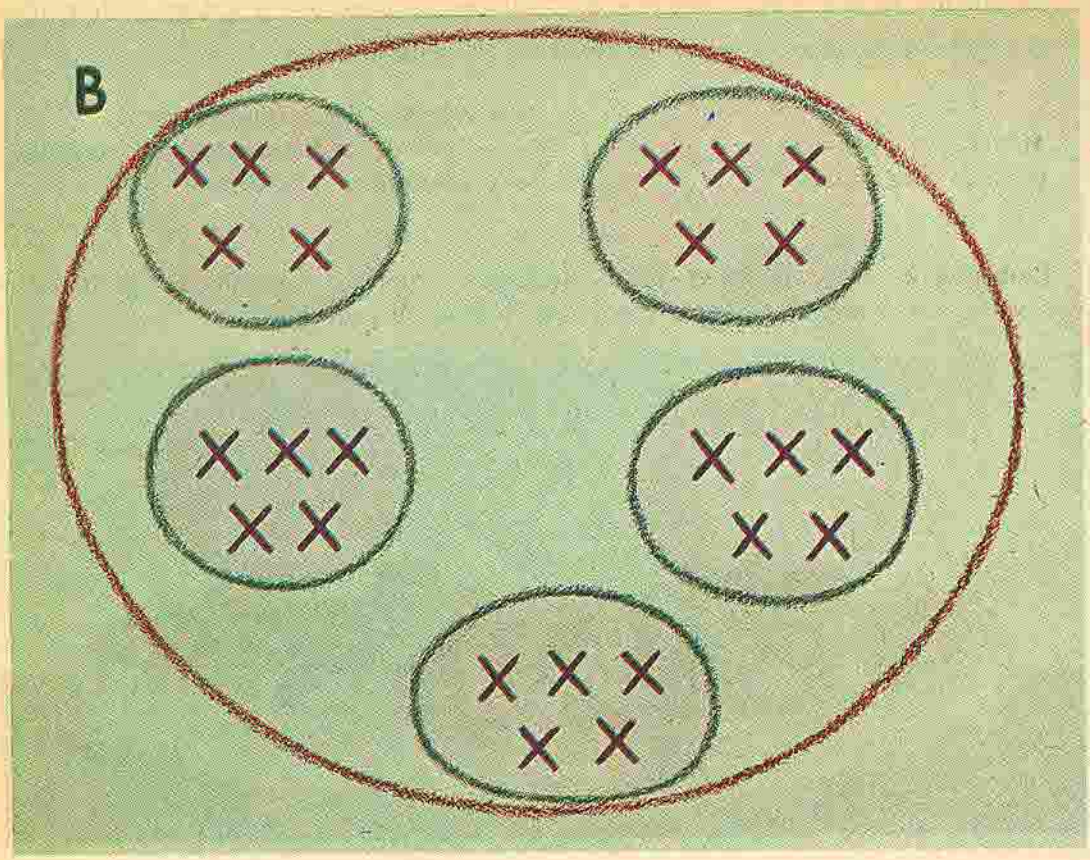
5←—☐
☐ ——→6 ⌐ 35←—número de manzanas
☐ ——→5

Respuesta. A cada hijo le tocan ____ manzanas y sobran ____ manzanas.

Problema. 3. Un conjunto *B* tiene 25 elementos. ¿Cuántos subconjuntos ajenos, de 5 elementos cada uno, se pueden formar en ese conjunto?

Resolución. Este problema puede resolverse con la división

5←—número de subconjuntos ajenos
número de elementos de cada subconjunto ——→5 ⌐ 25←—número de elementos de *B*
0←—elementos que sobran



Respuesta. Se pueden formar_______subconjuntos ajenos y sobran_______elementos.

Problema 4. El sueldo quincenal de un hombre es de 945 pesos. ¿Cuánto gana diariamente?

Resolución. (Escriba en los rectángulos lo que representa cada número).

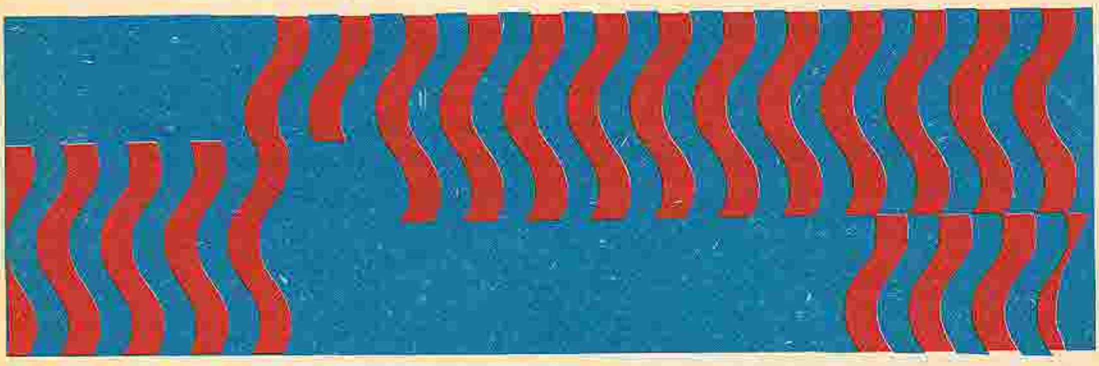
63 ← ▭

▭ → 15 | 945 ← ▭

45

0 ← ▭

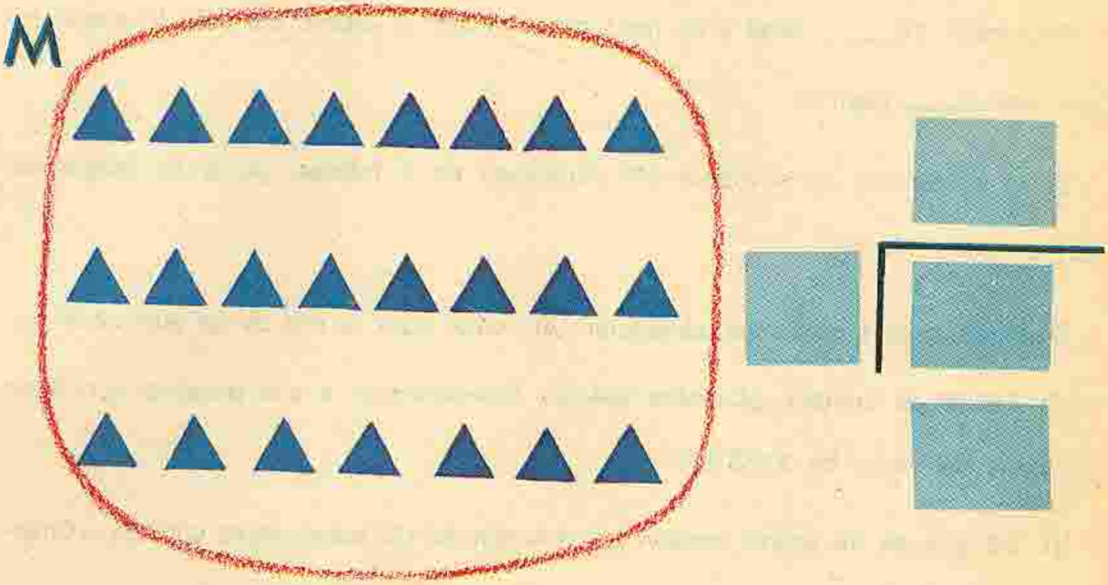
Respuesta. Diariamente gana______pesos.



2. Problemas

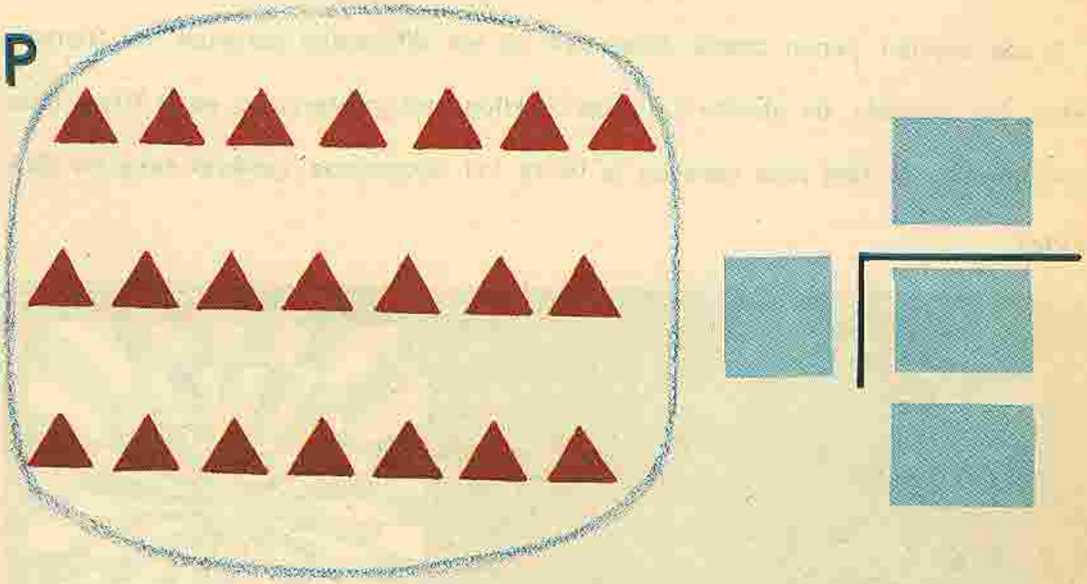
Los siguientes problemas se resuelven con ayuda de una división. Resuélvalos.

a) El siguiente conjunto *M* tiene 23 elementos. ¿Cuántos subconjuntos ajenos de 7 elementos se pueden formar en *M*? Resuelva este problema gráficamente y con una división.



Respuesta. Se forman_____subconjuntos ajenos y sobran_____elementos.

b) ¿Cuántos subconjuntos ajenos de 3 elementos cada uno se pueden formar en *P*? Resuelva este problema gráficamente y con una división.



Respuesta. Se forman_____subconjuntos ajenos y sobran_____elementos.

c) Se tienen 219 refrescos en cajas con capacidad de 24 refrescos cada una. ¿Cuántas cajas llenas hay?

Respuesta. Hay ____ cajas completas y sobran ____ refrescos.

d) Una persona lee diariamente 27 páginas de un libro que consta de 430 páginas. ¿En cuánto tiempo terminará de leer el libro?

Respuesta. En ____ días y un poco más, ya que el último día sólo le quedarán por leer ____ páginas.

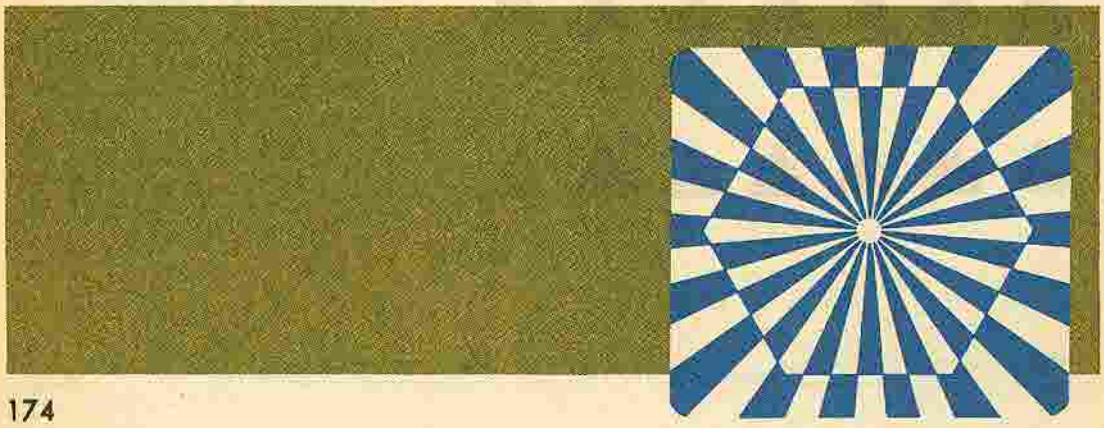
e) En un terreno se siembran 574 magueyes en 7 hileras. ¿Cuántos magueyes hay en cada hilera?

f) En un centro comercial obsequian un boleto para la rifa de un automóvil por cada $ 65.00 de compra. ¿Cuántos boletos corresponden a una persona que hace compras por valor de $ 455.00?

g) 356 gramos de azufre ocupan un volumen de 178 centímetros cúbicos. ¿Cuántos gramos de azufre ocupan un volumen de un centímetro cúbico?

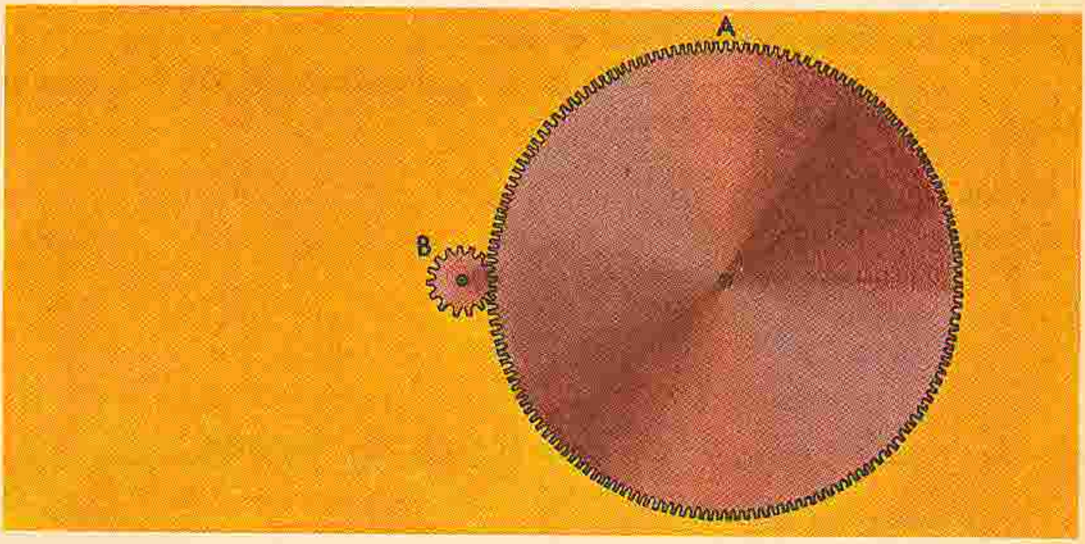
h) Una motocicleta recorrió 270 kilómetros en 6 horas. Si en cada hora recorrió el mismo número de kilómetros, ¿cuántos kilómetros recorrió en una hora?

i) Los objetos tienen pesos diferentes en los diferentes planetas del Sistema Solar. Por ejemplo, un objeto que pesa un kilogramo en Mercurio, en la Tierra pesa 3 kilogramos. Si una roca pesa en la Tierra 117 kilogramos, ¿cuánto pesa en Mercurio?



j) Un motor gira 3 000 revoluciones por minuto. ¿Cuántas revoluciones gira en un segundo?

k) El engrane *A* tiene 160 dientes y el engrane *B* tiene 16 dientes.



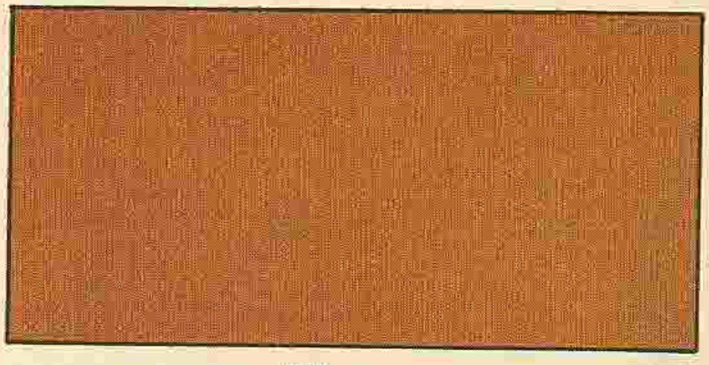
Si el engrane *A* da una vuelta, ¿cuántas vueltas gira el engrane *B*?

l) La moneda de Checoslovaquia es la corona. 15 coronas equivalen a 1 dólar. ¿Cuántos dólares equivalen a 405 coronas?

m) ¿A cuántos minutos equivalen 240 segundos?

n) Un automóvil recorre 70 kilómetros cada hora. ¿En cuántas horas recorrerá 840 kilómetros?

o) Un terreno, como el de la figura, mide 25 metros de largo. ¿Cuál es el ancho de dicho terreno si su área es de 300 metros cuadrados?



3. Relaciones entre las partes de la división

En la escuela primaria, para comprobar que una división estaba bien efectuada, usted tomaba en cuenta los siguientes requisitos:

1. El residuo debía ser menor que el divisor.
2. Si multiplicaba el cociente por el divisor y al resultado de ello le sumaba el residuo, debía obtener el dividendo.

Ejemplo.

La división

$$\begin{array}{rr} & 406 \\ 8 & \overline{\big)\,3\,250} \\ & 050 \\ & 2 \end{array}$$

está bien efectuada porque en ella se cumplen los dos requisitos:

1. 2 es menor que 8.
2. $$\begin{array}{rl} 406 & \leftarrow \text{(cociente)} \\ \times\ 8 & \leftarrow \text{(divisor)} \\ \hline 3\,248 & \end{array} \qquad \begin{array}{rl} 3\,248 & \\ +\quad 2 & \text{(residuo)} \\ \hline 3\,250 & \end{array}$$

En la comprobación de la división se utiliza la siguiente propiedad, que es cierta para cualquier división de números naturales.

En una división, si se multiplica el cociente por el divisor y al resultado se le suma el residuo se obtiene el dividendo.

Ejercicio 1. Compruebe si las siguientes divisiones están bien efectuadas usando la propiedad de la división enunciada arriba.

a) $$\begin{array}{rr} & 169 \\ 28 & \overline{\big)\,4\,742} \\ & 1\,94 \\ & 262 \\ & 10 \end{array}$$

b) $$\begin{array}{rr} & 259 \\ 36 & \overline{\big)\,9\,642} \\ & 2\,44 \\ & 342 \\ & 18 \end{array}$$

c) $$\begin{array}{rr} & 1\,826 \\ 35 & \overline{\big)\,63\,915} \\ & 28\,9 \\ & 91 \\ & 225 \\ & 15 \end{array}$$

d) $$\begin{array}{rr} & 83 \\ 103 & \overline{\big)\,85\,976} \\ & 3\,57 \\ & 486 \end{array}$$

e) $\begin{array}{r|r} & 13 \\ \cline{2-2} 85 & 1\,105 \\ & 255 \\ & 0 \end{array}$ f) $\begin{array}{r|r} & 23 \\ \cline{2-2} 204 & 4\,692 \\ & 612 \\ & 0 \end{array}$

En las divisiones de los incisos e) y f) se observa que su residuo es cero. A toda división de números naturales que tenga por residuo el número cero se le llama división exacta.

Para una división exacta la propiedad de la división de números naturales se puede enunciar en una forma más breve.

> **En una división exacta, si se multiplica el cociente por el divisor el resultado es el dividendo.**

Esto se puede observar en los siguientes ejemplos.

a) $\begin{array}{r|r} & 28 \\ \cline{2-2} 14 & 392 \\ & 112 \\ & 0 \end{array}$ $\begin{array}{r} 28 \\ \times\ 14 \\ \hline 112 \\ 28 \\ \hline 392 \end{array}$ $\rightarrow$ $\begin{array}{r} 392 \\ +\ \ 0 \\ \hline 392 \end{array}$

(No es necesario efectuar la adición del producto de 28 × 14 con cero, pues sabemos que $a + 0 = a$.)

b) $\begin{array}{r|r} & 42 \\ \cline{2-2} 36 & 1\,512 \\ & 72 \\ & 0 \end{array}$ $\begin{array}{r} 42 \\ \times\ 36 \\ \hline 252 \\ 126 \\ \hline 1\,512 \end{array}$ $\rightarrow$ $\begin{array}{r} 1\,512 \\ +\ \ 0 \\ \hline 1\,512 \end{array}$

(No es necesario sumar el residuo cero pues sabemos que $a + 0 = a$.)

Lo anterior podemos expresarlo también en la forma siguiente:

> **En una división exacta, el cociente es el número que multiplicado por el divisor da el dividendo.**

Ejercicio 2. En las siguientes divisiones se omitieron los dividendos. Calcúlelos.

a) $\begin{array}{r|l} & \quad\ \ \boxed{2\ \ 3} \\ \cline{2-2} 5\ \ 2 & \square\ \square\ \square\ \square \\ & \quad\ 1\ \ 5\ \ 6 \\ & \qquad\quad\ \boxed{0} \end{array}$

b) $\begin{array}{r|l} & \quad\ \ \boxed{8\ \ 3} \\ \cline{2-2} 4\ \ 9 & \square\ \square\ \square\ \square \\ & \quad\ 1\ \ 4\ \ 7 \\ & \qquad\quad\ \boxed{0} \end{array}$

c)

$$\begin{array}{r|l} & 5\;8 \\ \hline 6\;4 & \square\,\square\,\square\,\square \\ & 5\;1\;2 \\ & \boxed{0} \end{array}$$

d)

$$\begin{array}{r|l} & 2\;3\;6 \\ \hline 2\;4 & \square\,\square\,\square\,\square \\ & 8\;6 \\ & 1\;4\;4 \\ & \boxed{0} \end{array}$$

En la división exacta se presentan algunos casos especiales, que resolveremos a continuación usando la última propiedad enunciada. (La letra *a* representa un número natural.)

a) $1\;\big|\overline{\;15\;}$

El cociente es el número que multiplicado por 1 nos da 15. Sabemos que ese número es 15.

b) $1\;\big|\overline{\;a\;}$

El cociente es el número que multiplicado por 1 nos da *a*. Sabemos que ese número es *a*.

El cociente que resulta de dividir *a* entre uno es igual a *a*.

c) $28\;\big|\overline{\;28\;}$

El cociente es 1 porque 1 • 28 = 28.

d) $a\;\big|\overline{\;a\;}$

El cociente es 1 porque 1 • *a* = *a*.

El cociente que resulta de dividir *a* entre *a* es igual a uno.

e) $8\;\big|\overline{\;0\;}$

¿Qué número multiplicado por 8 nos da 0?

Este número es_____porque_____• 8 = 0.

f) $a\;\big|\overline{\;0\;}$

El cociente es_____porque_____• *a* = 0.

El cociente que resulta de dividir cero entre cualquier número natural es cero.

Cuando consideremos divisiones exigiremos siempre que el divisor sea diferente de cero.

La razón de esta exigencia es que si el divisor fuera cero no existiría un cociente y un residuo con las propiedades que hemos visto.

$$0\,\xcancel{\overline{)\,a}} \quad y \quad 0\,\xcancel{\overline{)\,0}}$$

Cuando la división es exacta es conveniente representarla como en los siguientes ejemplos.

$$\begin{array}{rl} & 2 \\ 4 & \overline{)\,8} \\ & 0 \end{array}$$

se puede escribir así: $\underset{dividendo}{8} \div \underset{divisor}{4} = \underset{cociente}{2}$

$$\begin{array}{rl} & 4 \\ 7 & \overline{)\,28} \\ & 0 \end{array}$$

se puede escribir así: $28 \div 7 = 4$

$$\begin{array}{rl} & 12 \\ 12 & \overline{)\,144} \\ & 0 \end{array}$$

se puede escribir así: $144 \div 12 = 12$

$$b\,\overline{)\,a}$$

se puede escribir así:

$a \div b$

Con la expresión $a \div b$ indicamos
la división de 8 entre 4, si $a = 8$ y $b = 4$;
la división de 15 entre 3, si $a = 15$ y $b = 3$;
la división de 121 entre 11, si $a = 121$ y $b = 11$; etc.

Ejercicio 3. En su cuaderno encuentre el valor de la expresión $m \div n$, para los valores de m y n que se indican.

a) $m = 128,\ n = 4$ $\qquad$ $m \div n = 128 \div 4 = 32$

b) $m = 272,\ n = 8$ $\qquad$ c) $m = 4\,850,\ n = 10$

d) $m = 294,\ n = 14$ $\qquad$ e) $m = 1\,365,\ n = 21$

f) $m = 3\,204,\ n = 36$ $\qquad$ g) $m = 1\,386,\ n = 42$

Ejercicio 4. Encuentre la solución de las siguientes ecuaciones.

a) □ ÷ 5 = 6

b) □ ÷ 8 = 4

c) 56 ÷ □ = 7

d) 120 ÷ □ = 12

e) $x \div 25 = 4$

f) $m \div 20 = 3$

g) $p \div 15 = 10$

h) $y \div 12 = 1$

i) $t \div 5 = 0$

j) $15 \div m = 15$

k) $25 \div v = 5$

l) $125 \div z = 5$

m) $1 \div u = 1$

n) $10 \div r = 0$

Ejercicio 5. Usted ya sabe efectuar divisiones. El siguiente ejercicio, que consiste en poner en los cuadritos las cifras que faltan, tiene por objeto afirmar sus conocimientos de división y poner a prueba su paciencia. Intente resolverlos.

a)

```
          1  4  3
    □  |  2  5  □  8
             7  □
                5  8
                   □
```

b)

```
                □  □  2
  9  9  |  3  9  □  5  6
                2  5  6
                   □  □
```

c)

```
                8  □  4
  □  □  |  2  2  5  1  □
                9  1
                □  □  □
                      0
```

d)

```
             1  7  □  6
  4  6  |  □  □  □  6  □
           3  2  □
                 7  6
                 3  0  □
                    □  6
```

4. Las expresiones $(a \bullet b) \div b$ y $(a \div b) \bullet b$

En lo que estudiaremos a continuación nos vamos a encontrar con expresiones como las siguientes:

$$(8 \bullet 5) \div 5 \quad y \quad (14 \div 2) \bullet 2$$

La primera nos indica, de acuerdo con el uso que hemos hecho del paréntesis, que el resultado de $8 \bullet 5$ se va a dividir entre 5. La segunda nos indica que el cociente de $14 \div 2$ se va a multiplicar por 2. Es decir, que

$$(8 \bullet 5) \div 5 = 40 \div 5 = 8$$
$$(14 \div 2) \bullet 2 = 7 \bullet 2 = 14$$

Ejercicio 6. Simplifique las siguientes expresiones tal como se hace en el inciso a).

a) $(23 \times 4) \div 4 = \boxed{92 \div 4 = 23}$

b) $(18 \times 5) \div 5 =$

c) $(34 \times 2) \div 2 =$

d) $(46 \times 7) \div 7 =$

e) $(9 \times 15) \div 15 =$

f) $(16 \times 10) \div 10 =$

g) $(32 \times 3) \div 3 =$

h) $(56 \times 11) \div 11 =$

El ejercicio anterior ilustra la siguiente propiedad

Si *a* **y** *b* **son números naturales,**

$$(a \bullet b) \div b = a$$

Ejercicio 7. Simplifique las siguientes expresiones tal como se hace en el inciso a).

a) $(46 \div 23) \bullet 23 = \boxed{2 \bullet 23 = 46}$

b) $(18 \div 3) \bullet 3 =$

c) $(54 \div 9) \bullet 9 =$

d) $(63 \div 7) \bullet 7 =$

e) $(24 \div 8) \bullet 8 =$

f) $(45 \div 15) \bullet 15 =$

g) $(100 \div 25) \bullet 25 =$

h) $(475 \div 5) \bullet 5 =$

i) $(230 \div 10) \bullet 10 =$

j) $(60 \div 4) \bullet 4 =$

El ejercicio ilustra la siguiente propiedad:

Si *a* **y** *b* **son números naturales,**

$$(a \div b) \bullet b = a.$$

(Siempre y cuando *a* se pueda dividir exactamente entre *b*.)

Ejercicio 8. Aplique las propiedades estudiadas para simplificar las siguientes expresiones. Las letras representan números naturales.

a) $(23 \times 5) \div 5 =$

b) $(42 \times 75) \div 75 =$

c) $(8\,525 \bullet 78) \div 78 =$

d) $(x \bullet 42) \div 42 =$

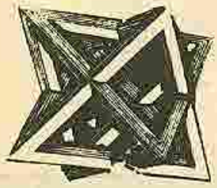
e) $(b \div 8) \bullet 8 =$

f) $(t \div 48) \bullet 48 =$

g) $(y \div 12) \bullet 12 =$

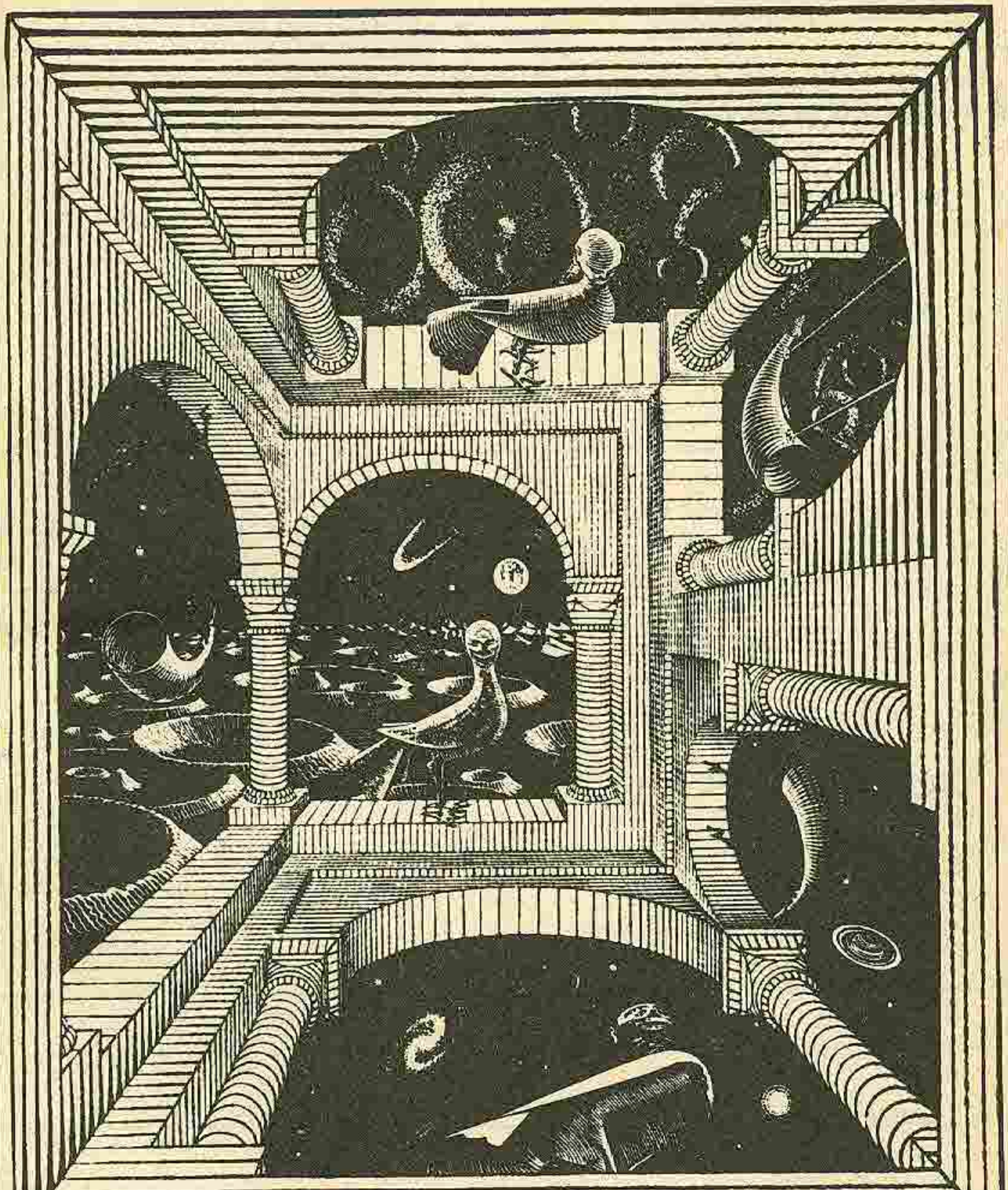
h) $(p \bullet q) \div q =$

i) $(r \div s) \bullet s =$



VII

Ecuaciones



1. Resolución de ecuaciones

Hay ecuaciones, como $250\ x = 5\,250$ y $n \div 28 = 49$, cuyas soluciones son difíciles de encontrar mentalmente. En esta sección vamos a estudiar un procedimiento para resolver este tipo de ecuaciones calculando, y no adivinando, las soluciones.

Primero repasaremos nuestra idea de "solución de una ecuación" con el siguiente ejercicio.

Ejercicio 1. En cada inciso, diga si el número es solución o no de la ecuación dada, tal como se hace en a) y en b).

a) 12; $16 \bullet \square = 208$.

12 *no* es solución porque 16 • 12 *no* es igual a 208.

b) 20; $42 \bullet \square = 840$.

20 *sí* es solución porque *42 • 20 = 840*

c) 45; $15 \bullet \square = 675$.

45 ____ es solución porque ________________________________

d) 10; $18 \bullet x = 180$.

10 ____ es solución porque ________________________________

e) 48; $\square \div 6 = 8$.

48 ____ es solución porque ________________________________

f) 320; $\square \div 20 = 16$.

320 ____ es solución porque ________________________________

g) 60; $180 \div \square = 3$.

60 ____ es solución porque ________________________________

h) 693; $t \div 21 = 33$.

693 ____ es solución porque ________________________________

Hay ecuaciones que tienen la misma solución. Por ejemplo,

$$x \bullet 20 = 100,\ m \bullet 2 = 10 \text{ y } a \bullet 7 = 35,$$

tienen como solución al número 5.

Al resolver las siguientes ecuaciones Pepe encontró que todas tienen la misma solución. ¿Cuál es esa solución?

a) $5x = 45$

b) $46 \bullet x = 414$

c) $x \bullet 81 = 729$

d) $x = 9$

e) $180 \div x = 20$

f) $x \bullet 743 = 6\,687$

Para encontrar la solución de todas y cada una de estas ecuaciones basta con resolver una de ellas. La más simple es la d). Su solución es 9. Por consiguiente, la solución de $5x = 45$ es 9; la solución de $46 \cdot x = 414$ también es 9; etc. (Compruébelo usted en las demás ecuaciones.)

Esto ya lo sabíamos.

Si varias ecuaciones tienen la misma solución, para resolverlas todas basta con resolver una. De preferencia, la más sencilla.

Para aprovechar esto en nuestro estudio, necesitamos conocer también las siguientes propiedades de las ecuaciones.

Propiedad 3. Si multiplicamos los dos miembros de una ecuación por un mismo número, distinto de cero, obtenemos una nueva ecuación que tiene la misma solución que la ecuación original.

Propiedad 4. Si dividimos los dos miembros de una ecuación entre un mismo número distinto de cero, obtenemos otra ecuación; pero ambas tienen la misma solución.

Ejemplo. Consideremos la ecuación $m \bullet 15 = 165$, cuya solución es el número 11.

a) Multipliquemos sus dos miembros por 10:

$$(m \bullet 15) \bullet 10 = 165 \bullet 10$$

Obtenemos así la ecuación

$$m \bullet 150 = 1\,650,$$

cuya solución también es el número 11, pues

$$11 \bullet 150 = 1\,650.$$

b) Dividamos los dos miembros de nuestra ecuación entre 5:

$$(m \bullet 15) \div 5 = 165 \div 5$$

Esta nueva ecuación, aunque distinta de la primera, también tiene por solución al número 11, pues al hacer la sustitución tenemos que

$$(11 \bullet 15) \div 5 = 165 \div 5$$

Ejemplo. Consideremos la ecuación $t \div 4 = 15$, que tiene por solución al número 60.

a) Multipliquemos por 3 sus dos miembros.

$$(t \div 4) \bullet 3 = 15 \bullet 3$$

Esta nueva ecuación también tiene por solución al número 60 porque

$$(60 \div 4) \bullet 3 = 15 \bullet 3$$

b) Dividamos entre 5 los dos miembros de la ecuación.

$$(t \div 4) \div 5 = 15 \div 5$$

La solución de esta nueva ecuación también es 60, pues

$$(60 \div 4) \div 5 = 15 \div 5$$

Ejercicio 2. En la siguiente tabla aparecen algunas ecuaciones con su solución. Con cada una haga lo que se indica y demuestre que la ecuación resultante tiene la misma solución.

Ecuación	Solución	Indicación
a) $x \bullet 15 = 300$	20	Multiplique ambos miembros por 10
b) $m \bullet 18 = 450$	25	Divida ambos miembros entre 6
c) $m \bullet 45 = 900$	20	Divida ambos miembros entre 9
d) $r \bullet 23 = 414$	18	Multiplique ambos miembros por 5
e) $x \bullet 100 = 10\,000$	100	Divida ambos miembros entre 10
f) $a \div 18 = 12$	216	Divida ambos miembros entre 3
g) $b \div 10 = 380$	3 800	Multiplique ambos miembros por 10

Recordemos finalmente que

$$\boxed{(a \div b) \bullet b = a}$$

y

$$\boxed{(a \bullet b) \div b = a}$$

El procedimiento que vamos a seguir para resolver ecuaciones como las que anotamos al principio consiste básicamente en lo siguiente:

Dada la ecuación, multiplicamos o dividimos sus dos miembros por un mismo número de tal manera que la ecuación resultante sea lo más simple posible.

Ejemplo.

a) Consideremos la ecuación

$$\boxed{x \bullet 36 = 1\,620}$$

Para hallar otra ecuación más simple con la misma solución, dividimos entre 36 sus dos miembros.

$$\boxed{(x \bullet 36) \div 36 = 1\,620 \div 36}$$

Como $(x \bullet 36) \div 36 = x$ y $1\,620 \div 36 = 45$, escribimos

$$\boxed{x = 45}$$

Por consiguiente, 45 es la solución de $x \cdot 36 = 1\,620$. Esto puede comprobarse fácilmente:

45 • 36 si es igual a 1 620.

b) Consideremos la ecuación.

$$\boxed{x \div 40 = 420}$$

Obtenemos una ecuación más simple, con la misma solución, multiplicando los dos miembros por 40.

$$\boxed{(x \div 40) \bullet 40 = 420 \bullet 40}$$

Como $(x \div 40) \bullet 40 = x$ y $420 \bullet 40 = 1\,680$, podemos escribir

$$\boxed{x = 1\,680}$$

Entonces, la solución de $x \div 40 = 420$ es $x = 1\,680$. Y esto es cierto, pues

$1\,680 \div 40 = 420$.

Ejercicio 3. Indique usted por qué número deben multiplicarse o dividirse los dos miembros de cada ecuación a fin de obtener la ecuación más simple posible. (Que tenga la misma solución.)

a) $x \div 5 = 15$	Multiplicar por 5
b) $m \bullet 30 = 180$	
c) $n \div 18 = 72$	
d) $t \bullet 27 = 216$	
e) $36 \bullet y = 324$	
f) $z \div 15 = 42$	
g) $p \div 43 = 7$	
h) $85 \bullet m = 680$	
i) $16 \bullet x = 224$	

Ejercicio 4. Resuelva las siguientes ecuaciones en su cuaderno tal como se hace en a) y en b).

a) $n \div 18 = 15$

$(n \div 18) \bullet 18 = 15 \bullet 18$

$\boxed{n = 270}$

b) $m \bullet q = 135$

$(m \bullet q) \div q = 135 \div q$

$\boxed{m = 15}$

c) $c \div 82 = 13$

d) $d \div 101 = 1\,212$

e) $e \bullet 85 = 3\,400$

f) $f \bullet 56 = 840$

g) $30 \bullet x = 360$

h) $25m = 350$

i) $17r = 289$

j) $s \div 36 = 612$

k) $g \div 28 = 364$

l) $56 \bullet h = 1\,792$

m) $83p = 83$

n) $72 \bullet j = 0$

o) $k \div 78 = 156$

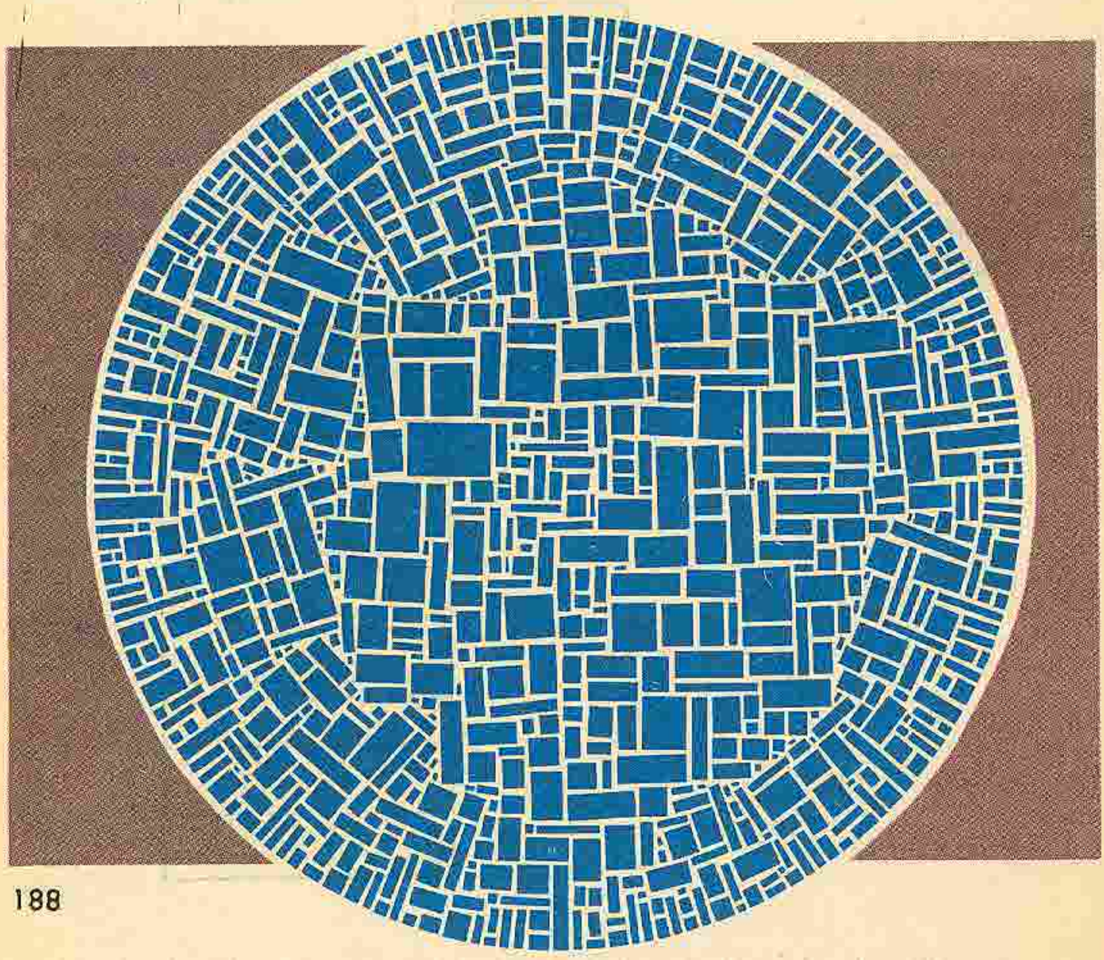
p) $e \div 100 = 100$

q) $m \div 49 = 931$

r) $270n = 5\,400$

s) $730p = 18\,250$

t) $q \div 120 = 300$



2. Resolución de problemas por medio de ecuaciones

Tal como lo hemos hecho anteriormente, aquí también resolveremos problemas por medio de ecuaciones.

Los problemas que anotamos a continuación pueden resolverse con diferentes métodos; pero es conveniente que los resuelva usted empleando ecuaciones porque este procedimiento le será útil posteriormente al resolver problemas más complicados.

Problemas.

a) Si multiplicamos un número por 85 obtenemos 2 890. ¿Cuál es ese número?

Ecuación	$x \cdot 85 = 2\,890$
Solución	$x = 34$
Respuesta	Ese número es 34

b) Al dividir un número entre 78 se obtiene 345 como cociente. ¿Qué número es ése?

c) 16 veces un número es igual a 368. ¿Cuál es ese número?

d) La novena parte de un número es 345. ¿Qué número es ése?

e) El número 216 es 12 veces mayor que un número x. ¿Qué número es x?

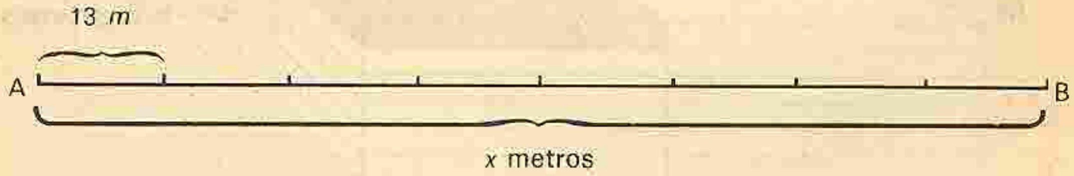
f) El número 21 es el cociente de n entre 42. ¿Qué número es n?

Ejercicio 5. De las ecuaciones que se dan en cada inciso, escoja la que se adapta al problema, resuélvala y luego dé la respuesta correspondiente a la pregunta.

a) Luis pesa 5 veces lo que pesa su hermanito Raúl. Si Luis pesa 70 kilos, ¿cuánto pesa Raúl?

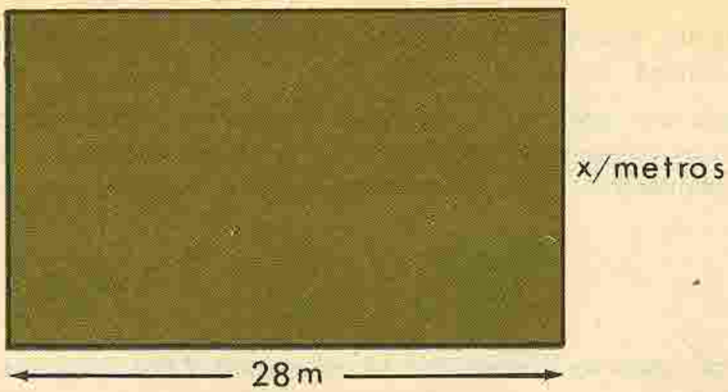
$x \cdot 5 = 70$ $\quad$ $5 \div x = 70$ $\quad$ $x \div 70 = 5$

b) Si los segmentos en que está dividido el segmento $\overline{AB}$ tienen igual medida ¿cuánto mide el segmento $\overline{AB}$?



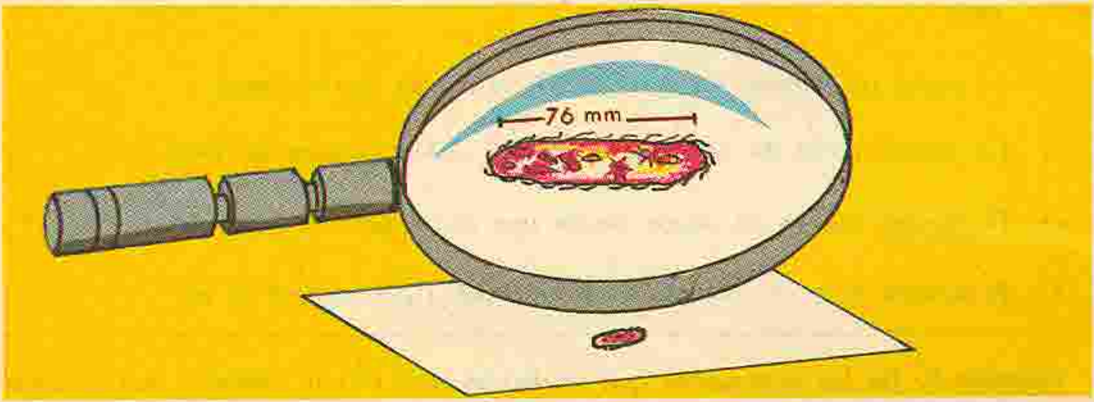
$x \div 8 = 13$ $\quad$ $x \div 13 = 8$ $\quad$ $x \cdot 8 = 13$

c) El área del rectángulo que se ilustra abajo es de 476 metros cuadrados, y sus dimensiones son las que se indican. ¿Cuántos metros mide de altura?



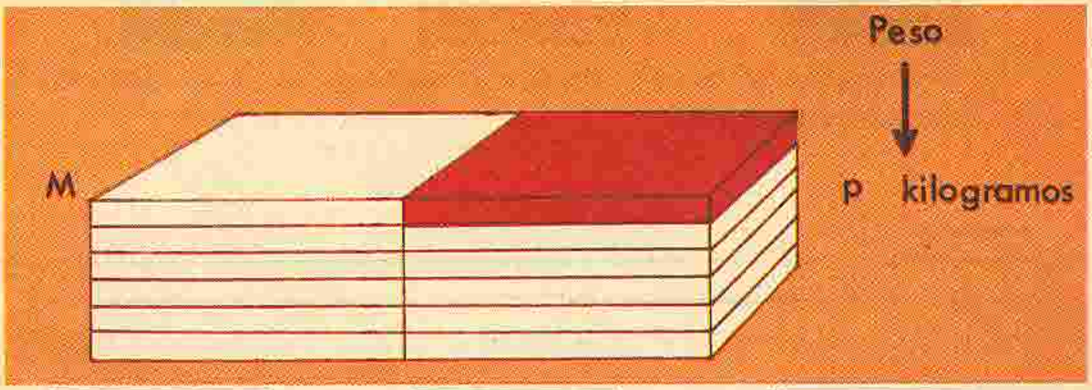
$x \div 476 = 28$ $\qquad$ $x \div 28 = 476$ $\qquad$ $x \cdot 28 = 476$

d) Un objeto, observado con una lupa, se ve cuatro veces mayor que lo que mide en realidad. Si la imagen de un objeto en la lupa mide 76 milímetros, ¿cuántos milímetros mide realmente el objeto?



$x \div 4 = 76$ $\qquad$ $4 \cdot x = 76$ $\qquad$ $x \div 76 = 4$

e) El cuerpo *M* está formado por bloques que pesan lo mismo. Si el bloque rojo pesa 18 kilogramos, ¿cuál es el peso del cuerpo *M*?

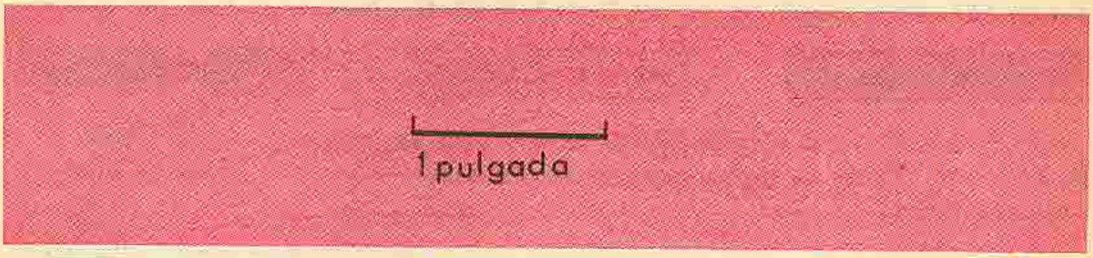


$p \div 12 = 18$ $\qquad$ $p \cdot 18 = 12$ $\qquad$ $p \cdot 12 = 18$

f) En una población se presentan x conscriptos para hacer su servicio militar. Si con ellos se forman 33 pelotones y cada pelotón consta de 11 personas, ¿cuántos conscriptos harán el servicio militar en esa población?

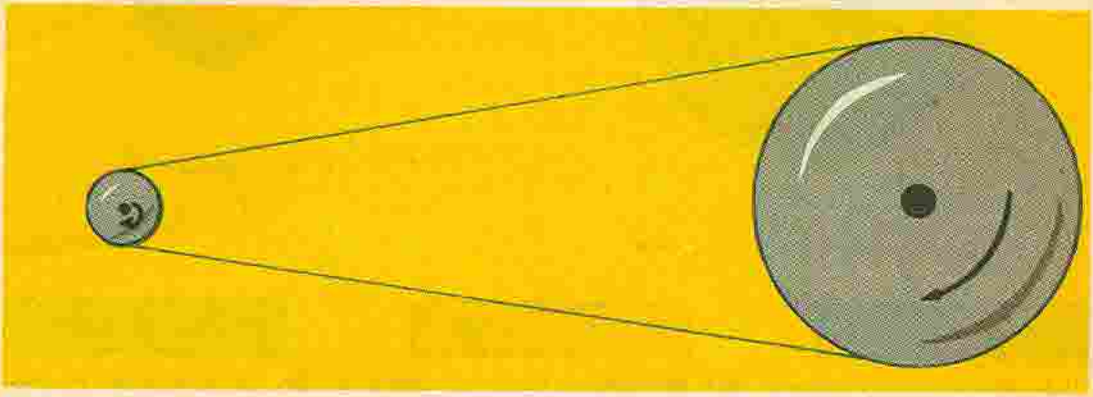
$x \cdot 11 = 33$ $x \div 11 = 33$ $x \cdot 33 = 11$

g) El pie equivale a 12 pulgadas. ¿Cuántos pies son 432 pulgadas?



$x \div 12 = 432$ $x \div 432 = 12$ $12 \cdot x = 432$

h) Las dos ruedas que se ilustran abajo están conectadas por una banda y cuando la mayor gira una vuelta, la menor gira 7 vueltas. ¿Cuántas vueltas tiene que girar la mayor para que la menor gire 112 vueltas?

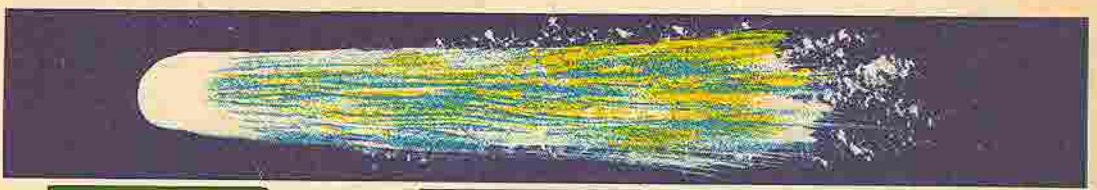


$7 \cdot x = 112$ $x \div 112 = 7$ $x \div 7 = 112$

i) Una granja produjo m huevos cierto día y se llenaron 80 cajas al empacarlos. Si en cada caja caben 360 huevos, ¿cuál fue el número de huevos que se produjo en ese día?

$m \cdot 80 = 360$ $m \div 360 = 80$ $m \div 80 = 360$

j) El cometa Halley se observó 7 veces en la Tierra durante un período de 532 años. ¿Cada cuántos años se puede observar dicho cometa, si el tiempo entre una aparición y otra es el mismo?



$x \div 7 = 532$ $x \div 532 = 7$ $7 \cdot x = 532$

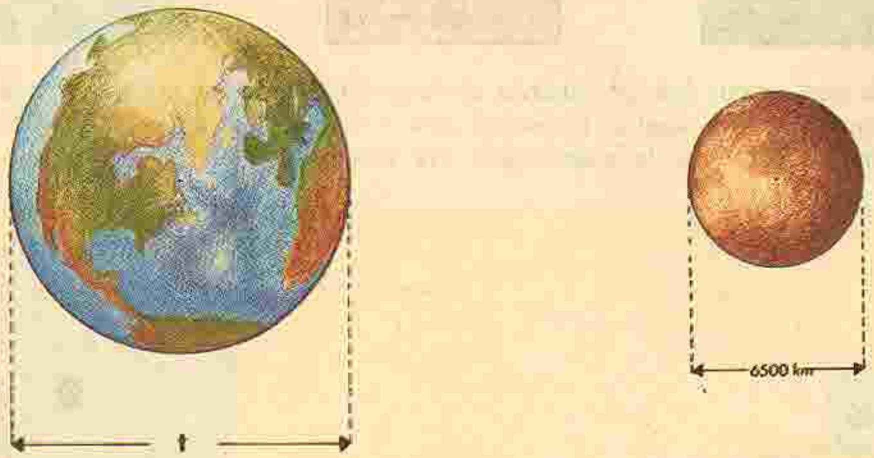
k) Una herencia se distribuye por partes iguales entre 5 personas. Si cada persona recibe $ 3 650, ¿cuál es el valor de la herencia?

$x \div 3\,650 = 5$ $\qquad$ $5 \cdot x = 3\,650$ $\qquad$ $x \div 5 = 3\,650$

l) El área de la superficie ocupada por el estado de Chihuahua es aproximadamente 246 000 kilómetros cuadrados. Si el área de Chihuahua es, aproximadamente, 164 veces mayor que la del Distrito Federal, ¿cuál es el área del D. F.?

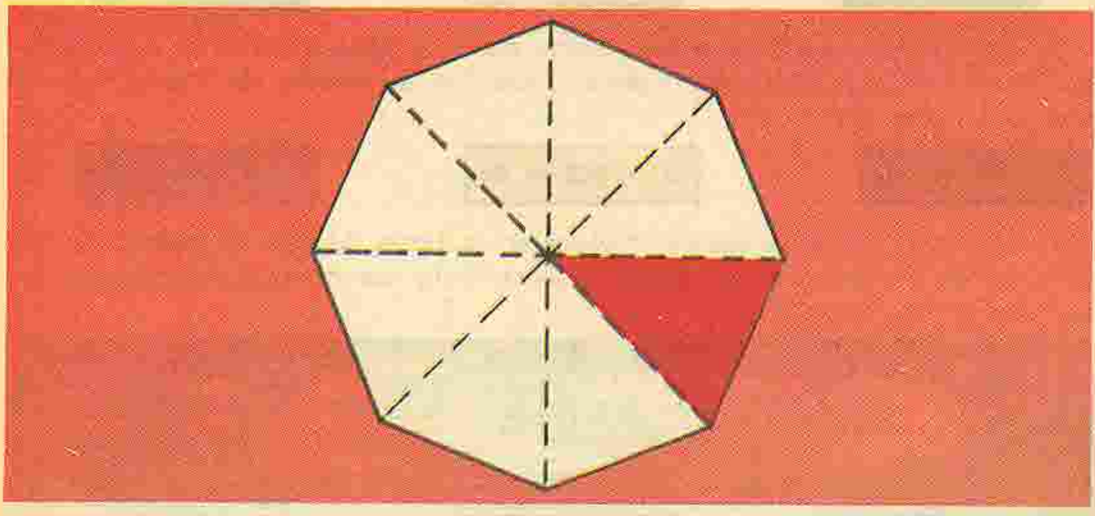
$x \div 164 = 246\,000$ $\qquad$ $164 \cdot x = 246\,000$ $\qquad$ $x \div 246\,000 = 164$

m) El diámetro del planeta Marte es la mitad del diámetro de la Tierra. Si el diámetro de Marte es de, aproximadamente, 6 500 kilómetros, ¿cuál es el diámetro de la Tierra?



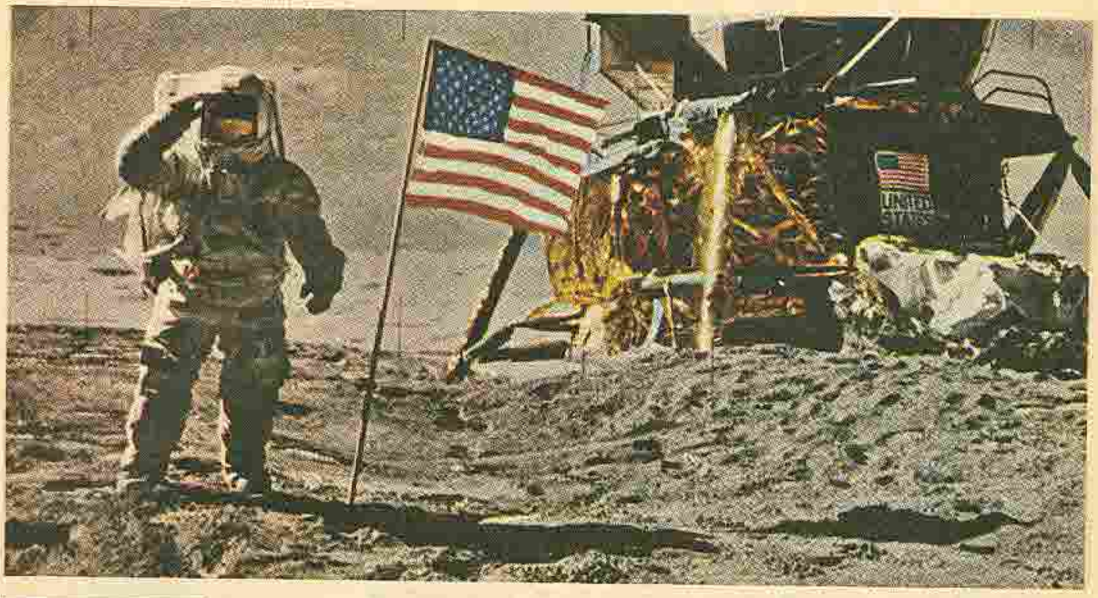
$t \cdot 6\,500 = 2$ $\qquad$ $t \div 2 = 6\,500$ $\qquad$ $2 \cdot t = 6\,500$

n) El octágono regular que se ilustra tiene un área de 96 centímetros cuadrados. ¿Cuál es el área del triángulo coloreado?



$x \div 8 = 96$ $\qquad$ $x \div 96 = 8$ $\qquad$ $8 \cdot x = 96$

o) La gravedad de la Luna es 6 veces menor que la de la Tierra. Por esa razón el peso de un cuerpo en la Luna es la sexta parte de lo que pesa ese mismo cuerpo en la Tierra. Si un cosmonauta se pesa en la Luna y pesa 13 kilogramos, ¿cuál es su peso en la Tierra?



$a \div 13 = 6$ $a \div 6 = 13$ $6 \times a = 13$

A continuación resolveremos problemas un poco más complicados que los anteriores. Para su resolución usaremos ecuaciones también un poco más complejas. Sin embargo, con los conocimientos adquiridos hasta el momento, estamos ya en posibilidad de resolver tanto las ecuaciones como los problemas.

Analice usted el siguiente problema y su resolución.

Juanito y su padre, al comparar sus edades, encontraron la siguiente relación:

Si la edad de Juanito se multiplica por 3 y se le suma 8, se obtiene la edad del padre. Si el papá tiene 35 años, ¿cuál es la edad de Juanito?

Resolución.

Si vamos a resolver este problema por medio de una ecuación, podríamos llamar x a la edad de Juanito. De esa manera el triple de su edad, más 8, será $3x + 8$.

Como esto es igual a la edad del padre, establecemos la ecuación

$$3x + 8 = 35.$$

La solución de esta ecuación será la solución de nuestro problema.

Ahora podríamos resolver esta ecuación adivinando la solución (si usted lo desea, inténtelo). Pero es mejor hacerlo aplicando las propiedades de las ecuaciones. Observe usted el procedimiento.

$$\boxed{3x + 8 = 35}$$

1. Restamos 8 a los dos miembros:

$$(3x + 8) - 8 = 35 - 8.$$

Como $(3x + 8) - 8 = 3x$ y $35 - 8 = 27$, entonces

$$\boxed{3x = 27}$$

2. Dividimos entre 3 los dos miembros de esta nueva ecuación:

$$(3 \bullet x) \div 3 = 27 \div 3.$$

Como $(3 \bullet x) \div 3 = x$ y $27 \div 3 = 9$, entonces

$$\boxed{x = 9}$$

3. Como las ecuaciones

$$3x + 8 = 35$$

$$3x = 27$$

y

$$x = 9$$

tienen la misma solución, concluimos que la solución de $3x + 8 = 35$ es 9.

Comprobamos sustituyendo la x por el 9.

$3 \bullet 9 + 8$ sí es igual a 35

4. Damos la respuesta: "La edad de Juanito es 9 años".

Ecuaciones como la que usamos en el problema anterior pueden resolverse con el mismo procedimiento. Obsérvelo usted en los siguientes ejemplos que se resuelven paralelamente.

Ejemplo 1.

Resolvamos la ecuación

$$8m + 7 = 79$$

Ejemplo 2.

Resolvamos la ecuación

$$14r - 20 = 50$$

Para resolver una ecuación como ésta tendremos que hallar otra ecuación más simple, que tenga la misma solución. Por lo tanto,

buscaremos una ecuación de la forma

$$m = \square$$

buscaremos una ecuación de la forma

$$r = \square$$

Esto puede hacerse por partes. Primero hallaremos una ecuación en la que no aparezca el número que se suma o que se resta. Por eso,

restamos 7 a los dos miembros de la ecuación,

$$(8m + 7) - 7 = 79 - 7,$$

y simplificando obtenemos la ecuación

$$8m = 72$$

sumamos 20 a los dos miembros de la ecuación,

$$(14r - 20) + 20 = 50 + 20,$$

y simplificando obtenemos la ecuación

$$14r = 70$$

Esta nueva ecuación que hemos obtenido es más simple y tiene la misma solución que la ecuación original. Sin embargo, en ella no se ve fácilmente la solución. Para encontrar una ecuación más simple que ésta,

dividimos sus dos miembros entre 8,

$$(8m) \div 8 = 72 \div 8,$$

y simplificando tenemos

$$m = 9.$$

La solución de esta ecuación es 9.

dividimos sus dos miembros entre 14,

$$(14r) \div 14 = 70 \div 14,$$

y simplificando tenemos

$$r = 5$$

La solución de esta ecuación es 5.

Como esta última ecuación tiene la misma solución que la ecuación original, tenemos que

la solución de

$$8m + 7 = 79$$

es $m = 9$

la solución de

$$14r - 20 = 50$$

es $r = 5$

Ejemplo 3. Usando este método, podemos resolver la ecuación $56t + 18 = 1\,418$ en la siguiente forma:

$$\boxed{56t + 18 = 1\,418}$$
$$(56t + 18) - 18 = 1\,418 - 18$$
$$\boxed{56t = 1\,400}$$
$$(56t) \div 56 = 1\,400 \div 56$$
$$\boxed{t = 25}$$

La solución es el número 25. (Compruébelo usted.)

Ejercicio 6. Resuelva las siguientes ecuaciones.

a) $12x + 17 = 197$

b) $25m + 14 = 214$

c) $50n + 11 = 861$

d) $23a + 10 = 355$

e) $43t + 15 = 445$

f) $21p + 21 = 462$

g) $25q + 48 = 48$

h) $37r + 18 = 55$

i) $35c + 48 = 3\,548$

j) $435d + 123 = 5\,678$

k) $10z + 3 = 9$

l) $4a + 8 = 10$

Los siguientes problemas se resuelven con ecuaciones como las que acabamos de tratar. Resuélvalos.

Problemas.

a) El triple de un número, más 25, es 115. ¿Cuál es ese número?

Sea n el número que buscamos. Entonces el triple de ese número, más 25, es $3n + 25$.

Ecuación. $3n + 25 = 115.$

Solución de la ecuación. $n = 30$

Respuesta al problema. El número es 30.

b) Si al quíntuplo de un número se le resta 37 se obtiene 68. ¿Cuál es ese número?

Sea m el número buscado. El quíntuplo de ese número, menos 37, es

c) Si al producto de 85 por un número r le restamos 728, obtenemos por resultado 1 907. ¿Cuál es el número r?

d) Si a 583 le sumamos 8 veces el número x, obtenemos el número 895. ¿Cuánto vale x?

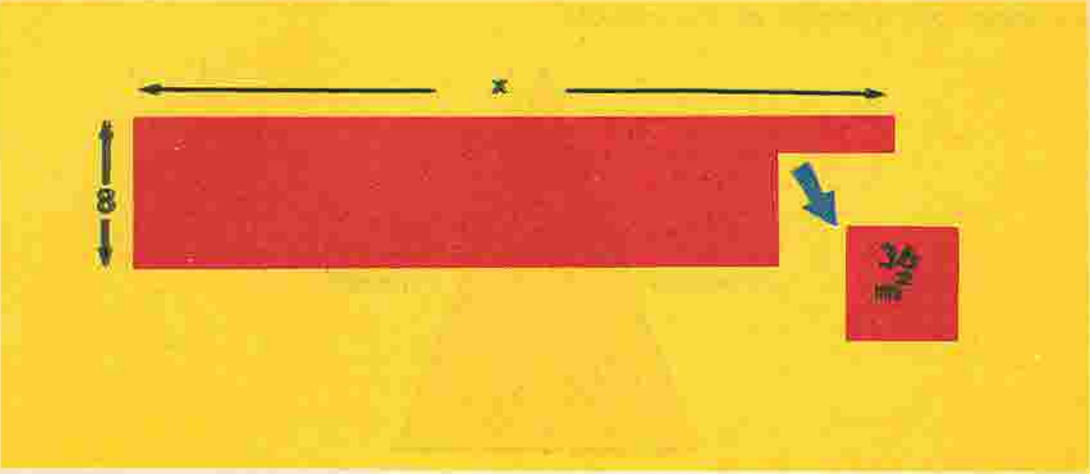
e) A Pablo le triplican el sueldo al ascender de categoría en su trabajo. Si al descontarle $ 385 por impuestos de su nuevo sueldo recibe $ 4 115, ¿cuál era su sueldo anterior?

Llamemos *s* a su sueldo anterior. Entonces el triple de *s*, disminuido en 385, es

f) Si al quíntuplo de la edad de Fernando se le suma 93 se obtiene 163. ¿Cuál es la edad de Fernando?

Sea *f* la edad de Fernando. Entonces, el quíntuplo de *f*, más 93, es

g) Si a la superficie completa de la figura roja se le quita la parte que se indica, la región restante mide 284 metros cuadrados de área. ¿Cuánto mide la base *x*?



Base

Altura

Área de la figura completa

Área de la figura incompleta

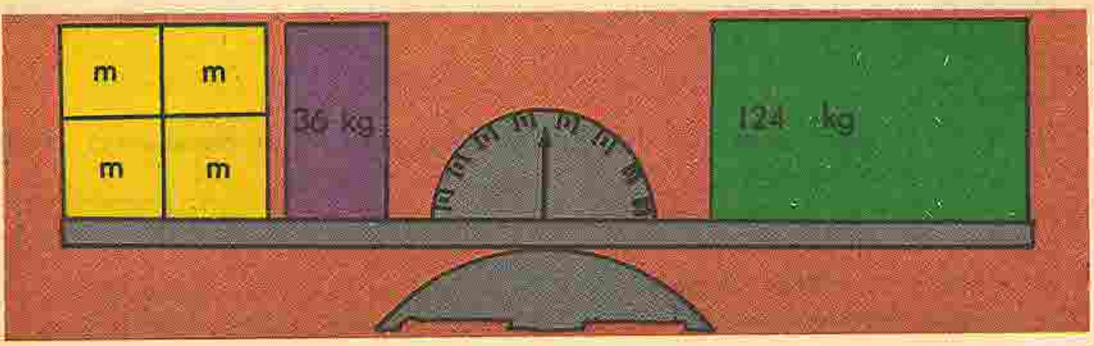
h) La altura del Everest, la montaña más alta del mundo, es 408 metros mayor que el doble de la altura del Volcán de Colima. Si el Everest mide 8 848 metros de altura, ¿cuál es la altura del Volcán de Colima?

Sea *x* la altura del Volcán de Colima. Entonces el doble de esa altura, más 418, es

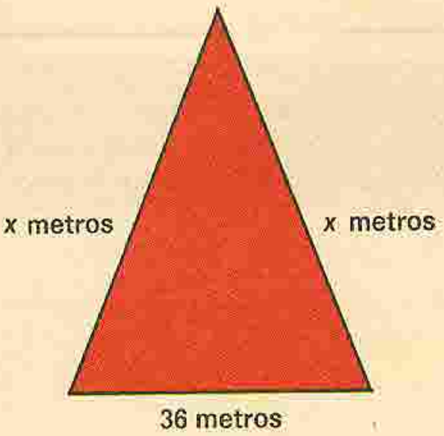
i) El área que ocupa la República de Venezuela es 16 674 kilómetros cuadrados más que el cuádruplo del área de Costa Rica. Si Venezuela ocupa una extensión de 186 926 kilómetros cuadrados, ¿cuál es el área de Costa Rica?

Si llamamos *r* al área de Costa Rica, el cuádruplo de esa área más 16 674 es

j) La balanza que se ilustra abajo está en equilibrio. ¿Cuántos kilos pesa cada uno de los cuerpos *m*?

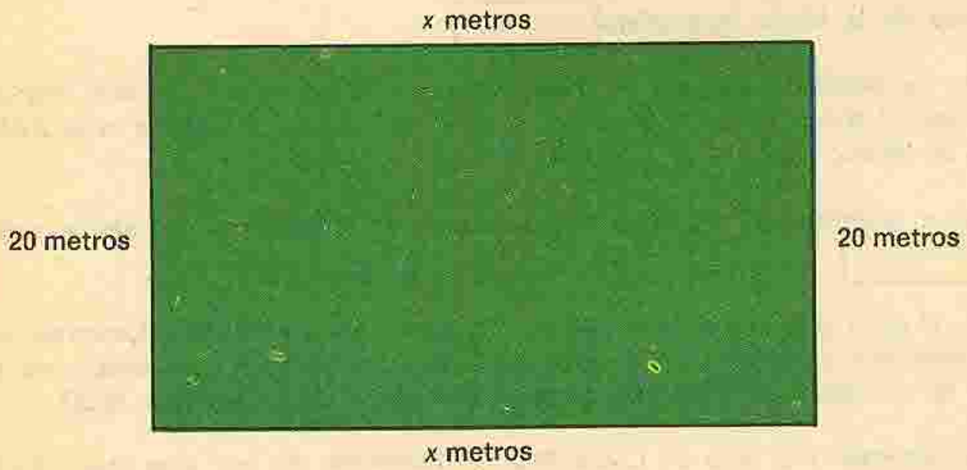


k) La siguiente figura representa un triángulo isósceles. ¿Cuánto vale *x* si el perímetro del triángulo es 116 metros?



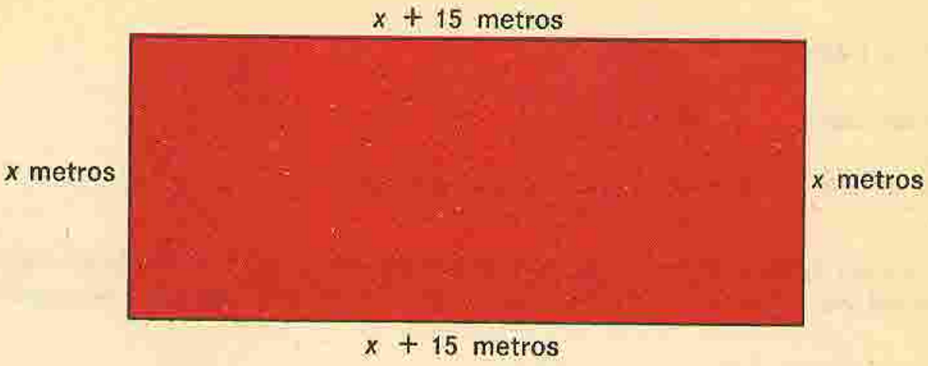
Como el perímetro de una figura es igual a la suma de sus lados, entonces el perímetro de este triángulo es

l) ¿Cuánto vale *x*, si el perímetro de la figura de abajo es 110 metros?



El perímetro de este rectángulo es

m) Si el perímetro del siguiente rectángulo es 70 metros, ¿cuánto mide la base y cuánto la altura?



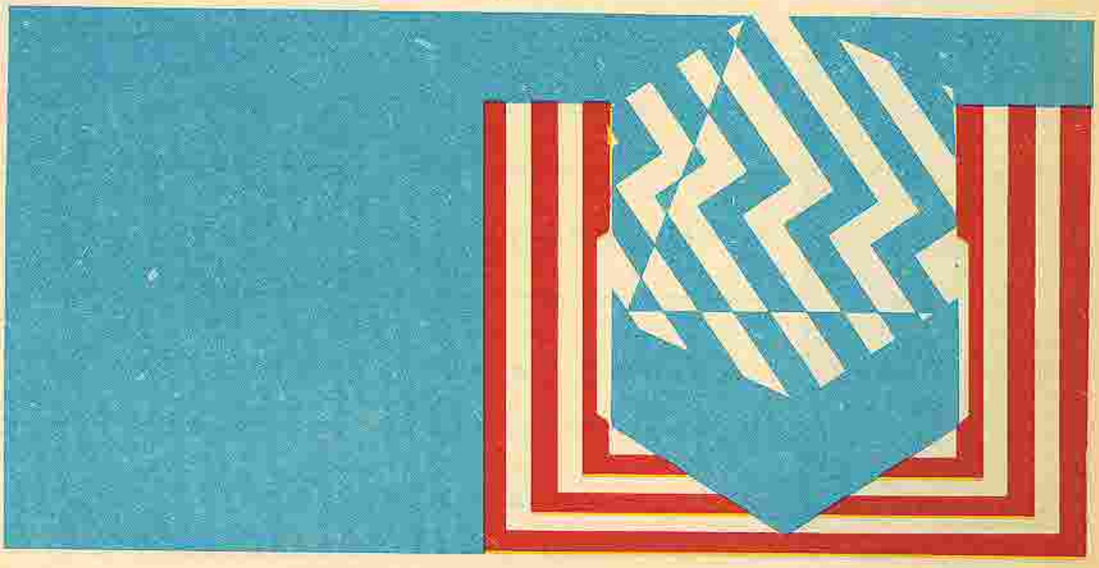
El perímetro del rectángulo, expresado como la suma de sus lados, es

n) Un automóvil recorre n kilómetros cada hora durante su viaje. Después de 5 horas de iniciado el viaje, el conductor observa que si restara 25 a la distancia recorrida hasta el momento, obtendría 300 como resultado. ¿Cuántos kilómetros recorrió en cada hora?

Si llamamos n al número de kilómetros que recorrió en una hora, los que recorrió en 5 horas son y éstos disminuidos en 25 son

o) Dos números consecutivos suman 25. ¿Cuáles son esos números?

Si el número menor es y, el que sigue es y la suma de los dos números se expresa como



p) Juan y Pedro son hermanos. La diferencia de sus edades es un año. Si Pedro es menor que Juan y la suma de las edades de los dos es 37, ¿cuál es la edad de Juan y cuál es la de Pedro?

Edad de Pedro x

Edad de Juan ________

Suma de las dos edades ____________________

q) La edad de Miguel es x y su hermana Margarita tiene el doble de x más 7 años. Si la suma de estas dos edades es 31, ¿cuál es la edad de cada hermano?

Edad de Miguel ____________________

Edad de Margarita ____________________

Suma de las edades de ambos ____________________

Ecuación. ____________________

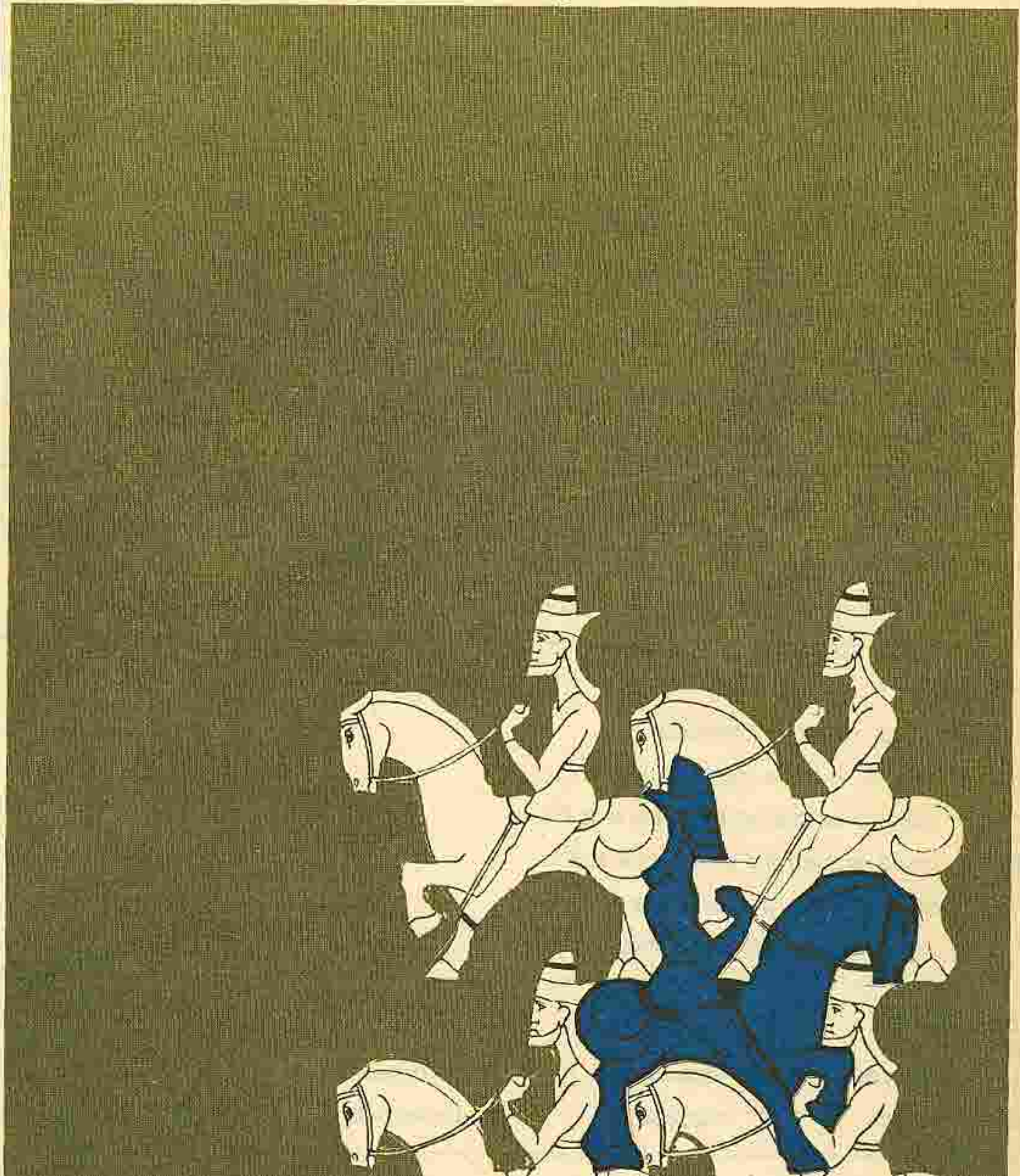
Solución. ____________________

Respuesta. ____________________

Con la resolución de estos problemas hemos terminado nuestro estudio elemental de los números naturales. Para futuras referencias haremos un resumen de las propiedades básicas de la adición y la multiplicación con estos números

Propiedades básicas de las operaciones con números naturales		
Operación Propiedad	adición	multiplicación
Conmutativa	$a + b = b + a$	$ab = ba$
Asociativa	$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(ab)\, c = a\, (bc)$
Elemento neutro	$a + 0 = 0 + a = a$	$a \bullet 1 = 1 \bullet a = a$
Distributiva	$a\ (b + c) = ab + ac$	

Soluciones de Ejercicios y Problemas



Soluciones

Capítulo primero

Los números naturales

I. Los números naturales y los conjuntos

1. Conjuntos

Ejercicio 1

a) El conjunto *P* tiene 5 elementos.
b) El conjunto *C* tiene 3 elementos.
c) *B* tiene 9 elementos.
d) En *N* hay 4 elementos.
e) El conjunto *G* tiene 4 elementos.
f) El conjunto *A* o *B* tiene 9 elementos.

Ejercicio 2.

a) no es b) es c) es d) no es
e) es f) es g) no es

Ejercicio 3.

a) El perro negro pertenece a *P*.
b) El caballo blanco pertenece a *B*.
c) El caballo azabache pertenece a *N*.
d) El perro blanco no pertenece a *N*.
e) El perro blanco pertenece a *B*.
f) El perro blanco no pertenece a *G*.

Ejercicio 4.

a) correcto b) incorrecto c) incorrecto
d) correcto e) correcto f) incorrecto

Ejercicio 5.

a) $P = \{ a, b, c, d, e \}$
b) $G = \{ m, n, o, p \}$
c) $B = \{ c, d, e, r, m, n, o, p, y \}$
d) $N = \{ a, b, s, x \}$

Ejercicio 6

a) $\{ m, a \}$

b) $\{ p, a, l, o, n \}$

c) $\{ m, i, s, p \}$

d) $\{ i \}$

2. Subconjuntos

Ejercicio 7

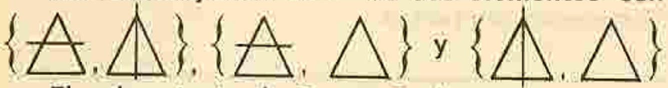
a) correcto b) correcto c) correcto

d) incorrecto e) correcto f) incorrecto

Ejercicio 8

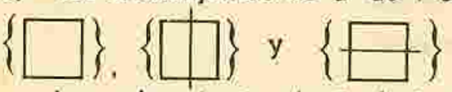
a) Los subconjuntos de *F* de 1 elemento son

Los subconjuntos de *F* de dos elementos son



El subconjunto de *F* con 3 elementos es

b) Los subconjuntos de *G* de 1 elemento son



Los subconjuntos de *G* de 2 elementos son

El subconjunto de *G* con 3 elementos es

c) Los subconjuntos de *H* de 1 elemento son

$\{3\}$ y $\{9\}$

El subconjunto de *H* de 2 elementos es

$\{3, 9\}$

d) Los subconjuntos de *I* que tienen 2 elementos son

$\{2, 9\}$, $\{2, 5\}$ y $\{9, 5\}$

El subconjunto de *I* que tiene 3 elementos es

$\{2, 9, 5\}$

Los subconjuntos de I con 1 elemento son

$\{2\}$, $\{9\}$ y $\{5\}$

Problemas

a) El conjunto de los billetes es $\{5, 10, 20\}$. Puede sacar entonces los siguientes subconjuntos de dos elementos

$\{5, 10\}$, $\{5, 20\}$ y $\{10, 20\}$

Por lo tanto, puede sacar \$ 15, \$ 25, \$ 30.

b) El conjunto de las obras es {"Un viaje a la luna", "20 000 leguas de viaje submarino", "Un viaje al centro de la tierra"}

Si desea leer dos de estas obras, éstas pueden ser:

{"Un viaje a la Luna", "20 000 leguas de viaje submarino"}

{"Un viaje a la Luna", "Un viaje al centro de la tierra"}

{"20 000 leguas de viaje submarino", "Un viaje al centro de la tierra"}

Puede elegir las obras de 3 maneras diferentes.

c) Conjunto de candidatos:

{el uruguayo, el chileno, el brasileño}

Si contrata sólo a un jugador: 3 maneras diferentes.

Si contrata a dos jugadores: 3 maneras diferentes.

Si contrata a los 3 jugadores: 1 manera.

El entrenador puede hacer la contratación en 7 maneras distintas.

d) Si no revienta ningún globo: 1 sola manera.

Si revienta un globo: 3 maneras diferentes.

Si revienta dos globos: 3 maneras diferentes.

Si revienta tres globos: 1 sola manera.

Los resultados diferentes pueden ser 8.

3. Intersección de conjuntos

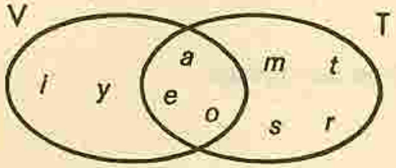
Ejercicio 9

a) La intersección de *N* y *R* es

{  }

Tiene dos elementos.

b)

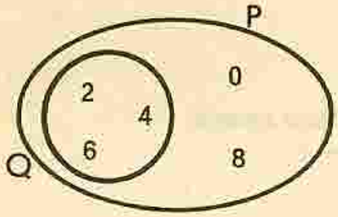


b) La intersección de *V* y *T* es

{ *a*, *e*, *o* }

tiene 3 elementos.

c)



c) La intersección de *P* y *Q* es

{ 2, 4, 6 }

tiene 3 elementos.

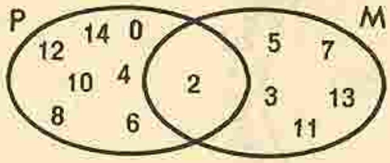
d)

d) La intersección de *M* y *N* es

{ }

tiene 0 elementos.

e)



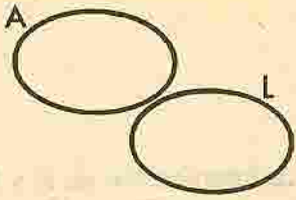
e) La intersección de *P* y *M* es

{ 2 }

tiene 1 elemento.

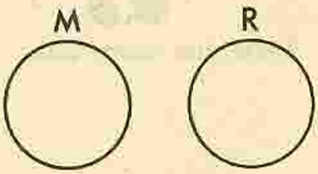
Ejercicio 10

a)



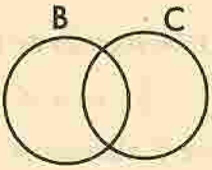
A y *L* son ajenos.

b)



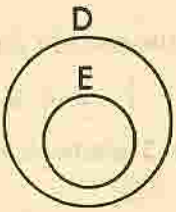
M y *R* son ajenos.

c)



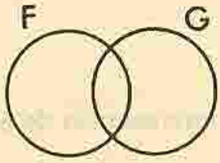
B y *C* no son ajenos.

d)



D y *E* no son ajenos.

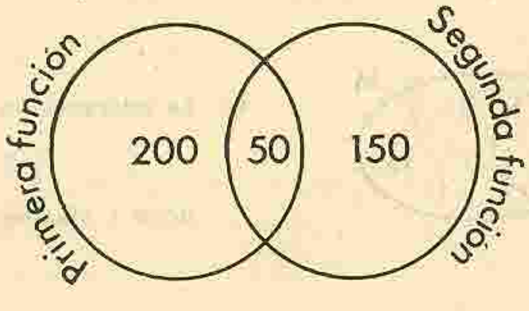
e)



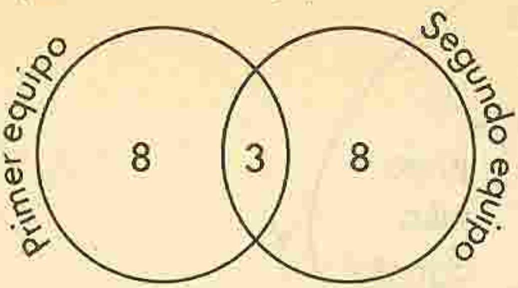
F y *G* no son ajenos.

Problemas:

a) 50 personas estuvieron presentes en ambas funciones.

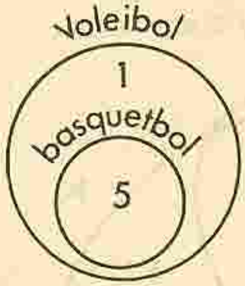


b) 3 personas forman parte de los dos equipos.



---

c) Se necesitan 6 personas como mínimo. (5 pueden pertenecer a los dos equipos.)



---

d) No, porque los dos convoyes suman 29 carros.

---

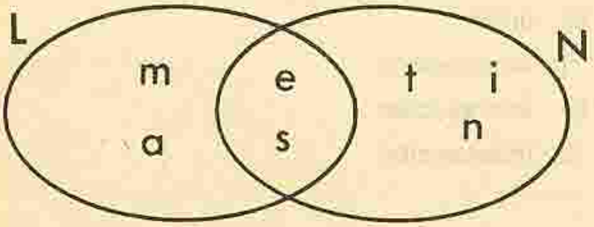
4. Unión de conjuntos

Ejercicio 11

a) La unión de *J* y *H* es el conjunto 

J tiene 3 elementos. En *H* hay 3 elementos.

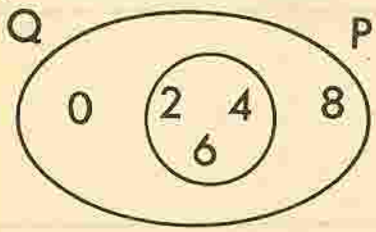
La unión tiene 5 elementos.

b) 

La unión de *L* y *N* es el conjunto $\{ m, a, e, s, t, n, i \}$

Hay 4 elementos en *L*. Hay 5 elementos en *N*.

Hay 7 elementos en la unión.

c) 

La unión de *P* y *Q* es el conjunto $\{ 0, 2, 4, 6, 8 \}$.

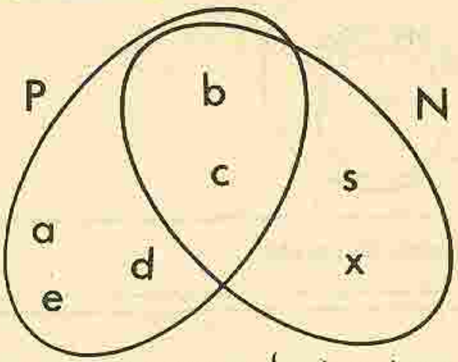
P tiene 5 elementos. *Q* tiene 3 elementos.

En la unión hay 5 elementos.

d)

La unión de *P* y *V* es el conjunto {marzo, abril, mayo, junio, julio, agosto}.
En *P* hay 3 elementos. En *V* hay 3 elementos.
La unión tiene 6 elementos.

e)



La unión de *P* y *N* es el conjunto $\{a, b, c, d, e, s, x\}$.
El número de elementos de *P* es 5. El número de elementos de *N* es 4.
El número de elementos de la unión es 7.

Ejercicio 12

a) subconjunto
b) intersección
c) unión
d) unión
e) intersección
f) intersección
g) subconjunto
h) intersección
i) subconjunto
j) intersección
k) intersección

5. Problemas

Ejercicio 13

a) 37 b) 26

Ejercicio 14

a) 15　　b) 22

Ejercicio 15

a) 30　　b) 10

Problemas:

a) 4) 50
b) 4) 14
c) 3) 8　4) 3　5) 7
d) 3) 7　5) 20　6) 35
e) 2) 7　3) 8　4) azul y amarillo　5) 17
f) 3) 3　4) 6　5) 9
g) 4) 80
h) 2) 5　3) 11　4) 20
i) 2) 60　4) azul　5) 60　6) 210
j) 3) 100　4) 90　5) 50
k) 1) 50　2) 100　3) 150　4) 300

II. Adición de números naturales

1. La Tabla de adición

Ejercicio 1

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

2. Números y letras

Ejercicio 2

a) 3 + 2   b) 4 + 1   c) 6 + 5   d) 5 + 2
e) 1 + 1   f) 4 + 6   g) 4 + 4   h) 2 + 5
i) 6 + 6   j) 5 + 4   k) 5 + 5   l) 2 + 6

Ejercicio 3

a) 30 + 47 = 77   b) 65 + 43 = 108   c) 40 + 78 = 118
d) 165 + 98 = 263   e) 400 + 96 = 496   f) 354 + 168 = 522
g) 0 + 87 = 87   h) 209 + 0 = 209

Ejercicio 4

a) 3 + 2 = 5   b) 7 + 3 = 10
c) 3 + 8 = 11   d) 15 + 3 = 18
e) 3 + 0 = 3   f) 27 + 3 = 30
g) 13 + 3 + 2 = 18   h) 3 + 18 + 2 = 23
i) 25 + 3 + 0 + 3 = 31   j) 3 + 3 + 3 + 6 = 15

Ejercicio 5

a) 125 + 34 = 159   b) 75 + 80 = 155
c) 250 + 250 = 500   d) 8 + 2 = 10
e) 1 754 + 2 000 = 3 754

3. Ecuaciones

Ejercicio 6

$4 + \boxed{2} = 6$. El número de vasos que faltan por llenarse.

$\boxed{6} + 4 = 10$. Los kilogramos que pesa la parte coloreada.

$16 + \boxed{4} = 20$. El número de bancas vacías.

$\boxed{6} + 15 = 21$. El número de cuadros que no fueron coloreados.

$40 + \boxed{60} = 100$. La longitud que sumada con 40 da 100.

$38 + \boxed{40} = 78$. El número de grados que aumenta la temperatura.

$50 + \boxed{80} = 130$. Lo que debe aumentarse de un líquido.

$15 + \boxed{25} = 40$. La longitud del segmento de color.

$30 + \boxed{60} = 90$. La medida del ángulo complementario.

$28 + \boxed{8} = 36$. El número de cubos que faltan en la ilustración.

Ejercicio 7

a) $b = 25$ porque $45 + 25 = 70$

b) $r = 60$ porque $60 + 30 = 90$

c) $n = 35$ porque $50 + 35 = 85$

d) $x = 400$ porque $400 + 100 = 500$

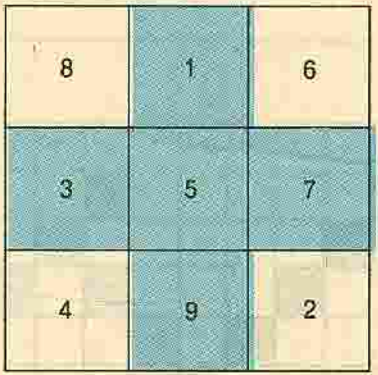
e) $a = 27$ porque $60 + 27 = 87$

Ejercicio 8

	Solución	Comprobación		Solución	Comprobación
a)	$n = 15$	$15 + 3 = 18$	b)	$x = 38$	$5 + 38 = 43$
c)	$b = 18$	$18 + 42 = 60$	d)	$y = 50$	$150 + 50 = 200$
e)	$x = 75$	$75 + 90 = 165$			

Ejercicio 9

a)



8	1	6
3	5	7
4	9	2

b) $a = 6$ $b = 2$ $c = 7$ $d = 3$ $e = 4$

c) $a = 5$ $b = 2$ $c = 9$ $d = 3$

d) $x = 6$ $y = 4$ $z = 1$

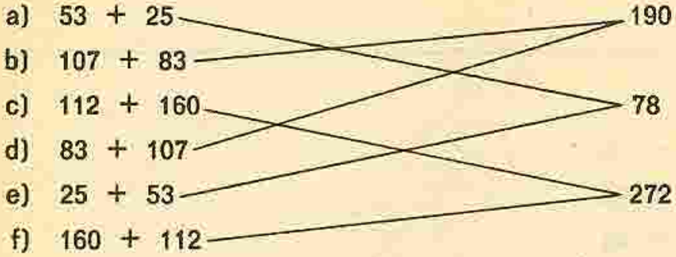
e) $a = 4$ $b = 7$ $c = 5$ $d = 11$ $e = 12$

f) $a = 10$ $b = 8$ $c = 13$ $d = 3$

$e = 5$ $f = 9$ $g = 15$ $h = 14$

4. Propiedades básicas de la adición

Ejercicio 10



a) 53 + 25

b) 107 + 83

c) 112 + 160

d) 83 + 107

e) 25 + 53

f) 160 + 112

Ejercicio 11

a) 9 305	b) 9 305	c) 2 484
d) 2 484	e) 122 702	f) 122 702

Ejercicio 12

a) $6 + 11 = 11 + 6$

b) $36 + 25 = 25 + 36$

c) ~~5 875 + 3 694 = 3 694 +~~ 5 875

d) $26\,875 + 63\,472 = 63\,472 + 26\,875$

e) $5 + a = a + 5$

f) $b + 8 = 8 + b$

g) $15 + h = h + 15$

h) $r + 20 = 20 + r$

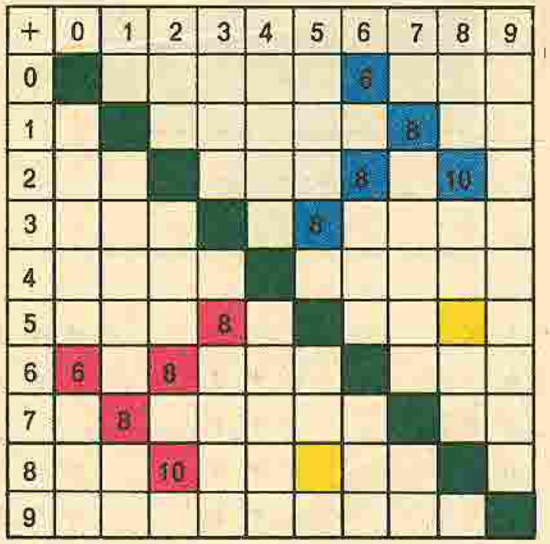
i) $x + y = y + x$

j) $m + n = n + m$

k) $r + s = s + r$

l) $a + b = b + a$

Ejercicio 13



+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	■						🟦 6			
1		■						🟦 8		
2			■				🟦 8		🟦 10	
3				■		🟦 8				
4					■					
5				🟥 8		■			🟨	
6	🟥 6		🟥 8				■			
7		🟥 8						■		
8			🟥 10			🟨			■	
9										■

Ejercicio 14

a) Simétricamente.

b) Coinciden, quedan encimadas.

c) Sí.

d) Sí.

e) Aparece en la tabla.

f) 8 + 5 y 5 + 8.

g) $b + a$.

h) Iguales.

i) Buscando los cuadros simétricos a los cuadros de las sumas dadas.

Ejercicio 15

a) 2 b) 3 c) 9 d) 18

e) 0 f) $x = 8$ g) $m = 11$ h) $x = 30$

i) $s = 1$ j) $r = 56$

Ejercicio 16

a) La expresión (7 + 3) + 5 indica la suma de 7 + 3 y 5. Es decir, (7 + 3) + 5 = 10 + 5.

b) La expresión 7 + (3 + 5) indica la suma de 7 y 3 + 5. Es decir, 7 + (3 + 5) = 7 + 8.

c) La expresión (27 + 34) + 12 representa la suma de 27 + 34 y 12. Es decir, (27 + 34) + 12 = 61 + 12.

d) La expresión 27 + (34 + 12) indica la suma de 27 y 34 + 12. Es decir, 27 + (34 + 12) = 27 + 46.

e) La suma de 3 + 0 y 9 se indica con la expresión (3 + 0) + 9.

f) La suma de 3 y 0 + 9 se indica con la expresión 3 + (0 + 9).

g) La suma de 3 + 4 y 80 se indica con la expresión (3 + 4) + 80.

h) La suma de $a + b$ y c se indica con la expresión $(a + b) + c$.

i) La expresión $a + (b + c)$ indica la suma de a y $b + c$.

Ejercicio 17

a) 5 + 7 b) 9 + 3 c) 15 + 2 d) 10 + 7

e) 7 + 10 f) 16 + 1

Ejercicio 18

a) 6 + 10 = 16
b) 8 + 8 = 16
c) 12 + 36 = 48
d) 27 + 21 = 48
e) 30 + 80 = 110
f) 30 + 80 = 110
g) 135 + 429 = 564
h) 381 + 183 = 564

Ejercicio 19

a) 15
b) 53
c) 197
d) 5 500

Ejercicio 20

a) 5 + (8 + 7)
b) 11 + (5 + 10)
c) 7 + (0 + 3)
d) (10 + 70) + 80
e) $(m + 5) + 12$
f) $x + (y + z)$
g) $(a + r) + s$
h) $m + (p + q)$

Ejercicio 21

a) 1) 3 + 4 + 8 = 3 + (4 + 8) = 3 + 12 = 15
2) 3 + 4 + 8 = (3 + 4) + 8 = 7 + 8 = 15

b) 1) 5 + 9 + 3 = (5 + 9) + 3 = 14 + 3 = 17
2) 5 + 9 + 3 = 5 + (9 + 3) = 5 + 12 = 17

c) 1) 7 + 8 + 2 = 7 + (8 + 2) = 7 + 10 = 17
2) 7 + 8 + 2 = (7 + 8) + 2 = 15 + 2 = 17

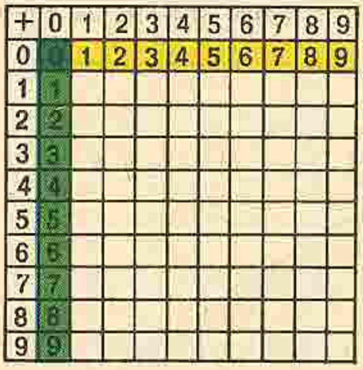
d) 1) 0 + 8 + 15 = (0 + 8) + 15 = 8 + 15 = 23
2) 0 + 8 + 15 = 0 + (8 + 15) = 0 + 23 = 23

e) 1) 15 + 0 + 7 = 15 + (0 + 7) = 15 + 7 = 22
2) 15 + 0 + 7 = (15 + 0) + 7 = 15 + 7 = 22

Ejercicio 22

a) 27
b) 17
c) 8
d) 6

Ejercicio 23



+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1									
2	2									
3	3									
4	4									
5	5									
6	6									
7	7									
8	8									
9	9									

Ejercicio 24

a) $1 + 0 = 1$
$2 + 0 = 2$
$3 + 0 = 3$
$4 + 0 = 4$
$5 + 0 = 5$
$6 + 0 = 6$
$7 + 0 = 7$
$8 + 0 = 8$
$9 + 0 = 9$

b) $0 + 1 = 1$
$0 + 2 = 2$
$0 + 3 = 3$
$0 + 4 = 4$
$0 + 5 = 5$
$0 + 6 = 6$
$0 + 7 = 7$
$0 + 8 = 8$
$0 + 9 = 9$

c) $0 + 0 = 0$

d) $a + 0 = a$

e) $0 + a = a$

Ejercicio 25

a) 3
b) 37 685
c) 1
d) P
e) m
f) $2 + a$
g) $r + 5$
h) $m + n$

Ejercicio 26

Conmutativa	$a + b = b + a$
Asociativa	$(a + b) + c = a + (b + c)$
Elemento neutro	$a + 0 = 0 + a = a$

Ejercicio 27

a) Conmutativa
b) Conmutativa
c) Asociativa
d) Asociativa
e) Elemento neutro
f) Elemento neutro
g) Conmutativa
h) Conmutativa
i) Elemento neutro
j) Elemento neutro
k) Conmutativa
l) Conmutativa
m) Conmutativa
n) Elemento neutro

5. Problemas

a) 412 kilómetros.

b) El segmento $\overline{AC}$ mide 125 metros; el segmento $\overline{MO}$ mide 288 metros; $\overline{PR}$ mide 496 metros; $\overline{SU}$ mide 407 metros; $\overline{DF}$ mide 1 181 metros; $\overline{XZ}$ mide 605 metros y $\overline{GK}$ mide 1 586 metros.

c) 251 kilómetros.

d) 410 metros.

e) La línea *ABCDE* mide 296 metros; la línea *MNOPQ* mide 1 106 metros; la línea *FGHIJ* mide 1 626 metros; la línea *RSTUV* mide 607 metros.

Ejercicio 28

a) 293 m   b) 1 398 m   c) 156 m
d) 144 m   e) 200 m   f) 249 m
g) 1 540 m   h) 360 m   i) 1 822 m
j) 332 m

Ejercicio 29

a) 505 m   b) 150 m   c) 2 210 m
d) 2 790 m   e) 730 m   f) 3 220 m
g) 2 510 m   h) 3 520 m

Ejercicio 30

	Distancias en millones de kilómetros
Distancia de Mercurio al Sol	58
Distancia de Venus al Sol	107
Distancia de la Tierra al Sol	150
Distancia de Marte al Sol	224
Distancia de Júpiter al Sol	773
Distancia de Saturno al Sol	1 417

Ejercicio 31

a) $$\begin{array}{r} 235 \\ +\ 487 \\ \hline 722 \end{array}$$

b) $$\begin{array}{r} 589 \\ +\ 276 \\ \hline 865 \end{array}$$

c) $\begin{array}{r} 794 \\ +\ 608 \\ \hline 1\,402 \end{array}$ d) $\begin{array}{r} 273 \\ +\ 485 \\ 674 \\ \hline 1\,432 \end{array}$ e) $\begin{array}{r} 784 \\ +\ 569 \\ 289 \\ \hline 1\,642 \end{array}$ f) $\begin{array}{r} 72\,905 \\ +\ 54\,276 \\ \hline 127\,181 \end{array}$

g) $\begin{array}{r} 68\,043 \\ +\ 31\,957 \\ \hline 100\,000 \end{array}$ h) $\begin{array}{r} 5\,758 \\ +\ 9\,665 \\ \hline 15\,423 \end{array}$ i) $\begin{array}{r} 8\,456 \\ +\ 4\,591 \\ \hline 13\,047 \end{array}$ j) $\begin{array}{r} 71\,228 \\ +\ 29\,972 \\ \hline 101\,200 \end{array}$

III. Multiplicación de números naturales

1. La multiplicación y la adición

Ejercicio 1

a) 8 + 8 + 8 + 8 + 8
b) 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5
c) 10 + 10
d) 0 + 0 + 0 + 0 + 0
e) 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1
f) 4 × 8
g) 8 × 4
h) 3 × 5
i) 6 × 0
j) 7 × 1
k) 4 × 78
l) 2 × 1 027

Ejercicio 2

a) 5 + 5 + 5
3 × 5

b) 8 + 8 + 8 + 8
4 × 8

c) 10 + 10 + 10 + 10 + 10
5 × 10

Ejercicio 3

a) Área : 3 + 3 + 3 + 3 = 12 (unidades cuadradas)
Área : 4 × 3 = 12 (unidades cuadradas)

b) Área : 6 + 6 = 12 (unidades cuadradas)
Área : 2 × 6 = 12 (unidades cuadradas)

c) Área : 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 15 (unidades cuadradas)
Área : 5 × 3 = 15 (unidades cuadradas)

d) Área : $9 + 9 + 9 + 9 = 36$ (unidades cuadradas)
Área : $4 \times 9 = 36$ (unidades cuadradas)

e) Área : $1 + 1 + 1 = 3$ (unidades cuadradas)
Área : $3 \times 1 = 3$ (unidades cuadradas)

Ejercicio 4

a) 0 b) 0 c) 4 d) 7

e) 0 f) 1 g) 0 h) 0

Ejercicio 5

a) $3 \bullet a = 3 \bullet 5 = 15$

b) $2 \bullet a = 2 \bullet 5 = 10$

c) $7 \bullet a = 7 \bullet 5 = 35$

d) $4 \bullet a = 4 \bullet 5 = 20$

e) $a \bullet 6 = 5 \bullet 6 = 30$

f) $a \bullet 10 = 5 \bullet 10 = 50$

g) $1\,000 \bullet a = 1\,000 \times 5 = 5\,000$

h) $5\,728 \bullet a = 5\,728 \times 5 = 28\,640$

Ejercicio 6

x	$10x$	$100x$	$1\,000x$
350 micras	3 500 micras	35 000 micras	350 000 micras
250 micras	2 500 micras	25 000 micras	250 000 micras
150 micras	1 500 micras	15 000 micras	150 000 micras
60 micras	600 micras	6 000 micras	60 000 micras

Ejercicio 7

a) $a + a + a + a$
$4a$

b) $m + m + m + m + m + m$
$6m$

c) $x + x + x + x$
$4x$

d) $r + r + r + r$
$4r$

e) $m + m + m + m + m + m$
$6m$

f) $a + a + a + a + a + a$
$6a$

g) $m + m + m + m$
$4m$

h) $n + n + n + n + n + n + n + n$
$8n$

i) $r + r + r + r + r + r + r$
$7r$

Ejercicio 8

a) 8
b) 12
c) 24
d) 5
e) 0

Ejercicio 9

a) $p + p + r$
b) $m + m$
c) $n + n + n + n + n + n + n$
d) $a + a + a + a + a$
e) $5x$
f) $2m$
g) $4y$
h) s
i) 0

Ejercicio 10

a) $6z$
b) $9y$
c) $12t$
d) $8q$
e) $9b$
f) $9p$
g) $6c$
h) $12w$
i) $12r$

Ejercicio 11

a) $2 \cdot 4 = 8$
b) $4 \cdot 3 = 12$
c) $5 \cdot 2 = 10$
d) $5 \cdot 5 = 25$
e) $6 \cdot 1 = 6$
f) $1 \cdot 6 = 6$
g) $1 \cdot 1 = 1$
h) $1 \cdot 2 = 2$
i) $3 \cdot 3 = 9$
j) $5 \cdot 2 = 10$

Ejercicio 12

a) $8 \cdot 3 = 24$
b) $15 \cdot 6 = 90$
c) $6 \cdot 20 = 120$
d) $12 \cdot 0 = 0$
e) $5 \cdot 0 = 0$
f) $1 \cdot 8 = 8$
g) $17 \cdot 1 = 17$

2. Cuadrado de un número natural

Ejercicio 13

a) 7^2 b) 9^2 c) 1^2 d) 1000^2

e) 0^2 f) n^2 g) x^2 h) 64

i) 10 000 j) 122 500 k) *mm* l) *rr*

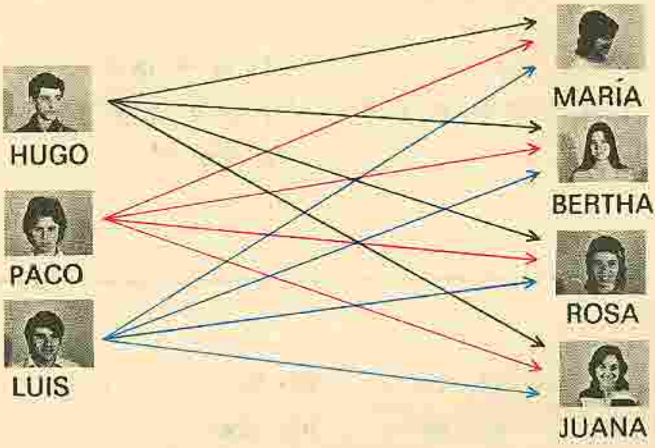
Ejercicio 14

a) 9 b) 4 c) 16 d) 25

e) 36 f) 100 g) 121 h) 10 000

i) 1 j) 0

3. Problemas y ecuaciones



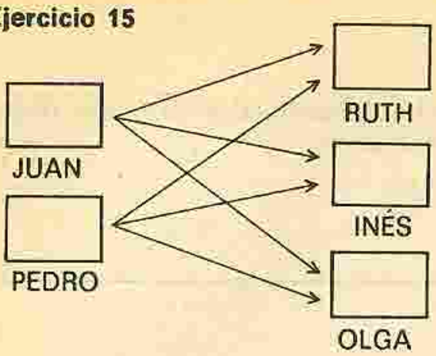
a) Aquí se muestran con flechas las diferentes maneras de formar una pareja donde pueda estar Hugo. Tales posibles parejas son: Hugo y María, Hugo y Bertha, Hugo y Rosa, Hugo y Juana. El número de parejas donde puede estar Hugo es 4.

b) Indique con flechas rojas las diferentes maneras de formar una pareja donde esté Paco. Tales parejas pueden ser: Paco y María, Paco y Bertha, Paco y Rosa, Paco y Juana. El número de parejas donde puede estar Paco es 4.

c) Muestre con flechas azules las parejas que se pueden formar con Luis y alguna de las señoritas. Se pueden formar 4 parejas diferentes con Luis.

d) Ahora podemos observar que el número total de parejas diferentes que se podrían formar para el baile es $4 + 4 + 4 = 12$. También podemos pensar en que tal número es $3 \times 4 = 12$.

Ejercicio 15

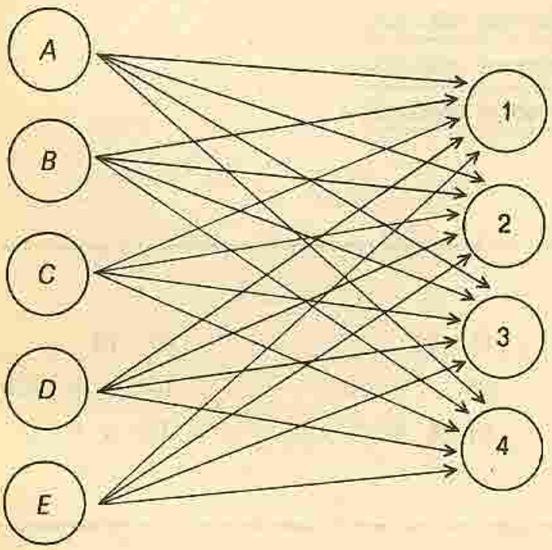


Con Juan se pueden formar 3 parejas.

Con Pedro se pueden formar 3 parejas.

Por lo tanto, el total de parejas distintas es 3 + 3 = 6. O bien, 2 × 3 = 6.

Ejercicio 16



Número de parejas con A : 4

Número de parejas con B : 4

Número de parejas con C : 4

Número de parejas con D : 4

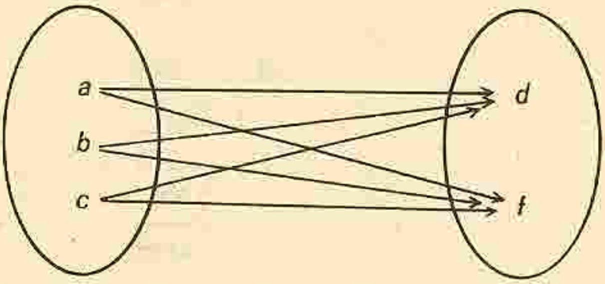
Número de parejas con E : 4

El número total de parejas diferentes es 5 × 4 = 20.

Problema. ¿Cuántas parejas diferentes se pueden formar con m hombres y n mujeres? (Cada pareja constituida por un hombre y una mujer.)

$$m \times n$$

Ejercicio 17



(a, d), (a, f), (b, d), (b, f), (c, d), (c, f).

Problema.

Respuesta. $6 \times 6 = 36$

Problema. La persona que apuesta al 7 tiene más probabilidades de ganar porque hay más parejas que suman 7, que parejas que suman 11.

Suman 7 (1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1).

Suman 11 (5, 6), (6, 5).

Ejercicio 18

a) 12 b) 6 c) 16 d) 20

e) 20 f) 300 g) 150 h) 500

Ejercicio 19

a) $\boxed{m \times 3 = 60}$ $\boxed{m = 20}$ 20 decímetros cúbicos.

b) $\boxed{x \bullet 9 = 54}$ $\boxed{x = 6}$ 6 decímetros cúbicos.

c) $\boxed{v \bullet 19 = 95}$ $\boxed{v = 5}$ 5 decímetros cúbicos.

d) $\boxed{3 \bullet e = 24}$ $\boxed{e = 8}$ 8

e) $\boxed{5 \bullet e = 15}$ $\boxed{e = 3}$ 3

Ejercicio 20

a) 8 b) 5 c) 15 d) 12

e) $x = 7$ f) $m = 2$ g) $r = 20$ h) $p = 100$

i) $a = 8$ j) $z = 4$ k) $b = 2$ l) $a = 1$

m) $b = 2$ n) $m = 2$

Problema.

a)

$$\begin{array}{r} 483 \\ \times \ 21 \\ \hline 483 \\ 966 \\ \hline 10143 \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{r} 318 \\ \times \ 35 \\ \hline 1590 \\ 954 \\ \hline 11130 \end{array}$$

c)

$$\begin{array}{r} 397 \\ \times \ 34 \\ \hline 1588 \\ 1191 \\ \hline 13498 \end{array}$$

d)

$$\begin{array}{r} 315 \\ \times \ 41 \\ \hline 315 \\ 1260 \\ \hline 12915 \end{array}$$

4. Propiedades básicas de la multiplicación

El área de un rectángulo que mide *m* unidades de base y *n* unidades de altura, se puede calcular así:

$$m \times n, \text{ o así: } n \times m$$

Ejercicio 21

a) $\begin{array}{r} 30 \\ \times\ 40 \\ \hline 1\,200 \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{r} 40 \\ \times\ 30 \\ \hline 1\,200 \end{array}$ $\qquad$ b) $\begin{array}{r} 60 \\ \times\ 56 \\ \hline 3\,360 \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{r} 56 \\ \times\ 60 \\ \hline 3\,360 \end{array}$

c) $\begin{array}{r} 600 \\ \times\ 400 \\ \hline 240\,000 \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{r} 400 \\ \times\ 600 \\ \hline 240\,000 \end{array}$

Ejercicio 22

$28 \times 780 = 21\,840$

$9\,150 \times 55 = 503\,250$

$9 \times 5\,318 = 47\,862$

$202 \times 1\,617 = 326\,634$

$915 \times 34 = 31\,110$

Ejercicio 23

a) 4 $\qquad$ b) 74 $\qquad$ c) n $\qquad$ d) $x = 8$

e) $a = 12$ $\qquad$ f) $n = 40$ $\qquad$ g) $z = 35$

Ejercicio 24

a) 4×8 $\qquad$ b) 7×2 $\qquad$ d) sí $\qquad$ e) $b \bullet a$

g) $a \bullet a$

Ejercicio 25

a) 9×40 $\qquad$ b) 32×6 $\qquad$ c) 7×54

d) 50×20 $\qquad$ e) 24×9 $\qquad$ f) $r \times 14$

g) $5 \bullet a^2$ $\qquad$ h) $m \times b^2$ $\qquad$ i) $n^2 \times c$

Ejercicio 26

a) $v = (15 \times 4) \times 5 = 60 \times 5 = 300$

$v = 15 \times (4 \times 5) = 15 \times 20 = 300$

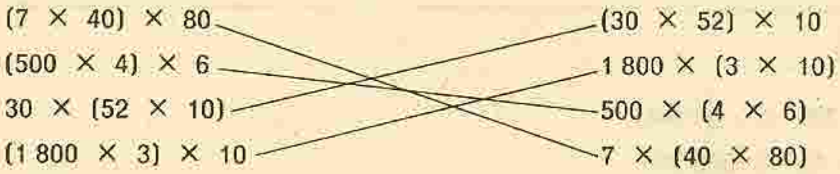
b) $v = 50 \times (10 \times 20) = 50 \times 200 = 10\,000$
$v = (50 \times 10) \times 20 = 500 \times 20 = 10\,000$

c) $v = 100\ (15 \bullet 30) = 100 \times 450 = 45\,000$
$v = (100 \bullet 15) \bullet 30 = 1\,500 \times 30 = 45\,000$

Ejercicio 27

$a \bullet (b \bullet c)$	$(a \bullet b) \bullet c$
a) $3 \bullet (2 \bullet 5) = 3 \bullet 10 = 30$	$(3 \bullet 2) \bullet 5 = 6 \bullet 5 = 30$
b) $2 \bullet (8 \bullet 3) = 2 \bullet 24 = 48$	$(2 \bullet 8) \bullet 3 = 16 \bullet 3 = 48$
c) $1 \bullet (3 \bullet 2) = 1 \bullet 6 = 6$	$(1 \bullet 3) \bullet 2 = 3 \bullet 2 = 6$
d) $8 \bullet (0 \bullet 10) = 8 \bullet 0 = 0$	$(8 \bullet 0) \bullet 10 = 0 \bullet 10 = 0$
e) $9 \bullet (1 \bullet 1) = 9 \bullet 1 = 9$	$(9 \bullet 1) \bullet 1 = 9 \bullet 1 = 9$

Ejercicio 28



Ejercicio 29

a) 9　　b) 4　　c) $m = 6$
d) $x = 10$　　e) $r = 5$　　f) $m = 8$

Ejercicio 30

a) $(a \bullet b) \bullet c$　　b) $(m \bullet n) \bullet p$
c) $a \bullet (b \bullet n)$　　d) $(f \bullet n) \bullet t$
e) $a^2 \bullet (b^2 \bullet m^2)$　　f) $(r^2 \bullet m^2)\ n^2$

Ejercicio 31

a) 320　　b) 600　　c) 720　　d) 5 000
e) 1 000　　f) 3 000　　g) 4 000　　h) 0
i) 420

Ejercicio 32

a) 400　　b) 60　　c) 50　　d) 80
e) 0　　f) 1 000　　g) 1

Ejercicio 33

a) 192 b) 60 c) 600 d) 180
e) 1 000 f) 324 g) 300 h) 0
i) 64 j) 1

Ejercicio 34

a) 8^3 b) 3^4 c) p^3 d) 7^2
e) m^2 f) t^5 g) 6^5 h) 5^6
i) x^4 j) a^{10}

Ejercicio 35

a) $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$ b) $8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8$
c) $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$ d) $b \cdot b \cdot b \cdot b$
e) $m \cdot m \cdot m$ f) $z \cdot z$
g) $k \cdot k \cdot k \cdot k \cdot k \cdot k \cdot k$ h) $1\,000 \cdot 1\,000$

Ejercicio 36

a) 125 b) 16 c) 100 d) 50
e) 2 000 f) 150 g) 20 h) 53
i) 40 j) 55 k) 32 l) 99

Ejercicio 37

a) $(5 + 2)^3$ b) $(4 + 3)^2$ c) $(a + 2)^3$
d) $(m + 1)^2$ e) $(m + n)^2$ f) $(a + 5)^4$

Ejercicio 38

a) $(a + 5)\ (a + 5)$
b) $(a + b)\ (a + b)$
c) $(m + n)\ (m + n)\ (m + n)$
d) $(r + s)\ (r + s)\ (r + s)\ (r + s)$
e) $(2 + t)\ (2 + t)\ (2 + t)$
f) $(a + b)\ (a + b)\ (a + b)\ (a + b)$
g) $(x + y)\ (x + y)\ (x + y)$
h) $(2x + y)\ (2x + y)$
i) $(x + a)\ (x + a)\ (x + a)\ (x + a)\ (x + a)$

Ejercicio 39

a) $36\ m^2$ b) $100\ y^2$ c) $42\ s^2$

d) $8\ m^2$ e) $10\ t^2$ f) $5\ p^2$

g) $120\ x^2$ h) $6\ ab$ i) $36\ mn$

j) $30\ xy$ k) $3\ xy$ l) $5\ ab$

Ejercicio 40

$a = 1,\quad b = 0$

Ejercicio 41

a) 48 b) 6 c) 0 d) 1 400 e) $10\ m$

Ejercicio 42

a) 22 b) 46 c) 28 d) 30 000 e) $m + 9$

Ejercicio 43

a) 59 b) 50 c) 81 d) $8\ m$

e) 17 f) 120 g) $7\ n$ h) 13

i) $6 + a$ k) a

Ejercicio 44

a) Procedimiento usado por Elías: $2 \times (3 + 1) = 2 \cdot 4 = 8$
Procedimiento usado por Pedro: $2 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 6 + 2 = 8$

b) Procedimiento usado por Elías: $1\ (4 + 2) = 1 \cdot 6 = 6$
Procedimiento usado por Pedro: $4 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 4 + 2 = 6$

c) Procedimiento usado por Elías: $8\ (2 + 1) = 8 \cdot 3 = 24$
Procedimiento usado por Pedro: $8 \cdot 2 + 8 \cdot 1 = 16 + 8 = 24$

d) Procedimiento usado por Elías: $5\ (3 + 3) = 5 \cdot 6 = 30$
Procedimiento usado por Pedro: $5 \cdot 3 + 5 \cdot 3 = 15 + 15 = 30$

e) Procedimiento usado por Elías: $300\ (100 + 500) = 300 \cdot 600 = 180\,000$
Procedimiento usado por Pedro: $300 \cdot 100 + 300 \cdot 500 = 30\,000 + 150\,000$
$= 180\,000$

f) Procedimiento usado por Elías: $a\ (4 + 9) = a \cdot 13 = 13a$
Procedimiento usado por Pedro: $a \cdot 4 + a \cdot 9 = 4a + 9a = 13a$

Ejercicio 45

a) $a\ (b + c) = 5 \times (8 + 12) = 5 \times 20 = 100$
$ab + ac = 5 \times 8 + 5 \times 12 = 40 + 60 = 100$

b) $a(b + c) = 7(9 + 4) = 7 \bullet 13 = 91$
$ab + ac = 7 \bullet 9 + 7 \bullet 4 = 63 + 28 = 91$

c) $a(b + c) = 8(10 + 1) = 8 \bullet 11 = 88$
$ab + ac = 8 \bullet 10 + 8 \bullet 1 = 80 + 8 = 88$

d) $a(b + c) = 43(4 + 1) = 43 \bullet 5 = 215$
$ab + ac = 43 \bullet 4 + 43 \bullet 1 = 172 + 43 = 215$

e) $a(b + c) = 2(17 + 1) = 2.18 = 36$
$ab + ac = 2.17 + 2.1 = 34 + 2 = 36$

Ejercicio 46

a) $5(8 + 2) = 5 \times 8 + 5 \times 2 = 40 + 10 = 50$
b) $9(4 + 7) = 9 \bullet 4 + 9 \bullet 7 = 36 + 63 = 99$
c) $12(48 + 36) = 12 \bullet 48 + 12 \bullet 36 = 576 + 432 = 1\,008$
d) $m(5 + 2) = m \bullet 5 + m \bullet 2 = 5m + 2m = 7m$
e) $a(8 + 4) = a \bullet 8 + a \bullet 4 = 8a + 4a = 12a$
f) $p(5 + q) = p \bullet 5 + p \bullet q = 5p + pq$
g) $x(n + 1) = x \bullet n + x \bullet 1 = xn + x$
h) $p(a + b) = p \bullet a + p \bullet b$
i) $r(m + n) = rm + rn$
j) $q(a^2 + b^2) = qa^2 + qb^2$
k) $n^2(a + b) = n^2a + n^2b$
l) $(5 + 9)b^2 = 5b^2 + 9b^2$
m) $(7 + 13)y = 7y + 13y$
n) $(a + 5)c = ac + 5c$
o) $(8 + t)p = 8p + tp$
p) $(p + q)r = pr + qr$

Ejercicio 47

a) $5 \bullet 8 + 5 \bullet 6 = 5(8 + 6)$
b) $5t + 7t = (5 + 7)t$
c) $5 \bullet 10 + 5 \bullet 15 = 5(10 + 15)$
d) $7 \bullet 9 + 7 \bullet 4 = 7(9 + 4)$
e) $4 \bullet 6 + 4 \bullet 17 = 4(6 + 17)$
f) $12 \bullet 15 + 12 \bullet 28 = 12(15 + 28)$
g) $19 \bullet 14 + 23 \bullet 14 = 14(19 + 23)$
h) $5 \bullet x + 5 \bullet 9 = 5(x + 9)$
i) $a \bullet 8 + a \bullet 17 = a(8 + 17)$
j) $b \bullet 6 + b \bullet 12 = b(6 + 12)$

k) $8 \bullet t + 1 \bullet t = (8 + 1)\, t$

l) $14p + 7p = p\,(14 + 7)$

m) $7a + a = a\,(7 + 1)$

n) $4\,(a + b) + 8\,(a + b) = (a + b)\,(8 + 4)$

Ejercicio 48

a) $5\,(2 + 8 + 6) = 5 \bullet 2 + 5 \bullet 8 + 5 \bullet 6$

b) $3\,(6 + 4 + 5) = 3 \bullet 6 + 3 \bullet 4 + 3 \bullet 5$

c) $10\,(9 + 5 + 1) = 10 \bullet 9 + 10 \bullet 5 + 10 \bullet 1$

d) $7\,(12 + 11 + 3) = 7 \bullet 12 + 7 \bullet 11 + 7 \bullet 3$

e) $100\,(10 + 1 + 8) = 100 \bullet 10 + 100 \bullet 1 + 100 \bullet 8$

f) $(10 + 9 + 2)\,10 = 10 \bullet 10 + 9 \bullet 10 + 2 \bullet 10$

g) $(8 + 4 + 7)\,6 = 8 \bullet 6 + 4 \bullet 6 + 7 \bullet 6$

h) $(7 + 2 + 1)\,9 = 7 \bullet 9 + 2 \bullet 9 + 1 \bullet 9$

i) $(10 + 5 + 3)\,11 = 10 \bullet 11 + 5 \bullet 11 + 3 \bullet 11$

j) $8\,(3 + 2 + 5 + 4) = 8 \bullet 3 + 8 \bullet 2 + 8 \bullet 5 + 8 \bullet 4$

k) $5\,(9 + 4 + 3 + 2 + 1) = 5 \bullet 9 + 5 \bullet 4 + 5 \bullet 3 + 5 \bullet 2 + 5 \bullet 1$

l) $(9 + 10 + 3 + 6 + 9)\,10 = 9 \bullet 10 + 10 \bullet 10 + 3 \bullet 10 + 6 \bullet 10 + 9 \bullet 10$

m) $a\,(b + c + d + e + f) = ab + ac + ad + ae + af$

Ejercicio 49

En cada inciso se debe obtener el resultado que se indica, con los dos procedimientos.

a) 80 b) 45 c) 150 d) 182

e) 1 900 f) 210 g) 114 h) 90

i) 198 j) 112 k) 264 l) 95

m) 370 n) 210

Ejercicio 50

a) $7 \bullet 8 + 7 \bullet 5 + 7 \bullet 3 = 7\,(8 + 5 + 3)$

b) $8 \bullet 10 + 8 \bullet 7 + 8 \bullet 9 = 8\,(10 + 7 + 9)$

c) $na + nb + nf = n\,(a + b + f)$

d) $xp + xy + xz = x\,(p + y + z)$

e) $8 \bullet 3 + 8 \bullet 2 + 8 \bullet 5 = 8\,(3 + 2 + 5)$

f) $5 \bullet 7 + 5 \bullet 9 + 5 \bullet 10 = 5\,(7 + 9 + 10)$

g) $ax + ay + az = a\,(x + y + z)$

h) $xm + xn + xp = x\,(m + n + p)$

i) $mr + ms + mt = m\,(r + s + t)$

Ejercicio 51

a) $5 \cdot 3 + 5 \cdot 6 = 5\,(3 + 6)$

b) $6 \cdot 7 + 6 \cdot 9 + 6 \cdot 12 = 6\,(7 + 9 + 12)$

c) $8 \cdot 5 + 8 \cdot 12 = 8\,(5 + 12)$

d) $9 \cdot 4 + 9 \cdot 7 + 9 \cdot 1 = 9\,(4 + 7 + 1)$

e) $3 \cdot 7 + 2 \cdot 7 + 5 \cdot 7 = 7\,(3 + 2 + 5)$

f) $3 \cdot 12 + 8 \cdot 12 = 12\,(3 + 8)$

g) $5 \cdot 12 + 12 \cdot 7 + 10 \cdot 12 = 12\,(5 + 7 + 10)$

h) $9 \cdot 12 + 9 \cdot 15 = 9\,(12 + 15)$

i) $m \cdot 5 + m \cdot 8 + m \cdot 3 = m\,(5 + 8 + 3)$

j) $a \cdot 2 + a \cdot 3 + a \cdot 8 = a\,(2 + 3 + 8)$

k) $3m + 2m + 5m = (3 + 2 + 5)\,m$

l) $7x + 2x + 5x = (7 + 2 + 5)\,x$

m) $3r + 2r + 7r + 5r = (3 + 2 + 7 + 5)\,r$

n) $mn + mp + mq + mr = m\,(n + p + q + r)$

Ejercicio 52

En cada inciso el resultado debe ser, en ambos casos, el siguiente:

a) 45
b) 168
c) 136
d) 108
e) 70
f) 132
g) 264
h) 243
i) $16\,m$
j) $13\,a$
k) $10\,m$
l) $14\,x$
m) $17\,r$
n) $m\,(n + p + q + r)$

Ejercicio 53

a) $3b + 2b + 11b = (3 + 2 + 11)\,b = 16b$

b) $14a + 12a = (14 + 12)\,a = 26a$

c) $12m + 7m + 3m + 2m = (12 + 7 + 3 + 2)\,m = 24m$

d) $7a + 8a + 9a + 5a + a = (7 + 8 + 9 + 5 + 1)\,a = 30a$

e) $b + 2b + b = (1 + 2 + 1)\,b = 4b$

f) $3p + 2p + 5p = (3 + 2 + 5)\,p = 10p$

g) $75r + 2r + 18r = (75 + 2 + 18)\,r = 95r$

h) $40q + 12q + 15q + 16q = (40 + 12 + 15 + 16) = 83q$

i) $5a^2 + 3a^2 = (5 + 3)\,a^2 = 8a^2$

j) $2ab + 3ab + 5ab = (2 + 3 + 5)\,ab = 10ab$

k) $xy + xy = (1 + 1)\,xy = 2xy$

l) $mn + mn + mn = (1 + 1 + 1)\,mn = 3mn$

m) $pq + pq = (1 + 1)\,pq = 2pq$

n) $3n + 6m + 4m = (3 + 6 + 4)\ m = 13m$

o) $6a^2 + 3a^2 + 7a^2 = (6 + 3 + 7)\ a^2 = 16a^2$

p) $x^2 + x^2 + x^2 = (1 + 1 + 1)\ x^2 = 3x^2$

Ejercicio 54

a) $(a + 2)\ (b + 8) = (a + 2)\ b + (a + 2)\ 8 = ab + 2b + 8a + 16$

b) $(c + 9)\ (d + 4) = (c + 9)\ d + (c + a)\ 4 = cd + 9d + 4c + 36$

c) $(5 + a)\ (b + 1) = (5 + a)\ b + (5 + a)\ 1 = 5b + ab + 5 + a$

d) $(x + 10)\ (y + 7) = (x + 10)\ y + (x + 10)\ 7 = xy + 10y + 7x + 70$

e) $(z + 1)\ (2 + w) = (z + 1)\ 2 + (z + 1)\ w = 2z + 2 + wz + w$

f) $(p + 3)\ (q + 4) = (p + 3)\ q + (p + 3)\ 4 = pq + 3q + 4p + 12$

g) $(6 + r)\ (s + 2) = (6 + r)\ s + (6 + r)\ 2 = 6s + rs + 12 + 2r$

h) $(d + f)\ (p + 12) = (d + f)\ p + (d + f)\ 12 = dp + fp + 12d + 12f$

i) $(a + 4)\ (a + 5) = (a + 4)\ a + (a + 4)\ 5 = aa + 4a + 5a + 20$
$= a^2 + 9a + 20$

j) $(y + 7)\ (y + 4) = (y + 7)\ y + (y + 7)\ 4 = yy + 7y + 4y + 28$
$= y^2 + 11y + 28$

k) $(z + 9)\ (z + 1) = (z + 9)\ z + (z + 9)\ 1 = zz + 9z + z + 9$
$= z^2 + 10z + 9$

l) $(y + 1)\ (y + 4) = (y + 1)\ y + (y + 1)\ 4 = yy + y + 4y + 4$
$= y^2 + 5y + 4$

m) $(x + a)\ (x + b) = (x + a)\ x + (x + a)\ b = xx + ax + bx + ab$
$= x^2 + (a + b)\ x + ab$

n) $(p + 4)\ (p + 10) = (p + 4)\ p + (p + 4)\ 10 = pp + 4p + 10p + 40$
$= p^2 + 14p + 40$

o) $(t + 3)\ (t + 3) = (t + 3)\ t + (t + 3)\ 3 = tt + 3t + 3t + 9$
$= t^2 + 6t + 9$

p) $(a + 5)\ (a + 5) = (a + 5)\ a + (a + 5)\ 5 = aa + 5a + 5a + 25$
$= a^2 + 10a + 25$

q) $(n + y)\ (n + y) = (n + y)\ n + (n + y)\ y = nn + yn + ny + yy$
$= n^2 + 2ny + y$

r) $(x + 9)\ (x + 9) = (x + 9)\ x + (x + 9)\ 9 = xx + 9x + 9x + 81$
$= x^2 + 18x + 81$

s) $(q + 7)^2 = (q + 7)\ (q + 7) = (q + 7)\ q + (q + 7)\ 7 =$
$= qq + 7q + 7q + 49 = q^2 + 14q + 49$

t) $(z + 8)^2 = (z + 8)\ (z + 8) = (z + 8)\ z + (z + 8)\ 8 =$
$= zz + 8z + 8z + 64 = z^2 + 16z + 64$

u) $(y + 9)^2 = (y + 9)\ (y + 9) = (y + 9)\ y + (y + 9)\ 9 =$
$= yy + 9y + 9y + 81 = y^2 + 18y + 81$

v) $(x + y)^2 = (x + y)\ (x + y) = (x + y)\ x + (x + y)\ y =$
$= xx + yx + xy + yy = x^2 + 2xy + y^2$

IV. Sustracción de números naturales

2. Problemas

a) El área de la región verde es de 104 unidades cuadradas.

$$225 - 121 = 104$$

b) $\overline{AB}$ mide 25 metros, $\overline{CD}$ mide 55 metros. Por lo tanto su diferencia es de 30 metros.

c) El área de la región verde es de 279 metros cuadrados.

d) El volumen de la figura roja es de 96 metros cúbicos.

$$120 - 24 = 96$$

e) El tornillo pesa 285 gramos.

f) La Edad Media duró 977 años, la Edad Moderna 336 años.

La Edad Media duró 641 años más que la Edad Moderna.

g) Produce 52 222 bombillas.

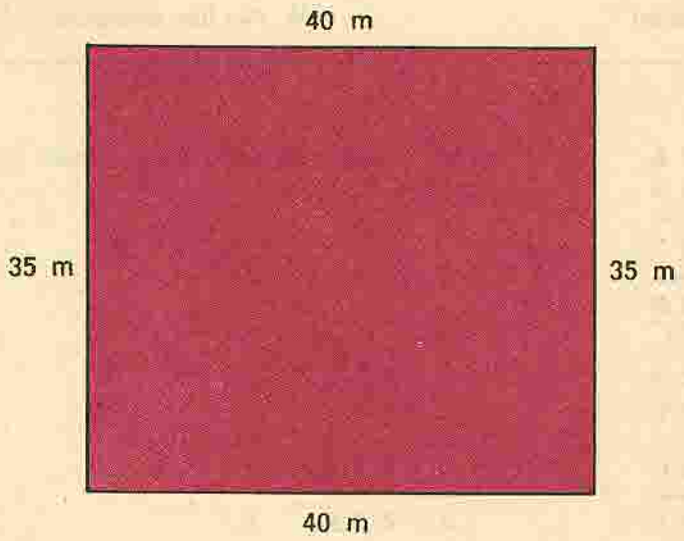
h) En 1968 los suizos que no eran católicos, eran 5 839 569.

i) Al principio había 66 pollos.

j) Necesita reducir 12 kilogramos.

k) Vivió 71 años.

l)



m) Hay 689 millones de dólares de diferencia.

n) En 89 toneladas.

o) La temperatura superficial de Rigel es de 12 300 grados centígrados.

p) Es 3 306 metros más alto.

q) Es menor en 3 538 kilómetros.

r) La Era Primaria duró 380 millones de años. La Era Secundaria 150 millones de años. La Era Primaria duró 230 millones de años más que la Era Secundaria.

s) La Unión Soviética, en 1970, tenía 36 256 000 habitantes más que la Unión Americana.

t) Marte está 16 100 000 kilómetros más lejos de la Tierra que Venus.

u) El cuerpo *A* pesa 25 kilogramos.

v) La primera estatua pesa 265 kilogramos; la segunda pesa 255 kilogramos. La diferencia es de 10 kilogramos.

---

3. La sustracción y las ecuaciones

Ejercicio 2

a) $849 + 437 = 1\,286$

b) $385 + 0 = 385$

c) $3\,501 + 1\,236 = 4\,827$

d) $3\,697 + 2\,735 = 6\,432$

e) $x + 137 = 242$

$x = 105$

f) $m + 735 = 6\,092$

$m = 5\,357$

g) $3\,027 + z = 10\,786$

$z = 7\,759$

h) $3\,097 + r = 7\,936$

$r = 4\,839$

i) $8\,092 + n = 10\,973$

$n = 2\,881$

j) $385 + p = 60\,901$

$p = 60\,516$

k) No hay solución.

l) No hay solución.

Ejercicio 3

a)

$$\begin{array}{r} 2\,7\,2\,8 \\ -\,1\,3\,4\,5 \\ \hline 1\,3\,8\,3 \\ \hline \underline{2\,7\,2\,8} \end{array}$$

Deben tacharse las sustracciones b), c) y d) porque están mal.

e)

$$\begin{array}{r} 6\,3\,9\,2 \\ -\,3\,7\,9\,6 \\ \hline 2\,5\,9\,6 \\ \hline 6\,3\,9\,2 \end{array}$$

f)

$$\begin{array}{r} 2\,7\,4\,3\,9 \\ -\quad 9\,8\,5\,2 \\ \hline 1\,7\,5\,8\,7 \\ \hline 2\,7\,4\,3\,9 \end{array}$$

Ejercicio 4

a)

$$\begin{array}{r} 2\,7\,5\,3 \\ -\quad 1\,4\,7\,1 \\ \hline 1\,2\,8\,2 \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{r} 4\,7\,5\,7\,8 \\ -\,3\,9\,7\,8\,9 \\ \hline 7\,7\,8\,9 \end{array}$$

c) $\begin{array}{r} 37085 \\ -\,10193 \\ \hline 26892 \end{array}$

d) $\begin{array}{r} 30080 \\ -\,20957 \\ \hline 9123 \end{array}$

Ejercicio 5

a) $m - n = 25$
b) $m - n = 1$
c) $m - n = 239$
d) $m - n = 702$
e) $m - n = 0$
f) $m - n = 0$
g) $m - n = 12$
h) $m - n = 85$
i) $m - n = 0$
j) $m - n = 0$
k) No hay solución.
l) No hay solución.

Ejercicio 6

a) $12 - 4 = 8$
b) $40 - 10 = 30$
c) $20 - 10 = 10$
d) $8 - 4 = 4$
e) $12 - 7 = 5$
f) $10 - 0 = 10$
g) $x = 19$
h) $m = 20$
i) $y = 20$
j) $n = 15$
k) $p = 30$
l) $r = 100$
m) $t = 50$
n) $m = 0$
o) $v = 1$
p) $z = 125$
q) $f = 0$
r) No hay solución.

Ejercicio 7

a) 1
b) 2
c) 1
d) 0
e) 3
f) 4
g) 4
h) 7
i) 5
j) 16
k) 5
l) 4

4. Las expresiones $(a + b) - b$ y $(a - b) + b$

Ejercicio 8

a) $(7 + 12) - 12 = 19 - 12 = 7$
b) $(19 - 5) + 5 = 14 + 5 = 19$
c) $(23 + 9) - 9 = 32 - 9 = 23$
d) $(57 + 18) - 18 = 75 - 18 = 57$
e) $(67 - 26) + 26 = 41 + 26 = 67$
f) $(43 - 29) + 29 = 14 + 29 = 43$

Ejercicio 9

a) 23
b) 46
c) 4 728
d) p
e) q
f) x
g) a
h) 14
i) 16
j) x

V. Ecuaciones

1. Resolución de ecuaciones

Ejercicio 1

a) No es b) Sí es c) No es d) Sí es

e) No es f) No es g) Sí es h) No es

i) No es j) Sí es

Ejercicio 2

a) $x + 39 = 66$

27 sí es solución, porque $27 + 39$ sí es igual a 66.

b) $y - 10 = 15$

27 no es solución, porque $27 - 10$ no es igual a 15.

c) $475 + g = 500$

27 no es solución, porque $475 + 27$ no es igual a 500.

d) $69 = 96 - r$

27 sí es solución, porque 69 sí es igual a $96 - 27$.

e) $298 = 271 + t$

27 sí es solución, porque 298 sí es igual a $271 + 27$.

Ejercicio 3

a) $(x + 35) + 30 = 226 + 30$

Comprobación. $(191 + 35) + 30 = 226 + 30$

b) $(267 + y) + 68 = 498 + 68$

Comprobación. $(267 + 231) + 68 = 498 + 68$

c) $(p - 47) + 47 = 32 + 47$

Comprobación. $(79 - 47) + 47 = 32 + 47$

Ejercicio 4

a) $(a + 425) - 186 = 693 - 186$

Comprobación. $(268 + 425) - 186 = 693 - 186$

b) $(x + 75) - 50 = 98 - 50$

Comprobación. $(23 + 75) - 50 = 98 - 50$

Ejercicio 5

a) Restando 65 a ambos miembros.

b) Sumando 43 a los dos miembros.

c) Restando 174 a ambos miembros.

d) Restando 345 a ambos miembros.

e) Sumando 57 a los dos miembros.

f) Sumando 84 a los dos miembros.

g) Restando 258 a los dos miembros.

h) Sumando 65 a los dos miembros.

i) Sumando m a los dos miembros.

j) Restando r a los dos miembros.

Ejercicio 6

a) $(x + 49) - 49 = 276 - 49$
$x = 227$

b) $(a + 235) - 235 = 247 - 235$
$a = 12$

c) $(b + 68) - 68 = 72 - 68$
$b = 4$

d) $(y + 257) - 257 = 259 - 257$
$y = 2$

e) $(z + 39) - 39 = 126 - 39$
$z = 87$

f) $(p + 364) - 364 = 407 - 364$
$p = 43$

g) $(r + 89) - 89 = 123 - 89$
$r = 34$

h) $(t + 377) - 377 = 386 - 377$
$t = 9$

i) $(s + 429) - 429 = 698 - 429$
$s = 269$

j) $(w + 2\,386) - 2\,386 = 3\,689 - 2\,386$
$w = 1\,303$

k) $(a - 19) + 19 = 36 + 19$
$a = 55$

l) $(z - 38) + 38 = 7 + 38$
$z = 45$

m) $(h - 75) + 75 = 89 + 75$
$h = 164$

n) $(k - 276) + 276 = 17 + 276$
$k = 293$

o) $(x - 56) + 56 = 27 + 56$
$x = 83$

p) $476 + 6 = (y - 6) + 6$
$y = 482$

q) $278 + 193 = (y - 193) + 193$
$y = 471$

r) $261 + 789 = (b - 789) + 789$
$b = 1\,050$

s) $526 + 349 = (p - 349) + 349$
$p = 875$

t) $670 + 2\,386 = (r - 2\,386) + 2\,386$
$r = 3\,056$

---

2. Resolución de problemas por medio de ecuaciones

Ejercicio 7

a) Resolución.

$$x + 86 = 392$$
$$(x + 86) - 86 = 392 - 86$$
$$x = 306$$

Comprobación. $306 + 86$ sí es igual a 392

Respuesta. El número buscado es 306

b) Resolución.

$$\begin{aligned} y + 389 &= 476 \\ (y + 389) - 389 &= 476 - 389 \\ y &= 87 \end{aligned}$$

Comprobación. $87 + 389$ sí es igual a 476

Respuesta. El número buscado es 87

c) Resolución.

$$\begin{aligned} m - 52 &= 524 \\ (m - 52) + 52 &= 524 + 52 \\ m &= 576 \end{aligned}$$

Comprobación. $576 - 52$ sí es igual a 524

Respuesta El número buscado es 576

d) Resolución.

$$\begin{aligned} r - 75 &= 86 \\ (r - 75) + 75 &= 86 + 75 \\ r &= 161 \end{aligned}$$

Comprobación. $161 - 75$ sí es igual a 86

Respuesta. El número buscado es 161

e) Resolución.

$$\begin{aligned} a + 875 &= 3\,642 \\ (a + 875) - 875 &= 3\,642 - 875 \\ a &= 2\,767 \end{aligned}$$

Comprobación. $2\,767 + 875$ sí es igual a 3 642

Respuesta. El número buscado es 2 767

f) Resolución.

$$\begin{aligned} p - 496 &= 675 \\ (p - 496) + 496 &= 675 + 496 \\ p &= 1\,171 \end{aligned}$$

Comprobación. $1\,171 - 496$ sí es igual a 675

Respuesta. El número buscado es 1 171.

Ejercicio 8

a) Ecuación. $x + 215 = 448$

Solución. $x = 233$

Respuesta. El tinaco contiene 233 litros ahora.

b) Ecuación. $x + 19 = 86$

Solución. $x = 67$

Respuesta. La barra roja mide 67 metros.

e) Ecuación. $t - 8 = 15$
Solución. $t = 23$
Respuesta. La temperatura ese mediodía fue de 23 grados.

d) Ecuación. $m + 39 = 92$
Solución. $m = 53$
Respuesta. El cuerpo azul pesa 53 kilogramos.

e) Ecuación. $p - 15 = 56$
Solución. $p = 71$
Respuesta. El peso inicial era de 71 kilogramos.

f) Ecuación. $x - 85 = 450$
Solución. $x = 535$
Respuesta. Se habrian cosechado 535 toneladas de maíz.

g) Ecuación. $j + 63 = 143$
Solución. $j = 80$
Respuesta. Juan pesa 80 kilogramos.

h) Ecuación. $x + 285 = 790$
Solución. $x = 505$
Respuesta. La barra contiene 505 gramos de aluminio.

i) Ecuación. $x - 35 = 78$
Solución. $x = 113$
Respuesta. El peso del cuerpo era 113 kilogramos.

j) Ecuación. $x + 8\,664 = 9\,440$
Solución $x = 776$
Respuesta. México produjo 776 toneladas de mercurio.

k) Ecuación. $c - 210 = 460$
Solución. $c = 670$
Respuesta. La capacidad del tinaco es de 670 litros.

l) Ecuación. $x + 91\,971 = 862\,760$
Solución. $x = 770\,789$
Respuesta. El área de España es de 770 789 km.^{2}

m) Ecuación. $x - 385 = 2\,183$

Solución. $x = 2\,568$

Respuesta. Su sueldo mensual es de $ 2 568.

VI. División de números naturales

1. Uso de la división

Problema 2

5 ← manzanas para cada hijo.

número de hijos → 6 | 35 ← número de manzanas.

5 ← manzanas que sobran.

Respuesta. A cada hijo le tocan 5 manzanas y sobran 5 manzanas.

Problema 3

Respuesta. Se pueden formar 5 subconjuntos ajenos y sobran 0 elementos.

Problema 4

63 ← sueldo diario

días de una quincena → 15 | 945 ← sueldo quincenal

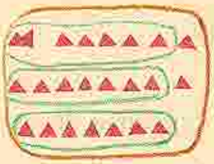
45

0 ← dinero que sobra

Respuesta. Diariamente gana 63 pesos.

2. Problemas

a)



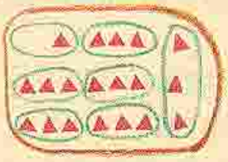
3

7 | 23

2

Respuesta. Se forman 3 subconjuntos ajenos y sobran 2 elementos.

b) *P*



7

3 | 21

0

Respuesta. Se forman 7 subconjuntos ajenos y sobran 0 elementos.

c) Hay 9 cajas completas y sobran 3 refrescos.

d) En 15 días y un poco más, ya que el último día sólo le quedarán por leer 25 páginas.

e) Hay 82 magueyes.

f) 7 boletos.

g) 2 gramos.

h) 45 kilómetros.

i) Pesa 39 kilogramos.

j) Gira 50 revoluciones en un segundo.

k) El engrane *B* gira 10 vueltas.

l) 27 dólares.

m) A cuatro minutos.

n) En 12 horas.

o) El ancho mide 12 metros.

3. Relaciones entre las partes de la división

Ejercicio 1

a) Está bien efectuada

b) Está mal efectuada

c) Está mal efectuada

d) Está mal efectuada

e) Está bien efectuada

f) Está bien efectuada

Ejercicio 2

a)
```
        23
   ┌──────
52 │ 1 196
     156
       0
```

b)
```
        83
   ┌──────
49 │ 4 067
       147
         0
```

c)
```
        58
   ┌──────
64 │ 3 712
       512
         0
```

d)
```
       236
   ┌──────
24 │ 5 664
       86
       144
         0
```

Ejercicio 3

a) $m \div n = 32$

b) $m \div n = 34$

c) $m \div n = 485$

d) $m \div n = 21$

e) $m \div n = 65$

f) $m \div n = 89$

g) $m \div n = 33$

Ejercicio 4

a) $30 \div 5 = 6$

b) $32 \div 8 = 4$

c) $56 \div 8 = 7$

d) $120 \div 10 = 12$

e) $x = 100$

f) $m = 60$

g) $p = 150$

h) $y = 12$

i) $t = 0$

j) $m = 1$

k) $v = 5$

l) $z = 25$

m) $u = 1$

n) No hay solución.

Ejercicio 5

a)
$$\begin{array}{r|r} \multicolumn{2}{r}{143} \\ \cline{2-2} 18 & 2\,578 \\ & 77 \\ & 58 \\ & 4 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{r|r} \multicolumn{2}{r}{402} \\ \cline{2-2} 99 & 39\,856 \\ & 256 \\ & 58 \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{r|l} \multicolumn{2}{r}{834} \\ \cline{2-2} 27 & 22\,518 \\ & 91 \\ & 108 \\ & 0 \end{array}$$

d)
$$\begin{array}{r|l} \multicolumn{2}{r}{1\,716} \\ \cline{2-2} 46 & 78\,962 \\ & 32\,9 \\ & 76 \\ & 302 \\ & 26 \end{array}$$

---

4. Las expresiones (a · b) ÷ b y (a ÷ b) · b

Ejercicio 6

a) $(23 \times 4) \div 4 = 92 \div 4 = 23$

b) $(18 \times 5) \div 5 = 90 \div 5 = 18$

c) $(34 \times 2) \div 2 = 68 \div 2 = 34$

d) $(46 \times 7) \div 7 = 322 \div 7 = 46$

e) $(9 \times 15) \div 15 = 135 \div 15 = 9$

f) $(16 \times 10) \div 10 = 160 \div 10 = 16$

g) $(32 \times 3) \div 3 = 96 \div 3 = 32$

h) $(56 \times 11) \div 11 = 616 \div 11 = 56$

Ejercicio 7

a) $(46 \div 23) \cdot 23 = 2 \cdot 23 = 46$

b) $(18 \div 3) \cdot 3 = 6 \cdot 3 = 18$

c) $(54 \div 9) \cdot 9 = 6 \cdot 9 = 54$

d) $(63 \div 7) \cdot 7 = 9 \cdot 7 = 63$

e) $(24 \div 8) \cdot 8 = 3 \cdot 8 = 24$

f) $(45 \div 15) \cdot 15 = 3 \cdot 15 = 45$

g) $(100 \div 25) \cdot 25 = 4 \cdot 25 = 100$

h) $(475 \div 9) \cdot 5 = 95 \cdot 5 = 475$

i) $(230 \div 10) \cdot 10 = 23 \cdot 10 = 230$

j) $(60 \div 4) \cdot 4 = 15 \cdot 4 = 60$

Ejercicio 8

a) 23
b) 42
c) 8 525
d) x
e) b
f) t
g) y
h) p
i) r

VII. Ecuaciones

1. Resolución de ecuaciones

Ejercicio 1

a) 12 no es solución porque $16 \cdot 12$ no es igual a 208

b) 20 sí es solución porque $42 \cdot 20 = 840$

c) 45 sí es solución porque $15 \cdot 45 = 675$

d) 10 sí es solución porque $18 \cdot 10 = 180$

e) 48 sí es solución porque $48 \div 6 = 8$

f) 320 sí es solución porque $320 \div 20 = 16$

g) 60 sí es solución porque $180 \div 60 = 3$

h) 693 sí es solución porque $693 \div 21 = 33$

Ejercicio 2

a) $(x \cdot 15) \cdot 10 = 300 \cdot 10$

Comprobación: $(20 \cdot 15) \cdot 10 = 300 \cdot 10$

b) $(m \cdot 18) \div 6 = 450 \div 6$

Comprobación: $(25 \cdot 18) \div 6 = 450 \div 6$

c) $(m \cdot 45) \div 9 = 900 \div 9$

Comprobación: $(20 \cdot 45) \div 9 = 900 \div 9$

d) $(r \cdot 23) \cdot 5 = 414 \cdot 5$

Comprobación: $(18 \cdot 23) \cdot 5 = 414 \cdot 5$

e) $(x \cdot 100) \div 10 = 10\,000 \div 10$

Comprobación: $(100 \cdot 100) \div 10 = 10\,000 \div 10$

f) $(a \div 18) \div 3 = 12 \div 3$

Comprobación: $(216 \div 18) \div 3 = 12 \div 3$

g) $(b \div 10) \bullet 10 = 380 \bullet 10$

Comprobación: $(3\,800 \div 10) \quad 10 = 380 \bullet 10$

Ejercicio 3

a) Multiplicar por 5

b) Dividir por 30

c) Multiplicar por 18

d) Dividir por 27

e) Dividir por 36

f) Multiplicar por 15

g) Multiplicar por 43

h) Dividir por 85

i) Dividir por 16

Ejercicio 4

a)
$$\begin{aligned} n \div 18 &= 15 \\ (n \div 18) \bullet 18 &= 15 \bullet 18 \\ n &= 270 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} m \bullet 9 &= 135 \\ (m \bullet 9) \div 9 &= 135 \div 9 \\ m &= 15 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} c \div 82 &= 13 \\ (c \div 82) \bullet 82 &= 13 \bullet 82 \\ c &= 1\,066 \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} d \div 101 &= 1\,212 \\ (d \div 101) \bullet 101 &= 1\,212 \bullet 101 \\ d &= 122\,412 \end{aligned}$$

e)
$$\begin{aligned} e \bullet 85 &= 3\,400 \\ (e \bullet 85) \div 85 &= 3\,400 \div 85 \\ e &= 40 \end{aligned}$$

f)
$$\begin{aligned} f \bullet 56 &= 840 \\ (f \bullet 56) \div 56 &= 840 \div 56 \\ f &= 15 \end{aligned}$$

g)
$$\begin{aligned} 30 \bullet x &= 360 \\ (30 \bullet x) \div 30 &= 360 \div 30 \\ x &= 12 \end{aligned}$$

h)
$$\begin{aligned} 25\,m &= 350 \\ (25 \cdot m) \div 25 &= 350 \div 25 \\ m &= 14 \end{aligned}$$

i)
$$\begin{aligned} 17\,r &= 289 \\ (17\,r) \div 17 &= 289 \div 17 \\ r &= 17 \end{aligned}$$

j)
$$\begin{aligned} s \div 36 &= 612 \\ (s \div 36) \bullet 36 &= 612 \bullet 36 \\ s &= 22\,032 \end{aligned}$$

k)
$$\begin{aligned} g \div 28 &= 364 \\ (g \div 28) \bullet 28 &= 364 \bullet 28 \\ g &= 10\,192 \end{aligned}$$

l)
$$\begin{aligned} 56 \bullet h &= 1\,792 \\ (56 \bullet h) \div 56 &= 1\,792 \div 56 \\ h &= 32 \end{aligned}$$

m)
$$\begin{aligned} 83 \bullet p &= 83 \\ (83 \bullet p) \div 83 &= 83 \div 83 \\ p &= 1 \end{aligned}$$

n)
$$\begin{aligned} 72 \bullet j &= 0 \\ (72 \bullet j) \div 72 &= 0 \div 72 \\ j &= 0 \end{aligned}$$

o)
$$\begin{aligned} k \div 78 &= 156 \\ (k \div 78) \bullet 78 &= 156 \bullet 78 \\ k &= 12\,168 \end{aligned}$$

p)
$$\begin{aligned} e \div 100 &= 100 \\ (e \div 100) \bullet 100 &= 100 \bullet 100 \\ e &= 10\,000 \end{aligned}$$

q)
$$\begin{aligned} m \div 49 &= 931 \\ (m \div 49) \bullet 49 &= 931 \bullet 49 \\ m &= 45\,619 \end{aligned}$$

r)
$$\begin{aligned} 270\,n &= 5\,400 \\ (270\,n) \div 270 &= 5\,400 \div 270 \\ n &= 20 \end{aligned}$$

s)

$$730\,p = 18\,250$$
$$(730\,p) \div 730 = 18\,250 \div 730$$
$$p = 25$$

t)

$$q \div 120 = 300$$
$$(q \div 120) \cdot 120 = 300 \cdot 120$$
$$q = 36\,000$$

---

2. Resolución de problemas por medio de ecuaciones

Problemas

a) Ecuación. $x \cdot 85 = 2\,890$
Solución. $x = 34$
Respuesta. Ese número es 34.

b) Ecuación. $x \div 78 = 345$
Solución. $x = 26\,910$
Respuesta. El número buscado es 26 910.

c) Ecuación. $16\,x = 368$
Solución. $x = 23$
Respuesta. El número es 23.

d) Ecuación. $x \div 9 = 345$
Solución. $x = 3\,105$
Respuesta. El número es 3 105.

e) Ecuación. $12\,x = 216$
Solución. $x = 18$
Respuesta. El número es 18.

f) Ecuación. $n \div 42 = 21$
Solución. $n = 882$
Respuesta. El número es 882.

Ejercicio 5

a) Ecuación. $5\,x = 70$
Solución. $x = 14$
Respuesta. Raúl pesa 14 kilogramos.

b) Ecuación. $x \div 8 = 13$
Solución. $x = 104$
Respuesta. El segmento $\overline{AB}$ mide 104 metros.

c) Ecuación. $x \bullet 28 = 476$
Solución. $x = 17$
Respuesta. La altura del rectángulo es de 17 m.

d) Ecuación. $4 \bullet x = 76$
Solución. $x = 19$
Respuesta. El objeto mide 19 milímetros.

e) Ecuación. $p \div 12 = 18$
Solución. $p = 216$
Respuesta. El cuerpo M pesa 216 kilogramos.

f) Ecuación. $x \div 11 = 33$
Solución. $x = 363$
Respuesta. Hacen el servicio militar 363 conscriptos.

g) Ecuación. $12 \bullet x = 432$
Solución. $x = 36$
Respuesta. 432 pulgadas son 36 pies.

h) Ecuación. $7 \bullet x = 112$
Solución. $x = 16$
Respuesta. La rueda mayor tiene que girar 16 vueltas.

i) Ecuación. $m \div 80 = 360$
Solución. $m = 28\,800$
Respuesta. La granja produjo 28 800 huevos.
(Aquí también pudo usted usar la ecuación $m \div 360 = 80$)

j) Ecuación. $7x = 532$
Solución. $x = 76$
Respuesta. El cometa se observa cada 76 años.

k) Ecuación. $x \div 5 = 3\,650$
Solución. $x = 18\,250$
Respuesta. La herencia era de 18 250 pesos.

l) Ecuación. $164 \bullet x = 246\,000$
Solución. $x = 1\,500$
Respuesta. El área del D. F. es de 1 500 kilómetros cuadrados.

m) Ecuación. $t \div 2 = 6\,500$

Solución. $t = 13\,000$

Respuesta. La tierra tiene un diámetro de 13 000 kilómetros.

n) Ecuación. $8 \bullet x = 96$

Solución. $x = 12$

Respuesta. El triángulo tiene un área de 12 cm.^{2}

o) Ecuación. $a \div 6 = 13$

Solución. $a = 78$

Respuesta. Su peso en la Tierra es de 78 kilogramos.

Ejercicio 6

a) $x = 15$ b) $m = 8$ c) $n = 17$ d) $a = 15$

e) $t = 10$ f) $p = 21$ g) $q = 0$ h) $r = 1$

i) $c = 100$ j) $d = 12$ k) No tiene solución.

l) No tiene solución.

Problemas

a) Ecuación. $3n + 25 = 115$

Solución. $n = 30$

Respuesta. El número es 30.

b) El quíntuplo de ese número, menos 37, es $5\,m - 37$

Ecuación. $5\,m - 37 = 68$

Solución. $m = 21$

Respuesta. El número es 21.

c) Ecuación. $85\,r - 728 = 1\,907$

Solución. $r = 31$

Respuesta. El número es 31.

d) Ecuación. $8\,x + 583 = 895$

Solución. $x = 39$

Respuesta. El número es 39.

e) Llamemos s a su sueldo anterior. Entonces el triple de s, disminuido en 385, es $3s - 385$

Ecuación. $3\,s - 385 = 4\,115$

Solución. $s = 1\,500$

Respuesta. El sueldo anterior era de $ 1 500.

f) Sea f la edad de Fernando. Entonces, el quíntuplo de f más 93 es $5f + 93$.

Ecuación. $5f + 93 = 163$

Solución. $f = 14$

Respuesta. Fernando tiene 14 años de edad.

g) Base. x

Altura. 8

Area de la figura completa. $8x$

Area de la figura incompleta. 284

Ecuación. $8x - 36 = 284$

Solución. $x = 40$

Respuesta. La base mide 40 metros.

h) Sea x la altura del volcán de Colima. Entonces el doble de esa altura, más 418, es $2x + 418$

Ecuación. $2x + 418 = 8\,848$

Solución. $x = 4\,215$

Respuesta. La altura del volcán de Colima es de 4 215 m.

i) Si llamamos r al área de Costa Rica, el cuádruplo de esa área más 16 674 es $4r + 16\,674$

Ecuación. $4r + 16\,674 = 186\,926$

Solución. $r = 42\,563$

Respuesta. El área de Costa Rica es de 42 563 km^2.

j) Ecuación. $4m + 36 = 124$

Solución. $m = 22$

Respuesta. Cada cuerpo m pesa 22 kilogramos.

k) Como el perímetro de una figura es igual a la suma de sus lados, entonces el perímetro de este triángulo es $x + x + 36$

Ecuación. $2x + 36 = 116$

Solución. $x = 40$

Respuesta. Los lados iguales miden 40 m cada uno.

l) El perímetro de este rectángulo es de $x + x + 20 + 20$

Ecuación. $2x + 40 = 110$

Solución. $x = 35$

Respuesta. Cada lado mide 35 metros.

m) El perímetro del rectángulo, expresado como la suma de sus lados, es $x + 15 + x + 15 + x + x = 4x + 30$

Ecuación. $4x + 30 = 70$

Solución. $x = 10$

Respuesta. Dos lados miden 10 m, los otros dos 25 m.

n) Si llamamos n al número de kilómetros que recorrió en una hora, los que recorrió en 5 horas son $5n$. Éstos, disminuidos en 25, son 300.

Ecuación. $5n - 25 = 300$

Solución. $n = 65$

Respuesta. Recorrió 65 kilómetros en cada hora.

o) Si el número menor es y, el que le sigue es $y + 1$ y la suma de los dos números se expresa como $y + y + 1$.

Ecuación. $2y + 1 = 25$

Solución. $y = 12$

Respuesta. Un número es 12, el otro es 13.

p) Edad de Pedro. x

Edad de Juan. $x + 1$

Suma de las dos edades: $x + x + 1 = 2x + 1$

Ecuación. $2x + 1 = 37$

Solución. $x = 18$

Respuesta. Pedro tiene 18 años, Juan tiene 19 años.

q) Edad de Miguel. x

Edad de Margarita. $2x + 7$

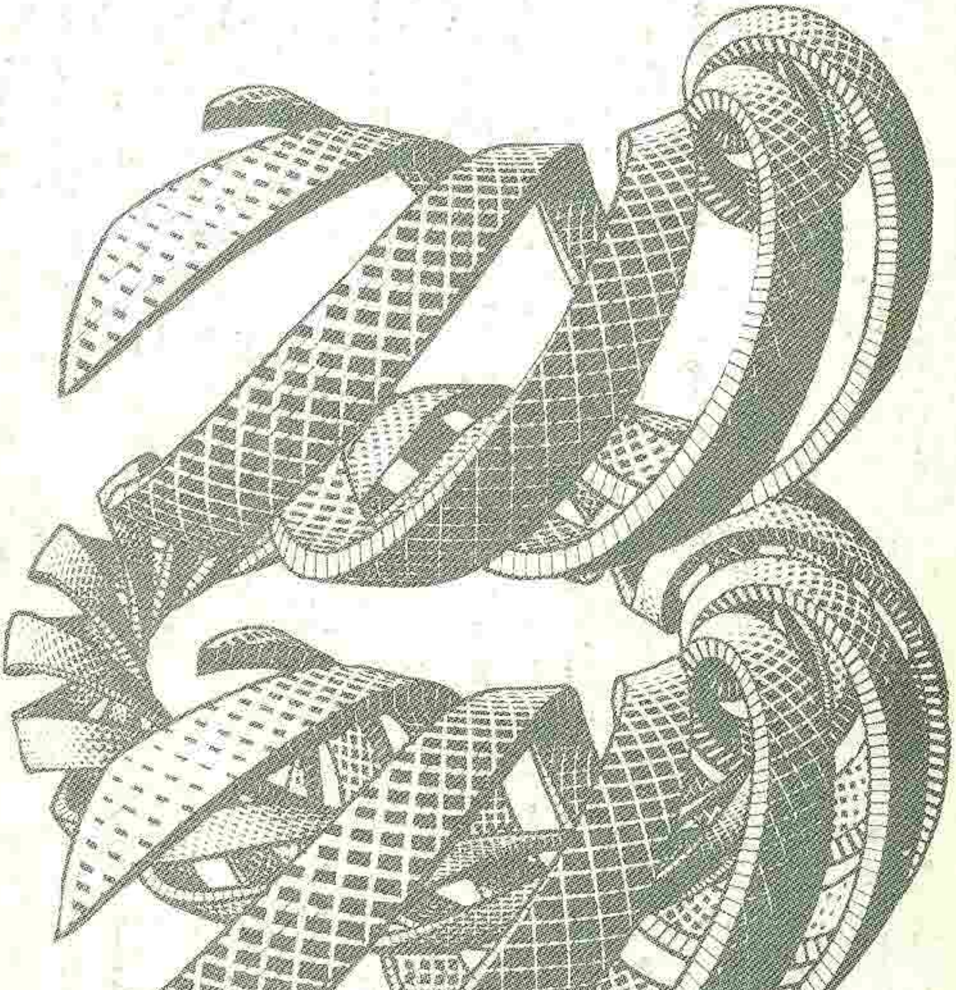
Suma de las edades de ambos. $x + 2x + 7 = 3x + 7$

Ecuación. $3x + 7 = 31$

Solución. $x = 8$

Respuesta. Miguel tiene 8 años, Margarita 23.

Esta edición
de 20,000
ejemplares se
terminó de imprimir en el mes
de agosto
de 1974, en
los talleres
de la Cía.
Editorial
Continental, S. A.,
Calzada de
Tlalpan No.
4620, México 22, D. F.



primer grado

MATEMATICAS

secundaria abierta
SEP

C.E.C.S.A.

Segunda parte

Autores: Dr. Humberto Cárdenas Trigos
Instituto de Matemáticas, UNAM

Profr. Miguel Angel Curiel Ariza
Secretaría de Educación Pública

Dr. Emilio Lluis Riera
Instituto de Matemáticas, UNAM

Profr. Fidel Peralta Corona
Secretaría de Educación Pública

Profr. Cuauhtémoc Tavera Guerrero
Secretaría de Educación Pública

Profr. Elías V. Villar Quijano
Secretaría de Educación Pública

Diseño e Ilustración: *Dirección Artística:* Adolfo Falcón G.

Subdirección: Luis Carlos Emerich Z.

Coordinación: Martha Velasco, Alicia Albo, Herlinda Sánchez Laurel, Víctor Ortiz.

Ilustradores: Federico Calderón, Francisco Castro, José Castro, José Duarte, Arnoldo Fajardo, Bruno González, Carlos Lupercio, Rafael de León, Luis R. Miranda, Kiyoto Oota, Arturo Ramírez, Herlinda Sánchez Laurel, Marcia Salcedo, Susana Trejo, Javier Talavera.

Montaje: Carlos Contreras, José Luis Villanueva, Felícitas Gaspar, Jaime Becerra, Roberto Contreras, Alfonso Martínez, Eduardo Contreras, Arturo Ruiz, Fabiel Gómez, Alejandro Arellano, Alejandro Contreras, Olivia Bocanegra.

Corrección: Aída Lerma, Carlos Forno.

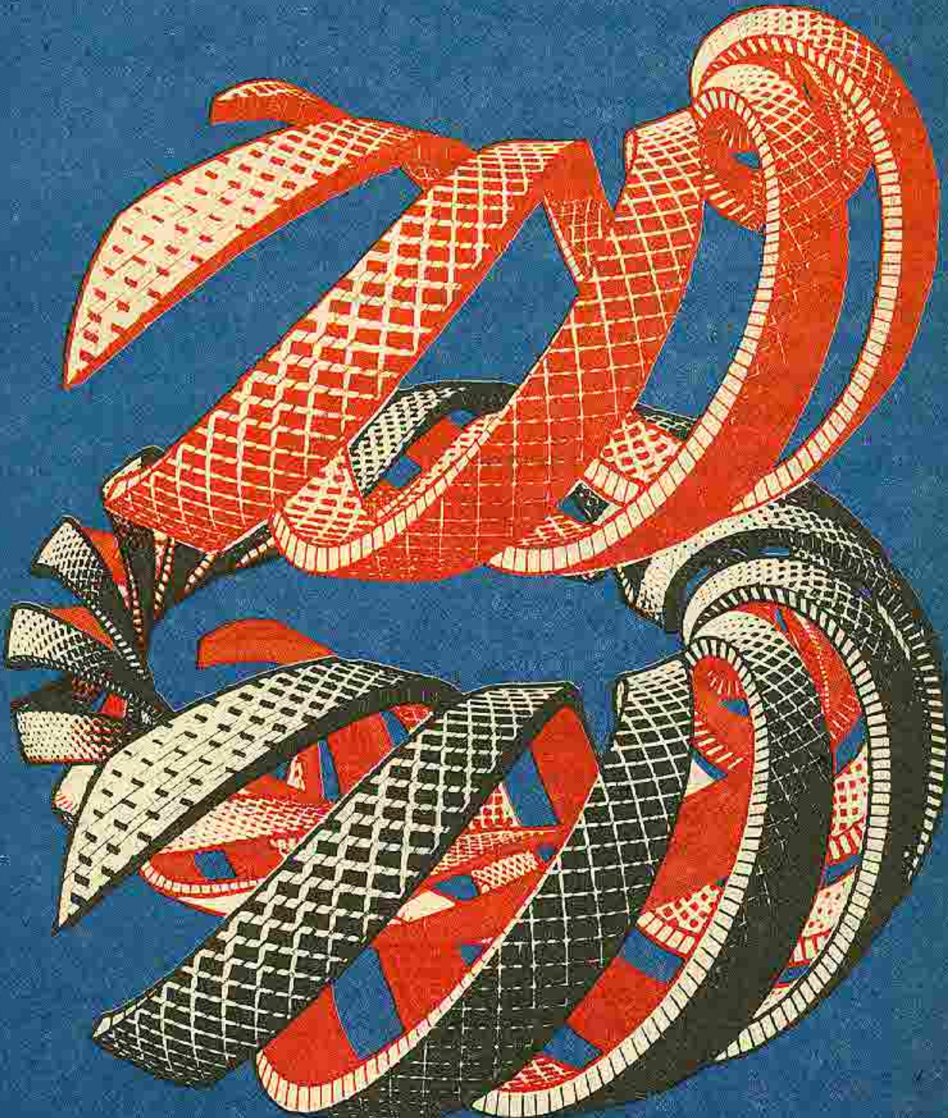
Dibujos de las páginas . . .
249, 281, 303, 315, 327, 363, 375, 393, 413, 439, 448
de **M. C. Escher.**

primer grado

MATEMATICAS

secundaria abierta

SEP



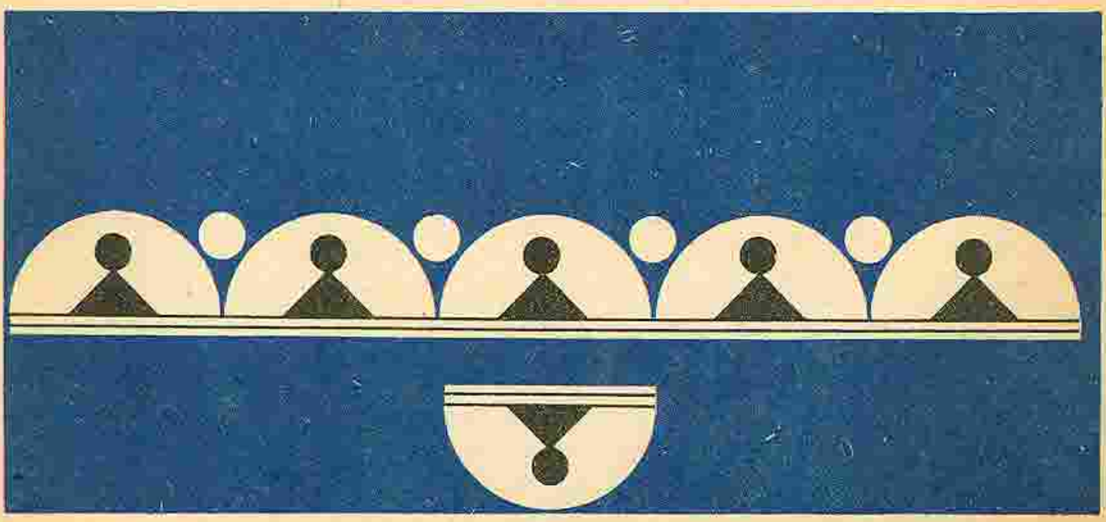
C. E. C. S. A.

Segunda parte

Índice

Capítulo segundo

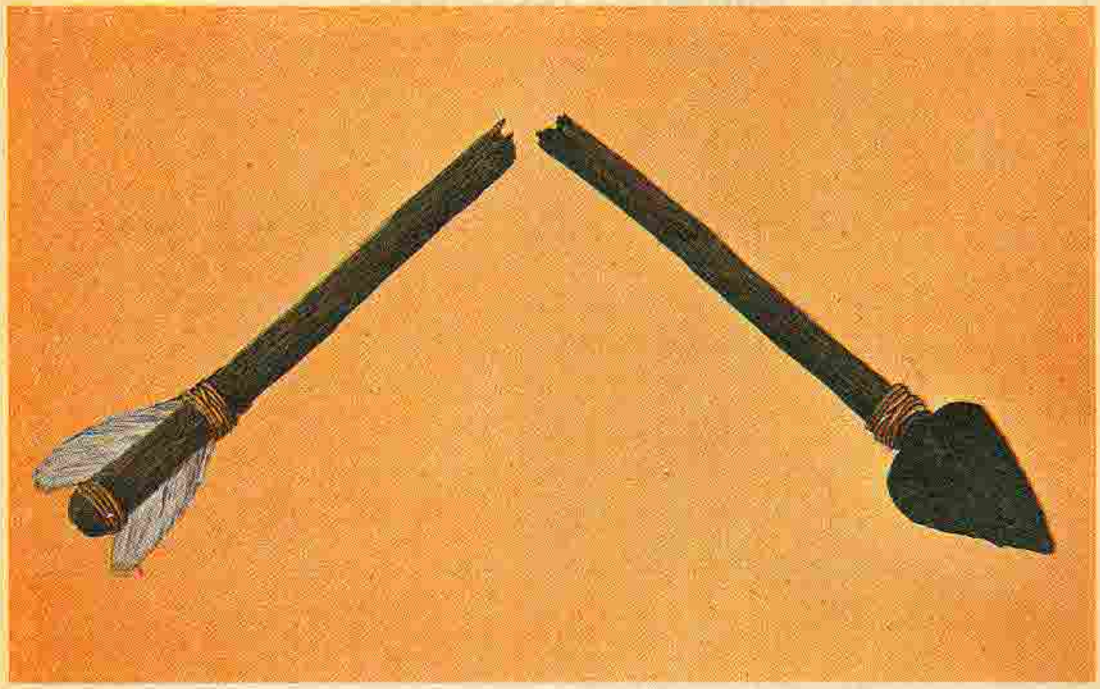
Los números racionales



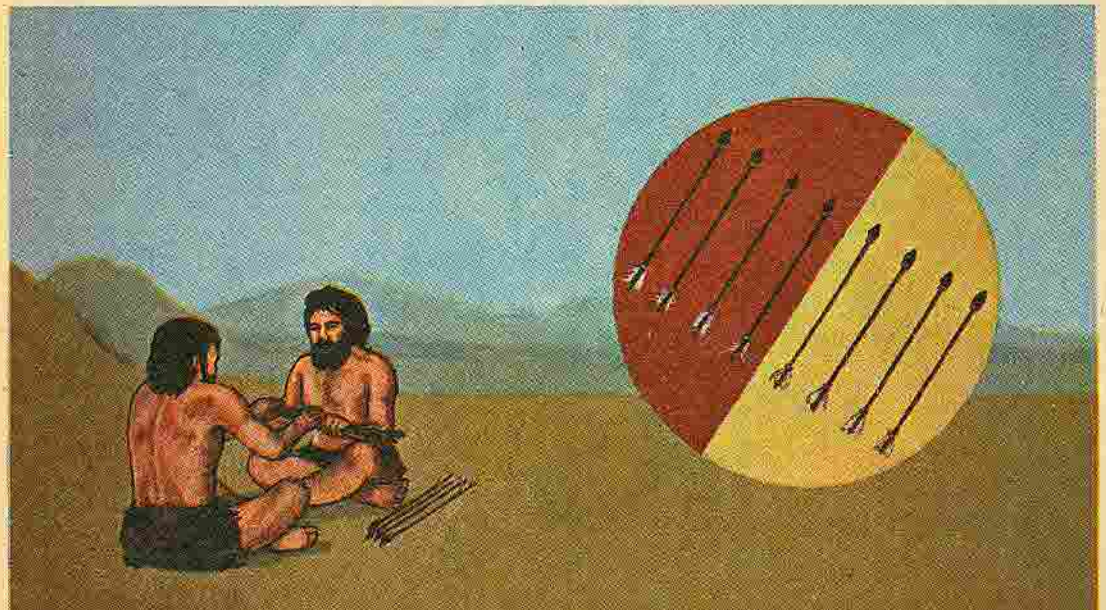
Fracciones y números racionales

1. Fracciones

Es posible que la idea de fracción sea casi tan antigua como el hombre mismo. Así por ejemplo, cuando a un primitivo cazador se le rompía su lanza, como se muestra en el dibujo,

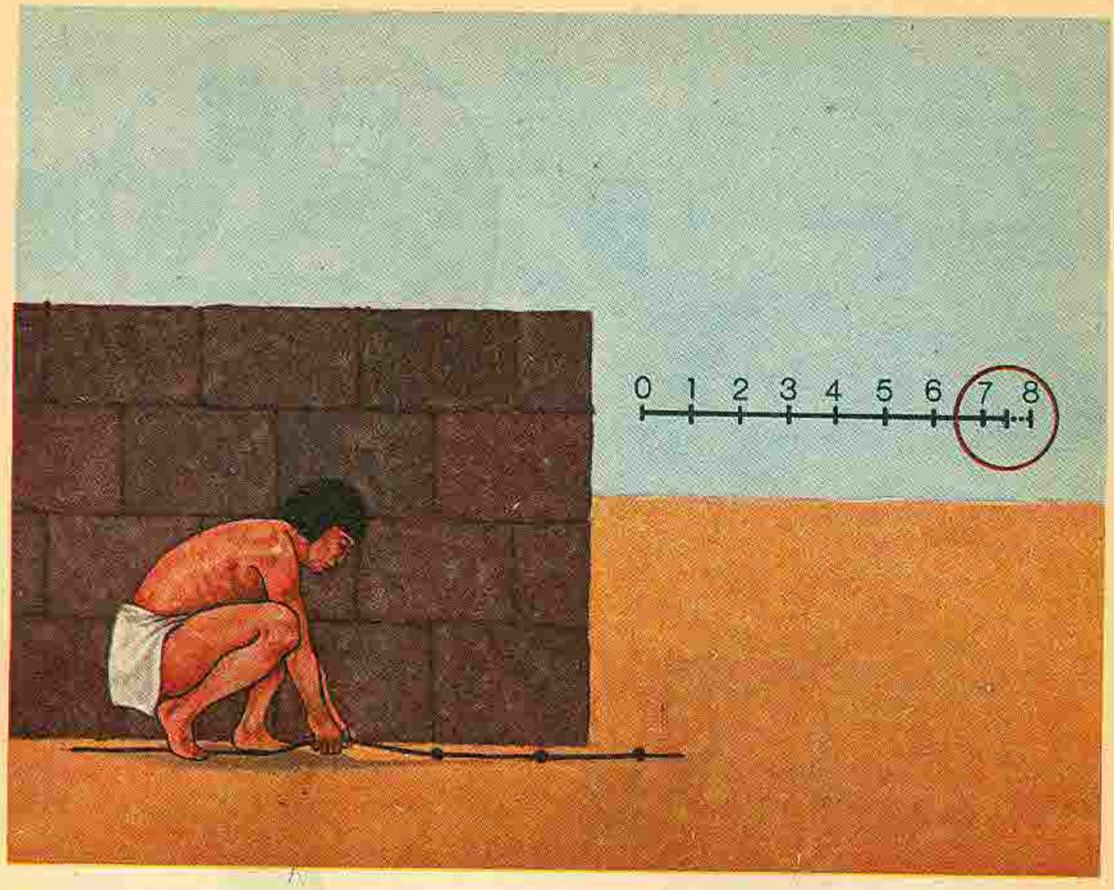


o bien, cuando compartía equitativamente sus flechas con un compañero,



quizá empezara ya a pensar en una mitad o un medio.

Más tarde, cuando empezó a medir,



tal vez recurrió a la idea de fracción para lograr una mayor precisión en su medida. Así, en lugar de hablar de 7 codos u 8 codos, pudo hablar de 7 codos y medio.

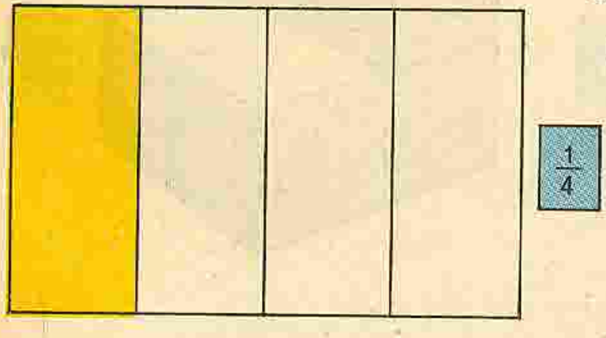
Desde entonces hasta nuestros días, el hombre ha tenido que hacer uso frecuente de las fracciones.

Usted ha manejado fracciones desde la escuela primaria y seguramente recuerda que una fracción es un símbolo como el siguiente:

$$\frac{3}{4}\begin{array}{l}\leftarrow \text{numerador}\\ \leftarrow \text{denominador}\end{array}$$

Usted sabe, además, que se pueden usar las fracciones para describir algunas situaciones. Observe los siguientes ejemplos.

a)

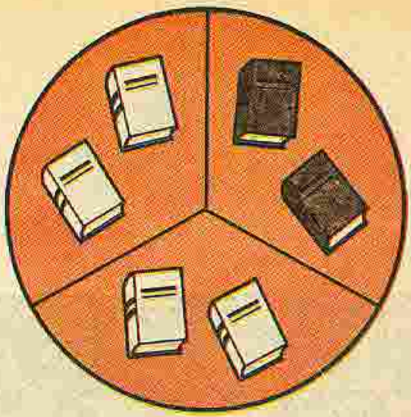


b)

c)

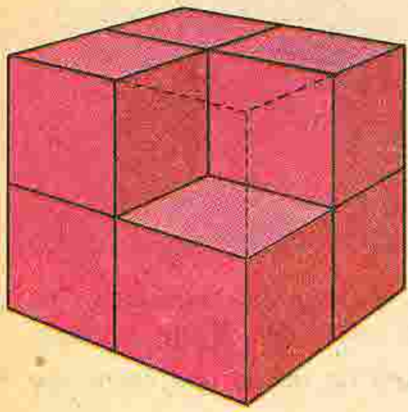
$\frac{2}{3}$

d)



$\frac{1}{3}$

e)

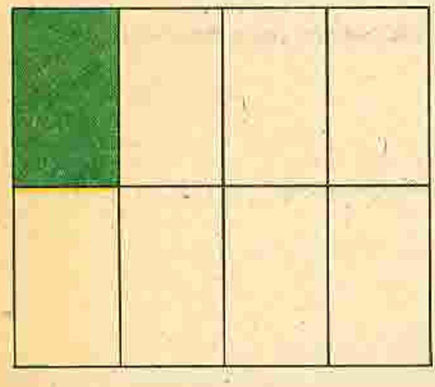


$\frac{7}{8}$

f)

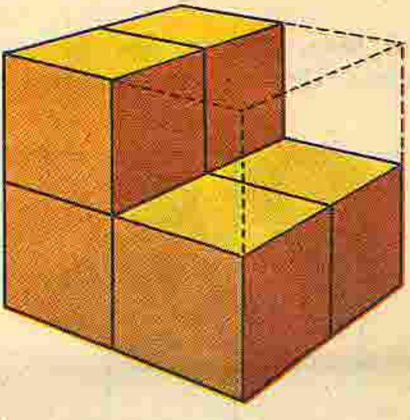
$\frac{3}{4}$

g)



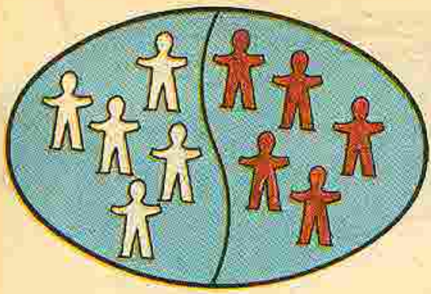
$\frac{1}{8}$

h)



$\frac{6}{8}$

i)

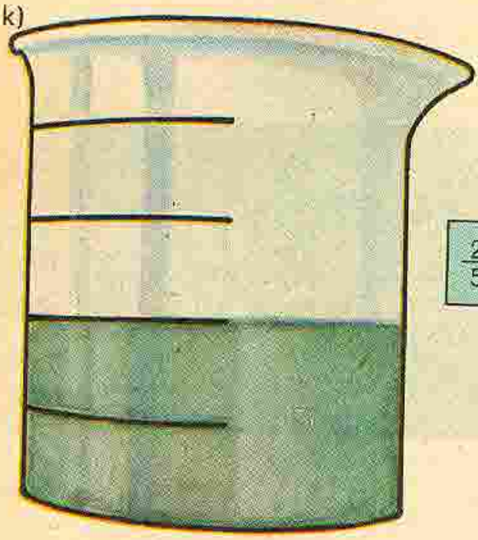


$\boxed{\frac{1}{2}}$

j)

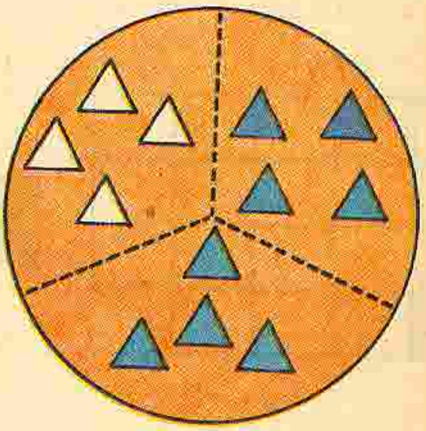
$\boxed{\frac{3}{8}}$

k)



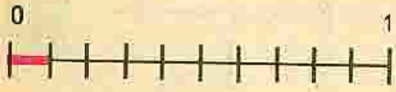
$\boxed{\frac{2}{5}}$

l)



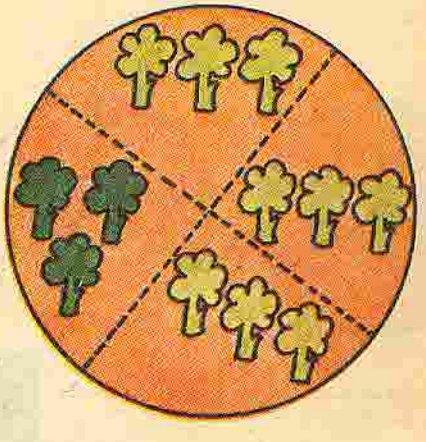
$\boxed{\frac{2}{3}}$

m)



$\boxed{\frac{1}{10}}$

n)

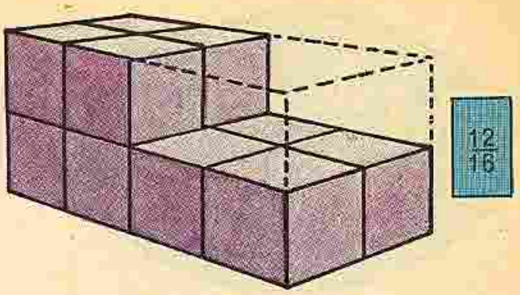


$\boxed{\frac{1}{4}}$

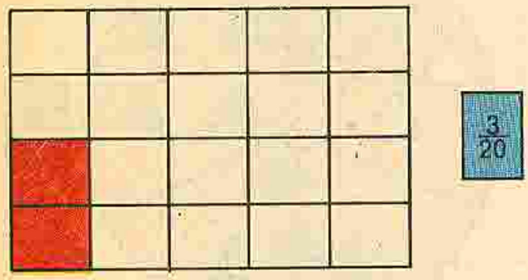
o)


0
1
$\frac{7}{7}$

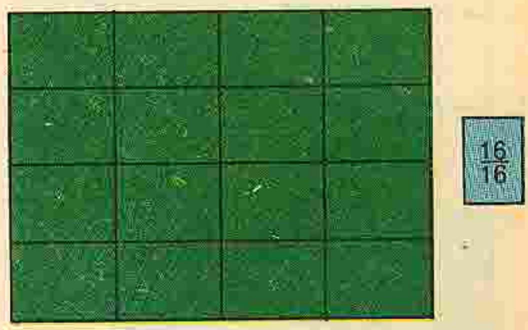
p)


$\frac{12}{16}$

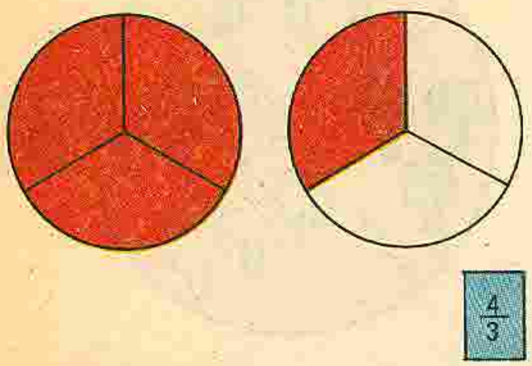
q)


$\frac{3}{20}$

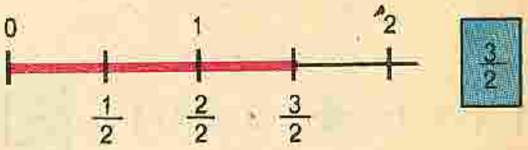
r)


$\frac{16}{16}$

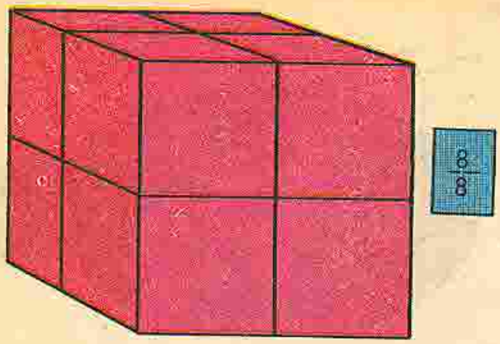
s)


$\frac{4}{3}$

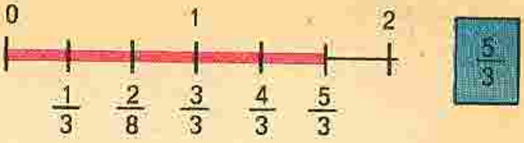
t)


0
1
2
$\frac{1}{2}$
$\frac{2}{2}$
$\frac{3}{2}$
$\frac{3}{2}$

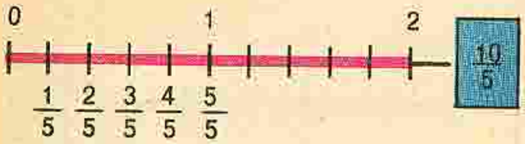
u)


$\frac{8}{8}$

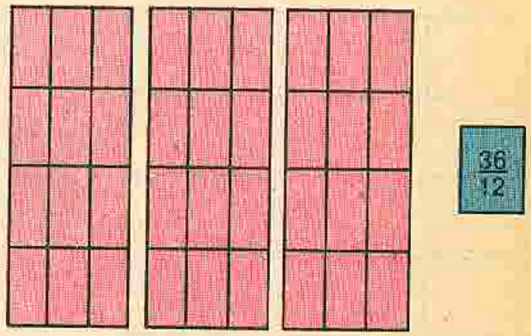
v)


0
1
2
$\frac{1}{3}$
$\frac{2}{8}$
$\frac{3}{3}$
$\frac{4}{3}$
$\frac{5}{3}$
$\frac{5}{3}$

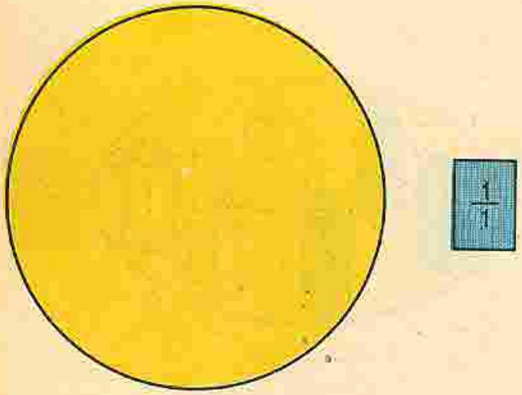
w)


0
1
2
$\frac{1}{5}$
$\frac{2}{5}$
$\frac{3}{5}$
$\frac{4}{5}$
$\frac{5}{5}$
$\frac{10}{5}$

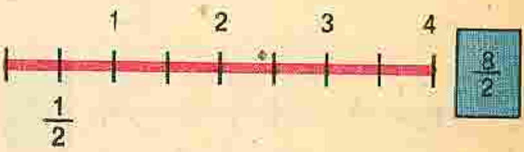
x)


$\frac{36}{12}$

y)


$\frac{1}{1}$

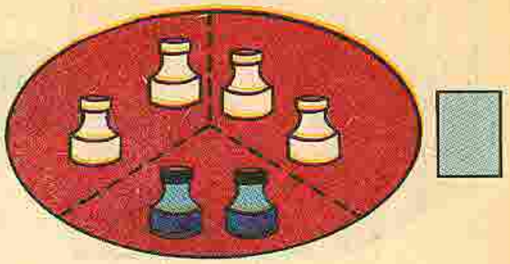
z)


1
2
3
4
$\frac{1}{2}$
$\frac{8}{2}$

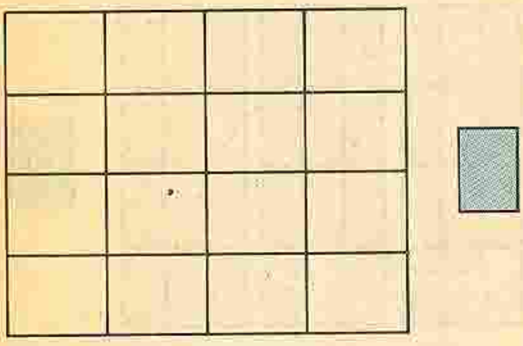
Ejercicio 1. Como en los ejemplos anteriores, escriba la fracción que describe cada situación.

a)

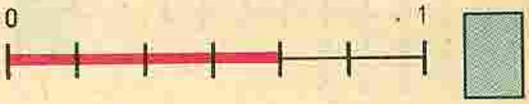
b)



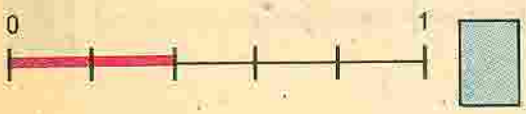
c)



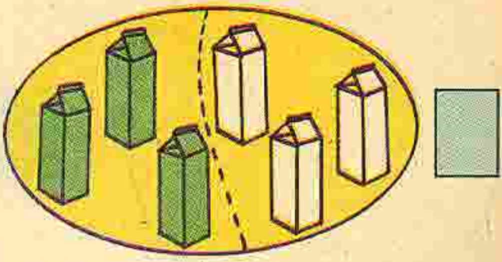
d)



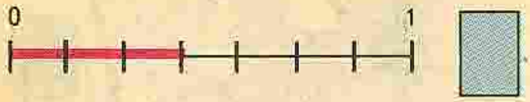
e)



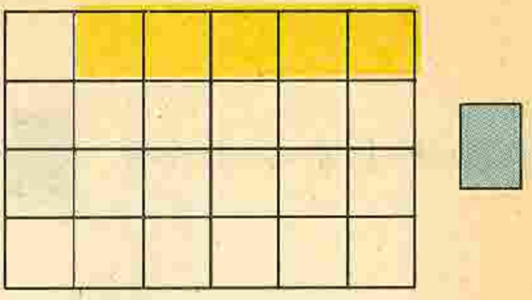
f)



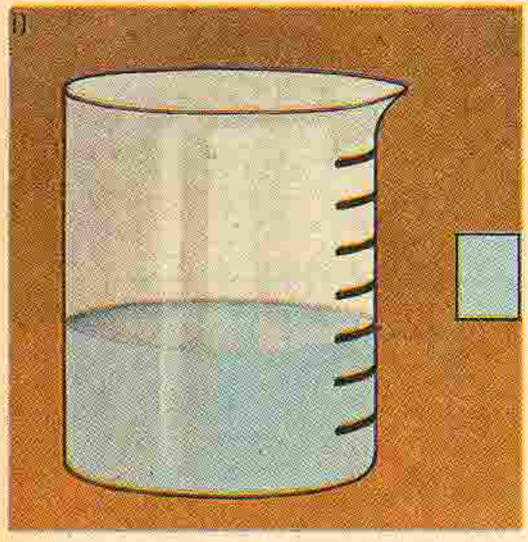
g)



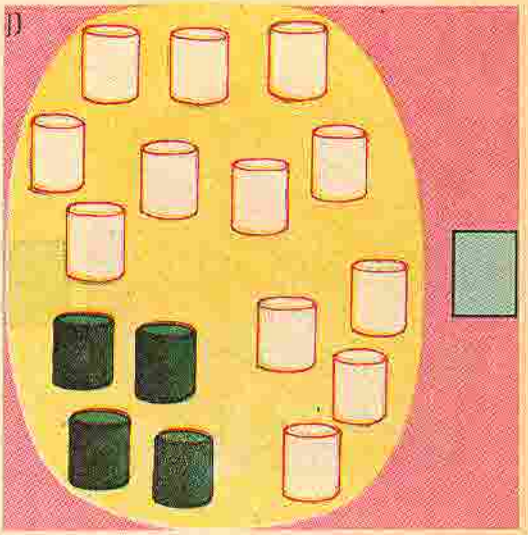
h)



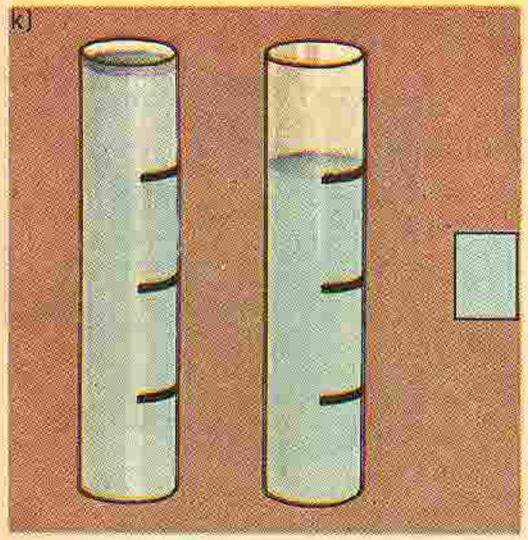
i)



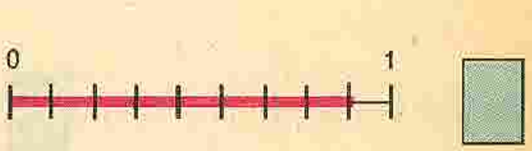
j)



k)

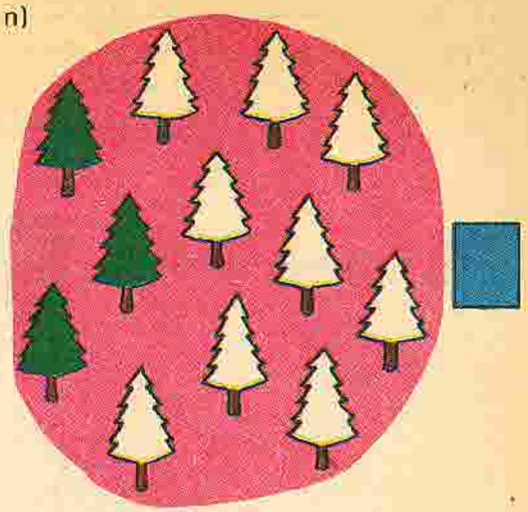


l)

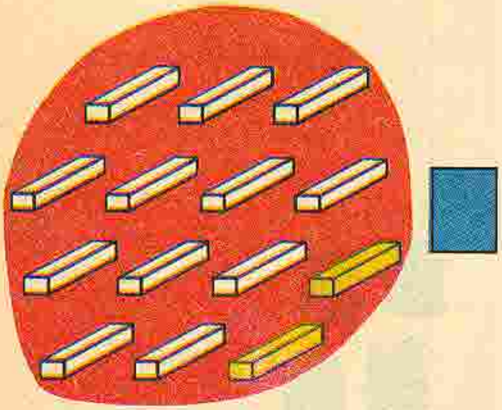


m)

n)

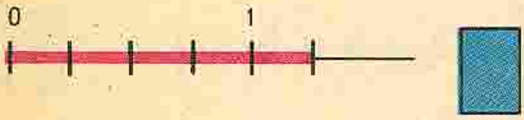


o)

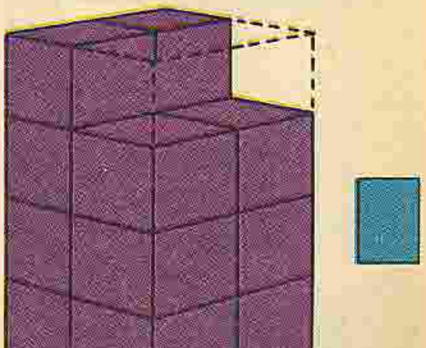


p)

q)



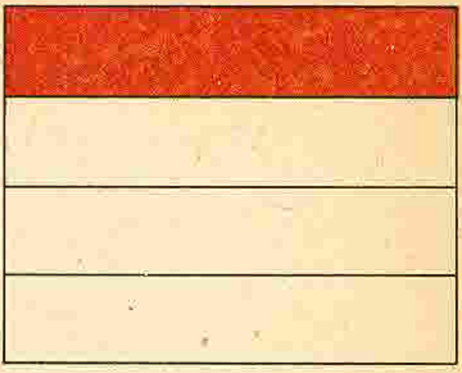
r)



Ejercicio 2. Relacione las ilustraciones que corresponden a la misma fracción, escribiendo las letras de la izquierda en los paréntesis de la derecha.

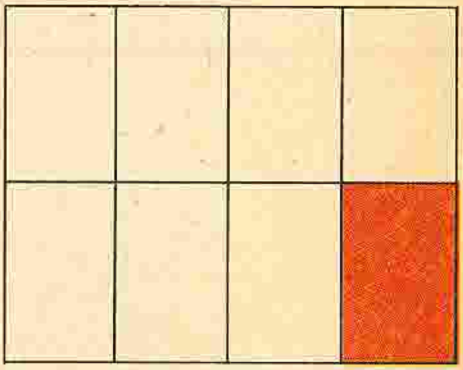
a)

(■)

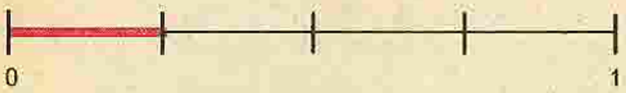


b)

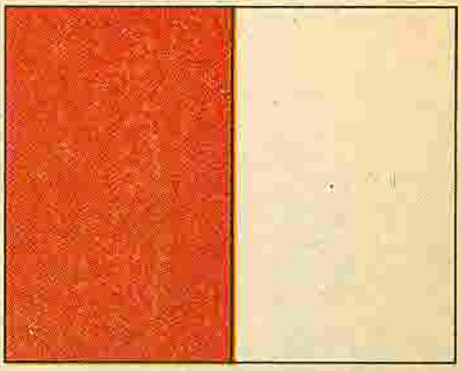
(■)



c)

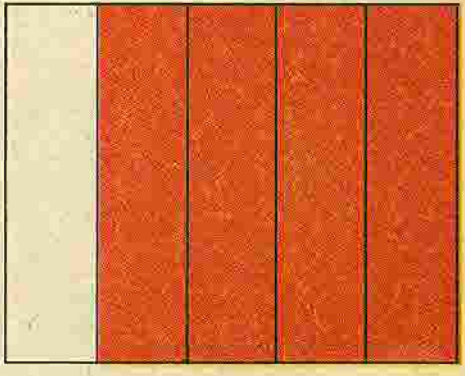


(■)

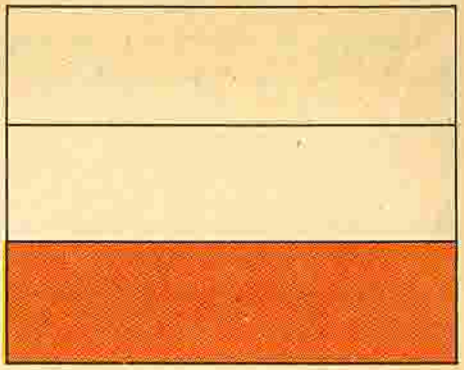


d)

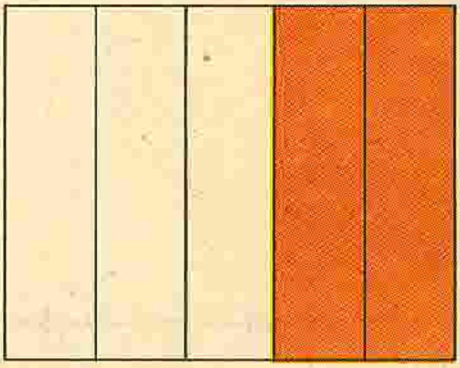
(■)



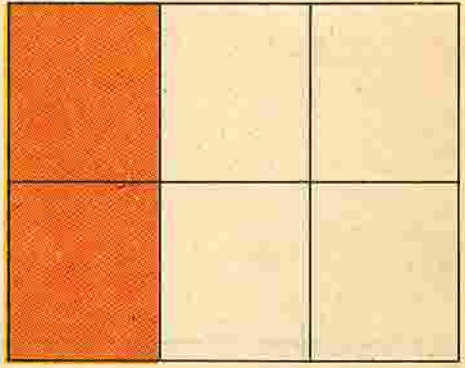
e) (☐)

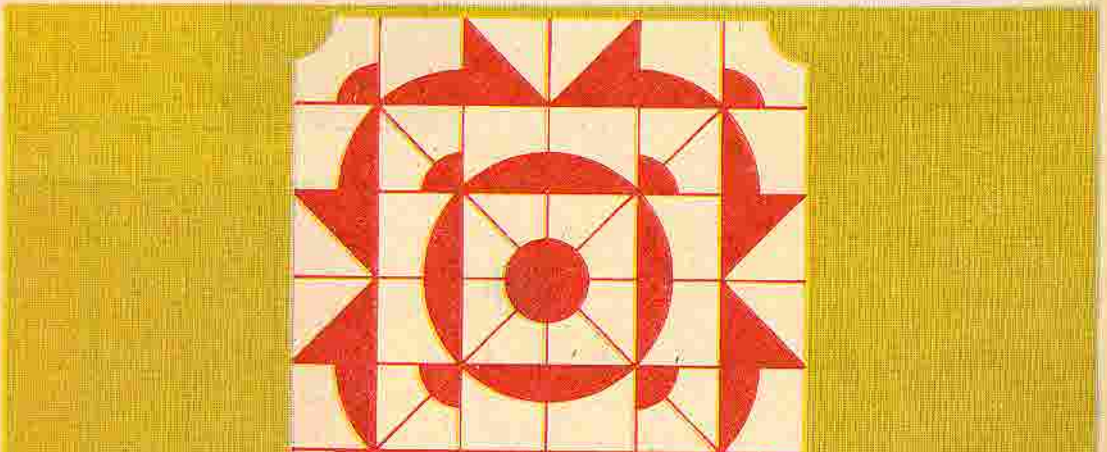


f) (☐)



g) (☐)





2. Fracciones y números racionales

Existió una vez en un reino lejano un visir que era muy trabajador, pero muy ambicioso.

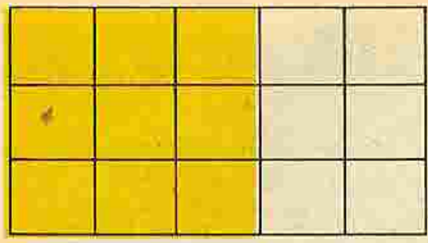
En cierta ocasión el rey quiso recompensar el trabajo de su visir y, a la vez, poner en evidencia su ambición. Le dio a escoger entre

$$\frac{9}{15}, \quad \frac{6}{10}, \quad \frac{3}{5}, \quad \frac{12}{20}, \quad \frac{15}{25}, \quad \frac{18}{30}, \quad \frac{30}{50}, \quad \frac{21}{35}, \quad \text{y} \quad \frac{60}{100}$$

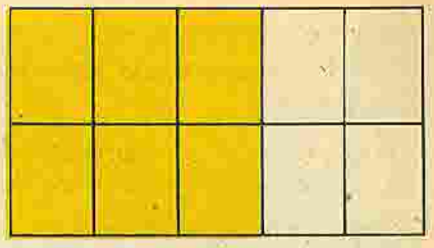
de una barra de oro.

Como era de esperarse, el ambicioso visir escogió $\frac{60}{100}$ de la barra, creyendo que así se llevaba una porción mayor. El rey sonrió maliciosamente.

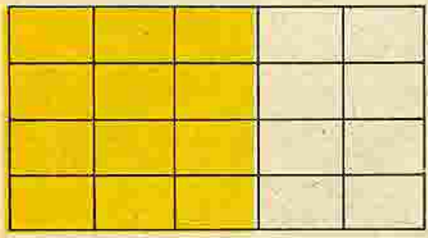
Veamos el por qué de la sonrisa maliciosa. Observe usted las siguientes ilustraciones.



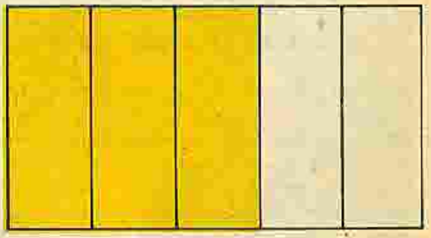
$\frac{9}{15}$



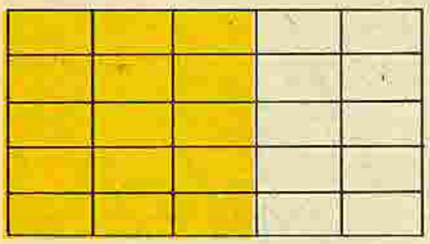
$\frac{6}{10}$



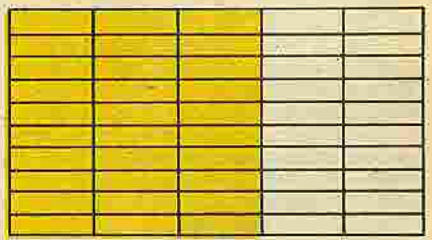
$\frac{12}{20}$



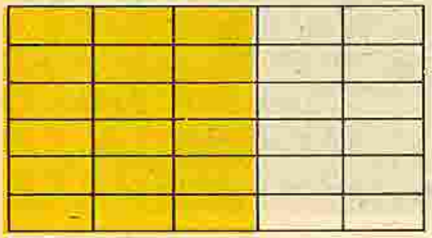
$\frac{3}{5}$



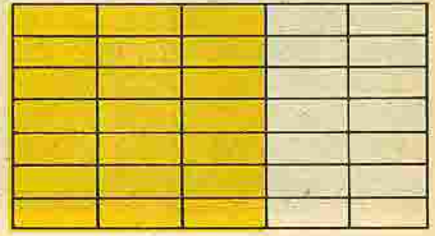
$\frac{15}{25}$



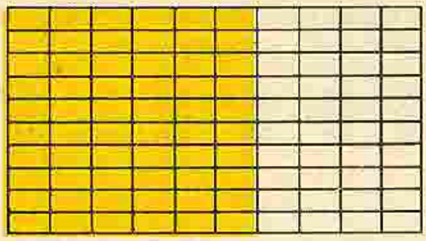
$\frac{30}{50}$



$\frac{18}{30}$



$\frac{21}{35}$



$\frac{60}{100}$

Como puede usted observar, todas las fracciones que el rey proponía representan la misma parte de la barra de oro. En casos como éste, en que varias fracciones representan una misma porción de algo, se dice que *todas esas fracciones expresan un mismo número.*

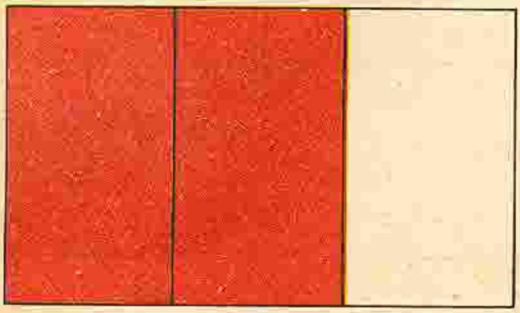
A los números que se pueden representar con fracciones se les llama números racionales.

En conclusión, el visir puso en evidencia no sólo su ambición, sino también su falta de conocimientos sobre las fracciones y los números racionales.

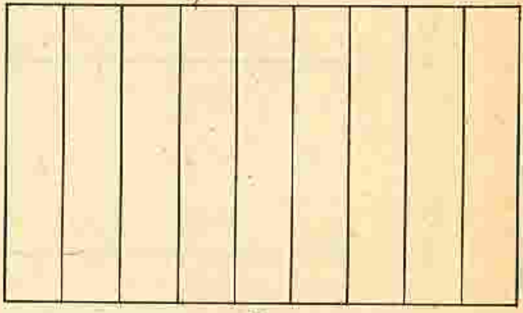
Dadas dos o más fracciones, es útil poder decir si representan o no un mismo número racional. Esto podría hacerse como en el cuento del visir, por medio del dibujo. Por ejemplo, resuelva usted los ejercicios siguientes.

Ejercicio 3. Observe los siguientes rectángulos.

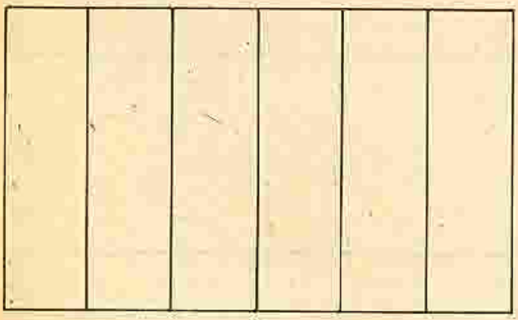
a) Coloree en cada figura la fracción que se indica, tal como se hace con $\frac{2}{3}$.



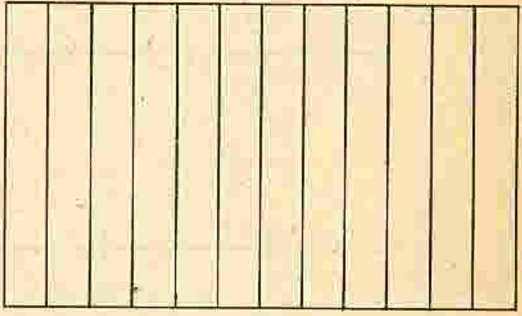
$\frac{2}{3}$



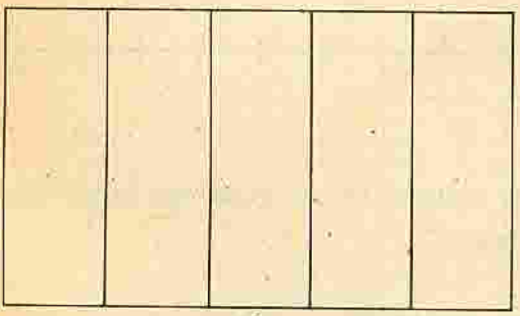
$\frac{7}{9}$



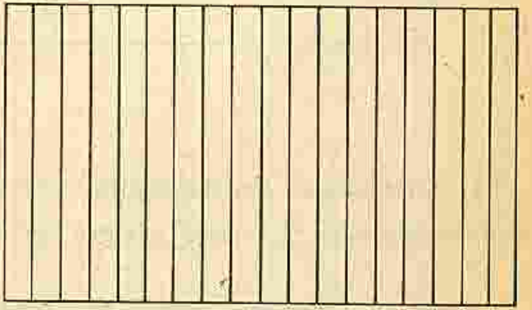
$\frac{4}{6}$



$\frac{8}{12}$



$\frac{4}{5}$



$\frac{12}{18}$

b) Comparando las regiones coloreadas, encierre en un círculo las fracciones que representan el mismo número racional que $\frac{2}{3}$.

Ejercicio 4. Observe los siguientes segmentos.

a) Coloree en cada segmento la fracción que se indica tal como se hace con $\frac{3}{4}$.

$\frac{3}{4}$

$\frac{9}{12}$

$\frac{2}{5}$

$\frac{6}{8}$

$\frac{5}{6}$

$\frac{12}{16}$

b) Comparando los segmentos coloreados encierre en un círculo las fracciones que representan el mismo número racional que $\frac{3}{4}$.

Cuando se conocen diversas fracciones que representan un mismo número racional, se puede usar cualquiera de ellas para denominar a ese número. Por ejemplo, en el ejercicio anterior podríamos hablar del número racional $\frac{3}{4}$ o del racional $\frac{9}{12}$ o del número $\frac{6}{8}$, etc. y en todos los casos estaríamos hablando del mismo número. Por ello, escribimos

$$\frac{3}{4} = \frac{9}{12} = \frac{6}{8}$$

Además del dibujo, contamos con otro recurso para ver cuándo diversas fracciones nombran un mismo número racional. Tal recurso, que usted ha empleado en la escuela primaria, consiste en expresar las fracciones en notación decimal. (Recuerde que para hacer esto se divide el numerador entre el denominador.) Por ejemplo,

$$\frac{9}{15} \qquad \begin{array}{r} .6 \\ 15\,\overline{)\,9.0} \\ 0 \end{array} \qquad\qquad \frac{6}{10} \qquad \begin{array}{r} .6 \\ 10\,\overline{)\,6.0} \\ 0 \end{array} \qquad\qquad \frac{12}{20} \qquad \begin{array}{r} .6 \\ 20\,\overline{)\,12.0} \\ 0 \end{array}$$

$$\frac{15}{25} \qquad \begin{array}{r} .6 \\ 25\,\overline{)\,15.0} \\ 0 \end{array} \qquad\qquad \frac{3}{5} \qquad \begin{array}{r} .6 \\ 5\,\overline{)\,3.0} \\ 0 \end{array} \qquad\qquad \frac{30}{50} \qquad \begin{array}{r} .6 \\ 50\,\overline{)\,30.0} \\ 0 \end{array}$$

$$\frac{18}{30} \qquad \begin{array}{r} .6 \\ 30\,\overline{)\,18.0} \\ 0 \end{array} \qquad\qquad \frac{21}{35} \qquad \begin{array}{r} .6 \\ 35\,\overline{)\,21.0} \\ 0 \end{array} \qquad\qquad \frac{60}{100} \qquad \begin{array}{r} .6 \\ 100\,\overline{)\,60.0} \\ 0 \end{array}$$

Las fracciones mostradas representan un mismo número racional ya que, en todos los casos, obtenemos el mismo decimal. Así pues,

$$\frac{9}{15} = \frac{6}{10} = \frac{12}{20} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5} = \frac{30}{50} = \frac{18}{30} = \frac{21}{35} = \frac{60}{100}.$$

Ejercicio 5. Exprese en notación decimal cada una de las siguientes fracciones.

$$\frac{4}{40}, \frac{10}{20}, \frac{9}{100}, \frac{8}{10},$$

$$\frac{12}{20}, \frac{6}{20}, \frac{30}{30}, \frac{5}{40},$$

$$\frac{3}{15}, \frac{7}{14}, \frac{7}{35}, \frac{4}{8}.$$

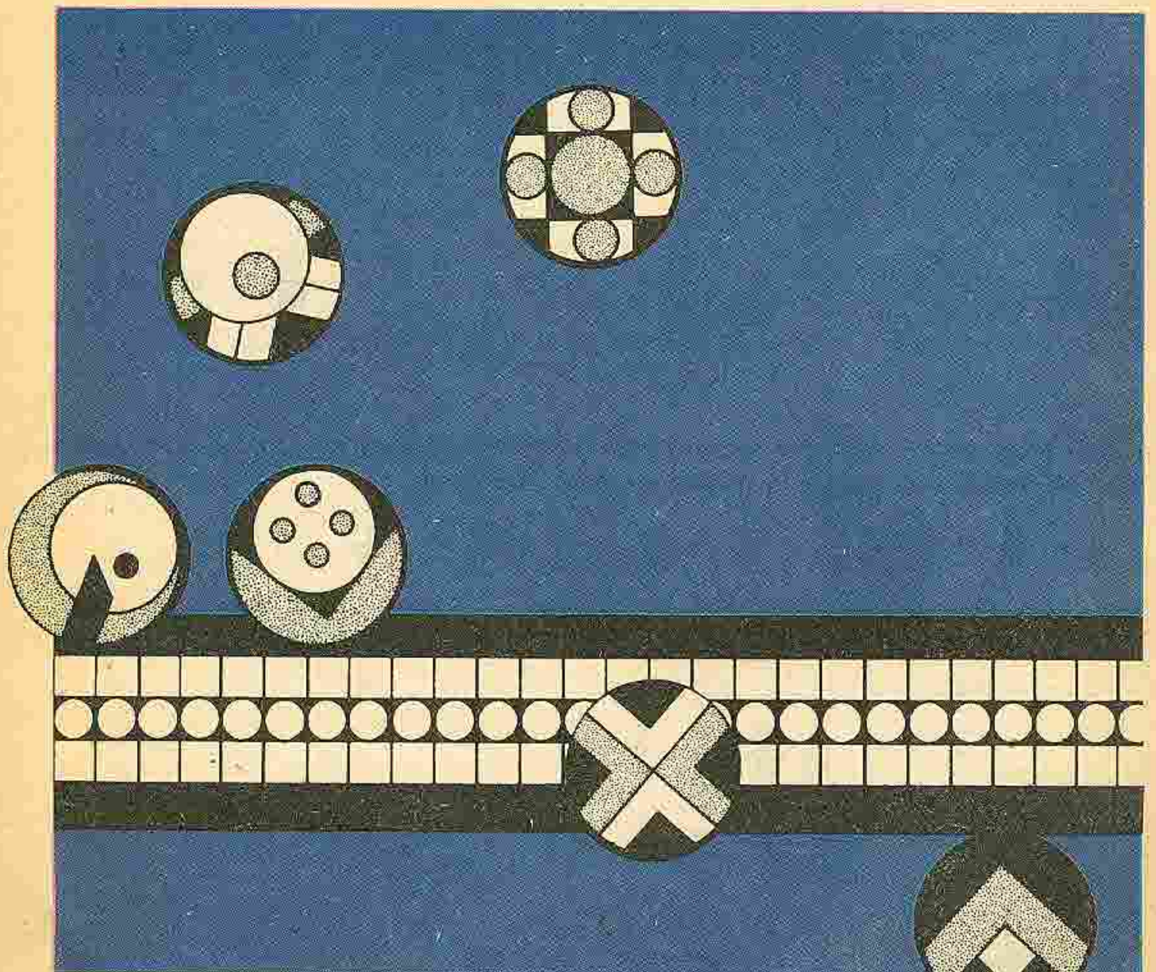
De estas fracciones, las que representan el mismo número racional que $\frac{1}{2}$ son ________________________________; las que representan al mismo número que la fracción $\frac{1}{5}$ son ________________________________ y las que representan al número $\frac{3}{10}$ son ______________________________.

De lo expresado en páginas anteriores, conviene que recuerde usted lo siguiente:

Los números racionales son los que se representan mediante fracciones.

Un número racional puede representarse con muchas fracciones.

Dos fracciones representan un mismo número racional si al dividir el numerador entre el denominador se obtiene el mismo decimal.



3. Los números racionales y los números naturales

El método de división que acabamos de estudiar para reconocer las fracciones que nombran un mismo número racional, puede emplearse también para encontrar una relación que existe entre los números naturales y los racionales. Observe con cuidado lo siguiente:

$$\frac{7}{1} \quad \boxed{\begin{array}{rl} & 7 \\ \cline{2-2} 1 & \multicolumn{1}{|l}{7} \\ & 0 \end{array}} \qquad \frac{9}{1} \quad \boxed{\begin{array}{rl} & 9 \\ \cline{2-2} 1 & \multicolumn{1}{|l}{9} \\ & 0 \end{array}} \qquad \frac{15}{1} \quad \boxed{\begin{array}{rl} & 15 \\ \cline{2-2} 1 & \multicolumn{1}{|l}{15} \\ & 0 \end{array}}$$

$$\frac{3}{1} \quad \boxed{\begin{array}{rl} & 3 \\ \cline{2-2} 1 & \multicolumn{1}{|l}{3} \\ & 0 \end{array}} \qquad \frac{2}{1} \quad \boxed{\begin{array}{rl} & 2 \\ \cline{2-2} 1 & \multicolumn{1}{|l}{2} \\ & 0 \end{array}} \qquad \frac{28}{1} \quad \boxed{\begin{array}{rl} & 28 \\ \cline{2-2} 1 & \multicolumn{1}{|l}{28} \\ & 0 \end{array}}$$

$$\frac{1}{1} \quad \boxed{\begin{array}{rl} & 1 \\ \cline{2-2} 1 & \multicolumn{1}{|l}{1} \\ & 0 \end{array}} \qquad \frac{75}{1} \quad \boxed{\begin{array}{rl} & 75 \\ \cline{2-2} 1 & \multicolumn{1}{|l}{75} \\ & 0 \end{array}} \qquad \frac{83}{1} \quad \boxed{\begin{array}{rl} & 83 \\ \cline{2-2} 1 & \multicolumn{1}{|l}{83} \\ & 0 \end{array}}$$

Aquí se observa que la fracción $\frac{7}{1}$ representa al número natural 7, la fracción $\frac{9}{1}$ representa al natural 9, la fracción $\frac{15}{1}$ representa al número 15, etc. Es decir,

$\frac{7}{1} = 7$, $\frac{9}{1} = 9$, $\frac{15}{1} = 15$, etc.

Si a es un número natural cualquiera, entonces ese número a se puede representar con la fracción $\frac{a}{1}$.

En símbolos,

$$a = \frac{a}{1}.$$

El número 7 se puede representar con la fracción $\frac{7}{1}$; pero también se puede representar con otras fracciones como, por ejemplo,

$$\frac{14}{2} \qquad \begin{array}{r|l} \multicolumn{1}{r}{} & 7 \\ \cline{2-2} 2 & 14 \\ \multicolumn{1}{r}{} & 0 \end{array} \qquad \frac{21}{3} \qquad \begin{array}{r|l} \multicolumn{1}{r}{} & 7 \\ \cline{2-2} 3 & 21 \\ \multicolumn{1}{r}{} & 0 \end{array} \qquad \frac{28}{4} \qquad \begin{array}{r|l} \multicolumn{1}{r}{} & 7 \\ \cline{2-2} 4 & 28 \\ \multicolumn{1}{r}{} & 0 \end{array}$$

$$\frac{35}{5} \qquad \begin{array}{r|l} \multicolumn{1}{r}{} & 7 \\ \cline{2-2} 5 & 35 \\ \multicolumn{1}{r}{} & 0 \end{array} \qquad \frac{49}{7} \qquad \begin{array}{r|l} \multicolumn{1}{r}{} & 7 \\ \cline{2-2} 7 & 49 \\ \multicolumn{1}{r}{} & 0 \end{array} \qquad \frac{42}{6} \qquad \begin{array}{r|l} \multicolumn{1}{r}{} & 7 \\ \cline{2-2} 6 & 42 \\ \multicolumn{1}{r}{} & 0 \end{array}$$

El número 7 se puede representar con muchas fracciones como $\frac{14}{2}$, $\frac{21}{3}$, $\frac{28}{4}$, $\frac{35}{5}$, etc. Es decir,

$$7 = \frac{14}{2}, \qquad 7 = \frac{21}{3}, \qquad 7 = \frac{28}{4}, \qquad 7 = \frac{35}{5}, \text{ etc.}$$

Análogamente, todo número natural se puede representar con muchas fracciones.

Ejercicio 6. Trace rayas para unir cada número natural con las fracciones que lo representan.

5 10 1 2 6 3

$\frac{20}{4}$ $\frac{20}{2}$ $\frac{18}{18}$ $\frac{10}{1}$ $\frac{3}{3}$ $\frac{1}{1}$ $\frac{18}{3}$ $\frac{6}{3}$ $\frac{30}{5}$ $\frac{3}{1}$

En particular se observa que el número natural 1 se puede expresar con la fracción $\frac{1}{1}$, o la fracción $\frac{18}{18}$, o la fracción $\frac{3}{3}$, etc. Es decir,

$$1 = \frac{1}{1}, \qquad 1 = \frac{18}{18}, \qquad 1 = \frac{3}{3}, \qquad 1 = \frac{12}{12}, \text{ etc.}$$

En general,

Si a es un número natural cualquiera, entonces la fracción $\frac{a}{a}$ nombra al número 1. Esto es,

$$1 = \frac{a}{a}.$$

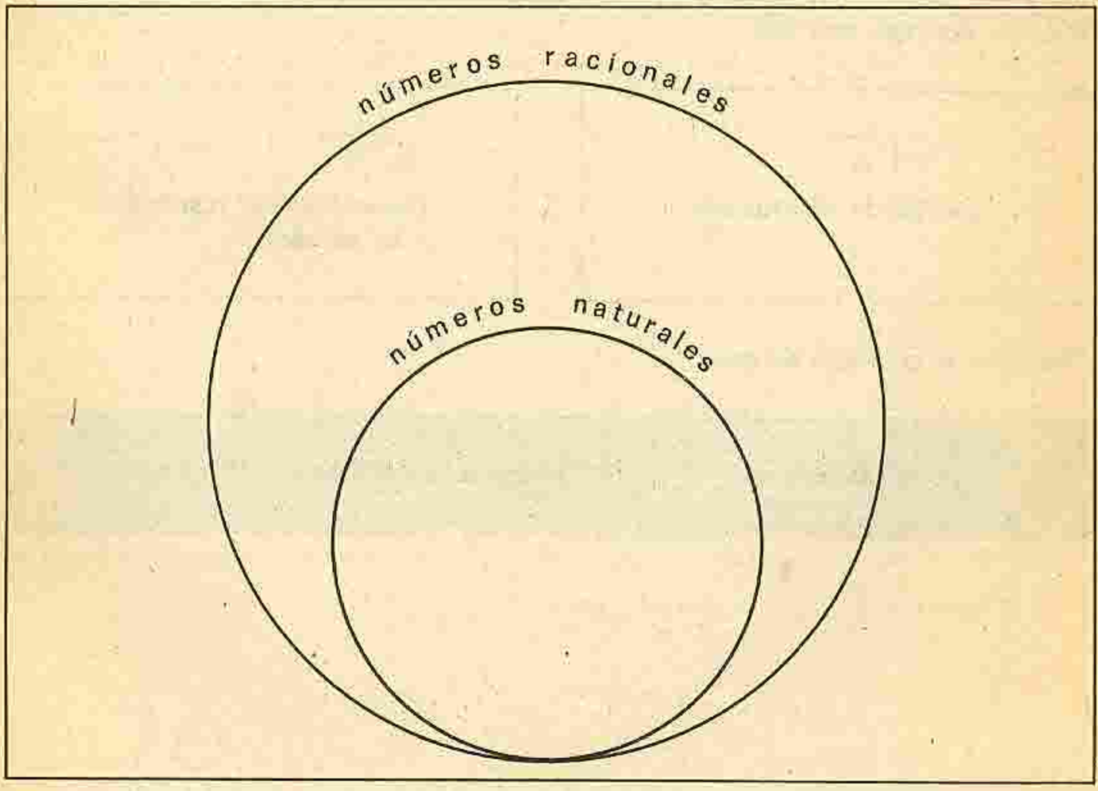
Ejercicio 7. De los siguientes números racionales tache los que son números naturales. (Divida numerador entre denominador.)

$$\frac{2}{3}, \quad \frac{8}{4}, \quad \frac{1}{5}, \quad \frac{5}{1}, \quad \frac{2}{2}, \quad \frac{4}{3}, \quad \frac{19}{19}, \quad \frac{13}{15},$$

$$\frac{1}{1}, \quad \frac{126}{1}, \quad \frac{12}{3}, \quad \frac{15}{15}, \quad \frac{5}{15}, \quad \frac{20}{4}, \quad \frac{4}{5}, \quad \frac{9}{2}.$$

El conjunto de los números naturales es un subconjunto del conjunto de los números racionales. Es decir, los números naturales son números racionales.

Esta relación entre el conjunto de los números naturales y el conjunto de los números racionales se puede ilustrar con el siguiente diagrama.



ya que

$$\begin{array}{c} \;\;\;0 \\ 5\,\big|\overline{\,0\,} \end{array}, \quad \begin{array}{c} \;\;\;0 \\ 7\,\big|\overline{\,0\,} \end{array}, \quad \begin{array}{c} \;\;\;0 \\ 9\,\big|\overline{\,0\,} \end{array}, \quad \begin{array}{c} \;\;\;\;0 \\ 10\,\big|\overline{\,0\,} \end{array}$$

el número cero puede representarse con fracciones como

$$\frac{0}{5}, \quad \frac{0}{7}, \quad \frac{0}{9}, \quad \frac{0}{10}, \text{ etc.}$$

En virtud de eso aceptamos que

El cero es un número racional.

Hay muchas fracciones que representan al número cero.

Si a **es un número natural cualquiera, entonces la fracción** $\frac{0}{a}$ **representa al número cero.**

En símbolos,

$$\frac{0}{a} = 0.$$

Observación. Si quisiéramos interpretar como fracciones las expresiones $\frac{a}{0}$ y $\frac{0}{0}$, (donde a es un número natural), nos encontraríamos, al tratar de expresarlas en notación decimal, con que

$0\,\big\vert\overline{\,a\,}$ (no puede efectuarse)	$0\,\big\vert\overline{\,0\,}$ (tiene muchos resultados y no se usa)

Por ello se conviene en que

Las expresiones $\frac{a}{0}$ **y** $\frac{0}{0}$ **no representan números racionales.**

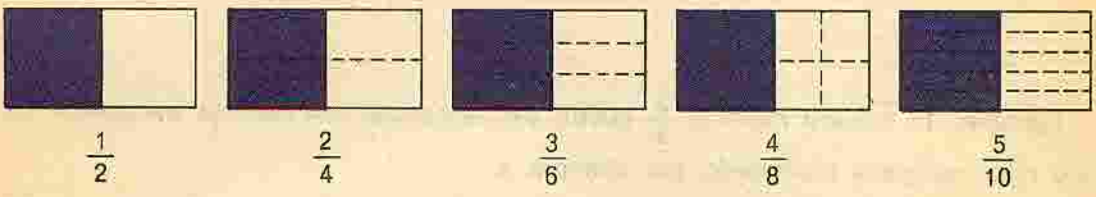
4. Fracciones que representan un mismo número

Según hemos visto, hay muchas fracciones distintas que representan un mismo número racional y para distinguirlas podemos representarlas gráficamente, o bien, podemos expresarlas en notación decimal. Sin embargo, la representación gráfica es a veces imposible y obtener su expresión decimal resulta en ocasiones muy tardado.

Existe un procedimiento que nos permite determinar más rápidamente si dos o más fracciones nombran un mismo número o nombran números diferentes. ¿En qué consiste tal procedimiento?

Para conocerlo, primero observemos los ejemplos siguientes:

Ejemplo. El número racional $\frac{1}{2}$ puede ser representado con muchas fracciones Algunas de ellas son



Si tomamos dos cualesquiera de estas fracciones por ejemplo $\frac{2}{4}$ y $\frac{3}{6}$, observamos que

$\boxed{2 \cdot 6} = \boxed{4 \cdot 3}$

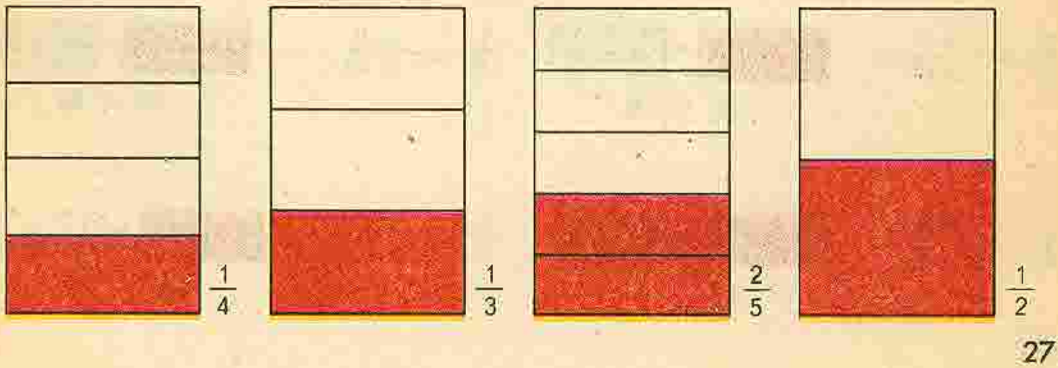
Si consideramos las fracciones $\frac{3}{6}$ y $\frac{5}{10}$ notamos que

$\boxed{3 \cdot 10} = \boxed{6 \cdot 5}$

Si tomamos otras dos, por ejemplo $\frac{1}{2}$ y $\frac{4}{8}$, vemos también que

$\boxed{1 \times 8} = \boxed{2 \times 4}$

Ejemplo. Las fracciones $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{5}$, y $\frac{1}{2}$ denotan números racionales diferentes



Si tomamos dos cualesquiera de estas fracciones, por ejemplo $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{3}$, observamos que

$\frac{1}{4} \quad \frac{1}{3}$ $\boxed{1 \times 3}$ no es igual a $\boxed{4 \times 1}$

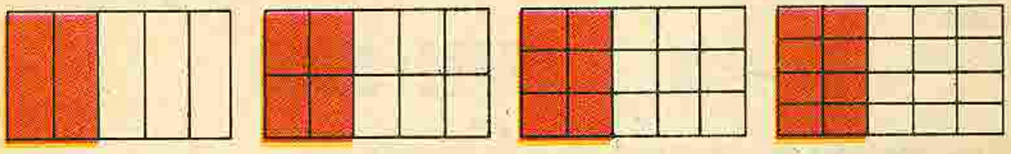
Si consideramos las fracciones $\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{5}$ notamos que

$\frac{1}{3} \quad \frac{2}{5}$ $\boxed{1 \times 5}$ no es igual a $\boxed{3 \times 2}$

Si tomamos otras dos, por ejemplo $\frac{2}{5}$ y $\frac{1}{2}$ vemos también que

$\frac{2}{5} \quad \frac{1}{2}$ $\boxed{2 \cdot 2}$ no es igual a $\boxed{5 \cdot 1}$

Ejemplo. El número racional $\frac{2}{5}$ puede ser expresado con muchas fracciones. Entre ellas podemos mencionar, por ejemplo, a



$\frac{2}{5}$ $\frac{4}{10}$ $\frac{6}{15}$ $\frac{8}{20}$

Si tomamos ahora una pareja cualquiera de estas fracciones, notamos que

$\frac{2}{5} \quad \frac{4}{10}$ $\boxed{2 \times 10} = \boxed{5 \times 4}$ $20 = 20$

$\frac{4}{10} \quad \frac{6}{15}$ $\boxed{4 \cdot 15} = \boxed{10 \cdot 6}$ $60 = 60$

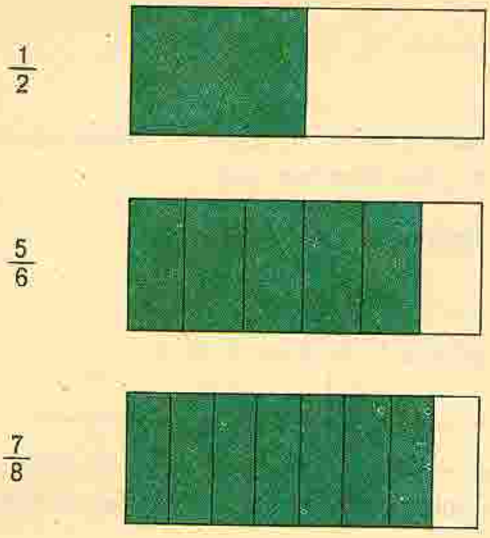
$\frac{2}{5} \quad \frac{6}{15}$ $\boxed{2 \times 15} = \boxed{5 \times 6}$ $30 = 30$

$\frac{4}{10} \quad \frac{8}{20}$ $\boxed{4 \cdot 20} = \boxed{10 \cdot 8}$ $80 = 80$

$\frac{2}{5} \quad \frac{8}{20}$ $\boxed{2 \cdot 20} = \boxed{5 \cdot 8}$ $40 = 40$

$\frac{6}{15} \quad \frac{8}{20}$ $\boxed{6 \cdot 20} = \boxed{15 \cdot 8}$ $120 = 120$

Ejemplo. Las fracciones $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{6}$ y $\frac{7}{8}$ representan números racionales distintos.



Si tomamos dos cualesquieras de estas fracciones, notamos que

$\boxed{1 \cdot 6}$ no es igual a $\boxed{2 \cdot 5}$

6 no es igual a 10

$\boxed{1 \times 8}$ no es igual a $\boxed{2 \times 7}$

8 no es igual a 14

$\boxed{5 \cdot 8}$ no es igual a $\boxed{6 \cdot 7}$

40 no es igual a 42

Lo que observamos en estos ejemplos nos ilustra lo siguiente:

Dos fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ representan el mismo número racional si el producto de a por d es igual al producto de b por c.

En símbolos,

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \text{si} \quad a \cdot d = b \cdot c$$

Ejemplo.

a) $\frac{6}{10} = \frac{9}{15}$ porque $6 \times 15 = 10 \times 9$.

b) $\frac{30}{50} = \frac{3}{5}$ porque $30 \times 5 = 50 \times 3$.

Para indicar que dos fracciones no denotan el mismo número se usa el signo $\neq$ que se lee "no es igual a". Así tenemos que

c) $\frac{4}{5} \neq \frac{8}{9}$ porque $4 \times 9 \neq 5 \times 8$.

d) $\frac{3}{4} \neq \frac{5}{8}$ porque $3 \times 8 \neq 4 \times 5$.

Ejercicio 8. Escriba en cada □ el signo = o el signo $\neq$ para indicar que las fracciones denotan el mismo número o no. Vea los incisos resueltos.

a) $\frac{18}{36} \boxed{=} \frac{7}{14}$ porque $18 \cdot 14 \boxed{=} 36 \cdot 7$.

b) $\frac{12}{32} \boxed{\neq} \frac{5}{6}$ porque $12 \cdot 6 \boxed{\neq} 32 \cdot 5$.

c) $\frac{20}{60}$ □ $\frac{15}{45}$ porque $20 \cdot 45$ □ $60 \cdot 15$.

d) $\frac{12}{60}$ □ $\frac{40}{100}$ porque $12 \cdot 100$ □ $60 \cdot 40$.

e) $\frac{15}{20}$ □ $\frac{3}{4}$ porque $15 \cdot 4$ □ $20 \cdot 3$.

f) $\frac{7}{12}$ □ $\frac{35}{60}$ porque $7 \cdot 60$ □ $12 \cdot 35$

g) $\frac{5}{6}$ □ $\frac{60}{72}$ porque $5 \cdot 72$ □ $6 \cdot 60$.

h) $\frac{7}{9}$ □ $\frac{21}{18}$ porque $7 \cdot 18$ □ $9 \cdot 21$.

i) $\frac{12}{15}$ □ $\frac{28}{35}$ porque $12 \cdot 35$ □ $15 \cdot 28$.

j) $\frac{10}{15}$ ■ $\frac{18}{27}$ porque $10 \cdot 27$ ■ $15 \cdot 18$.

k) $\frac{20}{25}$ ■ $\frac{25}{20}$ porque $20 \cdot 20$ ■ $25 \cdot 25$.

l) $\frac{16}{20}$ ■ $\frac{20}{25}$ porque $16 \cdot 25$ ■ $20 \cdot 20$.

m) $\frac{3}{5}$ ■ $\frac{3a}{5a}$ porque $3 \cdot 5a$ ■ $5 \cdot 3a$.

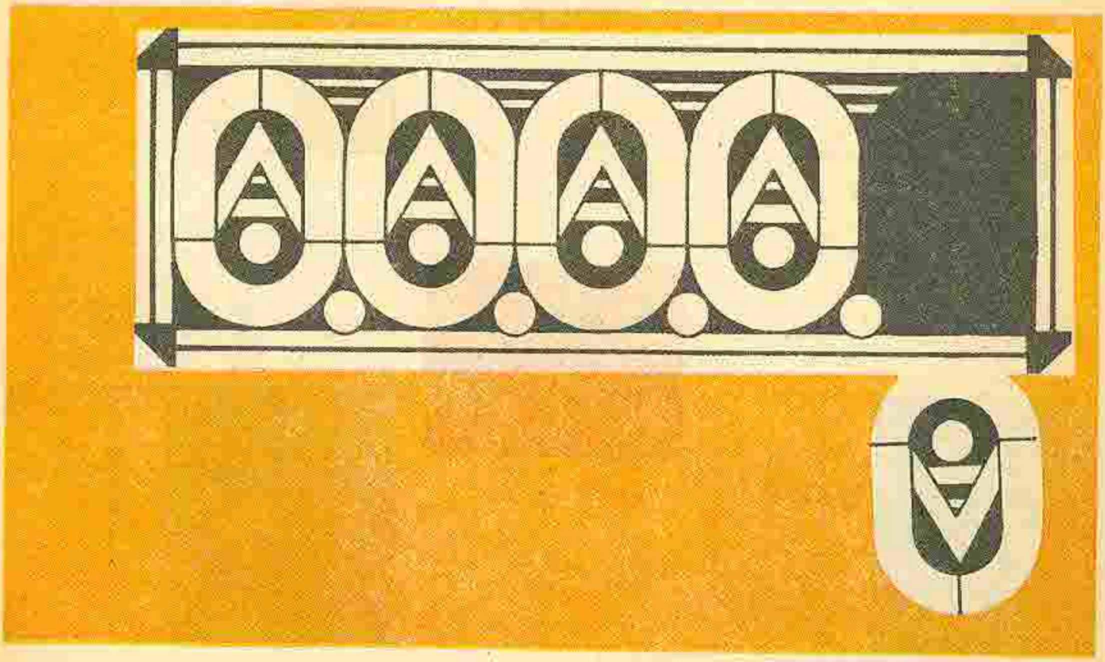
n) $\frac{2}{3}$ ■ $\frac{2x}{3x}$ porque $2 \cdot 3x$ ■ $3 \cdot 2x$.

o) $\frac{2r}{7r}$ ■ $\frac{2}{7}$ porque $2r \cdot 7$ ■ $7r \cdot 2$.

p) $\frac{ab}{ac}$ ■ $\frac{b}{c}$ porque $ab \cdot c$ ■ $ac \cdot b$.

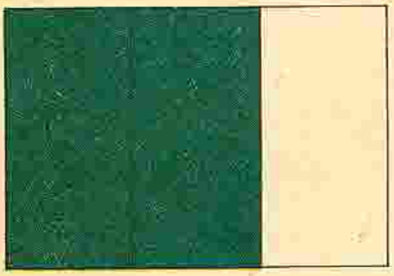
q) $\frac{m}{n}$ ■ $\frac{am}{an}$ porque $m \cdot an$ ■ $n \cdot am$.

r) $\frac{ab}{xb}$ ■ $\frac{a}{x}$ porque $ab \cdot x$ ■ $xb \cdot a$

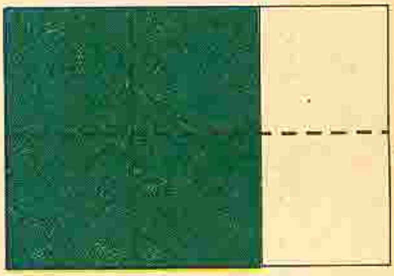


Veamos ahora cómo, dada una fracción $\frac{a}{b}$, podemos encontrar otras fracciones que representen el mismo número racional que $\frac{a}{b}$. Observe cuidadosamente las siguientes ilustraciones.

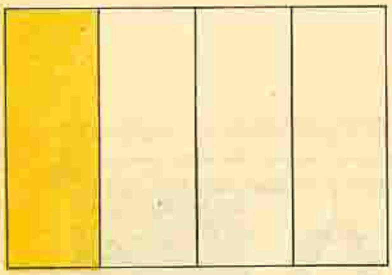
a) $\frac{2}{3}$ → Multiplicamos por 2 el numerador y el denominador. → $\frac{2 \times 2}{3 \times 2} = \frac{4}{6}$



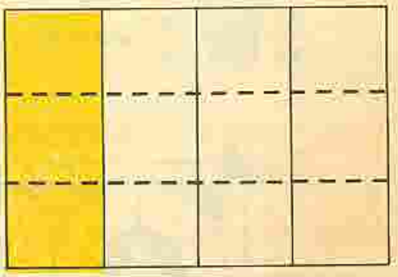
$\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$



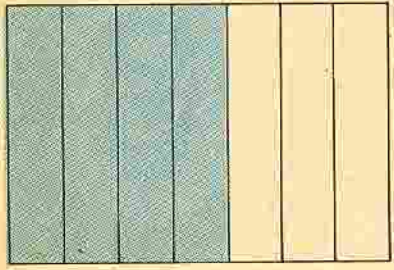
b) $\frac{1}{4}$ → Multiplicamos por 3 el numerador y el denominador. → $\frac{1 \times 3}{4 \times 3} = \frac{3}{12}$



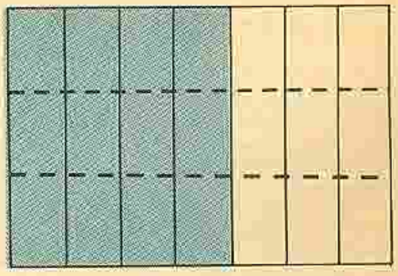
$\frac{1}{4} = \frac{3}{12}$



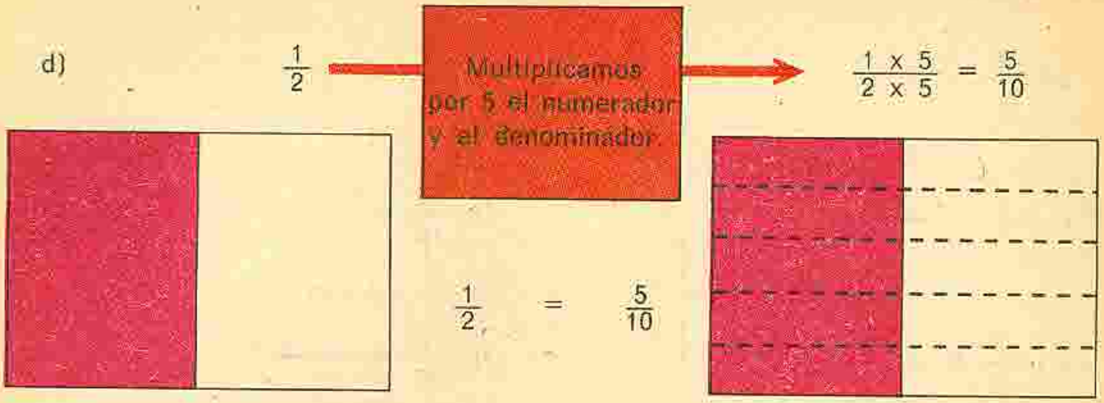
c) $\frac{4}{7}$ → Multiplicamos por 3 el numerador y el denominador. → $\frac{4 \times 3}{7 \times 3} = \frac{21}{12}$



$\frac{7}{4} = \frac{21}{12}$



d)



En las ilustraciones anteriores se puede observar una propiedad muy importante de las fracciones, que seguramente usted recuerda:

Si multiplicamos el numerador y el denominador de una fracción por un mismo número natural, la fracción que resulta y la fracción original representan un mismo número racional.

En símbolos.

Si a, b, n **son números naturales, entonces**

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{an}{bn}}$$

Si recordamos que dos fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ denotan el mismo número cuando se cumple que $a \bullet d = b \bullet c$, podemos comprobar la propiedad que hemos ilustrado:

$\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$ porque $2 \times 6 = 3 \times 4$

$\frac{1}{4} = \frac{3}{12}$ porque $1 \times 12 = 4 \times 3$

$\frac{4}{7} = \frac{12}{21}$ porque $4 \bullet 21 = 7 \bullet 12$

$\frac{1}{2} = \frac{5}{10}$ porque $1 \times 10 = 2 \times 5$

En general, las fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{an}{bn}$ representan el mismo número porque al multiplicar $a \bullet b \bullet n$ obtenemos el mismo resultado que al multiplicar $b \bullet a \bullet n$ (Esto se ve fácilmente, pues en ambas multiplicaciones aparecen los mismos factores a, b y n.) Es decir,

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{an}{bn} \text{ porque } a \bullet b \bullet n = b \bullet a \bullet n}$$

Ejercicio 9. Aplicando la propiedad estudiada, encuentre en cada inciso una fracción que denote el mismo número racional que la fracción que se da.

a) $\frac{2}{5} = $ ____ b) $\frac{3}{4} = $ ____

c) $\frac{7}{12} = $ ____ d) $\frac{15}{16} = $ ____

e) $\frac{5}{6} = $ ____ f) $\frac{18}{25} = $ ____

Ejercicio 10. Compruebe, en cada inciso del ejercicio anterior, que las dos fracciones representan el mismo número racional.

Ejercicio 11. En cada inciso diga por qué número se multiplicaron el numerador y el denominador de la primera fracción para obtener la segunda.

a) $\frac{1}{2} = \frac{8}{16}$ Se multiplicó por ___

b) $\frac{3}{7} = \frac{27}{63}$ Se multiplicó por ___

c) $\frac{8}{10} = \frac{24}{30}$ Se multiplicó por ___

d) $\frac{9}{12} = \frac{18}{24}$ Se multiplicó por ___

e) $\frac{7}{4} = \frac{4n}{7n}$ Se multiplicó por ___

f) $\frac{3}{8} = \frac{3x}{8x}$ Se multiplicó por ___

g) $\frac{7}{9} = \frac{7a}{9a}$ Se multiplicó por ___

h) $\frac{a}{b} = \frac{ay}{by}$ Se multiplicó por ___

i) $\frac{5}{8} = \frac{5(a+b)}{8(a+b)}$ Se multiplicó por ___

j) $\frac{x}{y} = \frac{x \cdot a \cdot c}{y \cdot a \cdot c}$ Se multiplicó por ___

k) $\frac{6}{9} = \frac{6 \bullet a^2}{9 \bullet a^2}$ Se multiplicó por ____

l) $\frac{x}{n} = \frac{a \bullet x}{n \bullet a}$ Se multiplicó por ____

m) $\frac{x}{3} = \frac{x^2}{3\,x}$ Se multiplicó por ____

n) $\frac{7}{a} = \frac{7 \bullet a}{a^2}$ Se multiplicó por ____

o) $\frac{b}{c} = \frac{b^3}{b^2\,c}$ Se multiplicó por ____

En virtud de que

$$\frac{a}{b} = \frac{a \bullet n}{b \bullet n}$$

Cuando en algún problema tengamos la expresión $\frac{a \bullet n}{b \bullet n}$ podremos sustituirla por la expresión $\frac{a}{b}$, y viceversa.

Ejemplo.

a) $\frac{3 \bullet \cancel{4}}{5 \bullet \cancel{4}} = \frac{3}{5}$

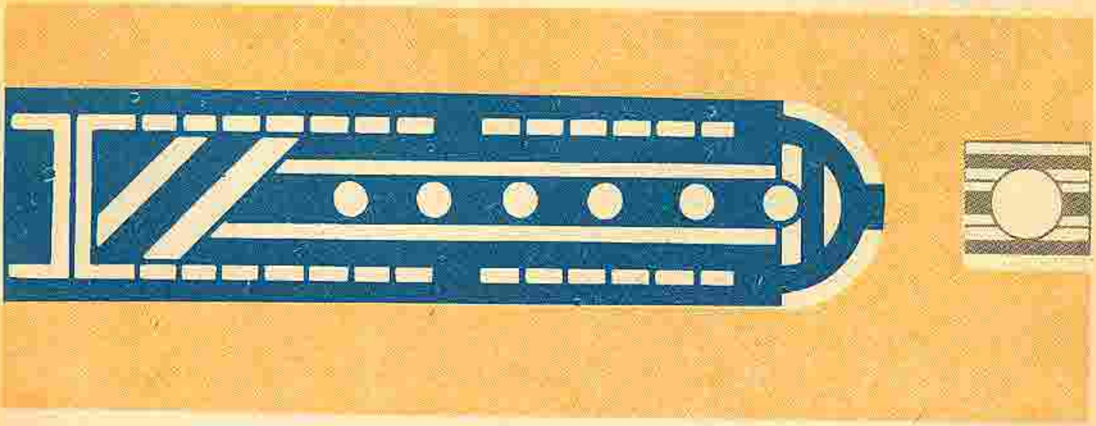
b) $\frac{6 \bullet \cancel{(x+y)}}{7 \bullet \cancel{(x+y)}} = \frac{6}{7}$

c) $\frac{a \bullet \cancel{b}}{n \bullet \cancel{b}} = \frac{a}{n}$

d) $\frac{\cancel{p} \bullet x}{\cancel{p} \bullet y} = \frac{x}{y}$

e) $\frac{\cancel{a} \bullet b}{n \bullet \cancel{a}} = \frac{b}{n}$

f) $\frac{\cancel{5}\,(a-b)}{\cancel{5}\,(x+8)} = \frac{a-b}{x+8}$



Ejercicio 12. Complete usted las siguientes igualdades, tal como se hace en a) y en k). Las letras representan números naturales.

a) $\frac{5 \bullet \cancel{8}}{6 \bullet \cancel{8}} = \frac{5}{6}$

b) $\frac{3 \bullet 8}{4 \bullet 8} = \_\_\_$

c) $\frac{8 \bullet 5}{13 \bullet 5} = \_\_\_$

d) $\frac{7 \bullet 4}{9 \quad 4} = \_\_\_$

e) $\frac{25 \bullet 6}{6 \bullet 13} = \_\_\_$

f) $\frac{4 \bullet 5}{25} = \_\_\_$

g) $\frac{8}{2 \bullet 3} = \_\_\_$

h) $\frac{18}{6 \bullet 5} = \_\_\_$

i) $\frac{12}{15} = \_\_\_$

j) $\frac{14}{21} = \_\_\_$

k) $\frac{4\cancel{a}}{7\cancel{a}} = \frac{4}{7}$

l) $\frac{5b}{6b} = \_\_\_$

m) $\frac{3n}{8n} = \_\_\_$

n) $\frac{16y}{13y} = \_\_\_$

o) $\frac{ax}{bx} = \_\_\_$

p) $\frac{nr}{nq} = \_\_\_$

q) $\frac{bc}{nb} = \_\_\_$

r) $\frac{xt}{ty} = \_\_\_$

s) $\frac{7x^2}{8x^2} = \_\_\_$

t) $\frac{am^2}{bm^2} = \_\_\_$

u) $\frac{2ab}{5ab} = \_\_\_$

v) $\frac{3ma}{8ma} = \_\_\_$

w) $\frac{a\,(x + y)}{b\,(x + y)} = \_\_\_$

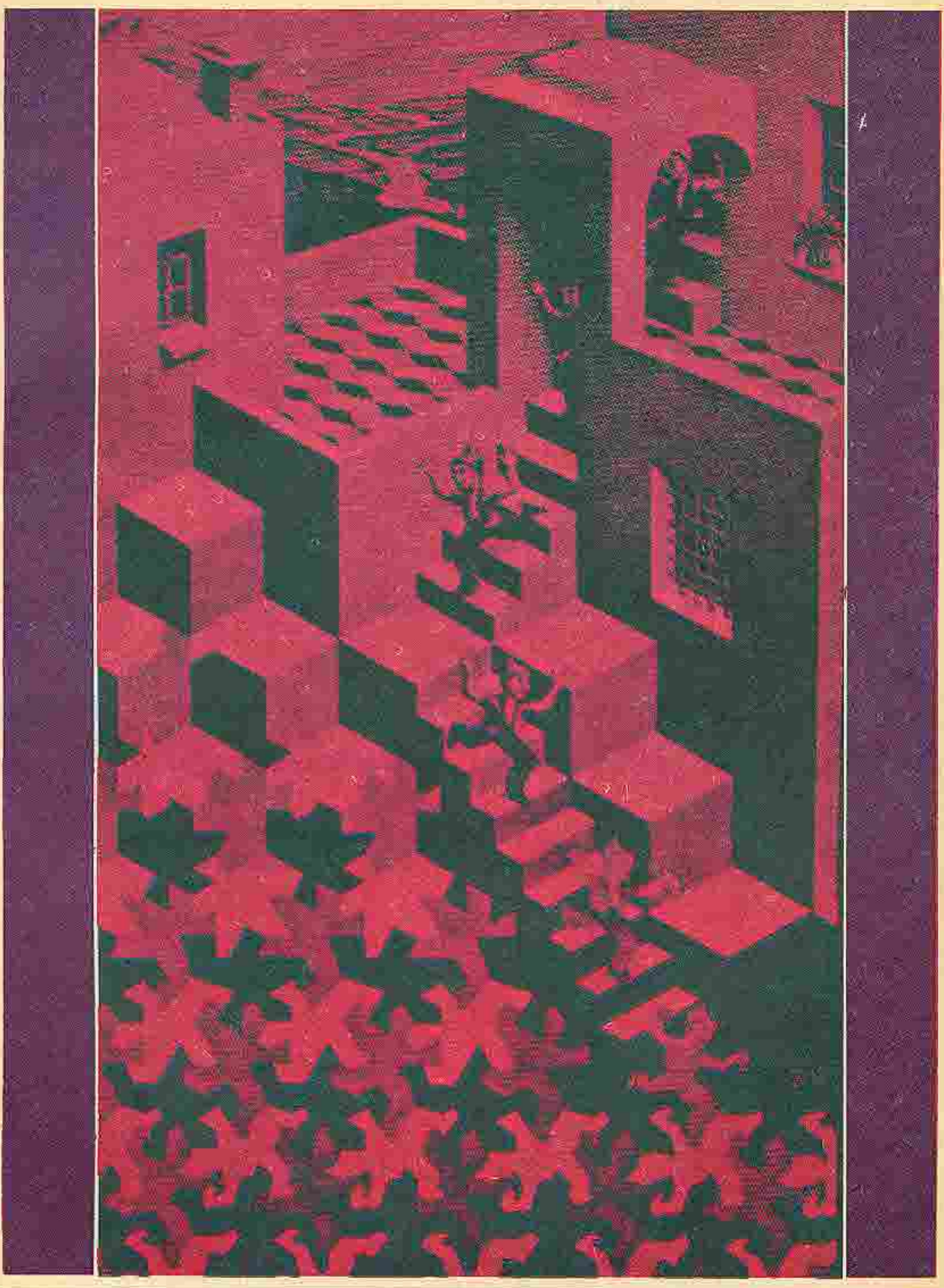
x) $\frac{a\,(x + y)}{m\,(x + y)} = \_\_\_$

y) $\frac{(a + b)\;\;(x + y)}{(c + d)\;\;(x + y)} = \_\_\_$

z) $\frac{x^2}{3x} = \_\_\_$

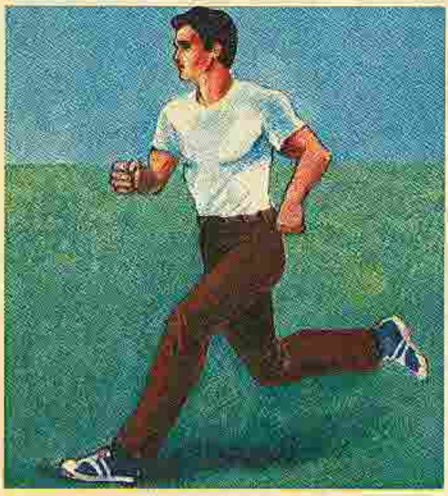
11

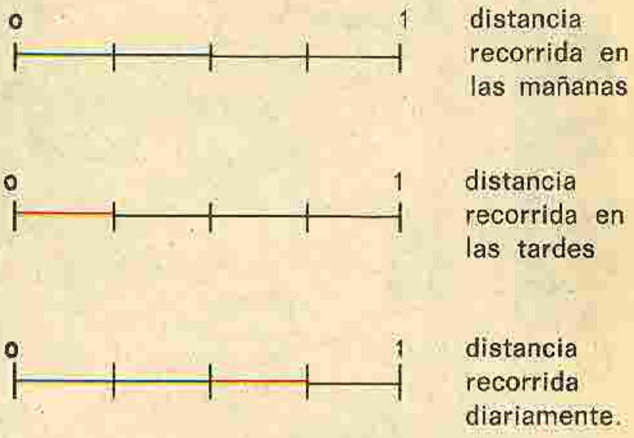
Adición de números racionales



1. La adición de números racionales

Un oficinista decide mejorar su condición física. En su programa de mejoramiento físico incluye correr $\frac{2}{4}$ de kilómetro en las mañanas y $\frac{1}{4}$ de kilómetro en las tardes. ¿Qué distancia corre diariamente?

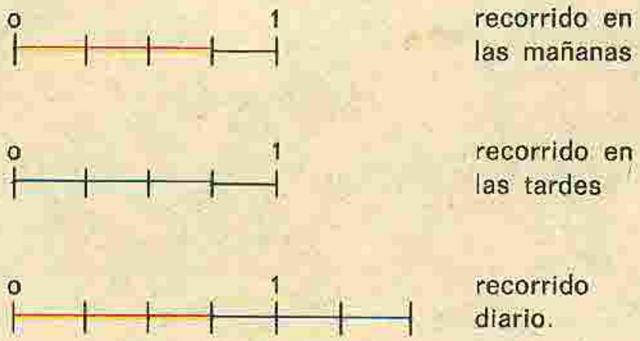




$$\frac{2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

El oficinista recorrerá diariamente $\frac{3}{4}$ de kilómetro.

Si el programa incluyera correr $\frac{3}{4}$ de kilómetro en las mañanas y $\frac{3}{4}$ de kilómetro en las tardes, ¿qué distancia recorrería diariamente el oficinista?



$$\frac{3}{4}+\frac{3}{4}=\frac{6}{4}$$

El oficinista recorrería entonces $\frac{6}{4}$ de kilómetro.

Ejercicio 1. Efectúe usted las siguientes adiciones. (Observe las ilustraciones).

a) $\frac{3}{2} + \frac{5}{2} = \frac{8}{2}$

b) $\frac{4}{5} + \frac{2}{5} = \underline{\qquad}$

c) $\frac{2}{3} + \frac{7}{3} = \underline{\qquad}$

d) $\frac{2}{4} + \frac{3}{4} = \underline{\qquad}$

e) $\frac{6}{8} + \frac{3}{8} = \underline{\qquad}$

f) $\frac{3}{5} + \frac{4}{5} = \underline{\qquad}$

g) $\frac{4}{6} + \frac{5}{6} = \underline{\qquad}$

h) $\frac{6}{7} + \frac{9}{7} = \underline{\qquad}$

i) $\frac{7}{8} + \frac{3}{8} = \underline{\qquad}$

j) $\frac{9}{10} + \frac{8}{10} = \underline{\qquad}$

Lo que observamos en el ejercicio anterior, ocurre en general:

La suma de los números racionales $\frac{a}{n}$ y $\frac{b}{n}$, es el número racional $\frac{a+b}{n}$.

En símbolos,

$$\frac{a}{n} + \frac{b}{n} = \frac{a+b}{n}.$$

Ejemplo.

a) $\frac{4}{6} + \frac{12}{6} = \frac{4 + 12}{6} = \boxed{\frac{16}{6}}$

b) $\frac{7}{15} + \frac{16}{15} = \frac{7 + 16}{15} = \boxed{\frac{23}{15}}$

c) $\frac{13}{9} + \frac{10}{9} = \frac{13 + 10}{9} = \boxed{\frac{23}{9}}$

d) $\frac{a}{5} + \frac{b}{5} = \boxed{\frac{a + b}{5}}$

e) $\frac{5}{m} + \frac{2}{m} = \frac{5 + 2}{m} = \boxed{\frac{7}{m}}$

f) $\frac{x}{y} + \frac{z}{y} = \boxed{\frac{x + z}{y}}$

Ejercicio 2. Efectúe la adición de números racionales que se indica en cada inciso.

a) $\frac{2}{3} + \frac{5}{3} = \underline{\qquad\qquad}$ b) $\frac{4}{5} + \frac{7}{5} = \underline{\qquad\qquad}$ c) $\frac{3}{8} + \frac{17}{8} = \underline{\qquad\qquad}$

d) $\frac{4}{9} + \frac{14}{9} = \underline{\qquad\qquad}$ e) $\frac{7}{11} + \frac{4}{11} = \underline{\qquad\qquad}$ f) $\frac{2}{x} + \frac{5}{x} = \underline{\qquad\qquad}$

g) $\frac{7}{b} + \frac{4}{b} = \underline{\qquad\qquad}$ h) $\frac{n}{15} + \frac{n}{15} = \underline{\qquad\qquad}$ i) $\frac{10}{b} + \frac{10}{b} = \underline{\qquad\qquad}$

j) $\frac{x}{a} + \frac{x}{a} = \underline{\qquad\qquad}$ k) $\frac{a}{y} + \frac{x}{y} = \underline{\qquad\qquad}$ l) $\frac{r}{b} + \frac{a}{b} = \underline{\qquad\qquad}$

Ejercicio 3. Resuelva usted las ecuaciones. (Las letras representan números racionales.)

	Solución	*Comprobación*
a) $\frac{3}{4} + x = \frac{9}{4}$	$x = \boxed{\frac{9}{4}}$	$\frac{3}{4} + \frac{6}{4} = \frac{9}{4}$
b) $\frac{1}{3} + b = \frac{8}{3}$	$b = \boxed{}$	$\underline{\qquad\qquad\qquad}$
c) $n + \frac{4}{5} = \frac{17}{5}$	$n = \boxed{}$	$\underline{\qquad\qquad\qquad}$
d) $a + \frac{9}{7} = \frac{15}{7}$	$a = \boxed{}$	$\underline{\qquad\qquad\qquad}$
e) $\frac{8}{13} + x = \frac{10}{13}$	$x = \boxed{}$	$\underline{\qquad\qquad\qquad}$

f) $\frac{16}{17} + y = \frac{16}{17}$ $y =$ ☐ ____________

g) $b + \frac{11}{12} = \frac{11}{12}$ $b =$ ☐ ____________

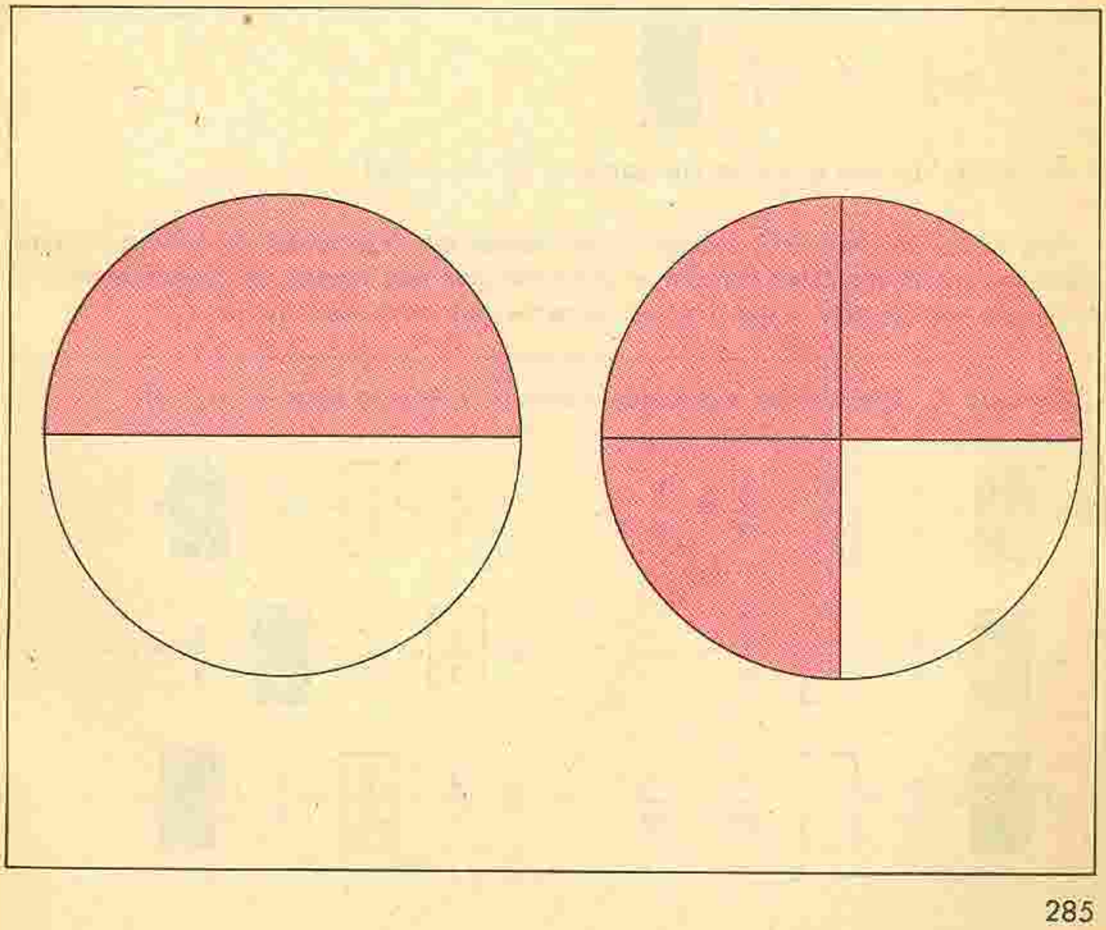
Como puede usted notar, es muy fácil sumar dos números racionales cuando están expresados con fracciones de igual denominador. Sin embargo, en la mayoría de los problemas que se nos presentan hay que sumar números racionales denotados con fracciones de diferente denominador. ¿Qué haría usted entonces para calcular la suma? Analicemos el siguiente problema.

Problema. En una fiesta infantil había dos pasteles de igual tamaño y forma. Se consumió $\frac{1}{2}$ de uno y $\frac{3}{4}$ del otro. ¿Cuánto pastel se consumió en esa fiesta?

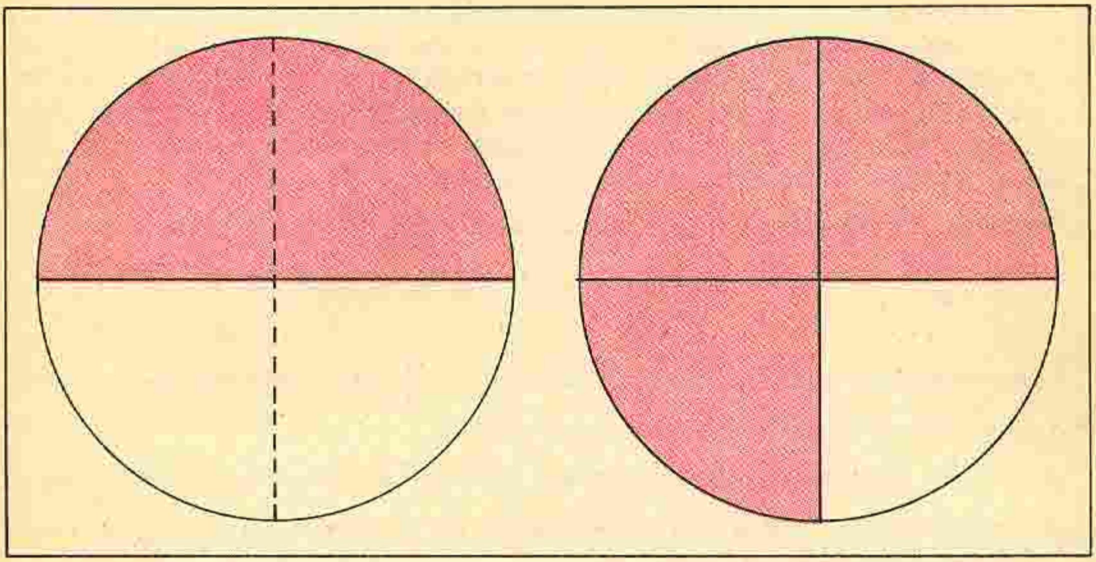
Para contestar a esto se necesita sumar $\frac{1}{2} + \frac{3}{4}$. Esto sería muy fácil si nuestras fracciones tuvieran el mismo denominador.

Puesto que un número racional puede denotarse con diversas fracciones, podemos buscar otras fracciones que representen a los números $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{4}$, y que tengan un mismo denominador.

Ilustremos la situación:



Multiplicando por 2 el numerador y el denominador de la fraccicón $\frac{1}{2}$ obtenemos la fracción $\frac{2}{4}$, que tiene el mismo denominador que la otra fracción $\frac{3}{4}$.



Para efectuar la adición, sustituimos la fracción $\frac{1}{2}$ por la fracción $\frac{2}{4}$ y así tenemos que

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{2}{4} + \frac{3}{4} = \boxed{\frac{5}{4}}$$

Respuesta. En esa fiesta se consumieron $\frac{5}{4}$ de pastel.

Para sumar dos números racionales denotados con fracciones de distinto denominador se sustituyen tales fracciones por otras dos que tengan un mismo denominador y que representen a los mismos números que deseamos sumar.

Ejercicio 4. Efectúe las siguientes adiciones como se hace en a) y b).

a) $\boxed{\frac{1}{4}} + \frac{3}{8} = \boxed{\frac{2}{8}} + \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$

b) $\frac{5}{6} + \boxed{\frac{4}{3}} = \frac{5}{6} + \boxed{\frac{8}{6}} = \frac{13}{6}$

c) $\boxed{\frac{3}{4}} + \frac{5}{8} = \boxed{\phantom{\frac{0}{0}}} + \frac{5}{8} = \underline{\qquad}$

d) $\boxed{\frac{2}{3}} + \frac{7}{9} = \boxed{\phantom{\frac{0}{0}}} + \frac{7}{9} = \underline{\qquad}$

e) $\boxed{\frac{3}{5}} + \frac{4}{10} = \boxed{\phantom{\frac{0}{0}}} + \frac{4}{10} = \frac{10}{10}$

f) $\frac{4}{9} + \boxed{\frac{1}{3}} = \frac{4}{9} + \boxed{\phantom{\frac{0}{0}}} = \underline{\qquad}$

g) $\frac{7}{8} + \frac{1}{4} = \frac{7}{8} + \boxed{} = \underline{}$

h) $\frac{5}{6} + \boxed{\frac{2}{3}} = \boxed{}$

i) $\frac{7}{12} + \boxed{\frac{3}{4}} = \boxed{}$

j) $\boxed{\frac{2}{5}} + \frac{9}{15} = \boxed{}$

k) $\boxed{\frac{3}{5}} + \frac{7}{20} = \boxed{}$

l) $\boxed{\frac{1}{8}} + \frac{11}{40} = \boxed{}$

Ejercicio 5. Resuelva las siguientes ecuaciones.

Solución

a) $n + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$ $n = \boxed{}$

b) $m + \frac{3}{5} = \frac{6}{10}$ $m = \boxed{}$

c) $\frac{2}{3} + x = \frac{6}{9}$ $x = \boxed{}$

d) $\frac{1}{4} + y = \frac{5}{20}$ $y = \boxed{}$

e) $\frac{65}{100} + n = \frac{98}{10}$ $n = \boxed{}$

f) $\frac{3}{7} + r = \frac{18}{14}$ $r = \boxed{}$

g) $s + \frac{7}{9} = \frac{76}{36}$ $s = \boxed{}$

h) $x + \frac{9}{4} = \frac{20}{8}$ $x = \boxed{}$

Problema. Al construir cierta carretera, los obreros avanzaron $\frac{1}{2}$ kilómetro un día y $\frac{2}{3}$ de kilómetro al día siguiente. ¿Cuántos kilómetros de carretera se construyeron en esos dos días?

Lo que se construyó el primer día.

Lo que se construyó el segundo día.

Total.

Resolución. Para resolver este problema tenemos que sumar $\frac{1}{2} + \frac{2}{3}$.

Como estas fracciones no tienen el mismo denominador, buscamos otras que sí lo tengan y que denoten los mismos números racionales $\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{3}$.

Aquí al multiplicar por un número natural el numerador y el denominador de la fracción $\frac{1}{2}$, no encontramos ninguna fracción con denominador 3. Por otra parte, tampoco la fracción $\frac{2}{3}$ puede sustituirse por otra fracción que tenga el denominador 2. En consecuencia, hay que buscar fracciones con algún denominador común que no sea 2 ni 3.

Si multiplicamos por 2, 3, 4, 5, etc., el numerador y el denominador de las fracciones $\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{3}$, tendremos que

$$\boxed{\frac{1}{2}} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{5}{10} = \frac{6}{12} = \frac{7}{14} = \frac{8}{16} = \frac{9}{18} = \cdots$$

y

$$\boxed{\frac{2}{3}} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{8}{12} = \frac{10}{15} = \frac{12}{18} = \frac{14}{21} = \cdots$$

Entre estas fracciones podemos escoger algunas que sustituyan a $\frac{1}{2}$ y a $\frac{2}{3}$ y que tengan un denominador común.

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \boxed{\frac{3}{6}} = \frac{4}{8} = \frac{5}{10} = \boxed{\frac{6}{12}} = \frac{7}{14} = \frac{8}{16} = \boxed{\frac{9}{18}} = \text{, etc.}$$

$$\frac{2}{3} = \boxed{\frac{4}{6}} = \frac{6}{9} = \boxed{\frac{8}{12}} = \frac{10}{15} = \boxed{\frac{12}{18}} = \frac{14}{21} = \frac{16}{24} = \text{, etc.}$$

Ahora podemos efectuar la adición en varias formas:

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \boxed{\frac{3}{6}} + \boxed{\frac{4}{6}} = \frac{7}{6},$$

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \boxed{\frac{6}{12}} + \boxed{\frac{8}{12}} = \frac{14}{12},$$

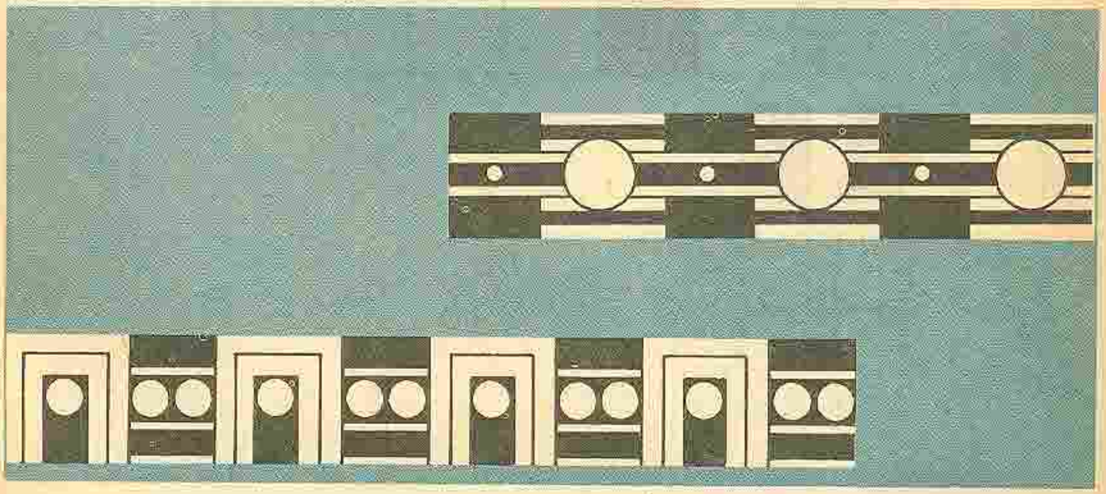
$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \boxed{\frac{9}{18}} + \boxed{\frac{12}{18}} = \frac{21}{18}.$$

Cualquiera de estas sumas representa al mismo número racional. (Compruébelo.) Esto es, aunque hay muchas maneras de efectuar una adición de números racionales, el resultado es un número racional único.

Por lo tanto, la respuesta al problema es:

Respuesta. En esos dos días se construyeron $\frac{7}{6}$ de kilómetro, o bien, $\frac{14}{12}$ de kilómetro, o bien, $\frac{21}{18}$ de kilómetro de la carretera.

Cualquiera de estas respuestas es la correcta.



Ejercicio 6. Complete las siguientes tablas, elija parejas de fracciones que tengan el mismo denominador y efectúe las adiciones.

a) Multiplicando el numerador y el denominador por

	2	3	4	5	6	7	8
$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{4}{12}$				
$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{12}$					

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \boxed{\frac{4}{12}} + \boxed{\frac{3}{12}} = \frac{7}{12}$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \boxed{\quad} + \boxed{\quad} =$$

Compruebe que la suma es el mismo número racional en los dos casos.

b) Multiplicando el numerador, y el denominador por

	2	3	4	5	6	9
$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{6}{9}$				
$\frac{5}{2}$	$\frac{10}{4}$	$\frac{15}{6}$				

$$\frac{2}{3} + \frac{5}{2} = \boxed{\quad} + \boxed{\quad} =$$

$$\frac{2}{3} + \frac{5}{2} = \boxed{\quad} + \boxed{\quad} =$$

$$\frac{2}{3} + \frac{5}{2} = \boxed{\quad} + \boxed{\quad} =$$

Compruebe que la suma es el mismo número racional en los tres casos.

c) Multiplicando el numerador y el denominador por

	2	3	4	6	9
$\frac{3}{4}$					
$\frac{5}{6}$					

$\frac{3}{4} + \frac{5}{6} = \square + \square = \square$

$\frac{3}{4} + \frac{5}{6} = \square + \square = \square$

$\frac{3}{4} + \frac{5}{6} = \square + \square = \square$

Compruebe que la suma es el mismo número racional en los tres casos.

d) Multiplique el numerador y el denominador de las fracciones $\frac{4}{5}$ y $\frac{9}{7}$ por

	5	7	10	14
$\frac{4}{5}$				
$\frac{9}{7}$				

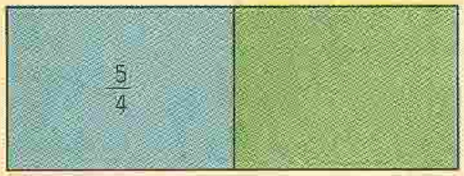
$\frac{4}{5} + \frac{9}{7} = \square + \square = \square$

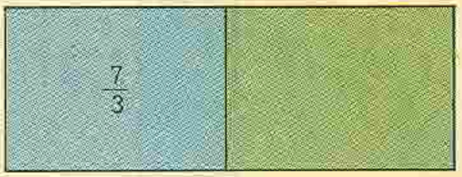
$\frac{4}{5} + \frac{9}{7} = \square + \square = \square$

Compruebe que la suma es el mismo número racional en los dos casos.

e) Multiplique el numerador y el denominador de $\frac{5}{4}$ por el denominador de $\frac{7}{3}$

Multiplique el numerador y el denominador de $\frac{7}{3}$ por el denominador de $\frac{5}{4}$.

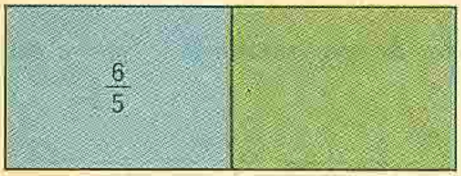


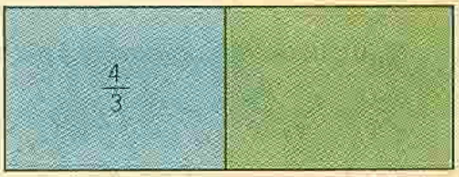


$\frac{5}{4} + \frac{7}{3} = \square + \square = \square$

f) Multiplique el numerador y el denominador de $\frac{6}{5}$ por el denominador de $\frac{4}{3}$.

Multiplique el numerador y el denominador de $\frac{4}{3}$ por el denominador de $\frac{6}{5}$.

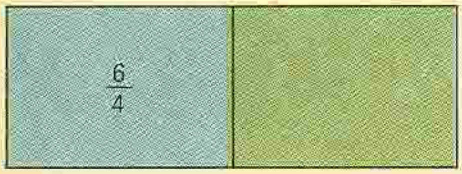


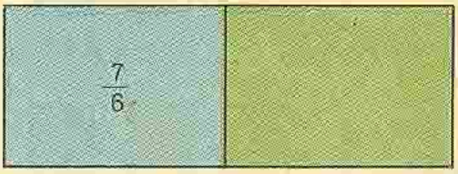


$\frac{6}{5} + \frac{4}{3} = \square + \square = \square$

g) Multiplique el numerador y el denominador de $\frac{6}{4}$ por el denominador de $\frac{7}{6}$.

Multiplique el numerador y el denominador de $\frac{7}{6}$ por el denominador de $\frac{6}{4}$.

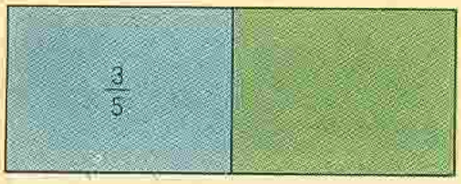


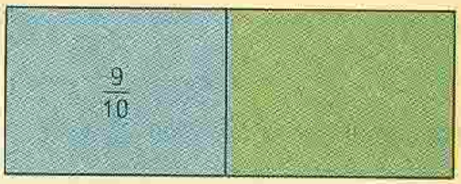


$\frac{6}{4} + \frac{7}{6} = \square + \square = \square$

h) Multiplique el numerador y el denominador de $\frac{3}{5}$ por el denominador de $\frac{9}{10}$.

Multiplique el numerador y el denominador de $\frac{9}{10}$ por el denominador de $\frac{3}{5}$.





$$\frac{3}{5} + \frac{9}{10} = \boxed{} + \boxed{} = \boxed{}$$

En los últimos incisos del ejercicio anterior puede usted observar que el denominador común de las fracciones que sustituyen a las que no tienen denominador común, se obtiene multiplicando los denominadores de éstas. Esto nos sugiere un procedimiento cómodo para encontrar fracciones, con igual denominador, que sustituyan a otras fracciones de diferentes denominadores.

Ejemplo. Consideremos las fracciones

$$\frac{3}{5} \text{ y } \frac{7}{2}$$

El denominador común de las fracciones que han de sustituir a $\frac{3}{5}$ y a $\frac{7}{2}$ será $5 \bullet 2$, o sea 10.

$$\frac{3}{5} = \frac{\boxed{}}{10} \qquad \frac{7}{2} = \frac{\boxed{}}{10}$$

Como el denominador de la fracción $\frac{3}{5}$ se ha multiplicado por 2,

$$\frac{3}{5} = \frac{\boxed{}}{5 \bullet 2}$$

también debemos multiplicar por 2 el numerador, para que las fracciones denoten el mismo número racional.

$$\frac{3}{5} = \frac{\boxed{3 \bullet 2}}{5 \bullet 2} = \frac{6}{10}$$

Así hemos hallado la fracción $\frac{6}{10}$ para sustituir a la fracción $\frac{3}{5}$.

Como el denominador de la fracción $\frac{7}{2}$, se ha multiplicado por 5,

$$\frac{7}{2} = \frac{\boxed{}}{2 \cdot 5},$$

también su numerador debe multiplicarse por 5, para que las fracciones representen al mismo número

$$\frac{7}{2} = \frac{7 \cdot 5}{2 \cdot 5} = \frac{35}{10}$$

Así hallamos la fracción $\frac{35}{10}$ para sustituir a la fracción $\frac{7}{2}$.

Si ahora nos piden que efectuemos la adición de los números racionales $\frac{3}{5}$ y $\frac{7}{2}$, podemos hacerlo fácilmente.

$$\boxed{\frac{3}{5}} + \boxed{\frac{7}{2}} = \boxed{\frac{6}{10}} + \boxed{\frac{35}{10}} = \boxed{\frac{41}{10}}$$

Ejemplo. Para efectuar la adición de los números $\frac{5}{4}$ y $\frac{2}{3}$ podemos proceder en la forma siguiente:

Buscamos un denominador común multiplicando los denominadores 4 y 3.

$$\frac{5}{4} = \frac{\boxed{}}{4 \cdot 3} \qquad \frac{2}{3} = \frac{\boxed{}}{4 \cdot 3}$$

después buscamos los numeradores.

$$\boxed{\frac{5}{4}} = \frac{5 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \boxed{\frac{15}{12}} \qquad \boxed{\frac{2}{3}} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \boxed{\frac{8}{12}}$$

Finalmente hacemos la sustitución y sumamos.

$$\boxed{\frac{5}{4}} + \boxed{\frac{2}{3}} = \boxed{\frac{15}{12}} + \boxed{\frac{8}{12}} = \boxed{\frac{23}{12}}$$

Ejercicio 7. Efectúe las siguientes adiciones.

a) $\frac{6}{8} + \frac{1}{3} = \underline{\qquad} + \underline{\qquad} = \underline{\qquad}$

b) $\frac{4}{5} + \frac{1}{4} = \underline{\qquad} + \underline{\qquad} = \underline{\qquad}$

c) $\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \underline{\qquad} + \underline{\qquad} = \underline{\qquad}$

d) $\frac{3}{2} + \frac{6}{7} = \underline{\qquad} + \underline{\qquad} = \underline{\qquad}$

e) $\frac{9}{10} + \frac{8}{3} = \underline{\qquad} + \underline{\qquad} = \underline{\qquad}$

f) $\frac{2}{9} + \frac{2}{3} = \underline{\qquad} + \underline{\qquad} = \underline{\qquad}$

g) $\frac{5}{6} + \frac{1}{2} = \underline{\qquad} + \underline{\qquad} = \underline{\qquad}$

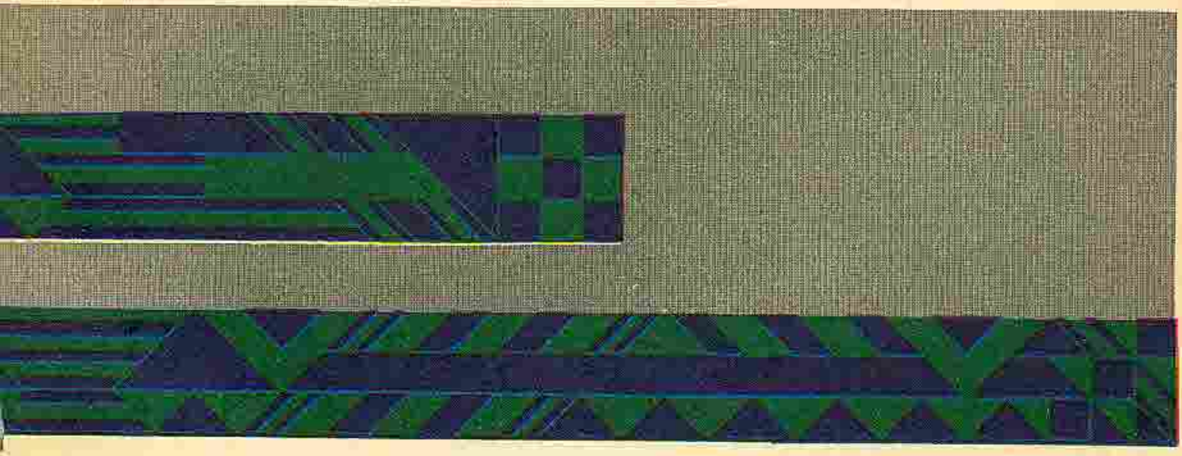
h) $\frac{3}{5} + \frac{7}{4} = \underline{\qquad} + \underline{\qquad} = \underline{\qquad}$

i) $\frac{9}{12} + \frac{2}{3} = \underline{\qquad} + \underline{\qquad} = \underline{\qquad}$

j) $\frac{2}{5} + \frac{1}{8} = \underline{\qquad} + \underline{\qquad} = \underline{\qquad}$

k) $\frac{11}{15} + \frac{1}{3} = \underline{\qquad} + \underline{\qquad} = \underline{\qquad}$

l) $\frac{7}{4} + \frac{9}{10} = \underline{\qquad} + \underline{\qquad} = \underline{\qquad}$



2. Propiedades de la adición de números racionales

Al estudiar la adición de números naturales, en el capítulo anterior, vimos que esta operación tiene algunas propiedades básicas. A continuación vamos a estudiar las propiedades básicas de la adición de números racionales.

Propiedad conmutativa.

Según sabemos, $a + b = b + a$ cuando a y b son números naturales. Exactamente ocurre lo mismo cuando a y b representan números racionales.

Ejemplo.

a) Si $a = \frac{3}{4}$ y $b = \frac{2}{4}$, entonces

$$a + b = \frac{3}{4} + \frac{2}{4} = \boxed{\frac{5}{4}}$$

$$b + a = \frac{2}{4} + \frac{3}{4} = \boxed{\frac{5}{4}}$$

b) Si $a = \frac{1}{2}$ y $b = \frac{1}{3}$, entonces

$$a + b = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \boxed{\frac{5}{6}}$$

$$b + a = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{2}{6} + \frac{3}{6} = \boxed{\frac{5}{6}}$$

Ejemplo.

a) $\frac{3}{5} + \frac{7}{5} = \frac{10}{5}$ $\qquad$ $\frac{7}{5} + \frac{3}{5} = \frac{10}{5}$

b) $\frac{8}{b} + \frac{5}{b} = \frac{13}{b}$ $\qquad$ $\frac{5}{b} + \frac{8}{b} = \frac{13}{b}$

c) $\frac{x}{a} + \frac{y}{a} = \frac{x + y}{a}$ $\qquad$ $\frac{y}{a} + \frac{x}{a} = \frac{y + x}{a}$

En términos generales, podemos enunciar la propiedad conmutativa de la adición de racionales en la siguiente forma:

> **Si r y q son dos racionales cualesquiera, entonces sumar $r + q$ da el mismo resultado que sumar $q + r$.**
>
> **En simbolos,**
>
> $$r + r = q + r$$

Ejercicio 8. Indique cuáles son las expresiones que dan un mismo resultado, escribiendo en cada paréntesis la letra correspondiente.

a) $\frac{3}{5} + \frac{7}{3}$

( ) $\frac{1}{2} + n$

b) $\frac{3}{8} + \frac{4}{5}$

( ) $x + \frac{7}{9}$

c) $n + \frac{1}{2}$

( ) $\frac{4}{5} + \frac{3}{8}$

d) $\frac{7}{9} + x$

( ) $\frac{7}{3} + \frac{3}{5}$

e) $\frac{3}{7} + x$

( ) $s + r$

f) $z + \frac{5}{9}$

( ) $x + \frac{3}{7}$

g) $r + s$

Ejercicio 9. Resuelva las ecuaciones, aplicando la propiedad conmutativa.

a) $\frac{3}{4} + x = \frac{5}{8} + \frac{3}{4}$ $x =$

b) $\frac{1}{3} + y = \frac{2}{8} + \frac{1}{3}$ $y =$

c) $\frac{2}{9} + n = 5 + \frac{2}{9}$ $n =$

d) $x + \frac{6}{13} = \frac{6}{13} + 34$ $x =$

e) $a + \frac{5}{6} = \frac{5}{6} + \frac{1}{4}$ $a =$

f) $b + 68 = 68 + \frac{1}{2}$ $b =$

Propiedad asociativa.

Si a, b y c son números naturales, la expresión $a+b+c$ puede interpretarse como $(a+b)+c$ o como $a+(b+c)$ y en ambas formas tendremos el mismo resultado porque la adición de naturales es asociativa. La adición de racionales también es asociativa. Por eso, si r, s y t son números racionales,

$$\boxed{r + s + t = (r + s) + t = r + (s + t)}$$

Esta propiedad nos permite efectuar adiciones con más de dos sumandos, por ejemplo así:

$$\frac{2}{3} + \frac{4}{3} + \frac{5}{3} = \boxed{\frac{2}{3} + \frac{4}{3}} + \frac{5}{3} = \boxed{\frac{6}{3}} + \frac{5}{3} = \frac{11}{3}$$

o bien, así:

$$\frac{2}{3} + \frac{4}{3} + \frac{5}{3} = \frac{2}{3} + \boxed{\frac{4}{3} + \frac{5}{3}} = \frac{2}{3} + \boxed{\frac{9}{3}} = \frac{11}{3}$$

Ejercicio 10. Efectúe usted las siguientes adiciones en su cuaderno. Observe los incisos resueltos.

a) $\frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \frac{5}{2} = \boxed{\frac{1+3+5}{2}} = \boxed{\frac{9}{2}}$

b) $\frac{5}{3} + \frac{6}{3} + \frac{x}{3} = \boxed{\frac{5+6+x}{3}} = \boxed{\frac{11+x}{3}}$

c) $\frac{3}{4} + \frac{4}{4} + \frac{9}{4} =$ d) $\frac{6}{5} + \frac{5}{5} + \frac{8}{5} =$ e) $\frac{1}{6} + \frac{3}{6} + \frac{2}{6} =$

f) $\frac{4}{8} + \frac{9}{8} + \frac{12}{8} =$ g) $\frac{5}{9} + \frac{7}{9} + \frac{6}{9} =$ h) $\frac{15}{12} + \frac{12}{12} + \frac{13}{12} =$

i) $\frac{5}{25} + \frac{4}{25} + \frac{8}{25} =$ j) $\frac{16}{38} + \frac{7}{38} + \frac{6}{38} =$ k) $\frac{10}{76} + \frac{12}{76} + \frac{8}{76} =$

l) $\frac{6}{x} + \frac{2}{x} + \frac{3}{x} =$ m) $\frac{10}{a} + \frac{12}{a} + \frac{9}{a} =$ n) $\frac{a}{y} + \frac{b}{y} + \frac{c}{y} =$

Cuando se tienen que sumar más de dos números racionales expresados con fracciones de distinto denominador, lo que debemos hacer primero es sustituir esas fracciones por otras que tengan un denominador común, y que denoten a los mismos números racionales que deseamos sumar.

Esto puede hacerse con el procedimiento siguiente.

Ejemplo.

$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \boxed{}$

Hallamos el denominador común multiplicando los denominadores 2, 3 y 4.

$\frac{1}{2} = \frac{?}{2 \bullet 3 \bullet 4}$ $\frac{1}{3} = \frac{?}{3 \bullet 2 \bullet 4}$ $\frac{1}{4} = \frac{?}{4 \bullet 2 \bullet 3}$

Como el denominador de $\frac{1}{2}$ se multiplica por $3 \bullet 4$, también a su numerador debemos multiplicarlo por $3 \bullet 4$, para que la nueva fracción denote al mismo número racional.

$$\frac{1}{2} = \frac{1 \bullet \boxed{3 \bullet 4}}{2 \bullet \boxed{3 \bullet 4}} = \frac{12}{24}$$

Así hallamos la fracción $\frac{12}{24}$ para sustituir a la fracción $\frac{1}{2}$.

Como el denominador de $\frac{1}{3}$ se multiplica por 2 • 4, también el numerador debe multiplicarse por 2 • 4, para que la fracción denote al mismo número racional.

$$\frac{1}{3} = \frac{1 \bullet \boxed{2 \bullet 4}}{3 \bullet \boxed{2 \bullet 4}} = \frac{8}{24}.$$

Así encontramos la fracción $\frac{8}{24}$ para sustituir a la fracción $\frac{1}{3}$.

Con la fracción $\frac{1}{4}$ ocurre algo semejante. Se multiplican por 2 • 3 su numerador y su denominador, para obtener otra fracción que denote el mismo número racional.

$$\frac{1}{4} = \frac{1 \bullet \boxed{2 \bullet 3}}{4 \bullet \boxed{2 \bullet 3}} = \frac{6}{24}.$$

Así se obtiene la fracción $\frac{6}{24}$ para sustituir a la fracción $\frac{1}{4}$.

Por lo tanto,

$$\boxed{\frac{1}{2}} + \boxed{\frac{1}{3}} + \boxed{\frac{1}{4}} = \boxed{\frac{12}{24}} + \boxed{\frac{8}{24}} + \boxed{\frac{6}{24}} = \boxed{\frac{26}{24}}$$

Observe usted que el denominador de cada fracción se multiplicó por los denominadores de las otras fracciones.

Ejemplo.

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \boxed{}$$

$$\frac{2 \bullet \boxed{4 \bullet 5}}{3 \bullet \boxed{4 \bullet 5}} + \frac{1 \bullet \boxed{3 \bullet 5}}{4 \bullet \boxed{3 \bullet 5}} + \frac{1 \bullet \boxed{3 \bullet 4}}{5 \bullet \boxed{3 \bullet 4}} = \frac{40}{60} + \frac{15}{60} + \frac{12}{60}.$$

Entonces,

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{40}{60} + \frac{15}{60} + \frac{12}{60} = \boxed{\frac{67}{60}}.$$

Ejercicio 11. Efectúe en su cuaderno las siguientes adiciones.

a) $\frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{5}{4}$

b) $\frac{1}{5} + \frac{1}{2} + \frac{4}{3}$

c) $\frac{3}{4} + \frac{2}{3} + \frac{4}{2}$

d) $\frac{4}{3} + \frac{4}{7} + \frac{5}{2}$

e) $\frac{5}{6} + \frac{2}{3} + \frac{4}{6}$

f) $8 + \frac{3}{4} + \frac{2}{5}$

g) $\frac{2}{4} + 7 + \frac{5}{3}$

h) $\frac{3}{7} + \frac{4}{3} + 1$

i) $\frac{3}{5} + \frac{9}{10} + \frac{1}{2} + 0.$

j) $\frac{6}{7} + \frac{5}{4} + \frac{3}{5}$

k) $\frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{3}{2} + \frac{1}{4}$

l) $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + 0 + \frac{3}{4}$

El cero en la adición.

Aprendimos antes que al sumar cero con un número natural cualquiera, el resultado era ese mismo número natural. En la adición de números racionales el cero se comporta de igual manera:

Si r es un número racional, entonces

$$r + 0 = r$$
$$0 + r = r.$$

Ejemplo.

a) $\boxed{\frac{1}{3} + 0} = \frac{1}{3} + \frac{0}{3} = \frac{1 + 0}{3} = \boxed{\frac{1}{3}}$

(Recuerde usted que el cero se puede representar con cualquier fracción de la forma $\frac{0}{a}$.)

b) $\boxed{\frac{4}{5} + 0} = \frac{4}{5} + \frac{0}{5} = \frac{4 + 0}{5} = \boxed{\frac{4}{5}}$

c) $\boxed{0 + \frac{7}{8}} = \frac{0}{8} + \frac{7}{8} = \frac{0 + 7}{8} = \boxed{\frac{7}{8}}$

d) $\boxed{0 + \frac{9}{15}} = \frac{0}{15} + \frac{9}{15} = \frac{0 + 9}{15} = \boxed{\frac{9}{15}}$

e) $\boxed{\frac{a}{b} + 0} = \frac{a}{b} + \frac{0}{b} = \frac{a + 0}{b} = \boxed{\frac{a}{b}}$

Ejercicio 12. Efectúe las siguientes adiciones en su cuaderno. (Las letras representan números naturales.)

a) $\frac{5}{8} + 0 + \frac{2}{8}$

b) $\frac{7}{9} + 0 + \frac{1}{9}$

c) $0 + \frac{1}{4} + \frac{3}{8}$

d) $\frac{6}{a} + 0 + \frac{3}{a}$

e) $0 + \frac{5}{x} + \frac{6}{x}$

f) $\frac{a}{b} + \frac{x}{b} + 0$

g) $\frac{n}{a} + \frac{0}{y} + \frac{b}{a}$

h) $\frac{3}{4} + \frac{0}{5} + \frac{2}{4} + 0$

i) $\frac{a}{y} + \frac{x}{y} + \frac{0}{z} + 0$

Ejercicio 13. Indique usted qué propiedad se emplea en cada una de las siguientes igualdades. (Las letras representan números naturales.)

a) $\frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{2}{3}$ Propiedad conmutativa

b) $\frac{4}{7} + \frac{b}{c} = \frac{b}{c} + \frac{4}{7}$ ________

c) $\left(\frac{2}{5} + \frac{4}{5}\right) + \frac{1}{5} = \frac{2}{5} + \left(\frac{4}{5} + \frac{1}{5}\right)$ ________

d) $\frac{2}{3} + 0 = \frac{2}{3}$ ________

e) $\left(\frac{2}{7} + \frac{1}{5}\right) + \frac{1}{3} = \frac{2}{7} + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3}\right)$ ________

f) $0 + \frac{x}{y} = \frac{x}{y}$ ________

g) $0 + \frac{m}{n} = \frac{m}{n} + 0$ ________

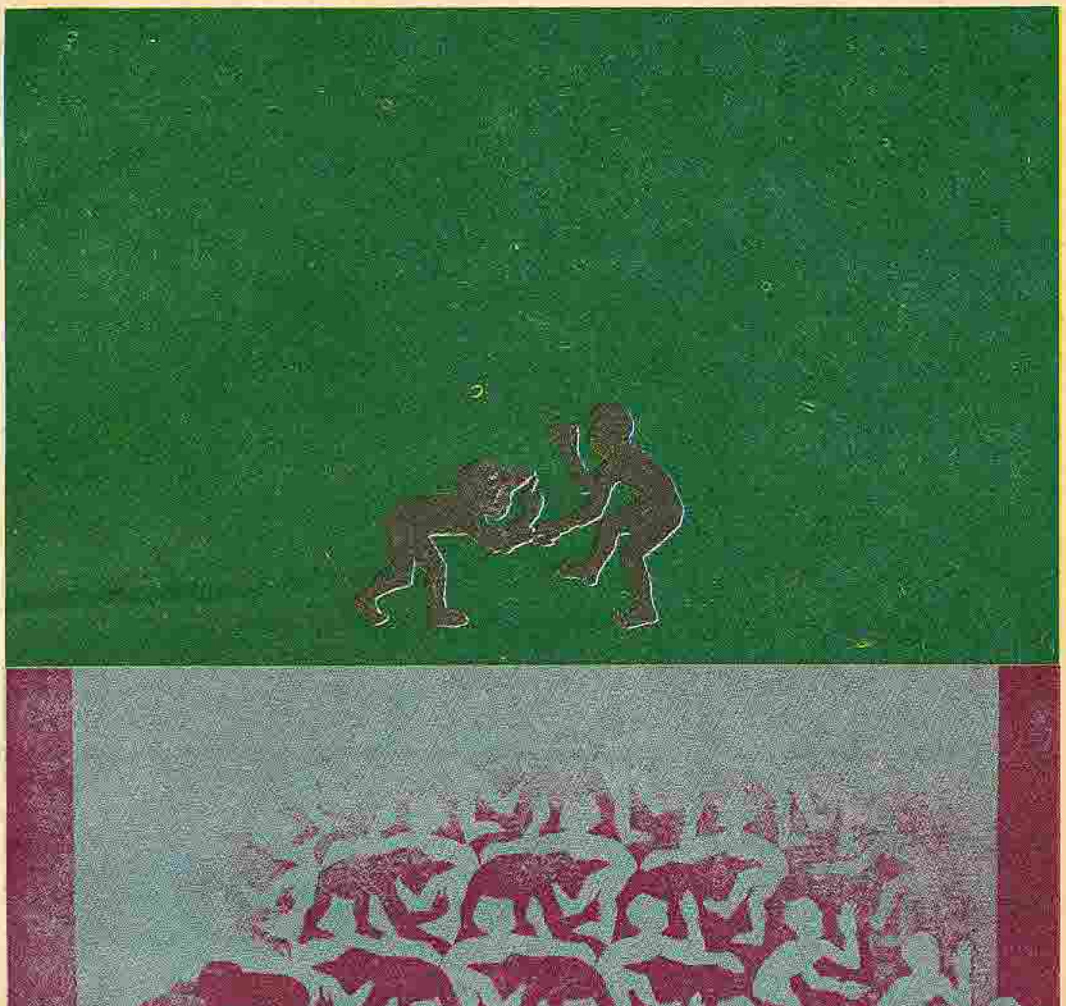
h) $\left(\frac{2}{4} + \frac{1}{7}\right) + x = x + \left(\frac{2}{4} + \frac{1}{7}\right)$ ________

i) $0 + \left(5 + \frac{2}{3}\right) = 5 + \frac{2}{3}$ ________

j) $\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{5}\right) + \left(y + \frac{3}{4}\right) = \left(y + \frac{3}{4}\right) + \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{5}\right)$ ________

III

Sustracción de números racionales



1. El orden entre los números racionales

Usted ya sabe distinguir, entre dos números naturales, cuál es el mayor y cuál es el menor. Por ejemplo, usted sabe que 98 es mayor que 53, que 1 es mayor que 0, que 5 es menor que 10, que 185 es menor que 476, etc.

También podemos comparar dos números racionales para saber cuál es el mayor y cuál es el menor. Observe usted la siguiente ilustración.

La ilustración nos sugiere que, por ejemplo,

el número racional $\frac{2}{5}$ es mayor que el número racional $\frac{1}{5}$;

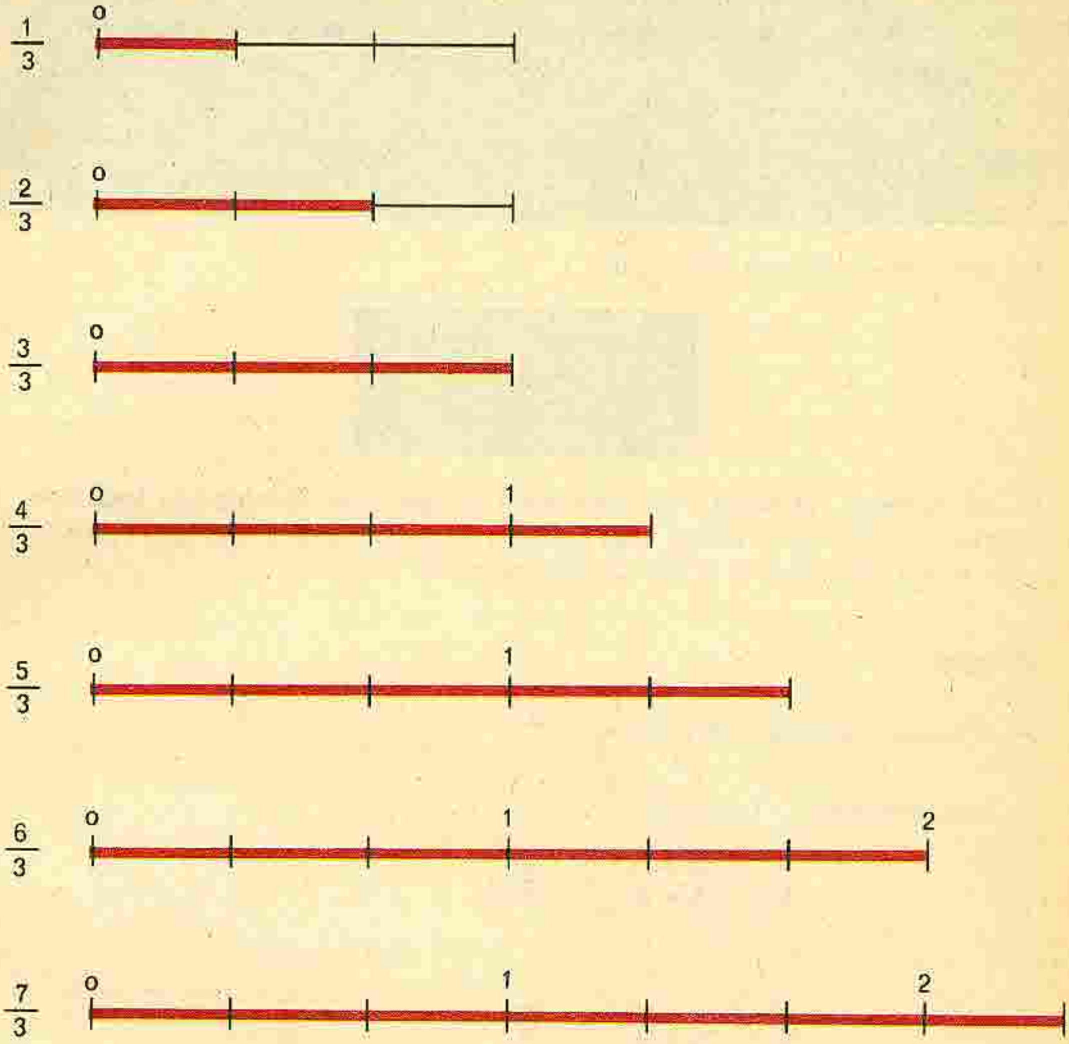
el número racional $\frac{6}{5}$ es mayor que el número racional $\frac{3}{5}$;

el número $\frac{5}{5}$ es menor que $\frac{6}{5}$;

$\frac{1}{5}$ es menor que $\frac{4}{5}$; etc.

Para hacer cómoda la escritura sustituiremos la frase "es mayor que" por el símbolo $>$ y la frase "es menor que" por el símbolo $<$. Así, por ejemplo, la expresión $\frac{4}{5} > \frac{2}{5}$ se leerá: "$\frac{4}{5}$ es mayor que $\frac{2}{5}$" y la expresión $\frac{2}{5} < \frac{6}{5}$ se leerá: "$\frac{2}{5}$ es menor que $\frac{6}{5}$"

Ejercicio 1 Observe la siguiente ilustración y luego ponga en cada ▨ el símbolo > o el símbolo <, según corresponda.



a) $\frac{4}{3}$ ▨ $\frac{2}{3}$

b) $\frac{2}{3}$ ▨ $\frac{5}{3}$

c) $\frac{1}{3}$ ▨ $\frac{2}{3}$

d) $\frac{3}{3}$ ▨ $\frac{1}{3}$

e) $\frac{6}{3}$ ▨ $\frac{5}{3}$

f) $\frac{2}{3}$ ▨ $\frac{7}{3}$

g) $\frac{7}{3}$ ▨ $\frac{6}{3}$

h) $\frac{5}{3}$ ▨ $\frac{2}{3}$

i) $\frac{1}{3}$ ▨ $\frac{7}{3}$

j) $\frac{3}{3}$ ▨ $\frac{6}{3}$

k) $\frac{5}{3}$ ▨ $\frac{6}{3}$

l) $\frac{2}{3}$ ▨ $\frac{3}{3}$

m) $\frac{1}{3}$ ▨ 0

n) 0 ▨ $\frac{1}{3}$

o) $\frac{2}{3}$ ▨ 0

Lo anterior nos sugiere el siguiente criterio para comparar números racionales expresados con fracciones de igual denominador.

De dos números racionales denotados con fracciones de igual denominador, es mayor el que está representado con la fracción de mayor numerador.

En símbolos,

$$\frac{a}{n} > \frac{b}{n} \quad \textbf{si} \quad a > b.$$

Por supuesto, podemos decir que

$$\frac{a}{n} < \frac{b}{n} \quad \textbf{si} \quad a < b.$$

Si los números racionales que deseamos comparar se denotan con fracciones de diferente denominador, bastará con sustituir éstas por otras que tengan denominador común y que representen a los mismos números.

Ejemplo.

a) Comparemos los números $\frac{3}{5}$ y $\frac{4}{3}$.

Sabemos que

$$\frac{3}{5} = \frac{3 \bullet 3}{5 \bullet 3} = \frac{9}{15}$$

y

$$\frac{4}{3} = \frac{4 \bullet 5}{3 \bullet 5} = \frac{20}{15};$$

como

$$\frac{9}{15} < \frac{20}{15},$$

concluimos que

$$\frac{3}{5} < \frac{4}{3},$$

b) Comparemos los racionales $\frac{3}{7}$ y $\frac{1}{4}$.

como

$$\frac{3}{7} = \frac{3 \cdot 4}{7 \cdot 4} = \frac{12}{28},$$

$$\frac{1}{4} = \frac{1 \cdot 4}{4 \cdot 7} = \frac{7}{28}$$

y

$$\frac{12}{28} > \frac{7}{28},$$

podemos afirmar que

$$\frac{3}{7} > \frac{1}{4}.$$

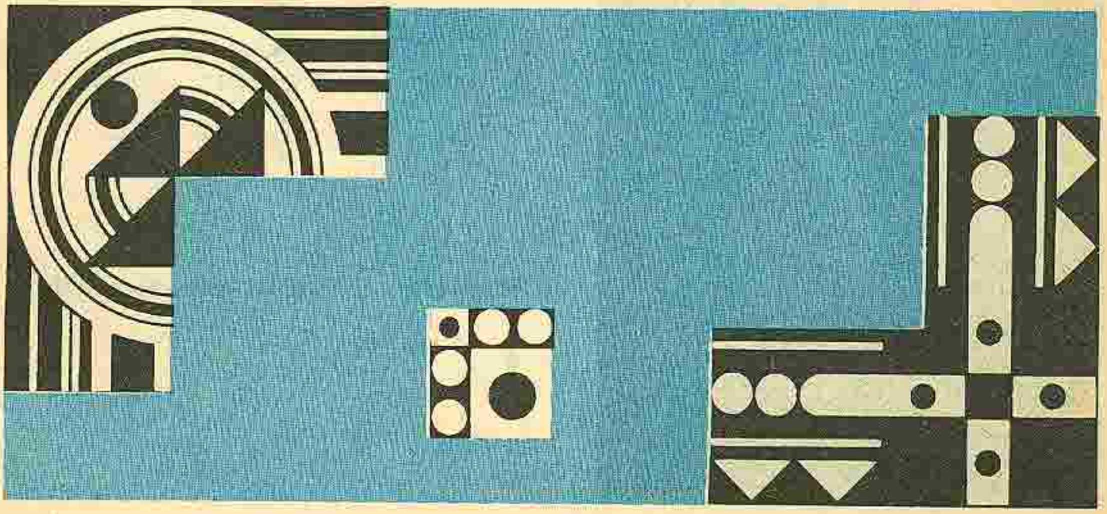
Ejercicio 2. Ponga en cada ☐ el signo > o el signo < según corresponda.

a) $\frac{2}{3}$ ☐ $\frac{3}{5}$ b) $\frac{1}{2}$ ☐ $\frac{3}{7}$ c) $\frac{5}{9}$ ☐ $\frac{2}{4}$

d) $\frac{7}{3}$ ☐ $\frac{5}{4}$ e) $\frac{12}{3}$ ☐ $\frac{5}{2}$ f) $\frac{87}{10}$ ☐ $\frac{35}{5}$

g) $\frac{23}{5}$ ☐ $\frac{10}{3}$ h) $\frac{19}{4}$ ☐ $\frac{24}{3}$ i) $\frac{8}{9}$ ☐ 1

j) $\frac{23}{7}$ ☐ 4 k) 3 ☐ $\frac{11}{3}$ l) $\frac{236}{2}$ ☐ 178



2. Sustracción de números racionales

Ya desde la escuela primaria usted restaba números racionales expresados con fracciones.

La expresión

$$\frac{3}{4} - \frac{2}{4} = \frac{1}{4}$$

indica una sustracción de números racionales y a los números que aparecen en ella se les nombra de la siguiente manera:

$$\underset{\textit{minuendo}}{\frac{3}{4}} - \underset{\textit{sustraendo}}{\frac{2}{4}} = \underset{\substack{\textit{resta o}\\ \textit{diferencia}}}{\frac{1}{4}}$$

"Efectuar una sustracción" consiste en encontrar la resta o diferencia cuando nos dan el minuendo y el sustraendo.

La sustracción de números racionales se emplea, como la sustracción de números naturales, para resolver problemas de "quitar" y de "comparar". Por ejemplo, la sustracción $\frac{3}{4} - \frac{2}{4} = \frac{1}{4}$ podría servir en las siguientes situaciones:

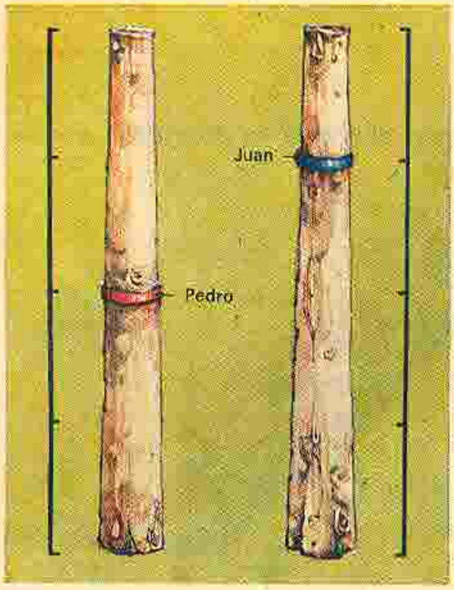
I. Un pedazo de listón mide $\frac{3}{4}$ de metro. Si se hacen distintivos y en ello se utilizan $\frac{2}{4}$ de metro, ¿cuánto mide el pedazo de listón que sobra?

Resolución.

$$\underset{\text{Se tienen}}{\frac{3}{4}} - \underset{\text{se gastan}}{\frac{2}{4}} = \underset{\text{sobra}}{\frac{1}{4}}$$

Respuesta. El pedazo que sobra mide $\frac{1}{4}$ de metro.

II. Juan y Pedro, pintores de profesión, en dos postes de igual altura hicieron unas marcas de color. La marca que Juan hizo está a $\frac{3}{4}$ de la altura del poste; la marca de Pedro está a los $\frac{2}{4}$ de la altura de su poste. ¿Cuál es la diferencia de alturas entre las dos marcas?



Resolución.

$$\frac{3}{4} - \frac{2}{4} = \frac{1}{4}.$$

Respuesta. La diferencia de alturas entre las marcas es igual a $\frac{1}{4}$ de la altura de un poste.

Para efectuar sustracciones como la que hemos mostrado, usted lo hacía en la siguiente forma:

$$\frac{3}{4} - \frac{2}{4} = \frac{3-2}{4} = \frac{1}{4}.$$

Este procedimiento es aplicable para cualquier sustracción de números racionales expresados con fracciones de igual denominador. Esto es,

Si tenemos dos racionales $\frac{a}{n}$ y $\frac{b}{n}$, la diferencia entre $\frac{a}{n}$ y $\frac{b}{n}$ se calcula en la siguiente forma:

$$\frac{a}{n} - \frac{b}{n} = \frac{a-b}{n}.$$

Desde luego, para aplicar este procedimiento hace falta que *a* sea mayor o igual que *b*.

Ejemplo.

a) $\frac{5}{8} - \frac{3}{8} = \frac{5-3}{8} = \frac{2}{8}$

b) $\frac{4}{5} - \frac{3}{5} = \frac{4-3}{5} = \frac{1}{5}$

c) $\frac{4}{6} - \frac{2}{6} = \frac{4-2}{6} = \frac{2}{6}$

d) $\frac{8}{8} - \frac{6}{8} = \frac{8-6}{8} = \frac{2}{8}$

e) $\frac{15}{9} - \frac{15}{9} = \frac{15-15}{9} = \frac{0}{9} = 0$

Note usted que, en todos los ejemplos anteriores, al sumar la diferencia con el sustraendo se obtiene el minuendo.

$\underset{\textit{minuendo}}{\frac{5}{8}} - \underset{\textit{sustraendo}}{\frac{3}{8}} = \underset{\textit{diferencia}}{\frac{2}{8}}$	$\underset{\textit{diferencia}}{\frac{2}{8}} + \underset{\textit{sustraendo}}{\frac{3}{8}} = \underset{\textit{minuendo}}{\frac{5}{8}}$
$\frac{4}{5} - \frac{3}{5} = \frac{1}{5}$	$\frac{1}{5} + \frac{3}{5} = \frac{4}{5}$
$\frac{4}{6} - \frac{2}{6} = \frac{2}{6}$	$\frac{2}{6} + \frac{2}{6} = \frac{4}{6}$
$\frac{8}{8} - \frac{6}{8} = \frac{2}{8}$	$\frac{2}{8} + \frac{6}{8} = \frac{8}{8}$
$\frac{15}{9} - \frac{15}{9} = 0$	$0 + \frac{15}{9} = \frac{15}{9}$

Esto ocurre en general:

En toda sustracción de números racionales, al sumar la diferencia con el sustraendo se obtiene el minuendo.

De aquí deducimos que en la sustracción de números racionales, la diferencia es el número que al sumarse con el sustraendo da el minuendo. Esta propiedad es análoga a la que estudiamos en la sustracción de números naturales y, como hicimos entonces, podemos usarla para comprobar si una sustracción está bien efectuada o no.

Por ejemplo, la sustracción

$$\frac{7}{2} - \frac{4}{2} = \frac{3}{2}$$

está bien efectuada porque

$$\frac{3}{2} + \frac{4}{2} = \frac{7}{2}$$

En cambio, la sustracción

$$\frac{8}{9} - \frac{3}{9} = \frac{4}{9}$$

está mal efectuada porque

$$\frac{4}{9} + \frac{3}{9} \text{ no es igual a } \frac{8}{9}.$$

Ejercicio 3. En su cuaderno efectúe cada sustracción de números racionales y compruébela, como se hace en a) y en b).

a) $\frac{8}{9} - \frac{2}{9} = \boxed{\frac{6}{9}}$ porque $\boxed{\frac{6}{9}} + \frac{2}{9} = \frac{8}{9}$

b) $\frac{14}{15} - \frac{9}{15} = \boxed{\frac{5}{15}}$ porque $\boxed{\frac{5}{15}} + \frac{9}{15} = \frac{14}{15}$

c) $\frac{15}{8} - \frac{7}{8}$

d) $\frac{18}{35} - \frac{7}{35}$

e) $\frac{97}{100} - \frac{19}{100}$

f) $\frac{74}{80} - \frac{57}{80}$

g) $\frac{3}{5} - \frac{0}{5}$

h) $\frac{6}{7} - 0$

i) $\frac{12}{10} - \frac{7}{10}$

j) $\frac{15}{x} - \frac{7}{x}$

k) $\frac{12}{a} - \frac{5}{a}$

l) $\frac{x}{b} - \frac{y}{b}$

m) $\frac{a}{n} - \frac{b}{n}$

n) $\frac{y}{r} - \frac{x}{r}$

o) $\frac{7}{10} - \frac{5}{10}$

p) $\frac{86}{100} - \frac{58}{100}$

q) $\frac{18}{10} - \frac{13}{10}$

En algunas sustracciones de números racionales el minuendo y el sustraendo se denotan con fracciones de diferente denominador. Por ejemplo, veamos el siguiente problema.

Problema. Dos alpinistas escalan el Popocatépetl. Uno llega a $\frac{3}{5}$ de la altura de ese volcán y otro alcanza $\frac{4}{7}$ de la altura. ¿Cuánto le falta al que está más abajo para alcanzar al otro?

Resolución. Para resolver este problema podríamos plantearlo con la expresión.

$$\frac{3}{5} - \frac{4}{7} = \boxed{}$$

Si los números racionales $\frac{3}{5}$ y $\frac{4}{7}$ estuvieran expresados con fracciones de igual denominador, sería muy fácil hallar la solución del problema. Como ya tenemos un procedimiento cómodo para hallar fracciones con denominador común que sustituyan a otras de denominador diferente, podemos aplicar aquí este procedimiento.

$$\frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 7}{5 \cdot 7} = \frac{21}{35}$$

$$\frac{4}{7} = \frac{4 \cdot 5}{7 \cdot 5} = \frac{20}{35}$$

De manera que

$$\frac{3}{5} - \frac{4}{7} = \frac{21}{35} - \frac{20}{35} = \frac{21 - 20}{35} = \frac{1}{35}$$

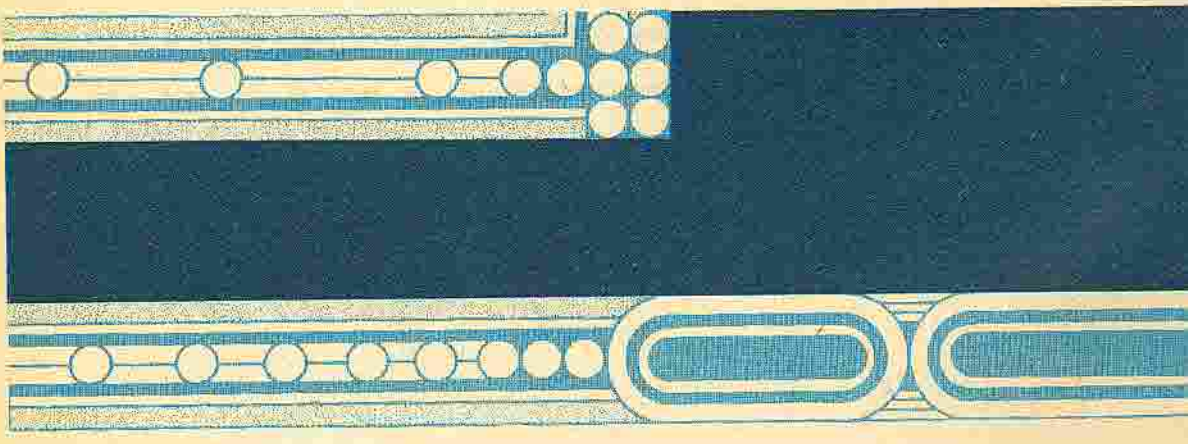
Respuesta. Al que está más abajo le falta avanzar $\frac{1}{35}$ de la altura del "Popo" para alcanzar al otro.

Para efectuar sustracciones de números racionales expresados con fracciones de distinto denominador, podemos proceder como en el problema anterior.

Ejemplo.

a) $\frac{5}{4} - \frac{1}{3} = \frac{5 \cdot 3}{4 \cdot 3} - \frac{4 \cdot 1}{4 \cdot 3} = \frac{15}{12} - \frac{4}{12} = \frac{11}{12}$

b) $\frac{2}{3} - \frac{4}{7} = \frac{2 \cdot 7}{3 \cdot 7} - \frac{3 \cdot 4}{3 \cdot 7} = \frac{14}{21} - \frac{12}{21} = \frac{2}{21}$



c) $\frac{6}{8} - \frac{4}{7} = \frac{6 \bullet 7}{8 \bullet 7} - \frac{8 \bullet 4}{8 \bullet 7} = \frac{42}{56} - \frac{32}{56} = \frac{10}{56}$

d) $\frac{4}{9} - \frac{1}{5} = \frac{20}{45} - \frac{9}{45} = \frac{11}{45}$

e) $\frac{7}{8} - \frac{5}{6} = \frac{42}{48} - \frac{40}{48} = \frac{2}{48}$

Ejercicio 4. Efectúe en su cuaderno las siguientes sustracciones.

a) $\frac{3}{4} - \frac{2}{5} =$

b) $\frac{1}{3} - \frac{2}{9} =$

c) $\frac{5}{6} - \frac{12}{15} =$

d) $\frac{7}{8} - \frac{3}{5} =$

e) $\frac{6}{8} - 0 =$

f) $\frac{9}{12} - \frac{0}{3} =$

g) $\frac{5}{9} - \frac{1}{2} =$

h) $\frac{10}{3} - \frac{8}{4} =$

i) $3 - \frac{1}{4} =$

j) $5 - \frac{7}{8} =$

k) $\frac{7}{2} - \frac{2}{7} =$

l) $\frac{2}{3} - \frac{3}{6} =$

m) $1 - \frac{2}{3} =$

n) $1 - \frac{10}{12} =$

o) $\frac{5}{12} - \frac{3}{10} =$

p) $\frac{9}{10} - \frac{1}{2} =$

q) $\frac{5}{3} - 1 =$

r) $\frac{12}{7} - 1 =$

s) $\frac{6}{10} - \frac{2}{8} =$

t) $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} =$

u) $\frac{7}{10} - \frac{12}{100} =$

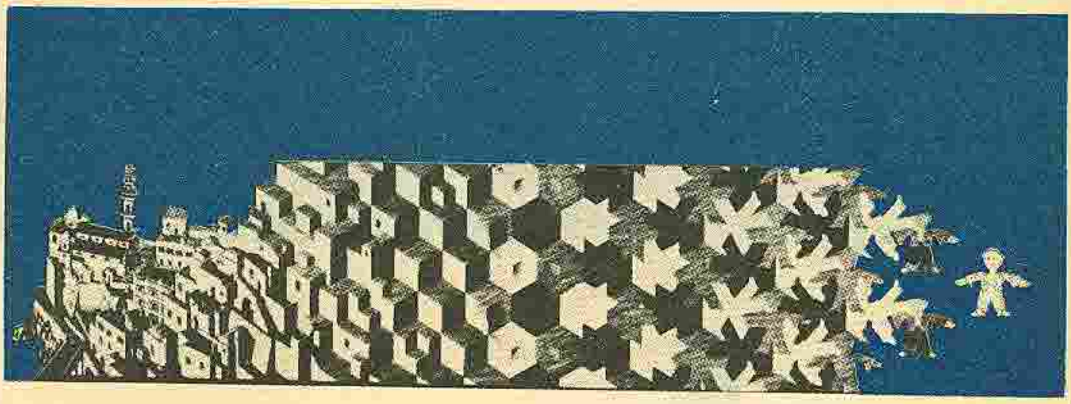
v) $\frac{4}{10} - \frac{35}{100} =$

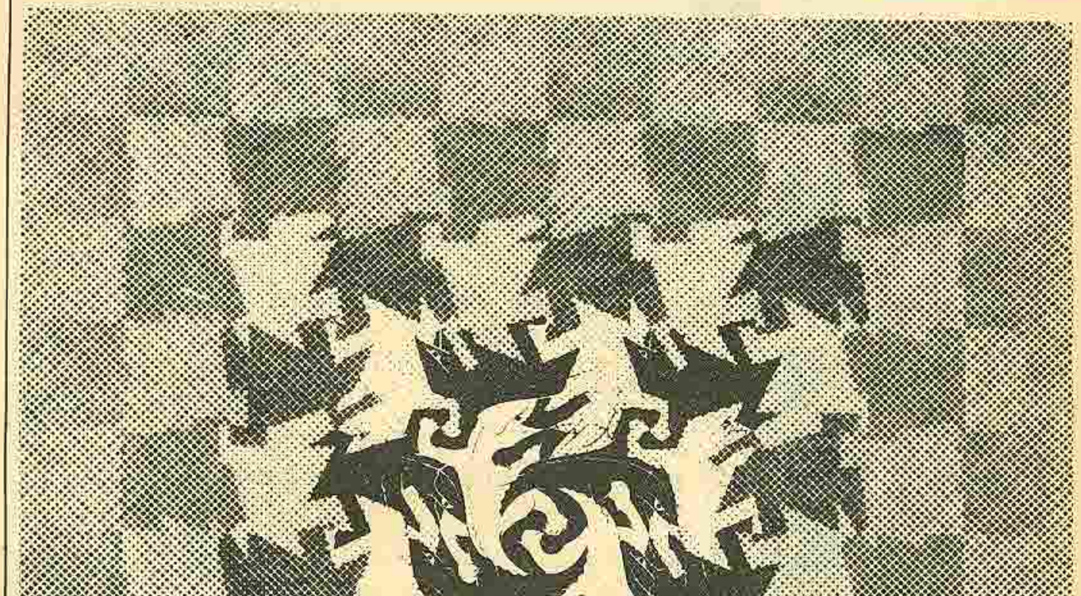
w) $\frac{5}{100} - \frac{8}{1000} =$

x) $\frac{68}{100} - \frac{600}{1000} =$

IV

Ecuaciones





1. Resolución de ecuaciones

Ya hemos aprendido un procedimiento para resolver algunas ecuaciones con números naturales. Ahora vamos a resolver algunas ecuaciones con números racionales siguiendo un procedimiento semejante.

En la resolución de ecuaciones con números naturales aplicamos algunas propiedades para calcular la solución en lugar de adivinarla. Al resolver ecuaciones con números racionales vamos a aplicar algunas propiedades análogas.

Propiedad. Si a los dos miembros de una ecuación se les suma o se les resta un mismo número, se obtiene otra ecuación; pero ambas ecuaciones tienen la misma solución.

Ejemplo. Consideremos la ecuación

$$\blacksquare + \frac{2}{3} = \frac{7}{3}$$

que tiene por solución el número $\frac{5}{3}$.

a) Sumemos el número $\frac{4}{3}$ a los dos miembros de esta ecuación:

$$\blacksquare + \frac{2}{3} + \frac{4}{3} = \frac{7}{3} + \frac{4}{3}$$

Esta nueva ecuación también tiene como solución al número $\frac{5}{3}$ porque

$$\boxed{\tfrac{5}{3}} + \frac{2}{3} + \frac{4}{3} = \frac{7}{3} + \frac{4}{3}.$$

b) Restemos el número $\frac{1}{3}$ a los dos miembros de la ecuación:

$$\blacksquare + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3} - \frac{1}{3}$$

Esta nueva ecuación también tiene como solución al número $\frac{5}{3}$ porque

$$\underbrace{\boxed{\tfrac{5}{3}} + \frac{2}{3}} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3} - \frac{1}{3}$$

$$\underbrace{\frac{7}{3} - \frac{1}{3}} = \underbrace{\frac{7}{3} - \frac{1}{3}}$$

$$\frac{6}{3} = \frac{6}{3}$$

Observe usted que en la ecuación de este ejemplo las fracciones tienen el mismo denominador. Si tuvieran denominadores distintos, de todos modos se podría mostrar la propiedad, pues lo único que tendríamos que hacer es sustituir convenientemente las fracciones.

Ejemplo. Consideremos la ecuación.

$$\frac{1}{2} + \blacksquare = \frac{5}{3}$$

cuya solución es el número $\frac{7}{6}$. (Compruébelo.)

Sustituyamos las fracciones de esta ecuación por otras que tengan un denominador común y que denoten a los mismos números racionales que $\frac{1}{2}$ y $\frac{5}{3}$.

Como

$$\frac{1}{2} = \frac{1 \bullet 3}{2 \bullet 3} = \frac{3}{6}$$

y

$$\frac{5}{3} = \frac{5 \bullet 2}{3 \bullet 2} = \frac{10}{6},$$

podemos escribir nuestra ecuación así:

$$\frac{3}{6} + \blacksquare = \frac{10}{6}.$$

Ejercicio 1.

a) Sume el número $\frac{5}{6}$ a los dos miembros de la ecuación anterior y compruebe que la solución de la nueva ecuación también es $\frac{7}{6}$.

b) Reste $\frac{2}{6}$ a los dos miembros de la misma ecuación y compruebe que la solución de la nueva ecuación sigue siendo $\frac{7}{6}$.

Antes de entrar de lleno a la resolución de ecuaciones con números racionales recordemos que

Cuando se tienen varias ecuaciones con la misma solución, basta con resolver una para resolverlas todas.

En el proceso de resolución de una ecuación, las expresiones como $x = \frac{1}{3}$, $y = \frac{5}{9}$ y $n = \frac{27}{2}$ se consideran ecuaciones. Así, por ejemplo, la solución de la ecuación $x = \frac{1}{3}$ es $\frac{1}{3}$; la solución de la ecuación $y = \frac{5}{9}$ es $\frac{5}{9}$ y la solución de $n = \frac{27}{2}$ es $\frac{27}{2}$.

Ejercicio 2. Todas las ecuaciones anotadas a continuación tienen la misma solución. Encuéntrela.

$$\blacksquare + \frac{5}{8} = \frac{7}{4}$$

$$\frac{11}{4} - \blacksquare = \frac{13}{8}$$

$$x + \frac{3}{4} = \frac{15}{8}$$

$$n = \frac{9}{8}$$

$$a + \frac{22}{16} = \frac{5}{2}$$

$$x - \frac{5}{8} = \frac{1}{2}$$

Entre números racionales también existen las siguientes propiedades, que ya hemos aplicado antes al resolver ecuaciones con números naturales:

> **Si r y q son números racionales, entonces**
>
> $$(r + q) - q = r$$
>
> y
>
> $$(r - q) + q = r.$$

Ejemplo.

a) $\left(\frac{7}{8} + \frac{4}{8}\right) - \frac{4}{8} = \frac{11}{8} - \frac{4}{8} = \frac{7}{8}$

b) $\left(\frac{5}{6} - \frac{2}{6}\right) + \frac{2}{6} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$

c) $\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} = \frac{5}{4} - \frac{2}{4} = \frac{3}{4}$

d) $\left(\frac{8}{10} - \frac{3}{5}\right) + \frac{3}{5} = \frac{2}{10} + \frac{6}{10} = \frac{8}{10}$

Resolvamos ahora algunas ecuaciones con números racionales.

Ejemplo. Dada la ecuación

$$x + \frac{3}{4} = \frac{10}{4},$$

para hallar su solución buscaremos una ecuación simple en la que sea obvia tal solución. Por ello, restaremos el número $\frac{3}{4}$ a sus dos miembros. (Así nos quedará la x sola en el primer miembro.)

$$\left(x + \frac{3}{4}\right) \boxed{- \frac{3}{4}} = \frac{10}{4} \boxed{- \frac{3}{4}}$$

Como $\left(x + \frac{3}{4} - \frac{3}{4}\right) = x$ y $\frac{10}{4} - \frac{3}{4} = \frac{7}{4}$, podemos escribir

$$x = \boxed{\frac{7}{4}}$$

Ya que todas estas ecuaciones tienen la misma solución, concluimos que la ecuación $x + \frac{3}{4} = \frac{10}{4}$ tiene la solución $x = \frac{7}{4}$.

Ejemplo. Consideremos la ecuación

$$x + \frac{3}{5} = \frac{7}{10}.$$

Para resolverla procedemos así:

$$\left(x + \frac{3}{5}\right) \boxed{- \frac{3}{5}} = \frac{7}{10} \boxed{- \frac{3}{5}}$$

Puesto que $\left(x + \frac{3}{5}\right) - \frac{3}{5} = x$

y

$$\frac{7}{10} - \frac{3}{5} = \frac{7}{10} - \frac{6}{10} = \frac{1}{10},$$

podemos escribir

$$x = \boxed{\frac{1}{10}}$$

Por lo tanto, la solución de la ecuación $x + \frac{3}{5} = \frac{7}{10}$ es $\frac{1}{10}$.

Ejemplo. La ecuación

$$y - \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$

puede resolverse así:

$$\left(y - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$$

$$y = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$$

$$y = \frac{3}{6} + \frac{2}{6}$$

$$y = \boxed{\frac{5}{6}}.$$

La solución de la ecuación $y - \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$ es $\frac{5}{6}$.

Ejercicio 3. En cada inciso diga usted cómo se puede obtener la ecuación más simple que tenga la misma solución que la ecuación mostrada.

a) $n + \frac{3}{8} = \frac{3}{4}$ Restando $\frac{3}{8}$ a los dos miembros.

b) $\frac{3}{7} = x - \frac{6}{7}$ Sumando $\frac{6}{7}$ a los dos miembros.

c) $a + \frac{1}{2} = \frac{5}{8}$ ____________________

d) $\frac{7}{4} = \frac{3}{4} + y$ ____________________

e) $\frac{1}{3} + n = \frac{5}{6}$ ____________________

f) $\frac{15}{16} = b + \frac{6}{8}$ ____________________

g) $x - \frac{2}{3} = \frac{1}{4}$ ______________________________

h) $z - \frac{1}{8} = \frac{4}{4}$ ______________________________

i) $\frac{1}{2} = y - \frac{5}{12}$ ______________________________

Ejercicio 4. Resuelva en su cuaderno las siguientes ecuaciones. Compruebe sus soluciones.

a) $\frac{3}{4} + n = \frac{5}{4}$

b) $\frac{7}{8} + x = \frac{13}{8}$

c) $\frac{7}{9} = \frac{5}{9} + y$

d) $\frac{1}{2} + x = \frac{3}{4}$

e) $\frac{4}{3} = \frac{5}{6} + y$

f) $\frac{5}{8} + n = \frac{3}{4}$

g) $1 = x + \frac{8}{9}$

h) $y + \frac{3}{8} = 2$

i) $a + \frac{1}{6} = 1$

j) $4 = \frac{3}{5} + x$

k) $y - \frac{5}{8} = \frac{2}{8}$

l) $\frac{1}{2} = b - \frac{3}{4}$

m) $x - \frac{1}{2} = 1$

n) $\frac{1}{3} = y - 2$

o) $c - \frac{3}{8} = 1$

p) $x - 5 = \frac{1}{2}$

q) $4 = a - \frac{2}{3}$

r) $n - 7 = \frac{3}{4}$

2. Resolución de problemas por medio de ecuaciones

Como ya hemos dicho, existen diferentes métodos para resolver problemas y cada quien puede emplear el que sea de su agrado.

Los problemas que presentamos a continuación son muy sencillos y usted podría resolverlos en cualquier forma. Pero le recomendamos que los resuelva haciendo uso de ecuaciones para que se vaya familiarizando con este método.

Problemas. Trabaje usted en su cuaderno. Observe los incisos resueltos.

a) ¿Cuál es el número que sumado con $\frac{1}{2}$ nos da $\frac{5}{4}$?

Este problema nos sugiere la ecuación

$$x + \frac{1}{2} = \frac{5}{4}$$

La solución de esta ecuación será la solución del problema.

$$x + \frac{1}{2} = \frac{5}{4}$$

$$(x + \frac{1}{2}) - \frac{1}{2} = \frac{5}{4} - \frac{1}{2}$$

$$x = \boxed{\frac{3}{4}}$$

Comprobamos la solución de la ecuación.

$\boxed{\frac{3}{4}} + \frac{1}{2}$ sí es igual a $\frac{5}{4}$

Respuesta. El número que sumado con $\frac{1}{2}$ da $\frac{5}{4}$ es $\frac{3}{4}$

b) La diferencia de dos números es $\frac{3}{5}$. Si el número menor es $\frac{1}{2}$, ¿cuál es el mayor?

Resolución. Sea m el número mayor. Entonces,

$$m - \frac{1}{2} = \frac{3}{5}$$

$$\left(m - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} = \frac{3}{5} + \frac{1}{2}$$

$$m = \boxed{\frac{11}{10}}$$

Comprobación

$$\boxed{\frac{11}{10}} - \frac{1}{2} = \frac{11}{10} - \frac{5}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

Respuesta. El número mayor es $\frac{11}{10}$

c) Al sumar $\frac{1}{4}$ a un número se obtiene $\frac{5}{8}$. ¿Cuál es ese número?.

d) Si a un número se le resta $\frac{1}{6}$, el resultado es $\frac{4}{3}$. ¿Cuál es ese número?

e) Dos números sumados dan $\frac{7}{10}$. Si uno de ellos es $\frac{1}{2}$, ¿cuál es el otro?

f) A un número se le resta $\frac{4}{5}$ y el resultado es 6. ¿Cuál es ese número?

Ejercicio 5. De las ecuaciones que se dan en cada inciso, elija la que se adapte al problema, resuélvala y dé la respuesta tal como se hace en a).

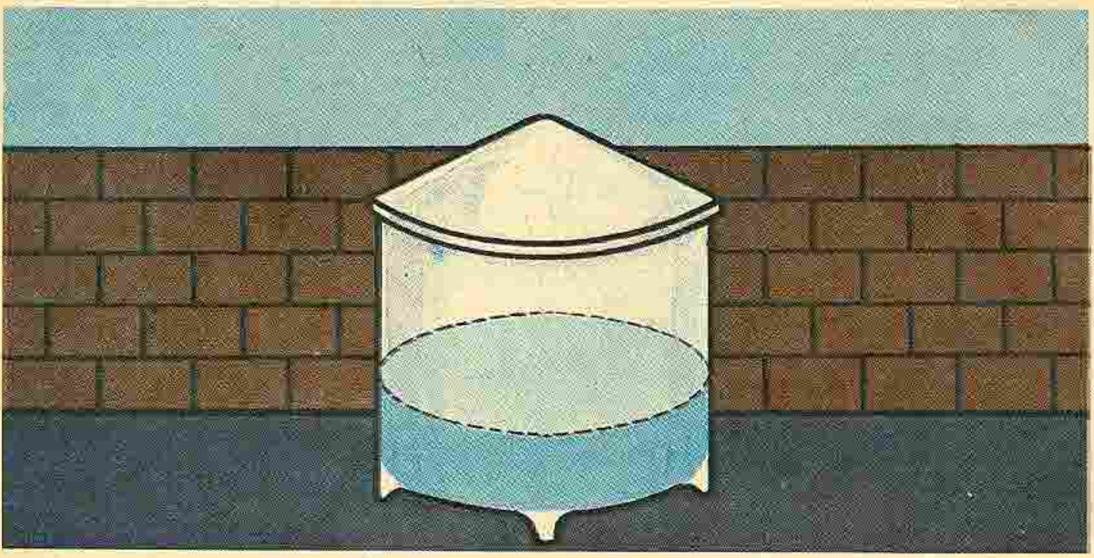
a) Un hortelano tiene $\frac{1}{3}$ de su parcela sembrada de lechuga y desea sembrar espinacas hasta ocupar en total $\frac{3}{4}$ de dicha parcela. ¿Qué parte debe sembrar de espinacas?

$$\boxed{\frac{1}{3} + x = \frac{3}{4}} \qquad \boxed{\frac{1}{3} - x = \frac{3}{4}} \qquad \boxed{x - \frac{1}{3} = \frac{3}{4}}$$

Ecuación. $\boxed{\frac{1}{3} + x = \frac{3}{4}}$ *Solución.* $\boxed{x = \frac{5}{12}}$

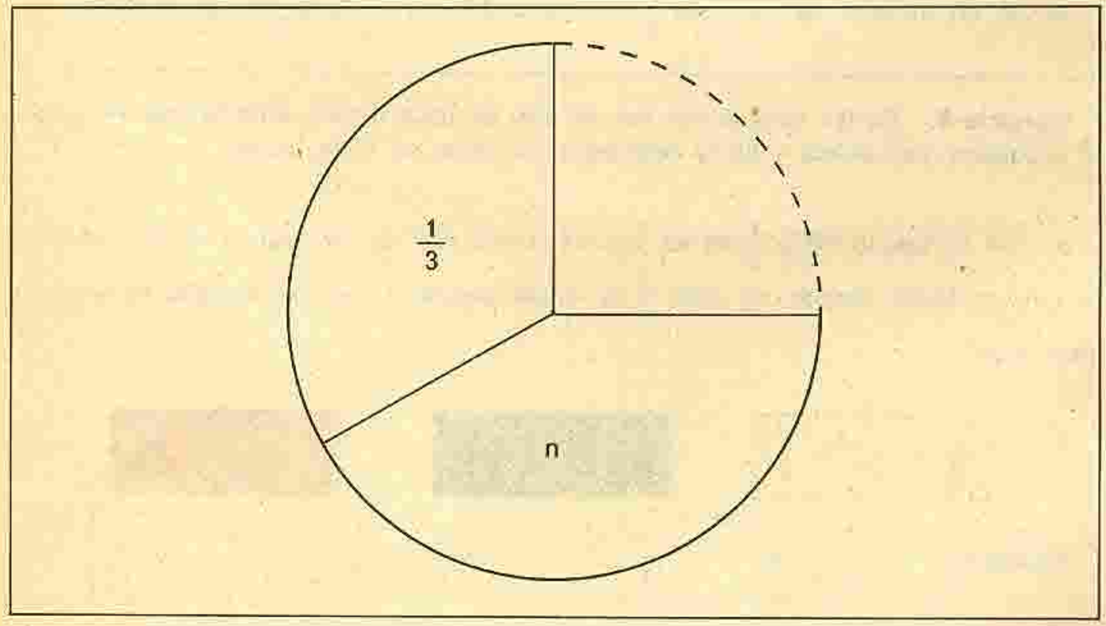
Respuesta. Debe sembrar espinacas en $\frac{5}{12}$ de su parcela.

b) Un tinaco contiene agua hasta $\frac{1}{4}$ de su capacidad. ¿Cuánto le falta de agua para contener dicho líquido hasta los $\frac{7}{8}$ de su capacidad?



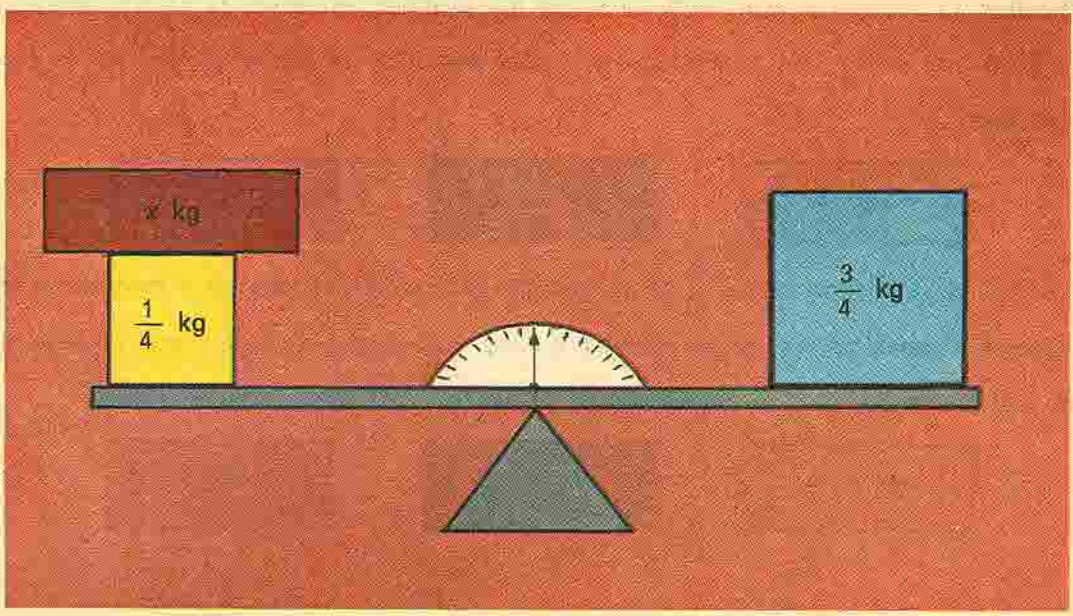
$x - \frac{1}{4} = \frac{7}{8}$ $\qquad$ $x + \frac{1}{4} = \frac{7}{8}$ $\qquad$ $\frac{1}{4} - x = \frac{7}{8}$

c) Los dos pedazos de pastel que se ilustran forman $\frac{3}{4}$ de pastel. Si un pedazo es $\frac{1}{3}$, ¿qué tamaño tiene el otro?



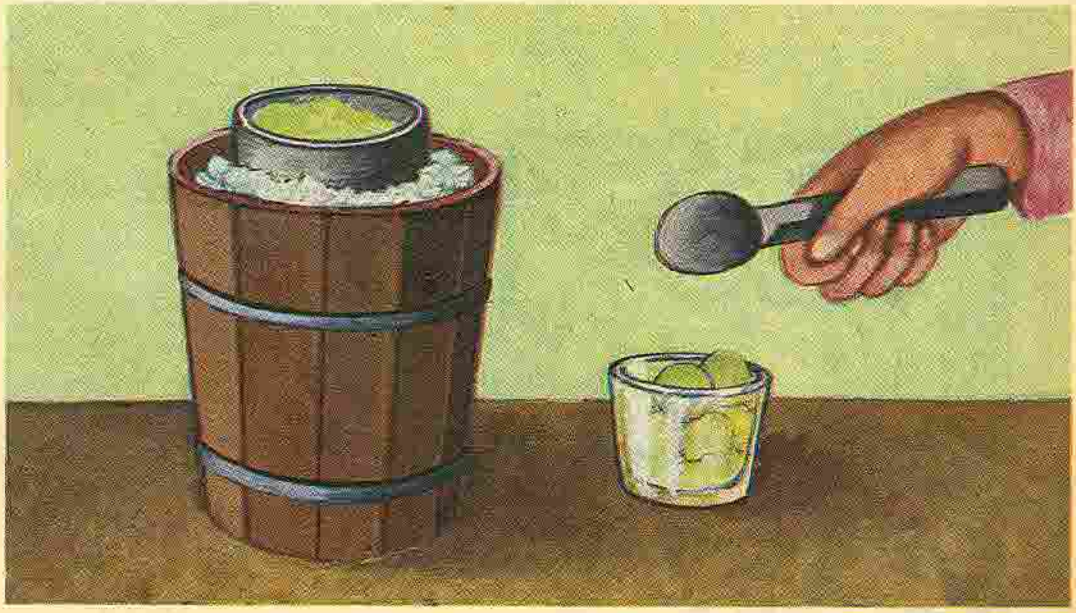
$n - \frac{1}{3} = \frac{3}{4}$ $\qquad$ $n + \frac{1}{3} = \frac{3}{4}$ $\qquad$ $n - \frac{3}{4} = \frac{1}{3}$

d) ¿Cuánto pesa el cuerpo iluminado de rojo en la siguiente balanza?



$\frac{3}{4} + \frac{1}{4} = x$ $\frac{3}{4} + x = \frac{1}{4}$ $x + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

e) En un bote había $\frac{9}{2}$ litros de nieve. Si después de servir algunos vasos quedó sólo $\frac{1}{5}$ de litro, ¿cuánta nieve se sirvió de ese bote?



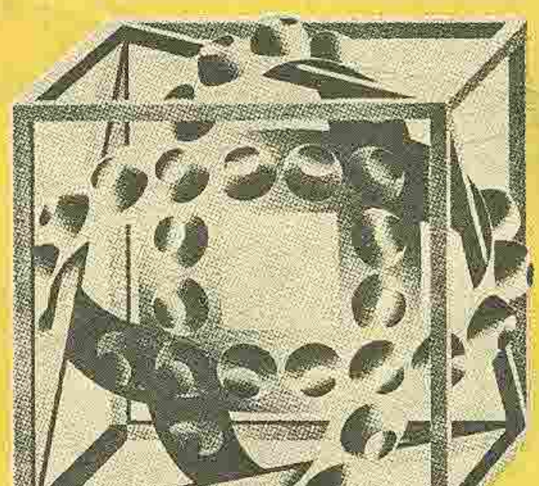
$\frac{9}{2} + \frac{1}{5} = x$ $x - \frac{1}{5} = \frac{9}{2}$ $x + \frac{1}{5} = \frac{9}{2}$

f) En una escuela se realizan elecciones de mesa directiva y se presentan dos planillas, la verde y la azul. Si $\frac{2}{5}$ de todos los alumnos votan por la planilla verde y se sabe que sólo $\frac{7}{10}$ del alumnado votó, ¿qué parte de los alumnos votó por la planilla azul?

$x + \frac{2}{5} = \frac{7}{10}$ $\qquad$ $x - \frac{2}{5} = \frac{7}{10}$ $\qquad$ $x - \frac{7}{10} = \frac{2}{5}$

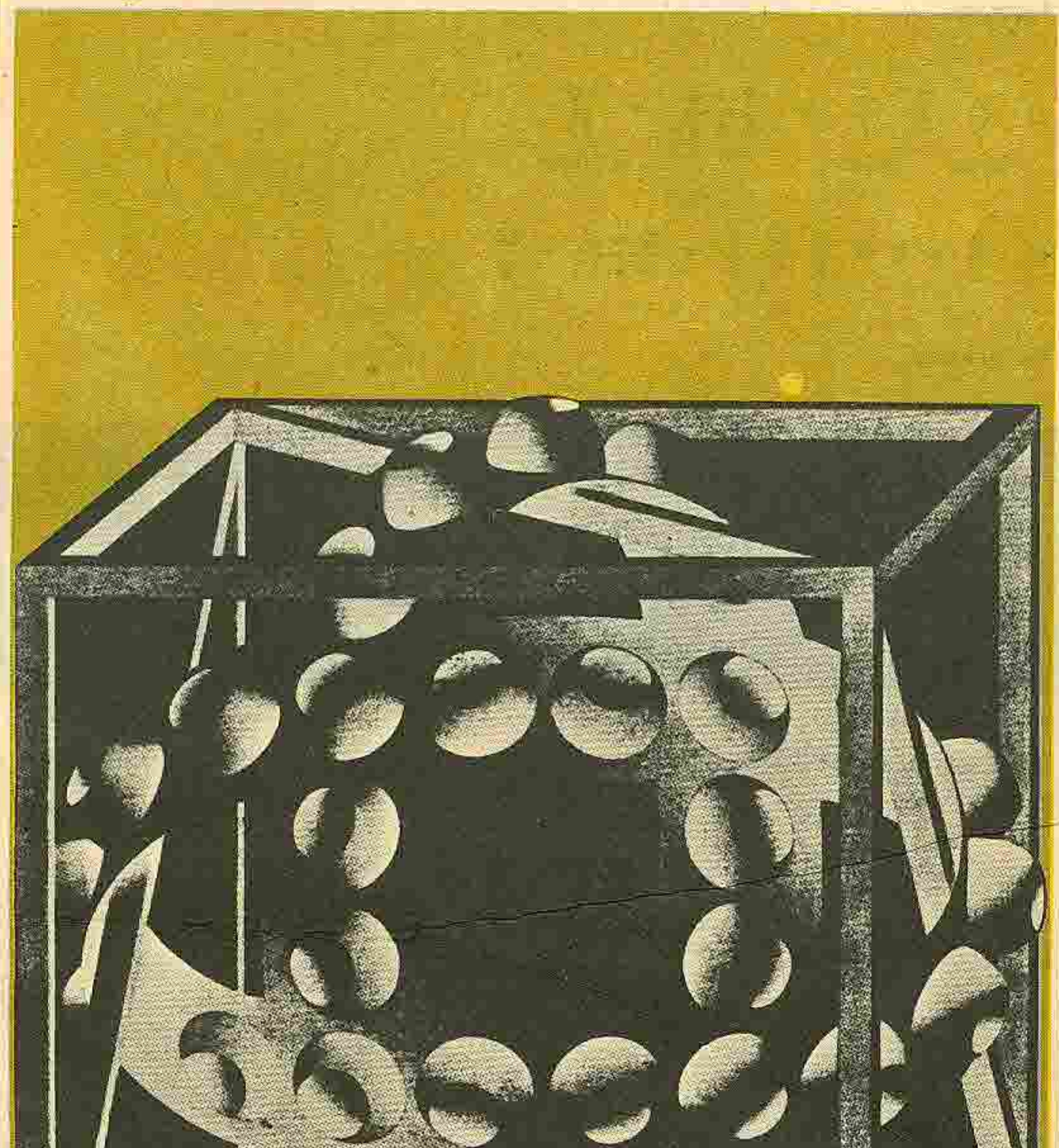
g) Una secretaria ocupa $\frac{8}{10}$ de su jornada de trabajo en escribir a máquina y en corregir algunas cartas. Si en escribir a máquina ocupa $\frac{1}{2}$ de su jornada, ¿qué parte de su jornada dedica a la corrección de cartas?

$\frac{1}{2} - c = \frac{8}{10}$ $\qquad$ $\frac{1}{2} + c = \frac{8}{10}$ $\qquad$ $c - \frac{8}{10} = \frac{1}{2}$



V

Multiplicación de números racionales



1. La multiplicación de números racionales

Además de efectuar adiciones y sustracciones de números racionales expresados con fracciones, usted ya sabe efectuar multiplicaciones con ellos. Para hacerlo usted sigue un procedimiento como el que se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo.

a) $$\underset{\text{factor}}{\frac{3}{5}} \overset{\rightarrow}{\underset{\rightarrow}{\times}} \underset{\text{factor}}{\frac{4}{7}} = \frac{3 \cdot 4}{5 \cdot 7} = \underset{\text{producto}}{\frac{12}{35}}$$

b) $$\frac{9}{2} \times 6 = \frac{9}{2} \overset{\rightarrow}{\underset{\rightarrow}{\times}} \frac{6}{1} = \frac{9 \cdot 6}{2 \cdot 1} = \frac{54}{2}$$

En general,

El producto de dos números racionales $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ es el número racional $\frac{a \cdot c}{b \cdot d}$.

En símbolos,

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Ejercicio 1. Efectúe las siguientes multiplicaciones en su cuaderno, como se hace en a).

a) $\frac{3}{8} \times \frac{2}{3} = \boxed{\frac{3 \cdot 2}{8 \cdot 3} = \frac{6}{24}}$

b) $\frac{2}{5} \times \frac{7}{2} =$

c) $\frac{3}{8} \times \frac{2}{10} =$

d) $\frac{2}{4} \times \frac{11}{9} =$

e) $\frac{3}{10} \times \frac{8}{10} =$

f) $\frac{3}{100} \times \frac{30}{100} =$

g) $\frac{14}{1000} \times \frac{2}{10} =$

h) $\frac{1}{5} \times \frac{1}{3} =$

i) $\frac{3}{10} \times \frac{8}{100} =$

j) $\frac{3}{4} \times \frac{4}{3} =$

k) $\frac{9}{10} \times \frac{10}{9} =$

l) $5 \times \frac{1}{5} =$

m) $1 \times \frac{1}{3} =$

n) $0 \times \frac{2}{5} =$

Ejercicio 2. Efectúe las siguientes multiplicaciones de números racionales. Observe los incisos resueltos.

a) $\frac{m}{5} \times \frac{8}{3} = \boxed{\frac{8m}{15}}$

b) $\frac{3}{9} \times \frac{m}{3} =$

c) $\frac{3}{r} \times \frac{5}{4} =$

d) $\frac{5}{7} \times \frac{3}{s} =$

e) $\frac{r}{s} \times \frac{3}{2} = \boxed{\frac{3r}{2s}}$

f) $\frac{12}{4} \bullet \frac{x}{y} =$

g) $\frac{m}{n} \bullet \frac{9}{7} =$

h) $\frac{r}{t} \times \frac{m}{5} = \boxed{\frac{rm}{5t}}$

i) $\frac{m}{n} \bullet \frac{10}{x} =$

j) $\frac{8}{p} \bullet \frac{f}{g} =$

k) $\frac{r}{s} \bullet \frac{m}{p} =$

l) $\frac{a}{b} \bullet \frac{m}{n} =$

m) $a \bullet \frac{f}{g} = \frac{a}{1} \bullet \frac{f}{g} = \boxed{\frac{af}{g}}$

n) $m \bullet \frac{a}{b} =$

o) $\frac{m}{n} \bullet x =$

p) $\frac{a}{b} \bullet \frac{a}{b} = \frac{a \bullet a}{b \bullet b} = \boxed{\frac{a^2}{b^2}}$

q) $\frac{m}{n} \cdot \frac{m}{n} =$

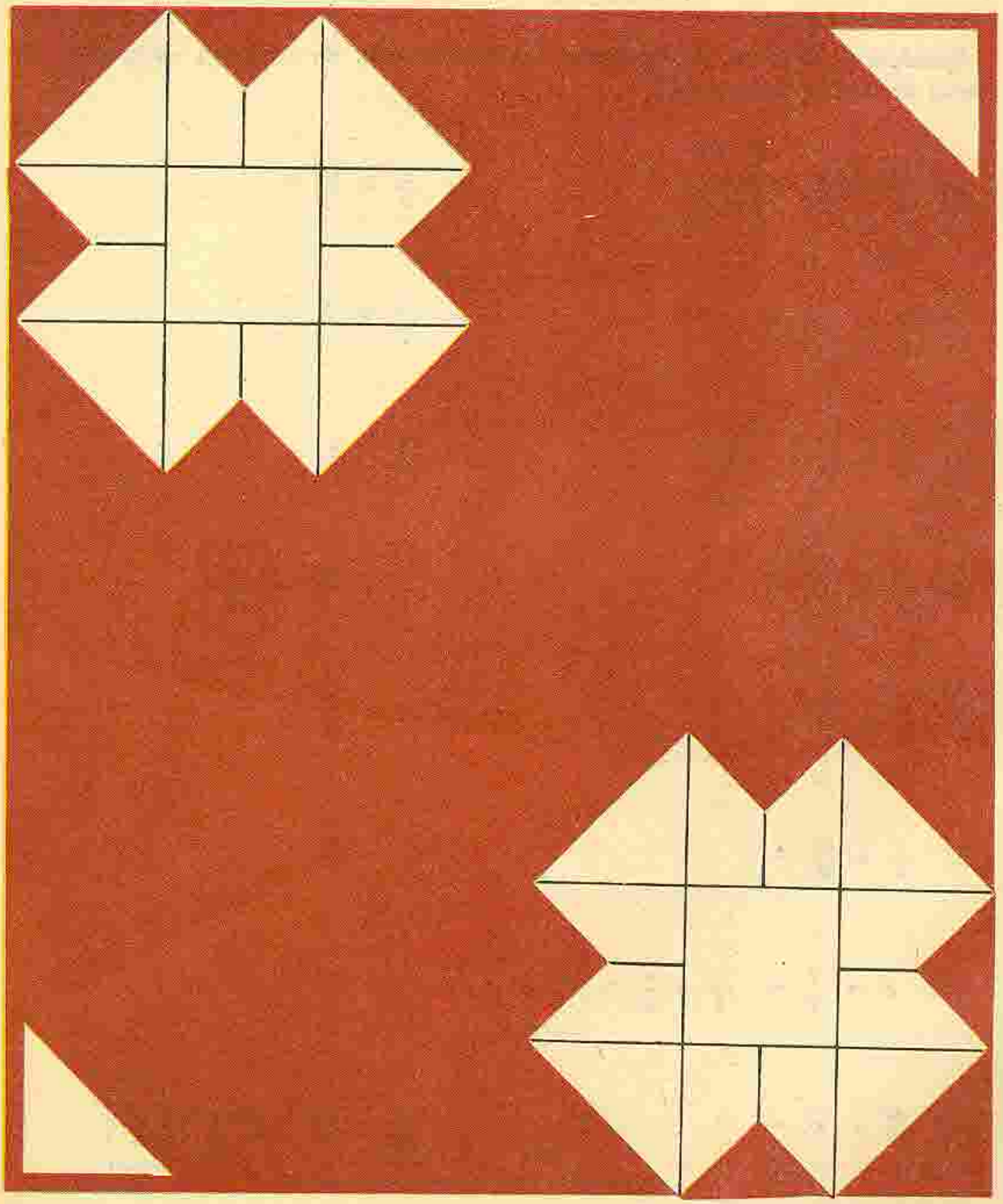
r) $\frac{x}{y} \cdot \frac{x}{y} =$

s) $a \cdot \frac{1}{a} = \frac{a}{1} \cdot \frac{1}{a} = \boxed{\frac{a}{a} = 1}$

t) $m \cdot \frac{1}{m} =$

u) $\frac{1}{s} \cdot s =$

v) $0 \times \frac{m}{n} =$



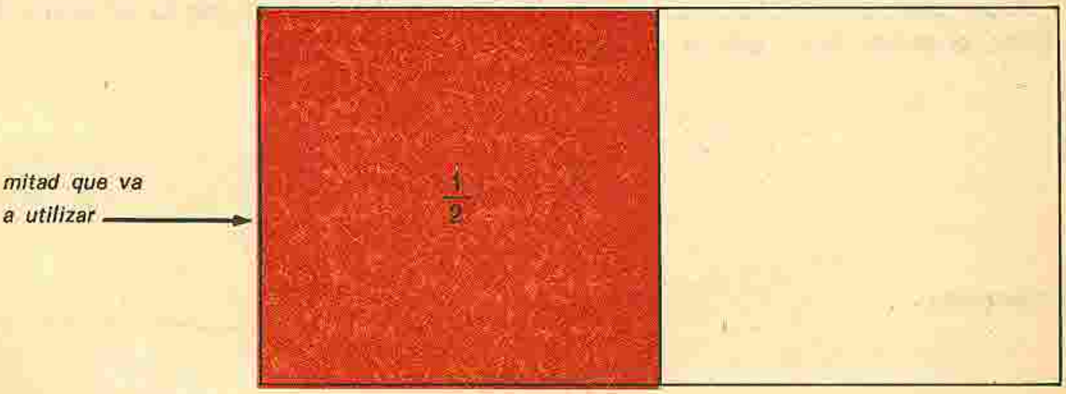
2. Una interpretación de la multiplicación de racionales

A continuación daremos una interpretación de la multiplicación de números racionales que nos será útil posteriormente para resolver algunos problemas. Analicemos la siguiente situación:

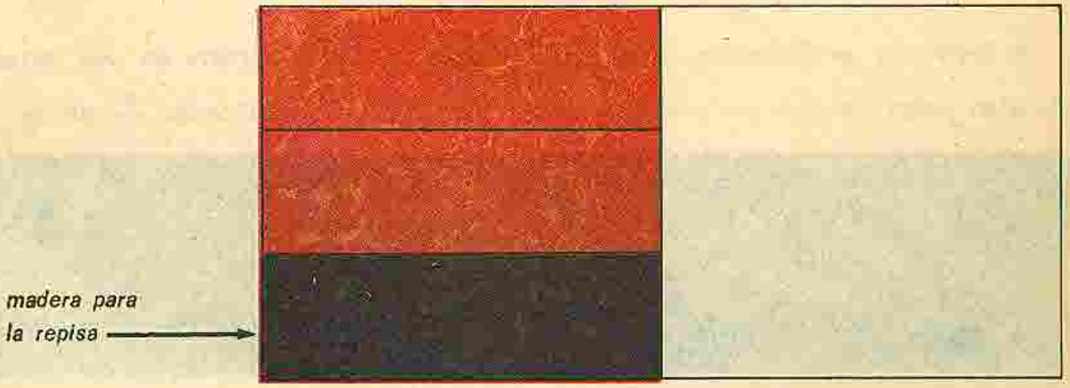
Un carpintero tiene una plancha de madera en forma rectangular y desea utilizar sólo la mitad de esa madera en hacer una repisa y otras cosas. Si en la repisa utiliza la tercera parte de esa mitad, ¿qué parte de la plancha completa se va a usar en la repisa?

Antes de cortar la madera, el carpintero hace los siguientes trazos:

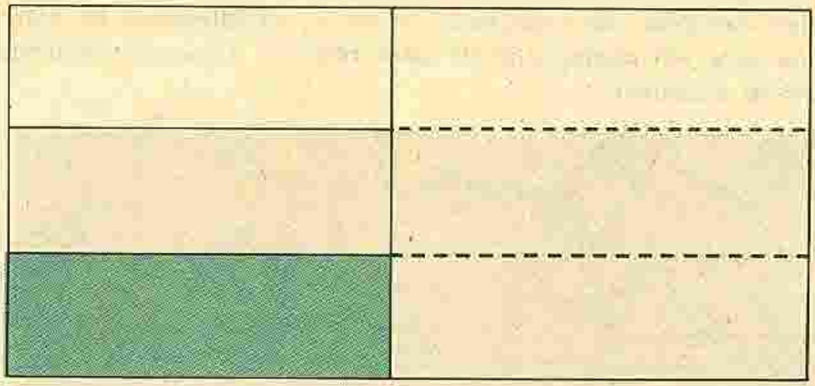
Primero divide su plancha en dos mitades.



Luego divide en tres partes la mitad que quiere usar.



Para saber qué parte de la plancha se usa en la construcción de la repisa podríamos prolongar los trazos del carpintero en la siguiente forma:



Así vemos que en la repisa se utiliza $\frac{1}{6}$ de toda la plancha.

Para llegar a este mismo resultado se podría usar la multiplicación

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}.$$

Ahora bien, si interpretamos esta multiplicación de acuerdo con la situación anterior, podemos decir que al multiplicar

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}$$

obtenemos

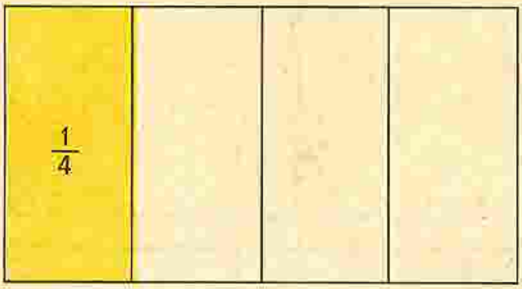
$$\boxed{\frac{1}{3} \text{ de } \frac{1}{2}}$$

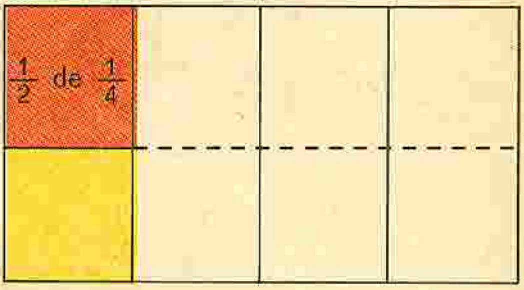
Es decir, con la expresión $\frac{1}{3}$ de $\frac{1}{2}$ indicamos la "tercera parte de una mitad" de algo y esa "tercera parte de una mitad" se calcula multiplicando $\frac{1}{3}$ por $\frac{1}{2}$.

Ilustremos ahora otras multiplicaciones de números racionales.

Ejemplo.

a)

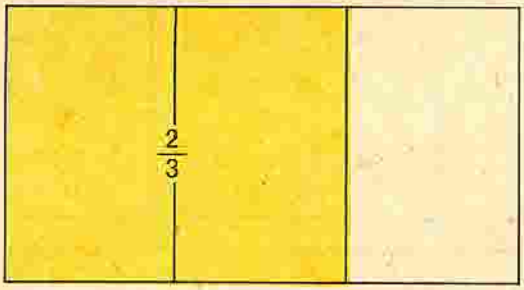


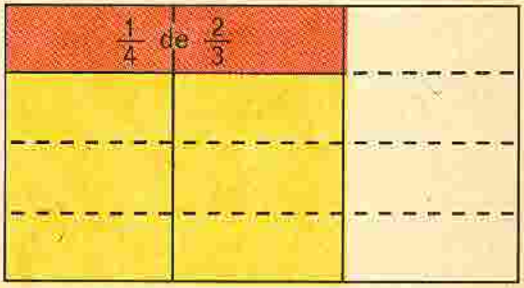


$\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{4}$ es $\frac{1}{8}$

$\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$

b)

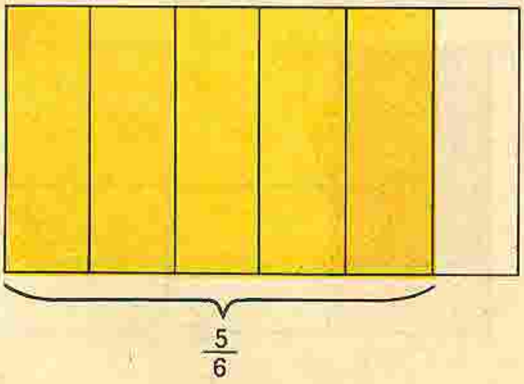


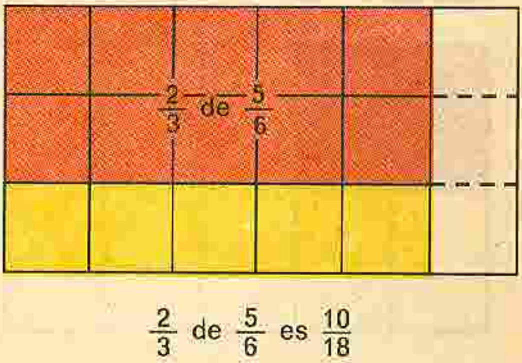


$\frac{1}{4}$ de $\frac{2}{3}$ es $\frac{2}{12}$

$\frac{1}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{12}$

c)



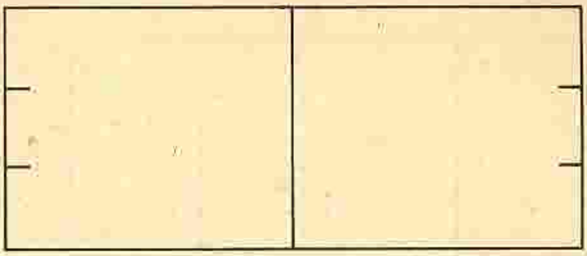


$\frac{2}{3}$ de $\frac{5}{6}$ es $\frac{10}{18}$

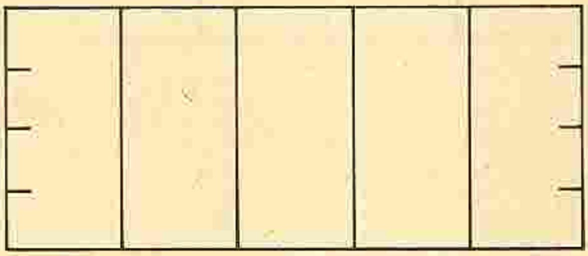
$\frac{2}{3} \times \frac{5}{6} = \frac{10}{18}$

Ejercicio 3. Tal como se hizo en el ejemplo anterior, ilustre en cada figura la multiplicación que se indica.

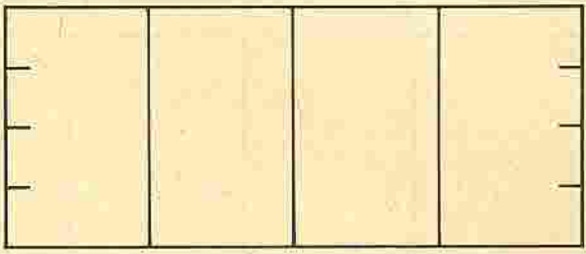
a) $\frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{6}$



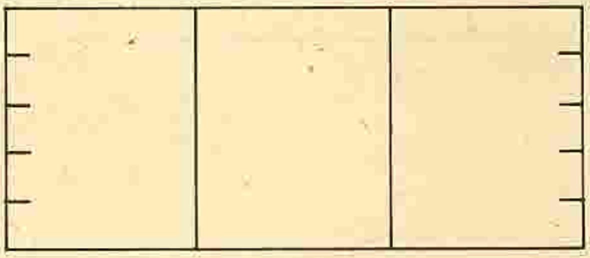
b) $\frac{3}{4} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{20}$



c) $\frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$

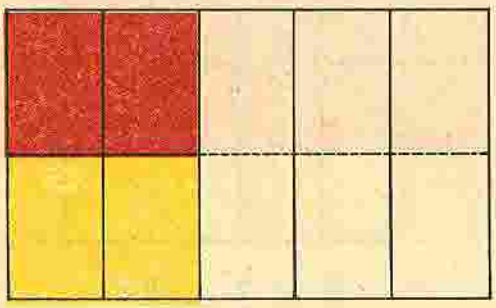


d) $\frac{2}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{15}$



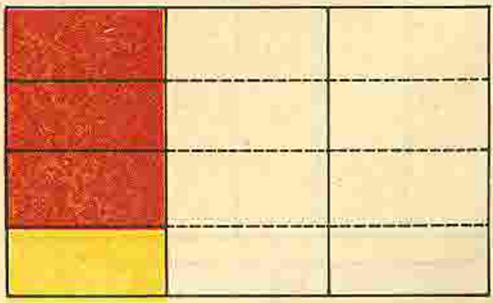
Ejercicio 4. Indique usted qué multiplicación sugiere cada ilustración.

a)

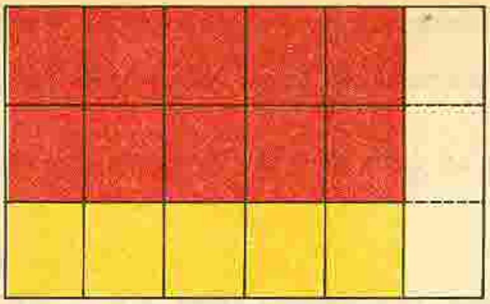


$\frac{1}{2} \times \frac{2}{5} = \frac{2}{10}$

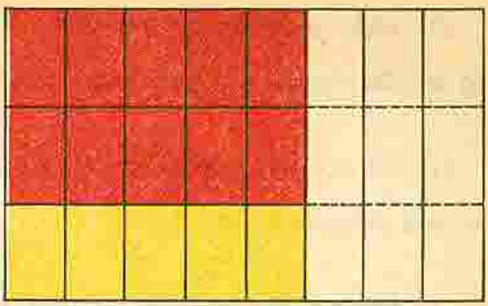
b)



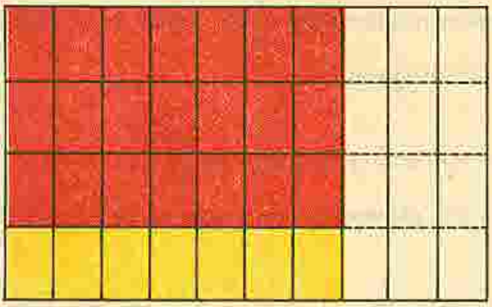
c)



d)



e)



Esta interpretación de la multiplicación de números racionales es aplicable en la resolución de problemas como el siguiente:

Problema. El grupo *A* de una escuela organizó una excursión; pero sólo fueron a esa excursión $\frac{2}{3}$ del grupo. Si la mitad de los alumnos excursionistas se metieron al río, ¿qué parte del grupo *A* se metió al río?

Resolución.

La "mitad de los $\frac{2}{3}$" del grupo puede interpretarse como $\frac{1}{2}$ de $\frac{2}{3}$, o sea,

$$\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \boxed{\frac{2}{6}.}$$

Respuesta. Esa vez nadaron $\frac{2}{6}$ del grupo *A*.

Problemas.

a) Un alpinista asciende $\frac{3}{8}$ de la altura de una montaña, un segundo alpinista asciende $\frac{4}{5}$ de lo que ascendió el primero. ¿Qué parte de la montaña ascendió el segundo alpinista?

b) Hay un grupo de alumnos. $\frac{2}{3}$ de los alumnos de ese grupo pesan más de 55 kg. De éstos, $\frac{3}{4}$ pesan más de 57 kg. ¿Qué parte del grupo pesa más de 57 kg?

c) Un pie es $\frac{1}{3}$ de yarda, y una pulgada es $\frac{1}{12}$ de pie. ¿Qué parte de una yarda es una pulgada?

d) Un segundo es $\frac{1}{60}$ de minuto, y un minuto es $\frac{1}{60}$ de hora. ¿Qué parte de la hora es un segundo?

e) El yeso tiene aproximadamente $\frac{1}{5}$ de agua y el agua tiene $\frac{1}{10}$ de hidrógeno. ¿Qué parte del yeso es hidrógeno?

f) La diáspora es un mineral que contiene $\frac{17}{20}$ de óxido de aluminio. Si el óxido de aluminio contiene $\frac{1}{2}$ de aluminio, ¿qué parte de la diáspora es aluminio?

g) Una persona emplea en oir música $\frac{2}{3}$ del tiempo que emplea en sus distracciones. Si en distraerse ocupa $\frac{1}{3}$ del día, ¿qué parte del día emplea en oír música?

h) Una persona lee $\frac{1}{2}$ de una novela en un día. Si al otro día lee $\frac{2}{3}$ de lo que leyó el primer día, ¿qué parte de la novela leyó el segundo día?

i) En la XX Olimpíada, Polonia obtuvo $\frac{1}{2}$ del total de medallas que obtuvo Alemania Federal, Holanda obtuvo $\frac{1}{4}$ de lo que sacó Polonia. ¿Qué parte del número de medallas que obtuvo Alemania Federal, obtuvo Holanda?

La multiplicación de números racionales tiene muchas aplicaciones más. Por ejemplo, también se usa para obtener áreas de rectángulos.

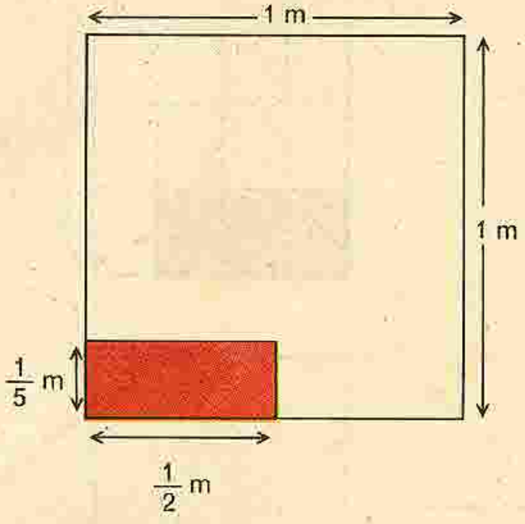
Problema. ¿Cuál es el área de un rectángulo que mide $\frac{1}{2}$ metro de base y $\frac{1}{5}$ de metro de altura?

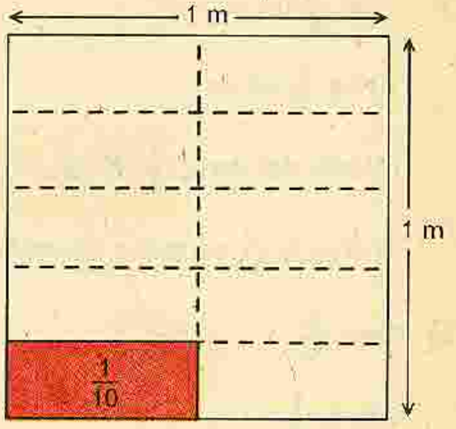
Resolución. Sabemos que el área de un rectángulo se obtiene multiplicando su base por su altura.

Entonces, debemos multiplicar

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{10}$$

El área de ese rectángulo es $\frac{1}{10}$ de metro cuadrado. Este resultado lo podemos ilustrar de la siguiente manera.



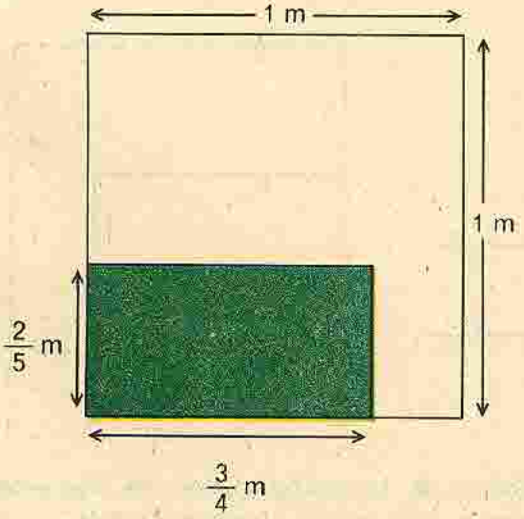


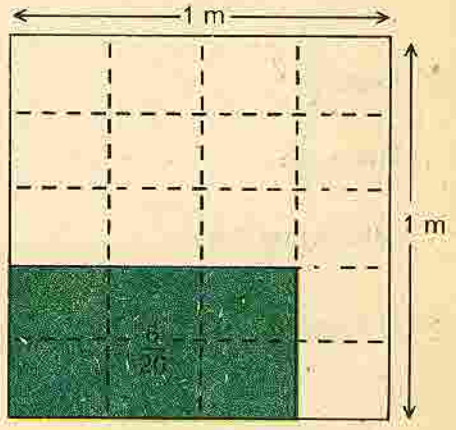
Problema. ¿Cuál es el área de un rectángulo que mide $\frac{3}{4}$ de metro de base y $\frac{2}{5}$ de metro de altura?

Resolución. Para calcular el área multiplicamos

$$\frac{3}{4} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{20}$$

Entonces, el área de ese rectángulo es $\frac{6}{20}$ de metro cuadrado. Y esto lo podemos ilustrar de la siguiente manera:





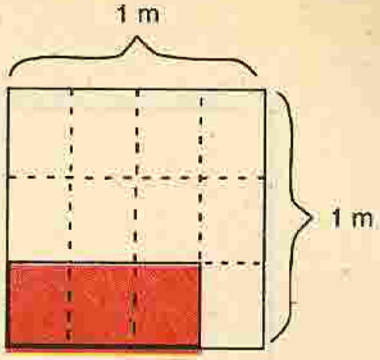
Ejercicio 5. Encuentre el área de cada rectángulo y luego ilústrelo, como se hace en a).

a) base, $\frac{3}{4}$ de m;

altura, $\frac{1}{3}$ de m;

cálculo del área, $\frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{3}{12}$.

El área es $\frac{3}{12}$ de metro cuadrado

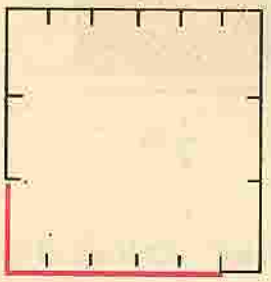


b) base, $\frac{5}{6}$;

altura, $\frac{1}{3}$;

cálculo del área, ____________________

El área es ____________________

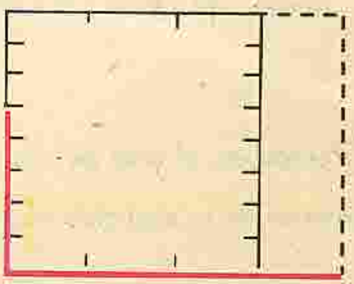


c) base, $\frac{4}{3}$;

altura, $\frac{5}{8}$;

cálculo del área, ____________________

El área es ____________________

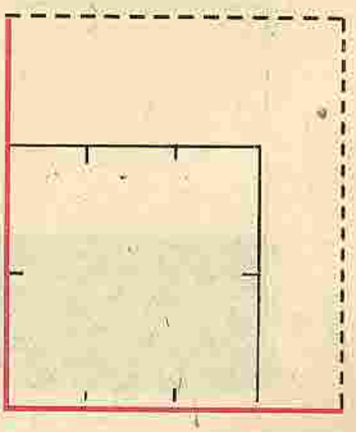


d) base, $\frac{4}{3}$;

altura, $\frac{3}{2}$;

cálculo del área, ____________________

El área es ____________________



Más adelante estudiaremos otras aplicaciones de la multiplicación de números racionales; pero antes veamos qué propiedades básicas tiene esta operación.

3. Propiedades de la multiplicación de números racionales

Hemos visto anteriormente las propiedades básicas de la multiplicación de números naturales. Ahora veremos cuáles son las propiedades básicas de la multiplicación de números racionales.

Propiedad conmutativa.

Ya sabemos que $a \bullet b = b \bullet a$ cuando a y b son números naturales. Lo mismo ocurre cuando a y b son números racionales. Por ejemplo, si $a = \frac{2}{5}$ y $b = \frac{6}{4}$, entonces

$$a \bullet b = \frac{2}{5} \times \frac{6}{4} = \boxed{\frac{12}{20}}$$

y

$$b \bullet a = \frac{6}{4} \times \frac{2}{5} = \boxed{\frac{12}{20}}$$

Si $a = \frac{8}{6}$ y $b = \frac{3}{10}$, entonces

$$ab = \frac{8}{6} \times \frac{3}{10} = \boxed{\frac{24}{60}}$$

y

$$ba = \frac{3}{10} \times \frac{8}{6} = \boxed{\frac{24}{60}}$$

Ejemplo.

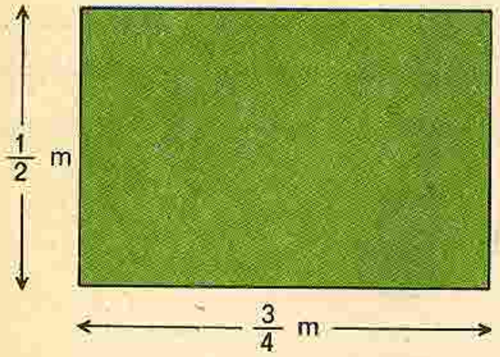
a) $\boxed{\frac{7}{5} \times \frac{8}{10} = \frac{56}{50}}$ $\boxed{\frac{8}{10} \times \frac{7}{5} = \frac{56}{50}}$

b) $\boxed{\frac{4}{t} \times \frac{y}{6} = \frac{4y}{t6}}$ $\boxed{\frac{y}{6} \times \frac{4}{t} = \frac{y4}{6t}}$

c) $\boxed{\frac{x}{y} \bullet \frac{m}{n} = \frac{xm}{yn}}$ $\boxed{\frac{m}{n} \bullet \frac{x}{y} = \frac{mx}{ny}}$

Usted recuerda que el área de un rectángulo se calcula multiplicando la base por la altura. ¿Se podrá calcular el área del rectángulo multiplicando la altura por la base? Por supuesto que sí.

Ejemplo.



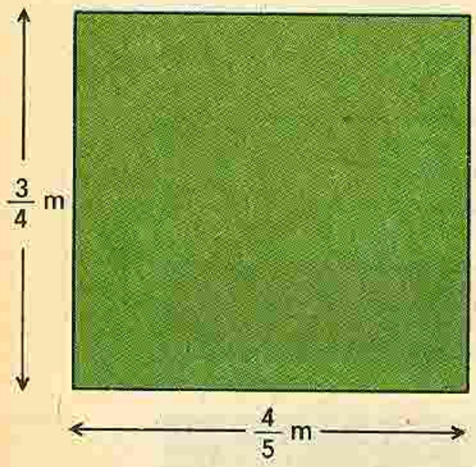
Área = base × altura = $\frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$

Área = altura × base = $\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$

El área del rectángulo es $\frac{3}{8}$ de metro cuadrado. Y la podemos calcular multiplicando la base por la altura, o bien, multiplicando la altura por la base.

Ejercicio 6. Calcule el área de cada rectángulo como se hizo en el ejemplo anterior.

a)

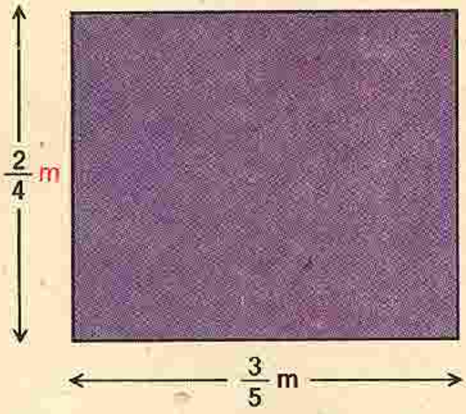


Área = base × altura = ____ × ____ = ____

Área = altura × base = ____ × ____ = ____

El área del rectángulo es ______ de metro cuadrado.

b)

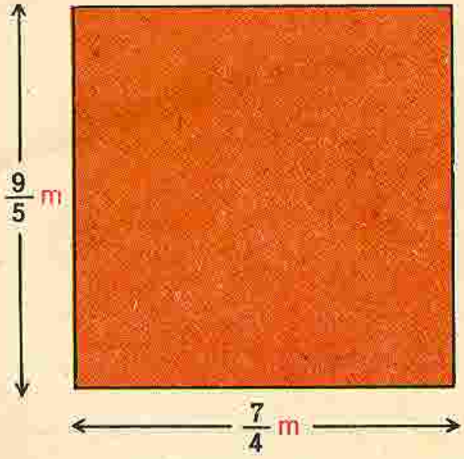


Área = base × altura =___×___=___

Área = altura × base =___×___=___

El área del rectángulo es_____ de metro cuadrado.

c)



Área = base × altura =___×___=___

Área = altura × base =___×___=___

El área del rectángulo es_____ de metro cuadrado.

La propiedad conmutativa de la multiplicación de números racionales puede enunciarse de la siguiente manera:

Si r y q son dos números racionales, entonces al multiplicar r por q obtenemos el mismo resultado que al multiplicar q por r.

En símbolos,

$$rq = qr$$

Ejercicio 7. Encuentre las expresiones que dan el mismo resultado e indique esto escribiendo en cada paréntesis la letra correspondiente.

( ) $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4}$

( ) $\frac{2}{7} \cdot \frac{1}{8}$

( ) $x \cdot \frac{5}{4}$

( ) $\frac{m}{n} \cdot \frac{x}{z}$

( ) $\frac{9}{5} \cdot \frac{f^2}{g^2}$

a) $\frac{x}{z} \cdot \frac{m}{n}$

b) $\frac{f^2}{g^2} \cdot \frac{9}{5}$

c) $\frac{1}{8} \cdot \frac{2}{7}$

d) $\frac{4}{5} \cdot x$

e) $\frac{5}{4} \cdot \frac{2}{3}$

f) $\frac{5}{4} \cdot x$

Ejercicio 8. Resuelva las ecuaciones aplicando la propiedad conmutativa.

a) $\frac{5}{6} \cdot x = \frac{7}{4} \cdot \frac{5}{6}$ $x =$ ☐

b) $\frac{15}{9} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \cdot z$ $z =$ ☐

c) $\frac{7}{4} \cdot q = 2 \cdot \frac{7}{4}$ $q =$ ☐

d) $\frac{2a^3}{15} \bullet \frac{6}{8} = \frac{6}{8} \bullet p \qquad p = \boxed{}$

e) $\frac{a + 5}{b - 3} \bullet \frac{7}{8} = x \bullet \frac{a + 5}{b - 3} \qquad x = \boxed{}$

f) $\frac{4 + x^2}{7} \bullet \frac{8}{25} = a \bullet \frac{4 + x^2}{7} \qquad a = \boxed{}$

Propiedad asociativa.

Cuando estudiamos la multiplicación de números naturales vimos que la expresión *a b c*, puede interpretarse como (*ab*) *c*, o bien, como *a* (*bc*) y que en ambas formas se obtiene el mismo resultado porque tal operación tiene propiedad asociativa. Veamos qué ocurre si en las expresiones (*ab*) *c* y *a* (*bc*) las letras representan números racionales.

Ejemplo.

a) Si multiplicamos $\left(\frac{3}{5} \bullet \frac{1}{2}\right) \bullet \frac{7}{4}$ obtenemos el producto $\boxed{\frac{21}{40}}$.

$$\left(\frac{3}{5} \bullet \frac{1}{2}\right) \bullet \frac{7}{4} = \frac{3}{10} \bullet \frac{7}{4} = \frac{21}{40}$$

y si multiplicamos $\frac{3}{5} \bullet \left(\frac{1}{2} \bullet \frac{7}{4}\right)$ obtenemos también $\boxed{\frac{21}{40}}$.

$$\frac{3}{5} \bullet \left(\frac{1}{2} \bullet \frac{7}{4}\right) = \frac{3}{5} \bullet \frac{7}{8} = \frac{21}{40}$$

Según observamos, $\left(\frac{3}{5} \bullet \frac{1}{2}\right) \bullet \frac{7}{4} = \frac{3}{5} \bullet \left(\frac{1}{2} \bullet \frac{7}{4}\right) = \boxed{\frac{21}{40}}$

Entonces, para indicar la multiplicación de los tres números $\frac{3}{5}$, $\frac{1}{2}$ y $\frac{7}{4}$, podemos hacerlo simplemente así:

$$\frac{3}{5} \bullet \frac{1}{2} \bullet \frac{7}{4} = \frac{3 \bullet 1 \bullet 7}{5 \bullet 2 \bullet 4} = \frac{21}{40}$$

b) Como

$$\left(\frac{4}{5} \bullet \frac{3}{2}\right) \bullet \frac{7}{6} = \frac{12}{10} \bullet \frac{7}{6} = \boxed{\frac{84}{60}}$$

y

$$\frac{4}{5} \bullet \left(\frac{3}{2} \bullet \frac{7}{6}\right) = \frac{4}{5} \bullet \frac{21}{12} = \boxed{\frac{84}{60}}$$

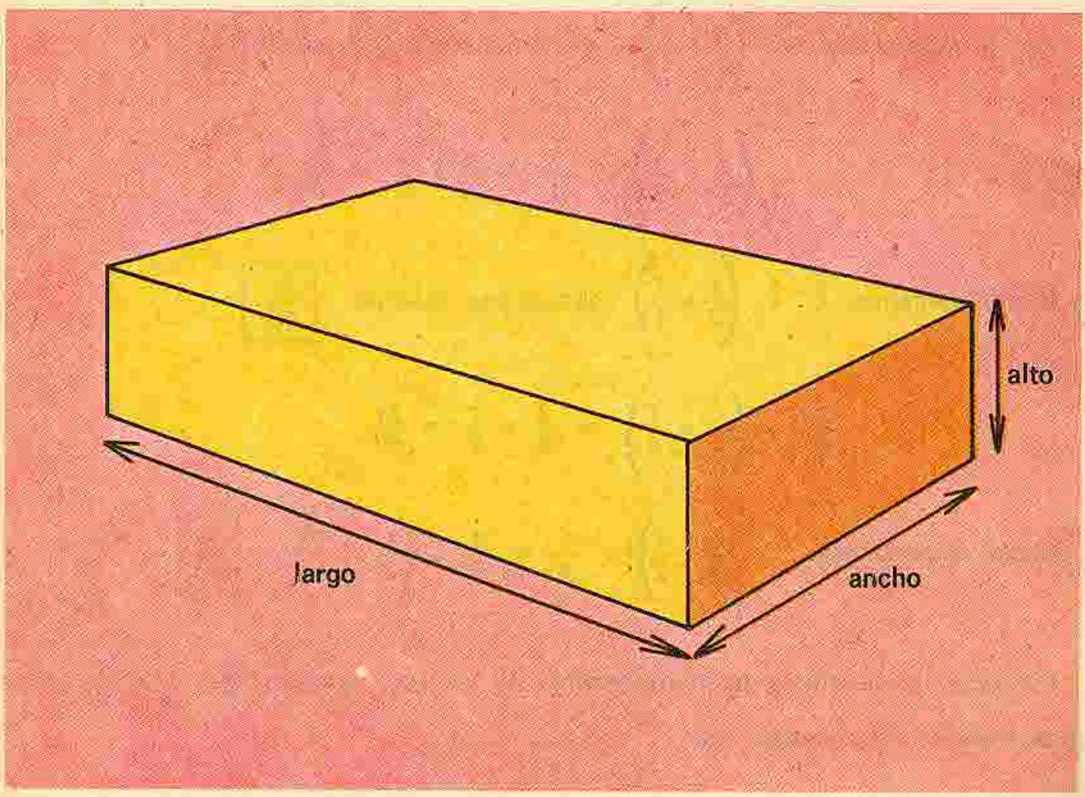
podemos afirmar que

$$\left(\frac{4}{5} \bullet \frac{3}{2}\right) \bullet \frac{7}{6} = \frac{4}{5} \bullet \left(\frac{3}{2} \bullet \frac{7}{6}\right)$$

Por lo tanto, la multiplicación de los tres números $\frac{4}{5}$ $\frac{3}{2}$ y $\frac{7}{6}$ puede indicarse simplemente así:

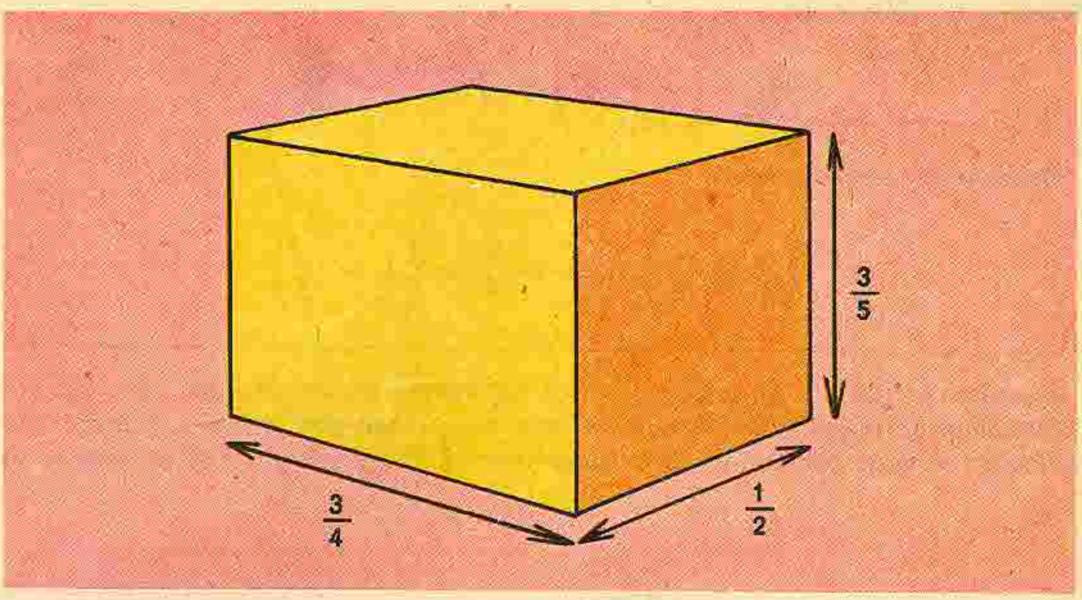
$$\frac{4}{5} \bullet \frac{3}{2} \bullet \frac{7}{6} = \frac{4 \bullet 3 \bullet 7}{5 \bullet 2 \bullet 6} = \boxed{\frac{84}{60}}$$

Usted sabe que para calcular el volumen de un paralelepípedo, como el de la ilustración, se multiplica el área de la base por la altura



Es fácil calcular el área de la base. Simplemente se multiplica el largo por el ancho, pues se trata de un rectángulo.

Problema. ¿Cuál es el volumen del siguiente paralelepípedo? (Las medidas están en metros.)

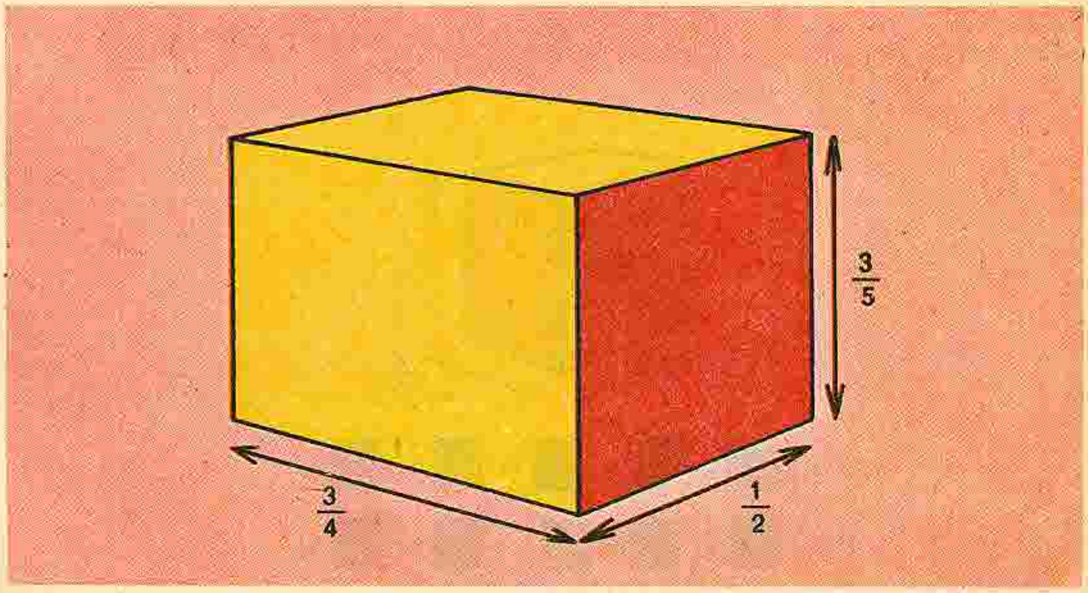


Resolución. Como el área de la base es $\frac{3}{4} \times \frac{1}{2}$, tendremos que el volumen se calcula así:

$$\left(\frac{3}{4} \times \frac{1}{2}\right) \times \frac{3}{5} = \frac{3}{8} \times \frac{3}{5} = \boxed{\frac{9}{40}}$$

Respuesta. El volumen es $\frac{9}{40}$ de metro cúbico.

Problema. Calculemos el volumen del mismo paralelepípedo multiplicando el largo por el área de la cara que se ilumina con color rojo.



Resolución. Como el área del rectángulo rojo es $\frac{1}{2} \times \frac{3}{5}$, tendremos que el volumen se calcula así:

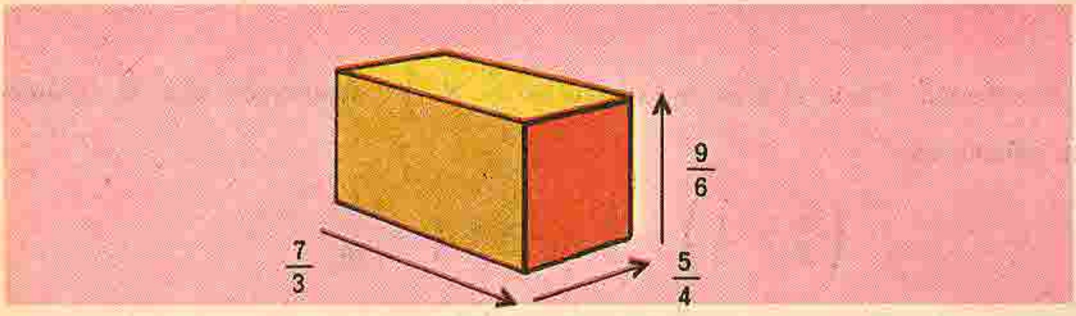
$$\frac{3}{4} \times \left(\frac{1}{2} \times \frac{3}{5}\right) = \frac{3}{4} \times \frac{3}{10} = \boxed{\frac{9}{40}}$$

Concluimos entonces que

$$\left(\frac{3}{4} \times \frac{1}{2}\right) \times \frac{3}{5} = \frac{3}{4} \times \left(\frac{1}{2} \times \frac{3}{5}\right).$$

Ejercicio 9. Calcule el volumen de los siguientes paralelepípedos con dos procedimientos: primero multiplicando el área de la base por la altura y luego multiplicando el largo por el área de la superficie de color rojo, tal como se hace en a).

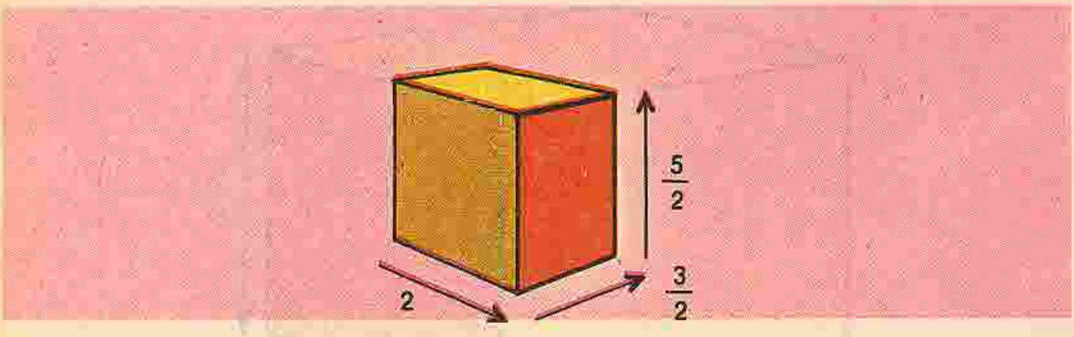
a)



$$V = \left(\frac{7}{3} \times \frac{5}{4}\right) \times \frac{9}{6} = \frac{35}{12} \times \frac{9}{6} = \frac{315}{72}$$

$$V = \frac{7}{3} \times \left(\frac{5}{4} \times \frac{9}{6}\right) = \frac{7}{3} \times \frac{45}{24} = \frac{315}{72}$$

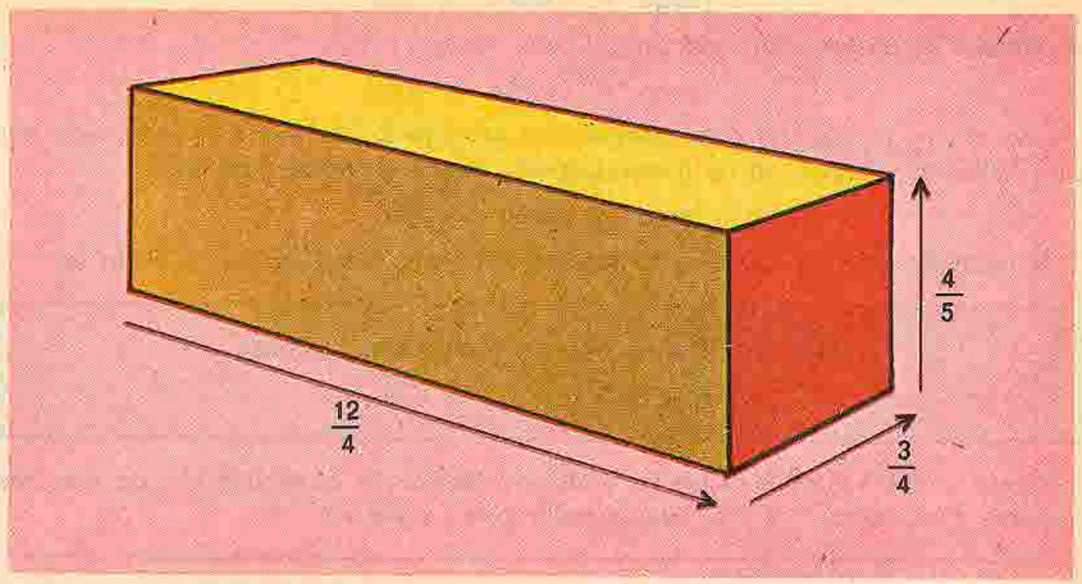
b)



$$V = \left(\square \times \square\right) \times \square = \square \times \square =$$

$$V = \square \times \left(\square \times \square\right) = \square \times \square =$$

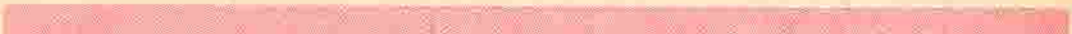
c)



$$V = \left(\square \times \square\right) \times \square = \square \times \square =$$

$$V = \square \times \left(\square \times \square\right) = \square \times \square =$$

d)



$$V = \left(\square \times \square\right) \times \square = \square \times \square =$$

$$V = \square \times \left(\square \times \square\right) = \square \times \square =$$

Habrá usted observado, en el ejercicio anterior, que al multiplicar

(largo × ancho) × alto

se obtiene el mismo resultado que al multiplicar

largo × (ancho × alto)

Esto ocurre en general con cualquier paralelepípedo. Por eso se puede decir que para hallar el volumen de un paralelepípedo simplemente se multiplica

largo × ancho × alto

La multiplicación de números racionales tiene propiedad asociativa. Esto es,

Si r, s y t son números racionales, entonces

$$(r \bullet s) \bullet t = r \bullet (s \bullet t).$$

Puesto que $(r \bullet s) \bullet t = r \bullet (s \bullet t)$, podemos indicar la multiplicación de los tres números racionales, r, s y t, simplemente como $r \bullet s \bullet t$.

Ejercicio 10. Encuentre las multiplicaciones que dan el mismo resultado. Indique esto escribiendo en cada paréntesis la letra correspondiente.

( ) $\left(\frac{3}{4} \bullet \frac{2}{7}\right) \bullet \frac{1}{4}$

( ) $\left(\frac{4}{7} \bullet \frac{3}{5}\right) \bullet \frac{e}{f}$

( ) $\frac{4}{7} \bullet \left(\frac{m}{n} \bullet \frac{s}{t}\right)$

( ) $\frac{h}{l} \bullet \left(\frac{7}{1} \bullet \frac{1}{a}\right)$

( ) $\frac{m^2}{n} \left(\frac{z}{x} \bullet \frac{7}{b}\right)$

a) $\left(\frac{3}{4} \bullet \frac{5}{2}\right) \bullet \frac{v}{x}$

b) $\left(\frac{h}{l} \bullet \frac{7}{1}\right) \bullet \frac{1}{a}$

c) $\left(\frac{m^2}{n} \bullet \frac{z}{x}\right) \bullet \frac{7}{b}$

d) $\frac{3}{4} \bullet \left(\frac{2}{7} \bullet \frac{1}{4}\right)$

e) $\frac{m^2}{n} \left(\frac{u}{v} \bullet \frac{x}{y}\right)$

( ) $\frac{3}{4} \bullet \left(\frac{5}{2} \bullet \frac{v}{x}\right)$

f) $\frac{4}{7} \bullet \left(\frac{3}{5} \bullet \frac{e}{f}\right)$

g) $\left(\frac{4}{7} \bullet \frac{m}{n}\right) \bullet \frac{s}{t}$

Ejercicio 11. Efectúe las siguientes multiplicaciones de números racionales.

a) $\frac{5}{6} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} =$

b) $\frac{4}{3} \times \frac{2}{4} \times \frac{8}{10} =$

c) $\frac{3}{10} \times \frac{8}{5} \times \frac{5}{7} =$

d) $\frac{9}{4} \times \frac{8}{6} \times \frac{6}{10} =$

e) $\frac{4}{9} \times \frac{7}{3} \times \frac{3}{7} =$

f) $\frac{4}{5} \times \frac{6}{7} \times \frac{a}{3} =$

g) $\frac{7}{4} \times \frac{9}{10} \times \frac{x}{y} =$

h) $\frac{6}{10} \bullet \frac{a}{5} \bullet \frac{b}{c} =$

i) $\frac{a}{b} \bullet \frac{a}{n} \bullet \frac{x}{n} =$

Notación exponencial.

En la multiplicación de números naturales vimos expresiones como a^2, a^3, a^4. Recordemos el significado de tales expresiones:

$a^2 = a \bullet a$ $\quad$ $a^3 = a \bullet a \bullet a$ $\quad$ $a^4 = a \bullet a \bullet a \bullet a$

Con los números racionales usaremos la misma notación para indicar algunos productos.

Ejemplo.

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2}{3} \bullet \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$

b) $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2}{3} \bullet \frac{2}{3} \bullet \frac{2}{3} = \frac{8}{27}$

c) $\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{16}{81}$

d) $\left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{32}{243}$

Esta notación exponencial se usa para expresar en forma más breve una multiplicación en la que los factores son iguales.

Ejemplo.

a) $\frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \left(\frac{3}{5}\right)^2$

b) $\frac{6}{7} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{6}{7} = \left(\frac{6}{7}\right)^3$

c) $\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \left(\frac{a}{b}\right)^4$

Ejercicio 12. Complete las igualdades como se hace en a).

a) $\left(\frac{3}{6}\right)^2 = \boxed{\frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{9}{36}}$

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \boxed{}$

c) $\left(\frac{4}{5}\right)^3 = \boxed{}$

d) $\left(\frac{7}{2}\right)^2 = \boxed{}$

e) $\left(\frac{2}{q}\right)^6 = \boxed{}$

f) $\left(\frac{m}{n}\right)^8 = \boxed{}$

Ejercicio 13. Complete las igualdades como se hace en a).

a) $\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \boxed{\left(\frac{2}{5}\right)^3}$

b) $\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} = \boxed{}$

c) $\frac{m}{n} \cdot \frac{m}{n} \cdot \frac{m}{n} = \boxed{}$

d) $\frac{x}{y} \cdot \frac{x}{y} = \boxed{}$

e) $\frac{s}{r} \cdot \frac{s}{r} \cdot \frac{s}{r} \cdot \frac{s}{r} \cdot \frac{s}{r} \cdot \frac{s}{r} \cdot \frac{s}{r} \cdot \frac{s}{r} \cdot \frac{s}{r} \cdot \frac{s}{r} = \boxed{}$

El uno en la multiplicación.

En la multiplicación de números naturales vimos que el resultado de multiplicar cualquier número natural por uno, es ese mismo número natural. ¿Qué sucede si multiplicamos un número racional por el número uno? Veamos un ejemplo.

Ejemplo.

a) $\frac{9}{7} \times 1 = \frac{9}{7} \times \frac{1}{1} = \frac{9 \times 1}{7 \times 1} = \frac{9}{7}$

b) $\frac{5}{3} \times 1 = \frac{5}{3} \times \frac{1}{1} = \frac{5 \times 1}{3 \times 1} = \frac{5}{3}$

c) $\boxed{\frac{a}{b}} \times \boxed{1} = \boxed{\frac{a}{b}} \times \boxed{\frac{1}{1}} = \boxed{\frac{a \times 1}{b \times 1}} = \boxed{\frac{a}{b}}$

En el último inciso del ejemplo anterior se observa que si multiplicamos cualquier número racional por uno, el resultado es el mismo número racional. Esto es,

Si *r* denota un número racional cualquiera, el resultado de multiplicar *r* por 1 es *r*.

En símbolos,

$$r \bullet 1 = 1 \bullet r = r.$$

Ya sabemos que el número uno se puede expresar con cualquier fracción $\frac{a}{a}$. Por eso estamos seguros, aún sin hacer la multiplicación de que

a) $\boxed{\frac{x}{n}} \bullet \frac{8}{8} = \boxed{\frac{x}{n}}$

b) $\boxed{\frac{y}{15}} \bullet \frac{b}{b} = \boxed{\frac{y}{15}}$

c) $\boxed{\frac{13}{a^2}} \bullet \frac{x}{x} = \boxed{\frac{13}{a^2}}$

d) $\frac{x^2}{x^2} \bullet \boxed{\frac{5}{4}} = \boxed{\frac{5}{4}}$

e) $\frac{m^3}{m^3} \bullet \boxed{\frac{a}{y^2}} = \boxed{\frac{a}{y^2}}$

f) $\boxed{\frac{2a^2}{3b}} \bullet \frac{5x^3}{5x^3} = \boxed{\frac{2a^2}{3b}}$

Ejercicio 14. Resuelva las siguientes ecuaciones.

a) $\frac{4}{9} \bullet y = \frac{4}{9}$ $y =$ ☐

b) $\frac{5}{7} \bullet x = \frac{10}{14}$ $x =$ ☐

c) $t \bullet \frac{17}{4} = \frac{34}{8}$ $t =$ ☐

d) $\frac{p}{q} \bullet \frac{a}{a} = z$ $z =$ ☐

e) $w \bullet \frac{m}{m} = \frac{10}{23}$ $w =$ ☐

f) $\frac{a + b}{x} \bullet \frac{y^2}{y^2} = n$ $n =$ ☐

Ejercicio 15. Efectúe las siguientes multiplicaciones como se hace en a).

a) $\frac{3}{4} \bullet \frac{n}{n} = \frac{3}{4} \bullet 1 = \frac{3}{4}$

b) $\frac{7}{3} \bullet \frac{4}{4} \bullet \frac{2}{5} = \frac{7}{3} \bullet 1 \bullet \frac{2}{5} = \frac{14}{15}$

c) $\frac{1}{5} \bullet \frac{8}{8} \bullet \frac{2}{3} =$

d) $\frac{3}{8} \bullet \frac{x}{x} \bullet \frac{2}{5} =$

e) $\frac{m}{n} \bullet \frac{y}{y} =$

f) $\frac{a^2}{b^2} \bullet \frac{n}{n} =$

g) $5 \bullet \frac{m^3}{m^3} \bullet ax =$

h) $\frac{3}{3} \bullet \frac{a+b}{a+b} \bullet \frac{2}{y} =$

Propiedad del inverso multiplicativo.

Ahora vamos a estudiar una propiedad que tiene la multiplicación de números racionales y que no tenía la multiplicación de números naturales. Observe usted las siguientes multiplicaciones:

a) $\frac{5}{3} \times \frac{3}{5} = \frac{15}{15}$

b) $\frac{4}{6} \times \frac{6}{4} = \frac{24}{24}$

c) $\frac{6}{7} \times \frac{7}{6} = \frac{42}{42}$

d) $8 \times \frac{1}{8} = \frac{8}{1} \times \frac{1}{8} = \frac{8}{8}$

e) $7 \times \frac{1}{7} = \frac{7}{1} \times \frac{1}{7} = \frac{7}{7}$

f) $a \times \frac{1}{a} = \frac{a}{1} \times \frac{1}{a} = \frac{a}{a}$

g) $\frac{1}{t} \times t = \frac{1}{t} \times \frac{t}{1} = \frac{t}{t}$

h) $\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = \frac{ab}{ba}$

Todas estas multiplicaciones dan como resultado el número uno. Observe qué factores son en cada caso.

Existen muchas parejas de números racionales, como las que acabamos de ver, cuyo producto es el número 1. Y esto es lo que no había en la multiplicación de números naturales.

Si p y q son dos números racionales y ocurre que

$$p \quad q = 1,$$

entonces se dice que p es el inverso multiplicativo de q y q es el inverso multiplicativo de p.

Ejemplo.

a) Puesto que $\frac{5}{8} \bullet \frac{8}{5} = 1$,
$\frac{5}{8}$ es el inverso multiplicativo de $\frac{8}{5}$
y $\frac{8}{5}$ es el inverso multiplicativo de $\frac{5}{8}$

b) Como $\frac{a}{b} \bullet \frac{b}{a} = 1$,
$\frac{a}{b}$ es el inverso multiplicativo de $\frac{b}{a}$
y $\frac{b}{a}$ es el inverso multiplicativo de $\frac{a}{b}$

c) Puesto que $17 \bullet \frac{1}{17} = 1$,
17 es el inverso multiplicativo de $\frac{1}{17}$
y $\frac{1}{17}$ es el inverso multiplicativo de 17

d) Ya que $\frac{1}{r} \bullet r = 1$, entonces
$\frac{1}{r}$ es el inverso multiplicativo de r
y r es el inverso multiplicativo de $\frac{1}{r}$

Ejercicio 16. Complete cada expresión escribiendo en los cuadritos lo necesario, tal como se hace en a) y en b).

a) $\frac{2}{3}$ $\boxed{\text{sí}}$ es el inverso multiplicativo de $\frac{3}{2}$ porque $\frac{2}{3} \times \frac{3}{2}$ $\boxed{=}$ 1.

b) $\frac{7}{5}$ $\boxed{\text{no}}$ es el inverso multiplicativo de $\frac{10}{7}$ porque $\frac{7}{5} \times \frac{10}{7}$ $\boxed{\neq}$ 1.

c) $\frac{6}{8}$ $\boxed{}$ es el inverso multiplicativo de $\frac{8}{6}$ porque $\frac{6}{8} \times \frac{8}{6}$ $\boxed{}$ 1.

d) $\frac{10}{3}$ $\boxed{}$ es el inverso multiplicativo de $\frac{3}{10}$ porque $\frac{10}{3} \times \frac{3}{10}$ $\boxed{}$ 1.

e) 14 $\boxed{}$ es el inverso multiplicativo de $\frac{2}{14}$ porque $14 \times \frac{2}{14}$ $\boxed{}$ 1.

f) $\frac{1}{x}$ $\boxed{}$ es el inverso multiplicativo de x porque $\frac{1}{x} \bullet x$ $\boxed{}$ 1.

g) $\frac{m}{n}$ $\boxed{}$ es el inverso multiplicativo de $\frac{n}{m}$ porque $\frac{m}{n} \times \frac{n}{m}$ $\boxed{}$ 1.

h) $\frac{a}{b}$ ☐ es el inverso multiplicativo de $\frac{b}{a}$ porque $\frac{a}{b} \times \frac{b}{a}$ ☐ 1.

Habrá usted observado en los ejercicios anteriores, que

Todo número racional $\frac{a}{b}$ $(a \neq 0)$ tiene como inverso multiplicativo al número racional $\frac{b}{a}$

También habrá notado que

El inverso multiplicativo de todo número racional r $(r \neq 0)$ se puede denotar como $\frac{1}{r}$.

Ejercicio 17. En cada cuadrito escriba el inverso multiplicativo del número racional que se indica.

a) $\frac{3}{5}$ ☐

b) $\frac{18}{2}$ ☐

c) $\frac{6}{9}$ ☐

d) $\frac{13}{23}$ ☐

e) $\frac{9}{1}$ ☐

f) $\frac{1}{100}$ ☐

g) $\frac{1}{40}$ ☐

h) 15 ☐

i) 200 ☐

j) n ☐

k) 1000 ☐

l) 1 ☐

m) $\frac{1}{x}$ ☐

n) a^2 ☐

o) $\frac{1}{y^3}$ ☐

p) $a + b$ ☐

q) $\frac{1}{x^2 + 8}$ ☐

r) $x^2 + y^3$ ☐

¿Tiene el cero un inverso multiplicativo?

Si recordamos que al multiplicar 0 por cualquier número racional el resultado es 0 y no 1, podemos concluir que

El cero no tiene inverso multiplicativo.

Este número es el único racional que no tiene inverso multiplicativo. Por ello podemos afirmar que

Todo número racional, excepto el cero, tiene su inverso multiplicativo.

Ejercicio 18. Resuelva las siguientes ecuaciones.

a) $\frac{3}{4} \cdot x = 1$ $x =$ ☐

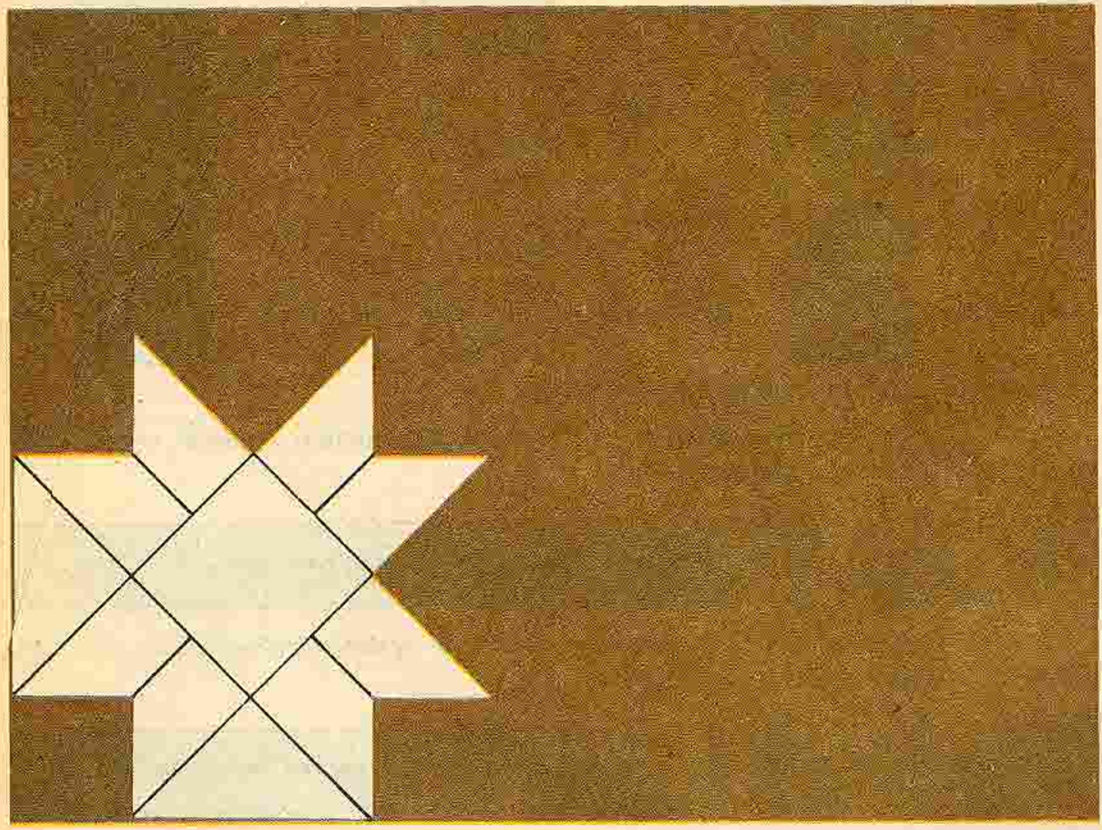
b) $\frac{5}{6} \cdot y = 1$ $y =$ ☐

c) $\frac{6}{a} \cdot b = 1$ $b =$ ☐

d) $\frac{4a}{5x} \cdot n = 1$ $n =$ ☐

e) $x \cdot \frac{a + b}{8} = 1$ $x =$ ☐

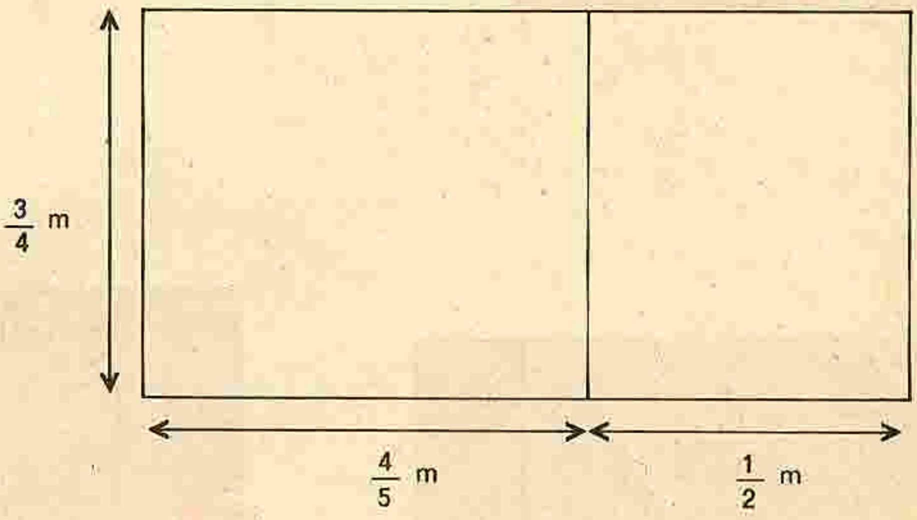
f) $\frac{8a^2}{3b} \cdot y = 1$ $y =$ ☐



Propiedad distributiva.

Hemos visto que la multiplicación de números naturales es distributiva con respecto a la adición. Esto es, con números naturales se cumple que $a(b + c) = ab + ac$. Veamos ahora si estas expresiones $a(b + c)$ $ab + ac$ dan el mismo resultado cuando a, b y c son números racionales. Analicemos el siguiente problema.

Problema. ¿Cuál es el área de la siguiente figura?



Resolución. El área se puede calcular en dos formas:

a) Multiplicando la altura $\frac{3}{4}$ por la base $\frac{4}{5} + \frac{1}{2}$

$$\frac{3}{4} \bullet \left(\frac{4}{5} + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} \bullet \frac{13}{10} = \boxed{\frac{39}{40}}$$

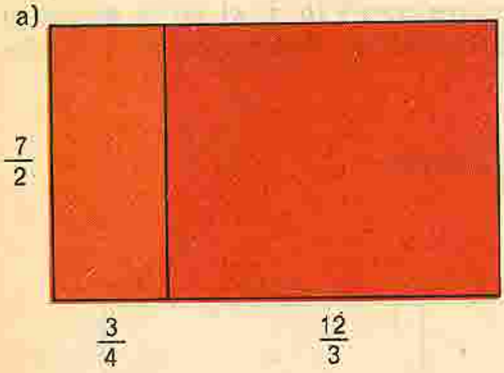
b) Sumando el área de la región naranja $\frac{3}{4} \times \frac{4}{5}$ con el área de la región roja $\frac{3}{4} \times \frac{1}{2}$

$$\boxed{\frac{3}{4} \bullet \frac{4}{5}} + \boxed{\frac{3}{4} \bullet \frac{1}{2}} = \frac{12}{20} + \frac{3}{8} = \frac{24}{40} + \frac{15}{40} = \boxed{\frac{39}{40}}$$

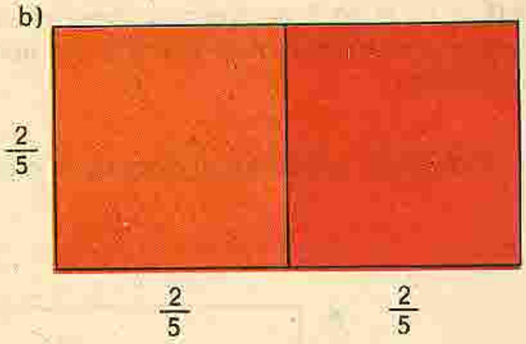
El resultado es el mismo en ambos casos.

Ejercicio 19. En su cuaderno calcule el área de las siguientes figuras usando los dos procedimientos que se emplearon en el problema anterior. [Las medidas están en metros.]

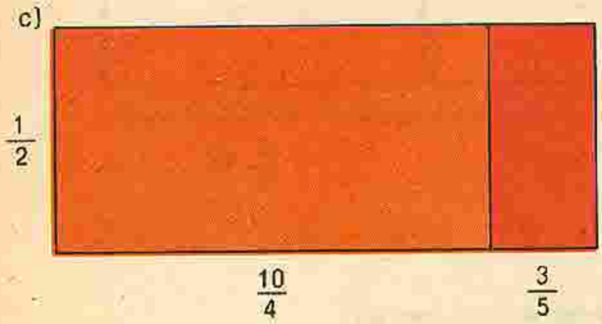
a)



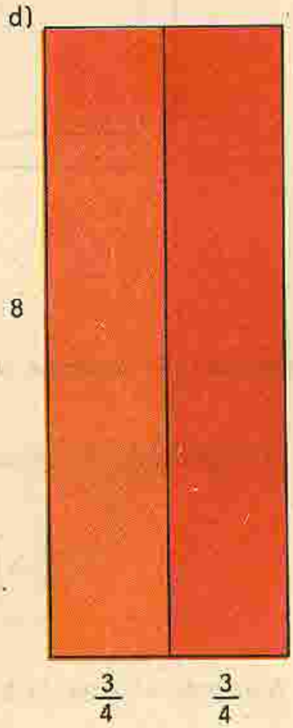
b)



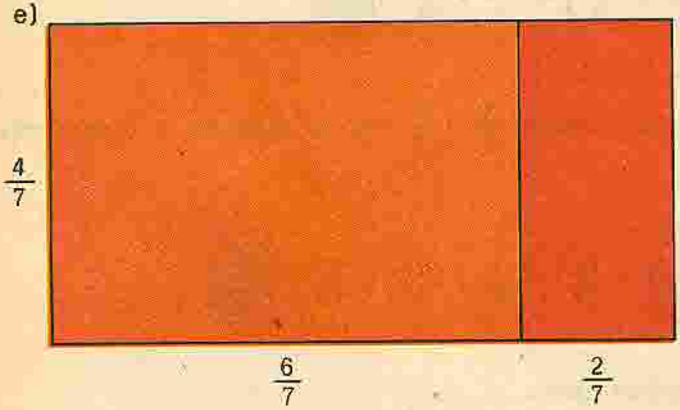
c)



d)



e)



Ejercicio 20. Calcule el valor de las expresiones $r(s + t)$ y $rs + rt$ para los valores de r, s y t que se indican en cada inciso.

Valores	$r(s + t)$	$rs + rt$
$r = \frac{1}{2}$, $s = \frac{1}{4}$, $t = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \bullet \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{8}$	$\frac{1}{2} \bullet \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \bullet \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$
$r = 3$, $s = \frac{1}{5}$, $t = \frac{2}{3}$		
$r = \frac{1}{2}$, $s = \frac{7}{4}$, $t = \frac{1}{3}$		
$r = \frac{3}{10}$, $s = \frac{1}{10}$, $t = \frac{5}{10}$		

Observamos que para los casos mostrados en los ejercicios anteriores se cumple que $r(s + t) = rs + rt$. Esto es cierto en general. Es decir,

Si r, s y t son números racionales cualesquiera, entonces

$$r(s + t) = rs + rt.$$

Esto significa que la multiplicación de números racionales es distributiva con respecto a la adición.

Ejercicio 21. Encuentre las expresiones que dan el mismo resultado e indique ésto escribiendo en cada paréntesis la letra correspondiente.

a) $\frac{5}{6} \bullet \left(\frac{3}{5} + \frac{4}{10}\right)$ ( ) $\frac{6}{7} \bullet \frac{17}{4} + \frac{12}{10} \bullet \frac{17}{4}$

b) $\frac{7}{5} \bullet \frac{6}{10} + \frac{7}{5} \bullet \frac{8}{7}$ ( ) $\frac{a}{15} \bullet \left(x^2 + n\right)$

c) $\left(\frac{6}{7}+\frac{12}{10}\right)\bullet\frac{17}{4}$ ( ) $\frac{5}{6}\bullet\frac{3}{5}+\frac{5}{6}\bullet\frac{4}{10}$

d) $\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}x$ ( ) $\frac{3}{4}\bullet a+\frac{3}{4}\bullet b+\frac{3}{4}\bullet c$

e) $r^2(s+x^3)$ ( ) $\frac{7}{5}\bullet\left(\frac{6}{10}+\frac{8}{7}\right)$

f) $\frac{a}{15}\bullet x^2+\frac{a}{15}\bullet n$ ( ) $r^2s+r^2x^3$

g) $\frac{3}{4}\bullet(a+b+c)$ ( ) $\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}+\frac{4}{3}\right)\bullet x$

La propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición nos permite sustituir algunos productos por sumas o viceversa, algunas sumas por productos, según resulte conveniente. Por ejemplo, si a, b y c son números racionales, el producto $(a+b)c$ puede sustituirse por la suma $ac+bc$ y viceversa. Es decir,

$$(a+b)c = ac+bc, \quad \text{y}$$
$$ac+bc = (a+b)c$$

Usaremos esta propiedad para resolver los siguientes ejercicios.

Ejercicio 22. Encuentre la suma que sustituye a cada producto, tal como se hace en a) y en b).

a) $\frac{6}{4}(x+y)=\boxed{\frac{6}{4}x+\frac{6}{4}y}$

b) $\frac{18}{7}\left(t+y+\frac{5}{4}\right)=\frac{18}{7}t+\frac{18}{7}y+\frac{18}{7}\bullet\frac{5}{4}=\boxed{\frac{18}{7}t+\frac{18}{7}y+\frac{90}{28}}$

c) $\frac{a}{b}\left(\frac{5}{9}+\frac{x}{y}\right)=$

d) $\frac{p}{q}\left(\frac{z}{y}+\frac{5}{6}\right)=$

e) $a\left(\frac{8}{5}+r+\frac{b}{c}\right)=$

f) $\left(\frac{6}{9}+q\right)\frac{3}{10}=$

g) $\left(\frac{10}{8}+\frac{p}{q}+\frac{r}{s}\right)\frac{7}{2}=$

h) $\left(x+\frac{a}{b}+\frac{m}{n}\right)\frac{c}{d}=$

Ejercicio 23. Encuentre el producto que sustituye a cada suma; es decir, haga la factorización tal como se hace en los primeros incisos.

a) $\frac{2}{5}x+\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}x=\boxed{\left(\frac{2}{5}+\frac{3}{5}+\frac{4}{5}\right)x}=\boxed{\frac{9}{5}x}$

b) $\frac{n}{8}\bullet\frac{a}{b}+\frac{n}{8}\bullet\frac{x}{y}=\boxed{\frac{n}{8}\left(\frac{a}{b}+\frac{x}{y}\right)}$

c) $\frac{1}{4}\bullet a+\frac{3}{4}\bullet a=$

d) $\frac{5}{8}\bullet y+\frac{7}{8}\bullet y=$

e) $\frac{9}{10}\bullet\frac{3}{x}+\frac{6}{10}\bullet\frac{3}{x}=$

f) $\frac{2}{7}\bullet\frac{1}{3}+\frac{2}{7}\bullet\frac{5}{3}=$

g) $a \bullet x + b \bullet x + c \bullet x =$

h) $\frac{3}{4} \bullet \frac{1}{y} + \frac{7}{4} \bullet \frac{1}{y} =$

i) $n \bullet \frac{2}{5} + n \bullet \frac{4}{5} + n \bullet \frac{1}{5} =$

j) $\frac{2}{3} \bullet n^2 + \frac{1}{3} \bullet n^2 =$

k) $a^2 x^2 + a^2 y^2 =$

l) $(a + b) x + (a + b) y =$

Recuerde usted que cuando se hacen sustituciones como las de este ejercicio, al proceso se le ha dado el nombre de factorización.

VI

División de números racionales

1. La división de números racionales

En la escuela primaria usted aprendió a dividir números racionales cuando éstos estaban expresados por medio de fracciones. Para indicar una división de ese tipo empleaba una expresión como

$$\underset{\text{dividendo}}{\frac{3}{5}} \quad \div \quad \underset{\text{divisor}}{\frac{4}{6}} \quad = \quad \underset{\text{cociente}}{\frac{18}{20}}$$

"Efectuar una división" significa "hallar el cociente cuando se conocen el dividendo y el divisor"

El procedimiento que usted aprendió para efectuar este tipo de divisiones es el que se ilustra en los siguientes ejemplos.

$$\frac{3}{5} \div \frac{4}{6} = \frac{3 \bullet 6}{5 \bullet 4} = \frac{18}{20}$$

$$\frac{2}{3} \div \frac{4}{5} = \frac{2 \bullet 5}{3 \bullet 4} = \frac{10}{12}$$

Este procedimiento es aplicable en general:

Si se tienen dos números racionales $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$, el cociente que se obtiene al dividir $\frac{a}{b}$ entre $\frac{c}{d}$ es el número racional $\frac{a \bullet d}{b \bullet c}$.

En símbolos,

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a \bullet d}{b \bullet c}.$$

Ejercicio 1. Efectúe las siguientes divisiones de números racionales, como se hace en a) y en j).

a) $\frac{3}{5} \div \frac{2}{3} = \boxed{\frac{3 \bullet 3}{5 \bullet 2} = \frac{9}{10}}$

b) $\frac{3}{9} \div \frac{7}{8} =$

c) $\frac{7}{5} \div \frac{3}{12} =$

d) $\frac{12}{3} \div \frac{3}{1} =$

e) $\frac{15}{1} \div \frac{3}{1} =$

f) $\frac{2}{4} \div \frac{1}{2} =$

g) $\frac{12}{12} \div \frac{5}{5} =$

h) $8 \div \frac{1}{2} =$

i) $\frac{13}{4} \div 3 =$

j) $\frac{a}{b} \div \frac{2}{3} = \boxed{\frac{3a}{2b}}$.

k) $\frac{3}{7} \div \frac{r}{s} =$

l) $\frac{a}{5} \div \frac{m}{3} =$

m) $\frac{1}{m} \div \frac{1}{n} =$

n) $\frac{m}{n} \div \frac{a}{b} =$

o) $\frac{a}{b} \div \frac{a}{b} =$

p) $\frac{1}{a} \div \frac{1}{a} =$

q) $5 \div \frac{a}{b} =$

r) $10 \div \frac{1}{a} =$

s) $\frac{x}{y} \div \frac{y}{x} =$

t) $\frac{1}{x} \div \frac{x}{1} =$

u) $\frac{0}{n} \div \frac{x}{y} =$

En la división de números racionales, al igual que en la división de números naturales, ocurre que al multiplicar el cociente por el divisor se obtiene como resultado el dividendo.

Ejemplo.

a) $\underbrace{\boxed{\frac{4}{5}}}_{\text{dividendo}} \div \underbrace{\boxed{\frac{2}{3}}}_{\text{divisor}} = \underbrace{\boxed{\frac{12}{10}}}_{\text{cociente}} \qquad \underbrace{\boxed{\frac{12}{10}}}_{\text{cociente}} \times \underbrace{\boxed{\frac{2}{3}}}_{\text{divisor}} = \frac{24}{30} = \underbrace{\boxed{\frac{4}{5}}}_{\text{dividendo}}$

b) $\underbrace{\boxed{\frac{1}{2}}}_{\text{dividendo}} \div \underbrace{\boxed{\frac{5}{6}}}_{\text{divisor}} = \underbrace{\boxed{\frac{6}{10}}}_{\text{cociente}} \qquad \underbrace{\boxed{\frac{6}{10}}}_{\text{cociente}} \times \underbrace{\boxed{\frac{5}{6}}}_{\text{divisor}} = \frac{30}{60} = \underbrace{\boxed{\frac{1}{2}}}_{\text{dividendo}}$

Por lo tanto, en una división de números racionales,

El cociente es un número que multiplicado por el divisor da el dividendo.

2. La división de racionales y la división de naturales

Ya hemos visto que los números naturales también son números racionales. Por consiguiente, al dividir números naturales usando el procedimiento que se aplica en la división de racionales, debemos obtener el mismo cociente que se obtiene al dividir en la otra forma.

Ejemplo.

a)

$$\frac{12}{1} \div \frac{4}{1} = \frac{12 \bullet 1}{1 \bullet 4} = \frac{12}{4} = 3$$

divisor
dividendo
cociente

$$12 \div 4 = 3$$

dividendo divisor cociente

b)

$$18 \div 3 = 6$$

dividendo divisor cociente

$$\frac{18}{1} \div \frac{12}{4} = \frac{18 \bullet 4}{1 \bullet 12} = \frac{72}{12} = 6$$

divisor
dividendo
cociente

Por lo que vemos, el procedimiento que se usa para dividir números racionales puede usarse también para dividir números naturales.

Antes, cuando queríamos dividir 3 ÷ 6 no encontrábamos ningún número natural que fuera el cociente. Ahora, considerando como racionales al 3 y al 6, sí podemos encontrar un número racional que sea el resultado de dividir 3 ÷ 6.

$$3 \div 6 = \frac{3}{1} \div \frac{6}{1} = \frac{3}{6}$$

divisor
dividendo
cociente

Ejercicio 2. Efectúe en su cuaderno las siguientes divisiones de números racionales, tal como se hace en a) y en f).

a) $15 \div 18 = \boxed{\frac{15}{1} \div \frac{18}{1} = \frac{15 \cdot 1}{1 \cdot 18} = \frac{15}{18}}$

b) $5 \div 7 =$ c) $4 \div 6 =$

d) $18 \div 6 =$ e) $3 \div 8 =$

f) $23 \div 9 = \boxed{\frac{23}{1} \div \frac{9}{1} = \frac{23 \cdot 1}{1 \cdot 9} = \frac{23}{9}}$

g) $5 \div 2 =$ h) $2 \div 5 =$

i) $4 \div 9 =$ j) $9 \div 4 =$

k) $13 \div 6 =$ l) $6 \div 13 =$

Observe usted que en la división con números racionales siempre encontramos un cociente que es número racional. La única excepción es la división entre cero.

Ejemplo

a) Si quisiéramos dividir $\frac{3}{4}$ entre 0 nos encontraríamos con que

$$\frac{3}{4} \div \frac{0}{1} = \frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 0} = \frac{3}{0}$$

no hay ningún número racional que sea el cociente pues, por lo que sabemos, la expresión $\frac{3}{0}$ no denota ningún número.

b) Si quisiéramos dividir $\frac{7}{8}$ entre 0, tendríamos que

$$\frac{7}{8} \div 0 = \frac{7}{8} \div \frac{0}{1} = \frac{7 \cdot 1}{8 \cdot 0} = \frac{7}{0}$$

no hay ningún número racional que sea el cociente, pues $\frac{7}{0}$ no representa a un número.

Esto mismo sucede con cualquier división en la que se tome como divisor el 0.

Entonces,

El cociente de dos números racionales siempre es un número racional. (El divisor debe ser diferente de cero.)

Hasta ahora, para indicar que se va a dividir $\frac{3}{4}$ entre $\frac{2}{5}$ hemos empleado la expresión $\frac{3}{4} \div \frac{2}{5}$. Sin embargo, también se acostumbra utilizar la expresión

$$\frac{\frac{3}{4}}{\frac{2}{5}}$$

para indicar lo mismo.

A partir de este momento emplearemos indistintamente cualquiera de esta formas para indicar la división de un número entre otro.

Así por ejemplo, la división de $\frac{3}{4}$ entre 6 podrá indicarse como $\frac{\frac{3}{4}}{6}$ o como $\frac{3}{4} \div 6$;

la división de 9 entre $\frac{3}{5}$ podrá indicarse como $9 \div \frac{3}{5}$ o bien, como $\frac{9}{\frac{3}{5}}$;

$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}}$ indicará lo mismo que $\frac{1}{2} \div \frac{3}{4}$;

la división $5 \div 6$ se podrá indicar también como $\frac{5}{6}$.

Ejercicio 3. Efectúe en su cuaderno las siguientes divisiones de números racionales. Observe el inciso h).

a) $\frac{\frac{3}{8}}{\frac{2}{7}} =$

b) $\frac{\frac{2}{11}}{3} =$

c) $\frac{2}{\frac{11}{3}} =$

d) $\frac{1}{\frac{7}{9}} =$

e) $\frac{\frac{3}{5}}{7} =$

f) $\frac{1}{\frac{1}{4}} =$

g) $\dfrac{1}{\frac{1}{b}} =$

h) $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{a}{c}} = \boxed{\frac{a}{b} \div \frac{a}{c} = \frac{ac}{ba}}$

i) $\dfrac{\frac{x}{y}}{5} =$

j) $\dfrac{x}{\frac{y}{5}} =$

k) $\dfrac{6}{\frac{m}{n}} =$

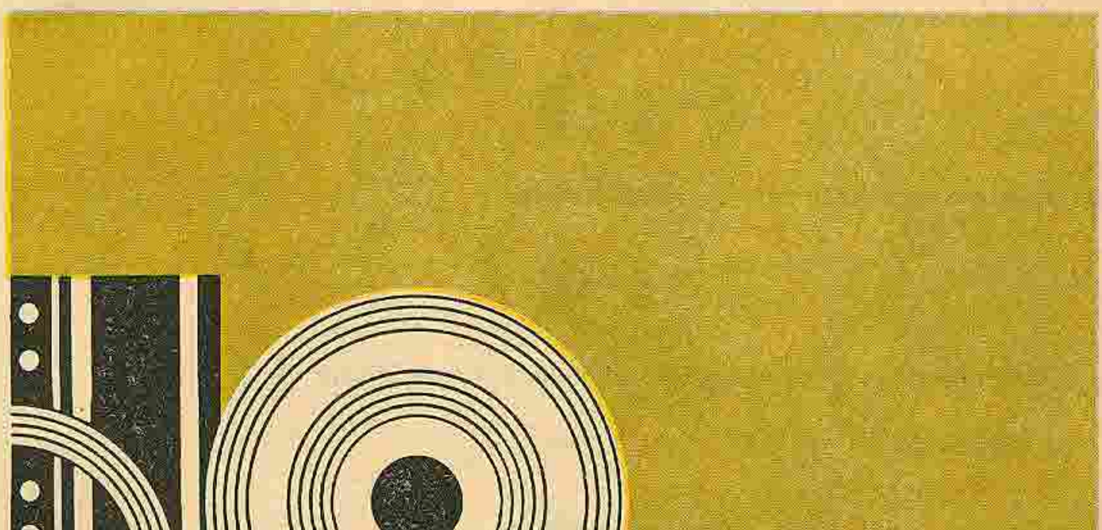
l) $\dfrac{\frac{6}{m}}{n} =$

m) $\dfrac{1}{\frac{1}{z}} =$

n) $\dfrac{v}{\frac{3}{z}} =$

o) $\dfrac{\frac{u}{n}}{\frac{v}{n}} =$

p) $\dfrac{\frac{g}{h}}{\frac{g}{i}} =$



3. La división de números racionales y los inversos multiplicativos

La división de números racionales está íntimamente relacionada con la idea de inverso multiplicativo. Observe usted los siguientes ejemplos.

a) Deseamos dividir $\frac{3}{4}$ entre $\frac{2}{5}$.

$$\frac{3}{4} \div \frac{2}{5} = \frac{15}{8}.$$

(Aquí efectuamos la división de acuerdo con el procedimiento conocido.)

Recordemos que el inverso multiplicativo de $\frac{2}{5}$ es $\frac{5}{2}$. Ahora multipliquemos el dividendo $\frac{3}{4}$ por este inverso multiplicativo.

$$\frac{3}{4} \times \frac{5}{2} = \frac{15}{8}.$$

Observamos que el resultado es el mismo en ambos casos.

b) La división

$$\frac{4}{5} \div \frac{8}{9} = \frac{36}{40}$$

da el mismo resultado que la multiplicación

$$\frac{4}{5} \times \frac{9}{8} = \frac{36}{40}$$

(Obsérvese que $\frac{9}{8}$ es el inverso multiplicativo del divisor $\frac{8}{9}$.)

c) Al dividir

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc},$$

se obtiene el mismo resultado que al multiplicar

$$\frac{a}{b} \bullet \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}.$$

(Aquí $\frac{d}{c}$ es el inverso multiplicativo del divisor $\frac{c}{d}$).

De lo que observamos en el inciso c) del ejemplo anterior podemos concluir que

Si dividimos un número *r* entre un número *s*, distinto de cero, el resultado es el mismo que si multiplicamos *r* por el inverso multiplicativo de *s*.

Este hecho nos permitirá sustituir algunas divisiones por multiplicaciones, en los casos en que resulte conveniente hacer tal sustitución.

Ejercicio 4. Encuentre el cociente en cada división, como se hace en los primeros incisos.

a) $\frac{5}{6} \div \boxed{\frac{2}{3}} = \frac{5}{6} \bullet \boxed{\frac{3}{2}} = \boxed{\frac{15}{12}}$

b) $\frac{3}{4} \div \boxed{8} = \frac{3}{4} \bullet \boxed{\frac{1}{8}} = \boxed{\frac{3}{32}}$

c) $\frac{4}{9} \div \boxed{\frac{1}{5}} = \frac{4}{9} \bullet \boxed{\frac{5}{1}} = \boxed{\frac{20}{9}}$

d) $12 \div \boxed{\frac{1}{3}} = 12 \bullet \boxed{3} = \boxed{36}$

e) $\frac{7}{3} \div \boxed{\frac{1}{2}} = \boxed{} = \boxed{}$

f) $\frac{8}{9} \div \boxed{\frac{4}{3}} = \boxed{} = \boxed{}$

g) $\frac{2}{10} \div \boxed{7} = \boxed{} = \boxed{}$

h) $15 \div \boxed{\frac{1}{3}} = \boxed{} = \boxed{}$

i) $10 \div \boxed{\frac{1}{6}} = \boxed{} = \boxed{}$

j) $3 \div \boxed{\frac{1}{8}} = \boxed{} = \boxed{}$

k) $7 \div \boxed{3} = \boxed{} = \boxed{}$

l) $13 \div \boxed{4} = \boxed{} = \boxed{}$

4. Una propiedad de la división

La división de números racionales tiene una propiedad que seguramente usted usó alguna vez en la escuela primaria. Tal propiedad es la siguiente:

Si en una división se multiplican el dividendo y el divisor por un mismo número racional distinto de cero, se obtiene una nueva división cuyo cociente es el mismo que en la división original.

Veamos algunos ejemplos de esta propiedad.

a) $\frac{2}{5} \div \frac{4}{6} = \frac{12}{20}$

Si multiplicamos por $\frac{1}{2}$ el dividendo y el divisor de esta división, tendremos entonces la siguiente división:

$$\frac{2}{5} \times \frac{1}{2} \div \frac{4}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{10} \div \frac{4}{12} = \frac{24}{40}$$

En las dos divisiones el cociente es el mismo pues $\frac{12}{20} = \frac{24}{40}$. (Compruébelo.)

b) $\dfrac{\frac{3}{4}}{\frac{8}{5}} = \frac{15}{32}$

Si multiplicamos por 10 el dividendo y el divisor de la división, obtenemos la nueva división

$$\frac{\frac{3}{4} \bullet 10}{\frac{8}{5} \bullet 10} = \frac{\frac{30}{4}}{\frac{80}{5}} = \frac{150}{320}$$

cuyo resultado es el mismo que en la anterior porque $\frac{150}{320} = \frac{15}{32}$. (Compruébelo.)

c) $r \div s = \frac{r}{s}$

Si multiplicamos por t el dividendo y el divisor de esta división, encontramos que

$$rt \div st = \frac{rt}{st}$$

el cociente sigue siendo el mismo pues $\frac{r}{s} = \frac{rt}{st}$ porque $r \bullet st = s \bullet rt$.

Ejercicio 5. En cada inciso multiplique el dividendo y el divisor de la división dada, por el número que se indica. Después efectúe las divisiones y compare los resultados.

a) $\frac{6}{4} \div \frac{2}{5} = \square$ multiplique por $\frac{3}{2}$

b) $\frac{4}{8} \div \frac{1}{2} = \square$ multiplique por $\frac{4}{5}$

c) $\dfrac{\frac{7}{5}}{\frac{4}{6}} = \square$ multiplique por $\frac{2}{6}$

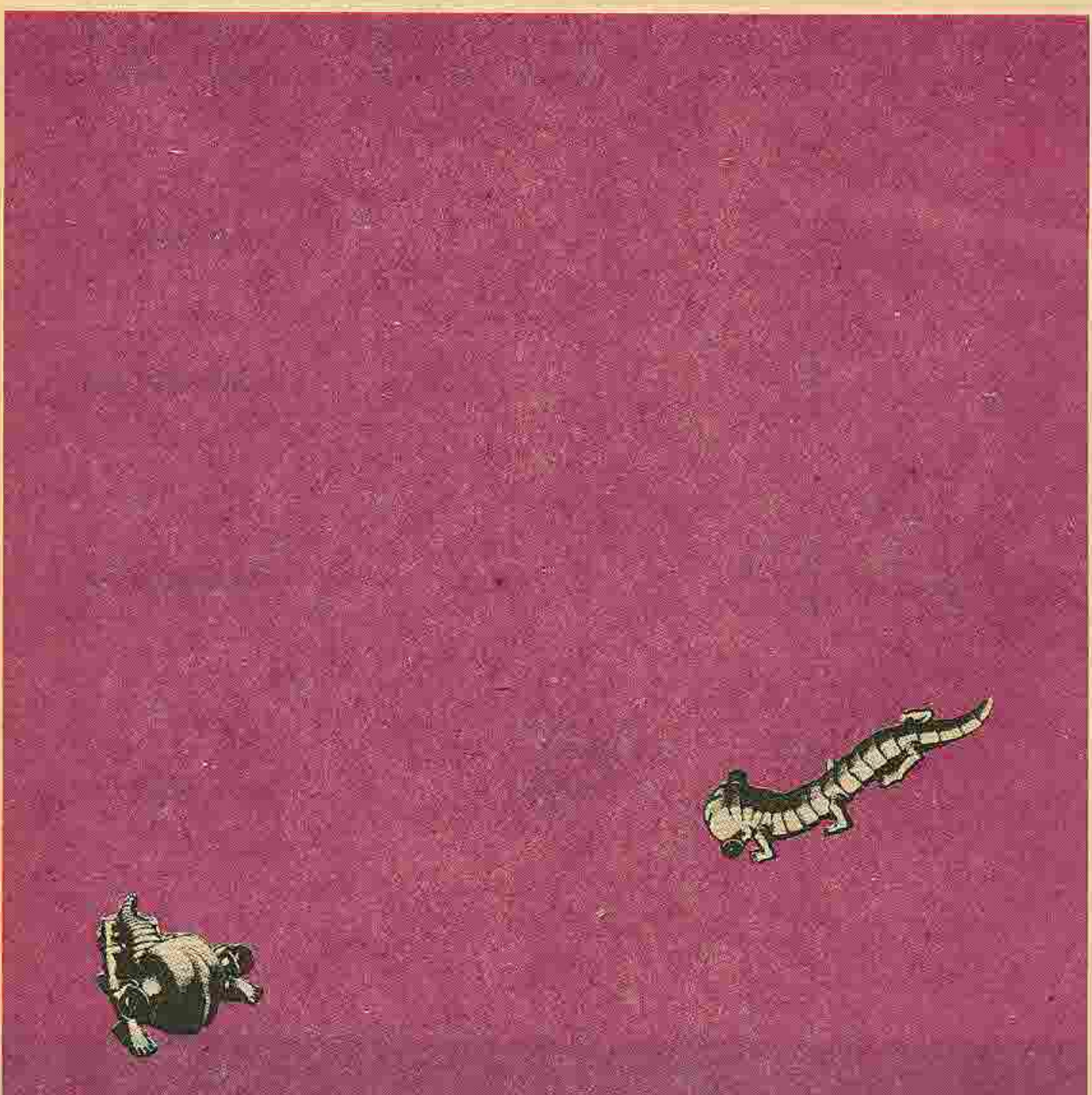
d) $\dfrac{9}{\frac{4}{12}} = \square$ multiplique por $\frac{2}{10}$

e) $\dfrac{\frac{6}{5}}{3} = \square$ multiplique por 10.

f) $\dfrac{\frac{20}{10}}{\frac{5}{10}} = \square$ multiplique por 10.

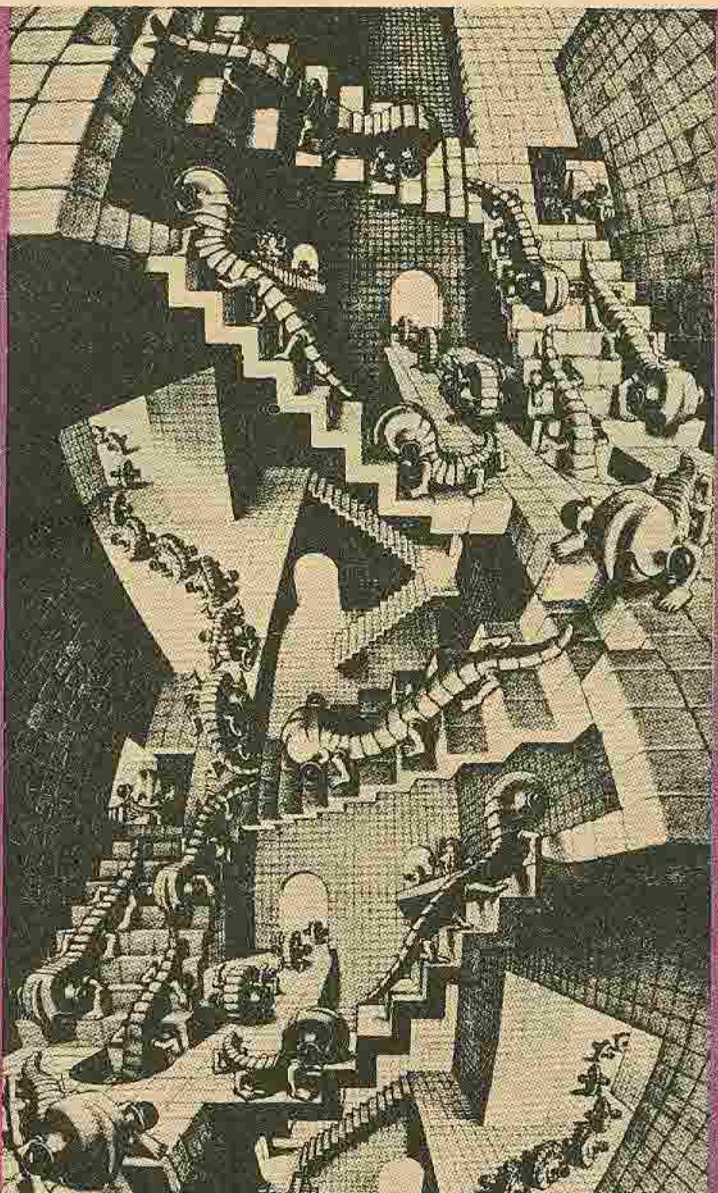
g) $3 \div 4 = \square$ multiplique por 2.

h) $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{x}{y}} = \square$ multiplique por n^2.



VII

Ecuaciones



1. Resolución de ecuaciones

Cuando estudiamos las ecuaciones, en la unidad de números naturales, nos encontramos con algunas como $40 \bullet x = 52$ y $n \bullet 5 = 9$, que no tenían solución. A partir de este momento, con el empleo de los números racionales, estamos en posibilidad de dar siempre la solución para este tipo de ecuaciones y aun otras como

$$\boxed{\frac{x}{3} = \frac{3}{4},} \qquad \boxed{x \bullet \frac{1}{3} = 8,} \qquad \boxed{\frac{x}{\frac{1}{2}} = \frac{8}{10}, \text{ etc.}}$$

Antes de pasar a la resolución de ecuaciones del tipo señalado, estudiaremos brevemente algunas propiedades que nos permitirán como en el caso de la resolución de ecuaciones con naturales, calcular la solución en lugar de adivinarla.

Recuerde la siguiente propiedad.

Propiedad. Si los dos miembros de una ecuación se multiplican o dividen por un mismo número distinto de cero, se obtiene otra ecuación; pero ambas ecuaciones tienen la misma solución.

Esta propiedad también es cierta cuando los números que figuran en la ecuación son números racionales.

Ejemplo. La ecuación

$$\frac{2}{3} \bullet \boxed{\;-\;} = \frac{6}{21}$$

tiene por solución al número $\frac{3}{7}$ (Compruébelo.)

a) Si multiplicamos ambos miembros de la ecuación por $\frac{1}{5}$ obtenemos la ecuación

$$\left(\frac{2}{3} \bullet \boxed{\;-\;}\right) \bullet \frac{1}{5} = \frac{6}{21} \bullet \frac{1}{5}$$

que es diferente a la primera. Sin embargo, esta nueva ecuación también tiene por solución al número $\frac{3}{7}$, pues

$$\left(\frac{2}{3} \bullet \boxed{\frac{3}{7}}\right) \bullet \frac{1}{5} = \frac{6}{21} \bullet \frac{1}{5}$$

$$\frac{6}{105} = \frac{6}{105}$$

b) Si dividimos ambos miembros de la ecuación $\frac{2}{3} \bullet \boxed{\frac{\quad}{\quad}} = \frac{6}{21}$ entre $\frac{3}{2}$ obtenemos la ecuación

$$\frac{\frac{2}{3} \bullet \boxed{\frac{\quad}{\quad}}}{\frac{3}{2}} = \frac{\frac{6}{21}}{\frac{3}{2}}$$

que también tiene por solución al número $\frac{3}{7}$ porque

$$\frac{\frac{2}{3} \bullet \boxed{\frac{3}{7}}}{\frac{3}{2}} = \frac{\frac{6}{21}}{\frac{3}{2}}$$

Para resolver ecuaciones con números racionales también usaremos la siguiente propiedad:

Propiedad. Si r y s son números racionales, con $s \neq 0$, entonces:

a) Si se divide el producto de r por s entre s, el resultado es r.

$$\frac{r \bullet s}{s} = r$$

b) Si se multiplica el cociente de $\frac{r}{s}$ por s, el resultado es r.

$$\frac{r}{s} \bullet s = r$$

Ejemplo.

a) Si dividimos entre $\frac{2}{5}$ el producto de $\frac{3}{4} \bullet \frac{2}{5}$ tendremos:

$$\frac{\frac{3}{4} \bullet \frac{2}{5}}{\frac{2}{5}} = \frac{\frac{6}{20}}{\frac{2}{5}} = \frac{30}{40} = \frac{3}{4}$$

b) Si dividimos *el producto* de $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$ entre $\frac{c}{d}$ tendremos:

$$\frac{\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}}{\frac{c}{d}} = \frac{\frac{ac}{bd}}{\frac{c}{d}} = \frac{acd}{bdc} = \frac{a}{b}$$

c) Si multiplicamos por $\frac{1}{4}$ *el cociente* de $\frac{3}{10}$ entre $\frac{1}{4}$ tendremos:

$$\frac{\frac{3}{10}}{\frac{1}{4}} \cdot \frac{1}{4} = \frac{12}{10} \cdot \frac{1}{4} = \frac{12}{40} = \frac{3}{10}$$

d) Si multiplicamos *el cociente* de $\frac{a}{b}$ entre $\frac{c}{d}$ por $\frac{c}{d}$, tendremos:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc} \cdot \frac{c}{d} = \frac{adc}{bcd} = \frac{a}{b}$$

Recordemos además que

Cuando se tienen varias ecuaciones con la misma solución, basta con resolver una para resolverlas todas.

y que

en el proceso de resolución de una ecuación, las expresiones como $x = \frac{1}{3}$ y $n = \frac{7}{8}$ se consideran como ecuaciones.

Ahora ya podemos resolver algunas ecuaciones aplicando estas propiedades que acabamos de ver.

Ejemplo.

a) ¿Cuál es la solución de la ecuación $\frac{x}{\frac{1}{2}} = \frac{8}{10}$?

Para hallar la solución primero multiplicamos los dos miembros de la ecuación por $\frac{1}{2}$

$$\boxed{\frac{x}{\frac{1}{2}} = \frac{8}{10}}$$

$$\boxed{\frac{x}{\frac{1}{2}} \bullet \frac{1}{2} = \frac{8}{10} \bullet \frac{1}{2}}$$

Como $\frac{x}{\frac{1}{2}} \bullet \frac{1}{2} = x$ y $\frac{8}{10} \bullet \frac{1}{2} = \frac{8}{20}$, tenemos entonces que

$$\boxed{x = \frac{8}{20}}$$

Por lo tanto, la solución de la ecuación es $x = \frac{8}{20}$ porque

$$\frac{\frac{8}{20}}{\frac{1}{2}} = \frac{16}{20} = \frac{8}{10}$$

b) ¿Cuál es la solución de la ecuación $2x = 3$?

Para hallar la solución primero dividimos los dos miembros de la ecuación entre 2.

$$\boxed{2x = 3}$$

$$\boxed{\frac{2x}{2} = \frac{3}{2}}$$

Como $\frac{2x}{2} = x$, tenemos entonces que

$$\boxed{x = \frac{3}{2}}$$

Por lo tanto, la solución de la ecuación $2x = 3$ es el número $\frac{3}{2}$. Esto puede comprobarse sustituyendo la x en la ecuación

$$2 \bullet \boxed{\frac{3}{2}} = \frac{6}{2} = 3$$

Ejercicio 1. Indique usted, tal como se hace en a) y b), por qué número conviene multiplicar o dividir los dos miembros de cada ecuación para que la incógnita quede sola en uno de los dos miembros.

a) $\frac{3}{4} \bullet b = \frac{6}{12}$ Dividir entre $\frac{3}{4}$

b) $\frac{x}{\frac{5}{6}} = \frac{1}{2}$ Multiplicar por $\frac{5}{6}$

c) $\frac{n}{2} = \frac{4}{5}$ ________________

d) $8 = \frac{a}{\frac{1}{4}}$ ________________

e) $x \bullet \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$ ________________

f) $3 = n \bullet \frac{6}{8}$ ________________

g) $\frac{14}{7} = n \bullet 3$ ________________

h) $3a = \frac{15}{6}$ ____________________

i) $\frac{1}{2} \cdot x = \frac{7}{9}$ ____________________

j) $60 = \frac{y}{\frac{1}{2}}$ ____________________

k) $\frac{2}{3} \cdot x = 40$ ____________________

l) $5 = 6y$ ____________________

m) $3a = 7$ ____________________

Ejercicio 2. Resuelva usted las siguientes ecuaciones.

a) $\frac{3}{4} \cdot x = \frac{3}{8}$ $x =$ ▨

b) $\frac{1}{3} \cdot b = 5$ $b =$ ▨

c) $4 = \frac{2}{5} \cdot y$ $y =$ ▨

d) $\frac{4}{7} = \frac{2}{3} \cdot a$ $a =$ ▨

e) $n \cdot \frac{2}{8} = 6$ $n =$ ▨

f) $\frac{10}{3} = a \bullet \frac{5}{6}$ $a =$ ▨

g) $x \bullet \frac{3}{4} = \frac{9}{8}$ $x =$ ▨

h) $\frac{n}{\frac{1}{2}} = 8$ $n =$ ▨

i) $\frac{x}{\frac{2}{3}} = \frac{4}{5}$ $x =$ ▨

j) $\frac{6}{12} = \frac{y}{\frac{2}{5}}$ $y =$ ▨

k) $\frac{r}{\frac{2}{4}} = \frac{5}{6}$ $r =$ ▨

l) $\frac{c}{8} = \frac{2}{3}$ $c =$ ▨

m) $\frac{x}{\frac{2}{6}} = 4$ $x =$ ▨

n) $\frac{b}{\frac{x}{y}} = \frac{m}{n}$ $b =$ ▨

Según sabemos, dividir entre un número racional da el mismo resultado que multiplicar por el inverso multiplicativo de ese número. Este hecho puede aplicarse en la resolución de algunas de las ecuaciones anteriores.

Por ejemplo las ecuaciones a) y b) del ejercicio anterior pueden resolverse en la siguiente forma:

a) Para la ecuación $\frac{3}{4} \bullet x = \frac{3}{8}$ en lugar de dividir sus dos miembros entre

$\frac{3}{4}$ los multiplicamos por $\frac{4}{3}$ que es el inverso multiplicativo de $\frac{3}{4}$.

$$\frac{4}{3}\left(\frac{3}{4} \bullet x\right) = \frac{4}{3} \bullet \frac{3}{8}$$

Aplicando la propiedad asociativa en el primer miembro tenemos que $\left(\frac{4}{3} \bullet \frac{3}{4}\right) \bullet x = 1 \bullet x$. En el segundo miembro tenemos que $\frac{3}{8} \times \frac{4}{3} = \frac{12}{24}$

Así, nuestra ecuación quedará como

$$\boxed{1 \bullet x = \frac{12}{24}}$$

Pero $1 \bullet x = x$. Entonces,

$$\boxed{x = \frac{12}{24}}$$

b) $\frac{1}{3} \bullet b = 5$

b) Para la ecuación $\frac{1}{3} \bullet b = 5$ en lugar de dividir los dos miembros de la ecuación entre $\frac{1}{3}$, los multiplicamos por 3, que es el inverso multiplicativo de $\frac{1}{3}$ Así tenemos que

$$3 \bullet \left(\frac{1}{3} \bullet b\right) = 3 \bullet 5$$

$$\left(3 \bullet \frac{1}{3}\right) \bullet b = 3 \bullet 5$$

$$1 \bullet b = 3 \bullet 5$$

$$\boxed{b = 15}$$

Ejercicio 3. Resuelva las ecuaciones c), d), e), f) y g) del ejercicio anterior tal como se hizo en los ejemplos anteriores con las ecuaciones a), y b).

Ejercicio 4. Resuelva en su cuaderno las siguientes ecuaciones como se hace en a) y b).

a) $4 \bullet x = \frac{3}{2}$

$$\boxed{\frac{1}{4} \bullet 4 \bullet x = \frac{1}{4} \bullet \frac{3}{2}}$$

$$\boxed{1 \bullet x = \frac{3}{8}}$$

$$\boxed{x = \frac{3}{8}}$$

b) $y \bullet \frac{2}{3} = 8$

$$\boxed{y \bullet \frac{2}{3} \bullet \frac{3}{2} = 8 \bullet \frac{3}{2}}$$

$$\boxed{y \bullet 1 = \frac{24}{2}}$$

$$\boxed{y = 12}$$

c) $2a = \frac{1}{4}$

d) $x \bullet 6 = \frac{3}{4}$

e) $\frac{1}{2} \bullet y = 7$

f) $4m = 3$

g) $\frac{2}{3} \bullet m = \frac{5}{6}$

h) $\frac{4}{3} m = 2$

i) $\frac{a}{b} \bullet x = \frac{5}{3}$

j) $\frac{3}{4} \bullet y = \frac{m}{8}$

Más adelante encontraremos ecuaciones como la siguiente:

$$\frac{16}{x} = \frac{2}{5}$$

Con las ideas que hasta aquí hemos manejado resulta fácil resolverlas. Observe usted el proceso de resolución.

$$\boxed{\frac{16}{x} = \frac{2}{5}}$$

1) Multiplicamos ambos miembros de la ecuación por x.

$$\boxed{\frac{16}{x} \bullet x = \frac{2}{5} \bullet x}$$

Como $\frac{16}{x} \bullet x = 16$, tendremos entonces que

$$\boxed{16 = \frac{2}{5}x}$$

2) Ya sabemos cómo resolver las ecuaciones de este tipo. Dividimos ambos miembros de la ecuación entre $\frac{2}{5}$.

$$\boxed{\frac{16}{\frac{2}{5}} = \frac{\frac{2}{5} \bullet x}{\frac{2}{5}}}$$

Como $\frac{16}{\frac{2}{5}} = 40$ y $\frac{\frac{2}{5} \bullet x}{\frac{2}{5}} = x$, tendremos que

$40 = x$, o bien, $\boxed{x = 40}$

Aplicando este procedimiento resolveremos algunas ecuaciones como la que resolvimos aquí.

Ejemplo.

a) Consideremos la ecuación

$$\boxed{\frac{\frac{1}{2}}{m} = 3}$$

Multiplicamos ambos miembros de la ecuación por m.

$$\boxed{\frac{\frac{1}{2}}{m} \bullet m = 3 \bullet m}$$

Como $\frac{\frac{1}{2}}{m} \bullet m = \frac{1}{2}$, tendremos entonces que

$$\boxed{\frac{1}{2} = 3m}$$

Esta ecuación es del tipo que hemos resuelto previamente y ya sabemos resolverla. Multiplicamos ambos miembros por el inverso multiplicativo de 3.

$$\boxed{\frac{1}{2} \bullet \frac{1}{3} = 3\,m \bullet \frac{1}{3}}$$

$$\frac{1}{6} = m, \text{ o bien, } \boxed{m = \frac{1}{6}}$$

b) Consideremos la ecuación

$$\boxed{\frac{3}{5} = \frac{\frac{1}{3}}{p}}$$

Multipliquemos sus dos miembros por p.

$$\boxed{\frac{3}{5} \bullet p = \frac{\frac{1}{3}}{p} \bullet p}$$

Como $\frac{\frac{1}{3}}{p} \bullet p = \frac{1}{3}$, tenemos que

$$\boxed{\frac{3}{5} \bullet p = \frac{1}{3}}$$

Ahora multiplicamos ambos miembros de esta ecuación por el inverso multiplicativo de $\frac{3}{5}$. (Recordemos que esto es lo mismo que dividir ambos miembros entre $\frac{3}{5}$.)

$$\boxed{\frac{3}{5} \bullet p \bullet \frac{5}{3} = \frac{1}{3} \bullet \frac{5}{3}}$$

$$\boxed{p = \frac{5}{9}}$$

Ejercicio 5. Resuelva en su cuaderno las siguientes ecuaciones.

a) $\frac{5}{x} = 8$

b) $\frac{10}{y} = \frac{1}{4}$

c) $\frac{\frac{1}{2}}{a} = 8$

d) $\frac{\frac{1}{5}}{b} = 7$

e) $\frac{\frac{1}{10}}{e} = 1$

f) $\frac{\frac{3}{10}}{f} = \frac{3}{10}$

g) $\frac{1}{4} = \frac{5}{m}$

h) $\frac{1}{2} = \frac{8}{n}$

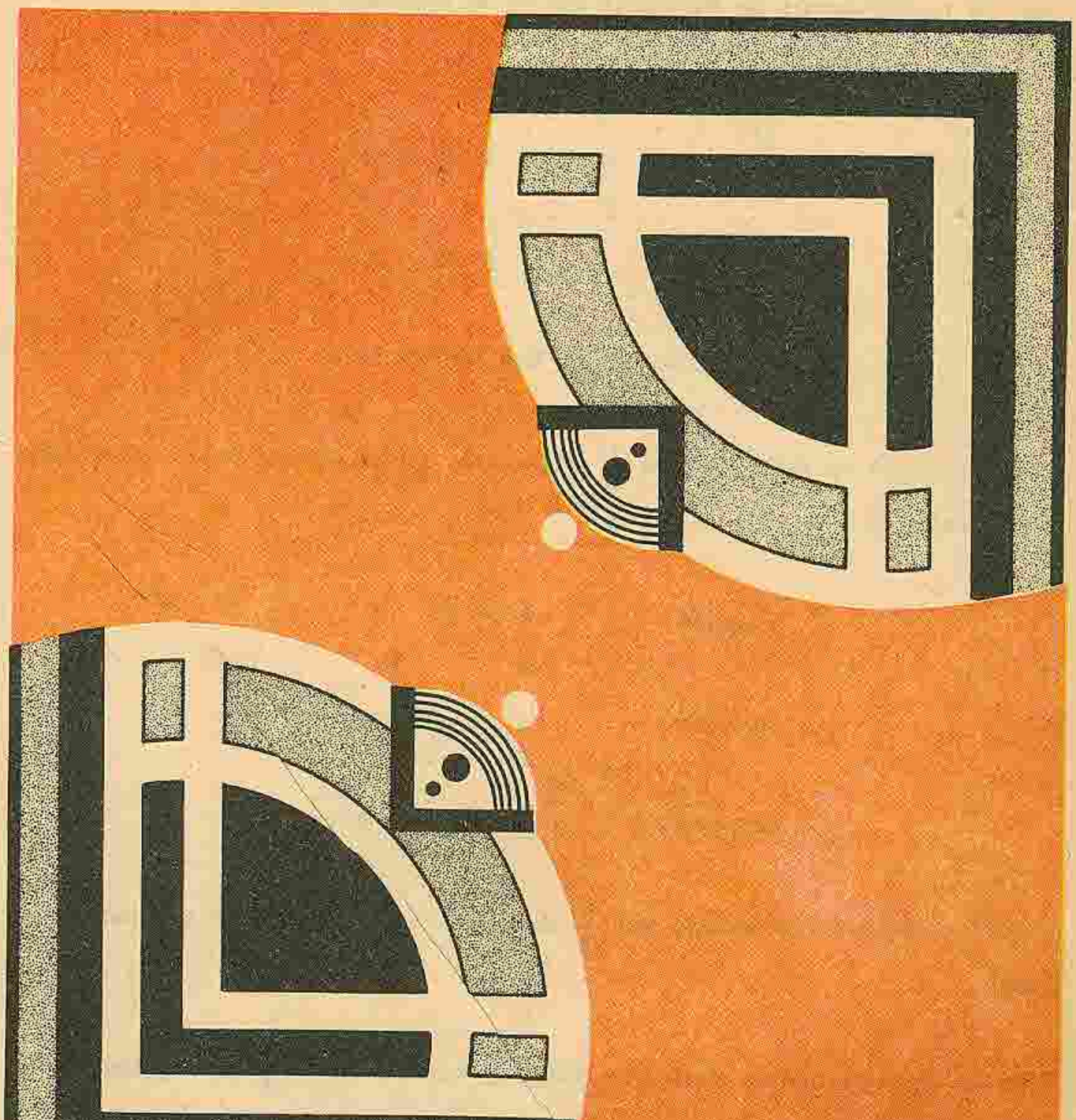
i) $7 = \frac{\frac{1}{3}}{p}$

j) $10 = \frac{\frac{1}{10}}{q}$

k) $8 = \frac{1}{m}$

l) $1 = \frac{1}{x}$

m) $10 = \frac{10}{y}$



2. Resolución de problemas por medio de ecuaciones

A estas alturas tal vez usted ya esté familiarizado con la resolución de problemas sencillos por medio de ecuaciones. Sin embargo, le sugerimos que siga practicando este método porque le será de mucha utilidad cuando tenga que resolver problemas complicados

Problemas.

Encuentre la ecuación que se adapte a cada problema, resuelva tal ecuación y luego dé la respuesta, como se hace en los problemas a) y b). (Realice este trabajo en su cuaderno.)

a) Si multiplicamos un número x por $\frac{3}{4}$ el resultado es 6.

¿Cuál es ese número?

Ecuación $x \bullet \frac{3}{4} = 6$

Solución $x = 8$

Respuesta Ese número es 8

b) Al dividir un número entre $\frac{1}{2}$ el cociente que se obtiene es $\frac{5}{3}$. ¿Qué número es ése?

Ecuación $\frac{x}{\frac{1}{2}} = \frac{5}{3}$

Solución $x = \frac{5}{6}$

Respuesta Ese número es $\frac{5}{6}$

c) Un número multiplicado por $\frac{6}{5}$ da como resultado $\frac{2}{3}$. ¿De qué número se trata?

d) El cociente que se obtiene al dividir un número entre $\frac{7}{8}$ es 1. ¿Qué número es el dividendo?

e) Cinco veces un número n es igual a $\frac{10}{3}$. ¿Qué número es n?

f) El número c multiplicado por $\frac{1}{2}$ da como resultado 6. ¿Qué número es c?

g) La cuarta parte de un número es $\frac{3}{5}$. ¿De qué número se trata?

h) Dos quintos de cierto número es $\frac{1}{2}$. ¿Cuál es ese cierto número?

i) El número $\frac{8}{9}$ es el cuádruplo de n. ¿Cuál es el número n?

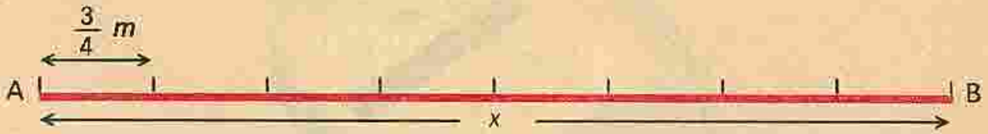
j) El número $\frac{5}{6}$ es el cociente de x entre $\frac{3}{4}$. ¿Cuál es el número x?

k) La mitad de cierto número es $\frac{7}{8}$. ¿Cuál es ese cierto número?

l) La sexta parte de x es $\frac{3}{8}$. ¿Qué número es x?

Ejercicio 6. De las ecuaciones dadas en cada inciso, elija la que se adapta al problema, resuélvala y luego dé la respuesta para el problema, como se hace en a). (Trabaje en su cuaderno.)

a) Los segmentos marcados en la siguiente ilustración tienen igual longitud. ¿Cuál es la medida del segmento $\overline{AB}$?



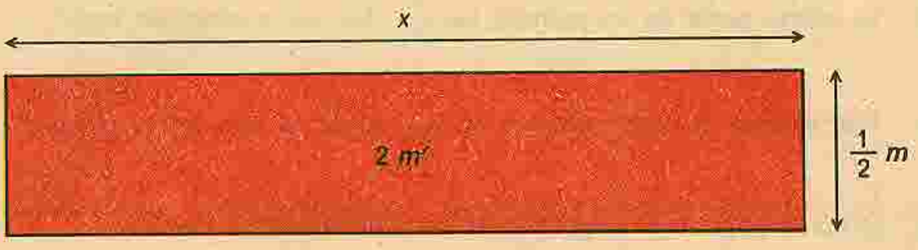
$$x \cdot \frac{3}{4} = 8 \qquad \frac{x}{\frac{3}{4}} = 8 \qquad \frac{x}{8} = \frac{3}{4}$$

Ecuación $\boxed{\frac{x}{8} = \frac{3}{4}}$

Solución $\boxed{x = 6}$

Respuesta. El segmento $\overline{AB}$ mide 6 metros.

b) Si el área del rectángulo ilustrado abajo es 2 metros cuadrados y su altura mide $\frac{1}{2}$ metro, ¿cuánto mide de base?

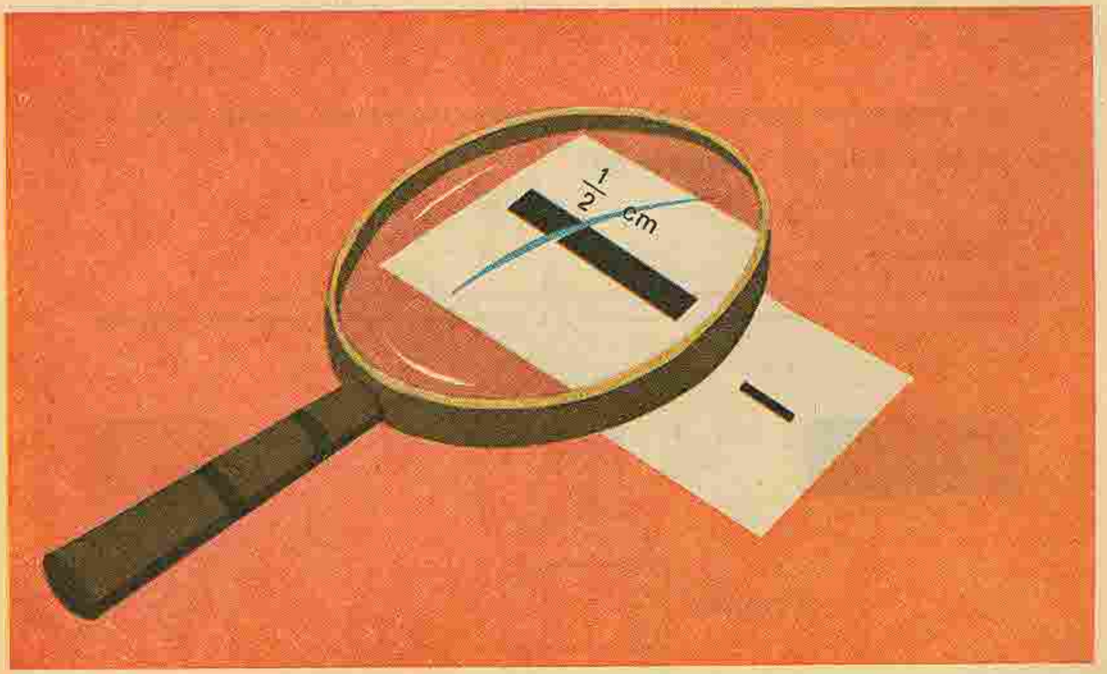


$\frac{x}{2} = \frac{1}{2}$

$x \bullet \frac{1}{2} = 2$

$\frac{x}{\frac{1}{2}} = 2$

c) Si en una lupa pueden verse los objetos con su tamaño aumentado 5 veces, ¿cuánto medirá un objeto cuya imagen se vea de $\frac{1}{2}$ centímetro en tal lupa?

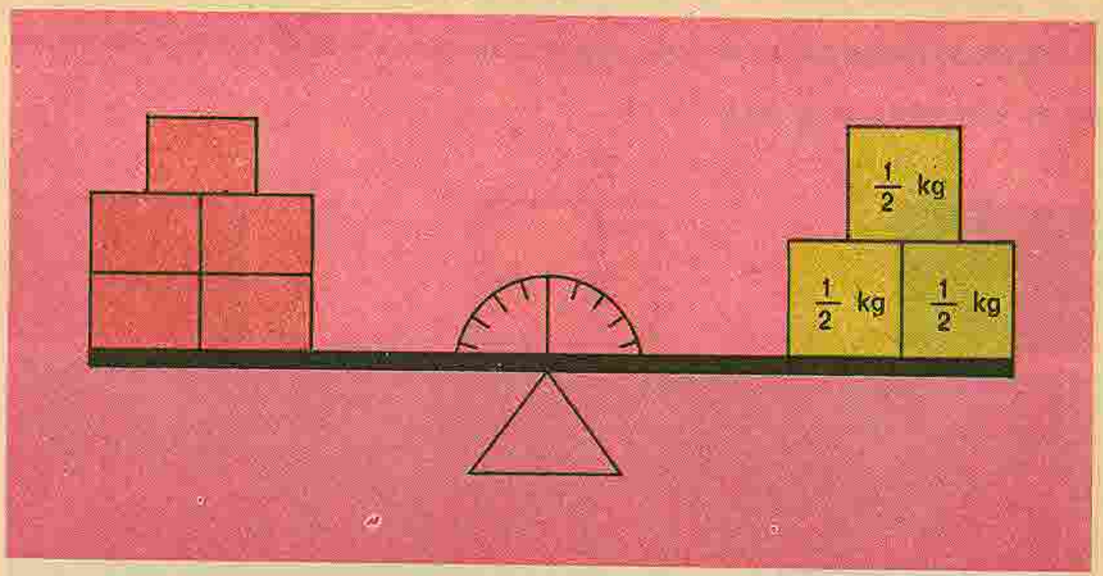


$x \bullet \frac{1}{2} = 5$

$\frac{x}{\frac{1}{2}} = 5$

$x \bullet 5 = \frac{1}{2}$

d) ¿Cuánto pesa cada una de las barras en la siguiente balanza?

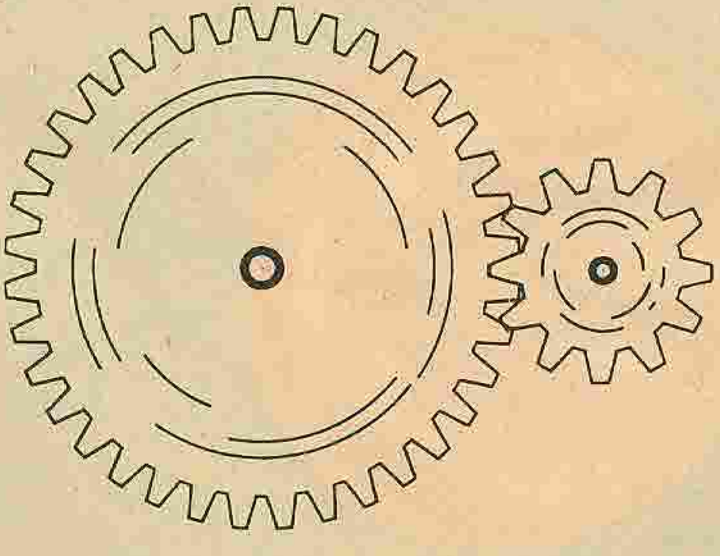


$\frac{x}{\frac{3}{2}} = 5$

$5 \bullet x = \frac{3}{2}$

$\frac{x}{5} = \frac{3}{2}$

e) De los dos engranes que se ilustran, al girar una vuelta el menor, hace que el mayor dé $\frac{1}{6}$ de vuelta. ¿Cuántas vueltas habrá dado el engrane mayor cuando el menor haya girado 300 veces?



$\frac{300}{\frac{1}{6}} = x$

$300 \bullet \frac{1}{6} = x$

$\frac{\frac{1}{6}}{300} = x$

f) Los cuerpos pesan en la Luna $\frac{1}{6}$ de lo que pesan en la tierra. ¿Cuánto pesará en la Luna un objeto que en la tierra pesa 4 kilogramos y medio? (4 kilogramos y medio es lo mismo que $\frac{9}{2}$ kg.)

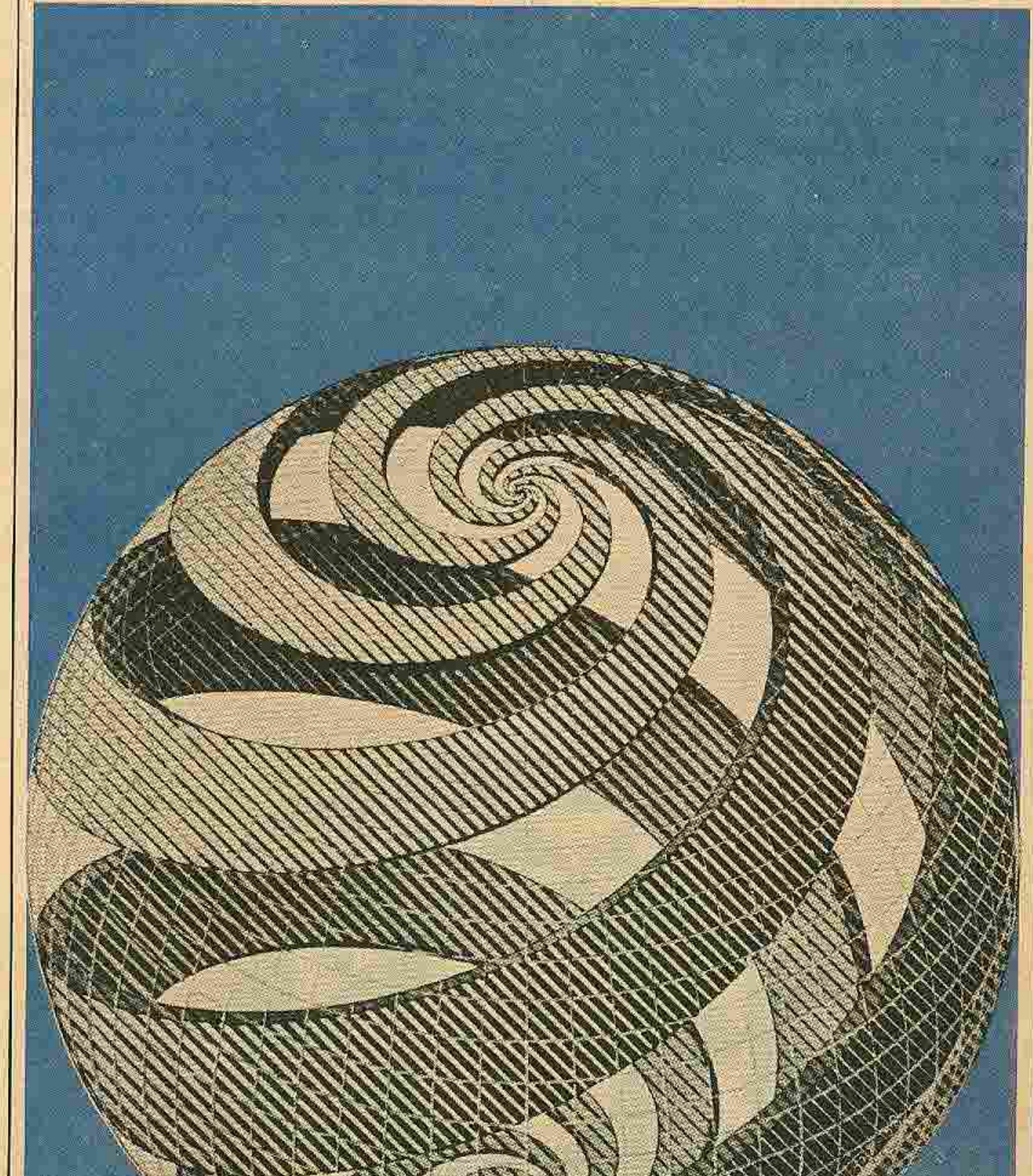
$$x = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{9}{2}}$$

$$\frac{\frac{9}{2}}{\frac{1}{6}} = x$$

$$\frac{9}{2} \cdot \frac{1}{6} = x$$

VIII

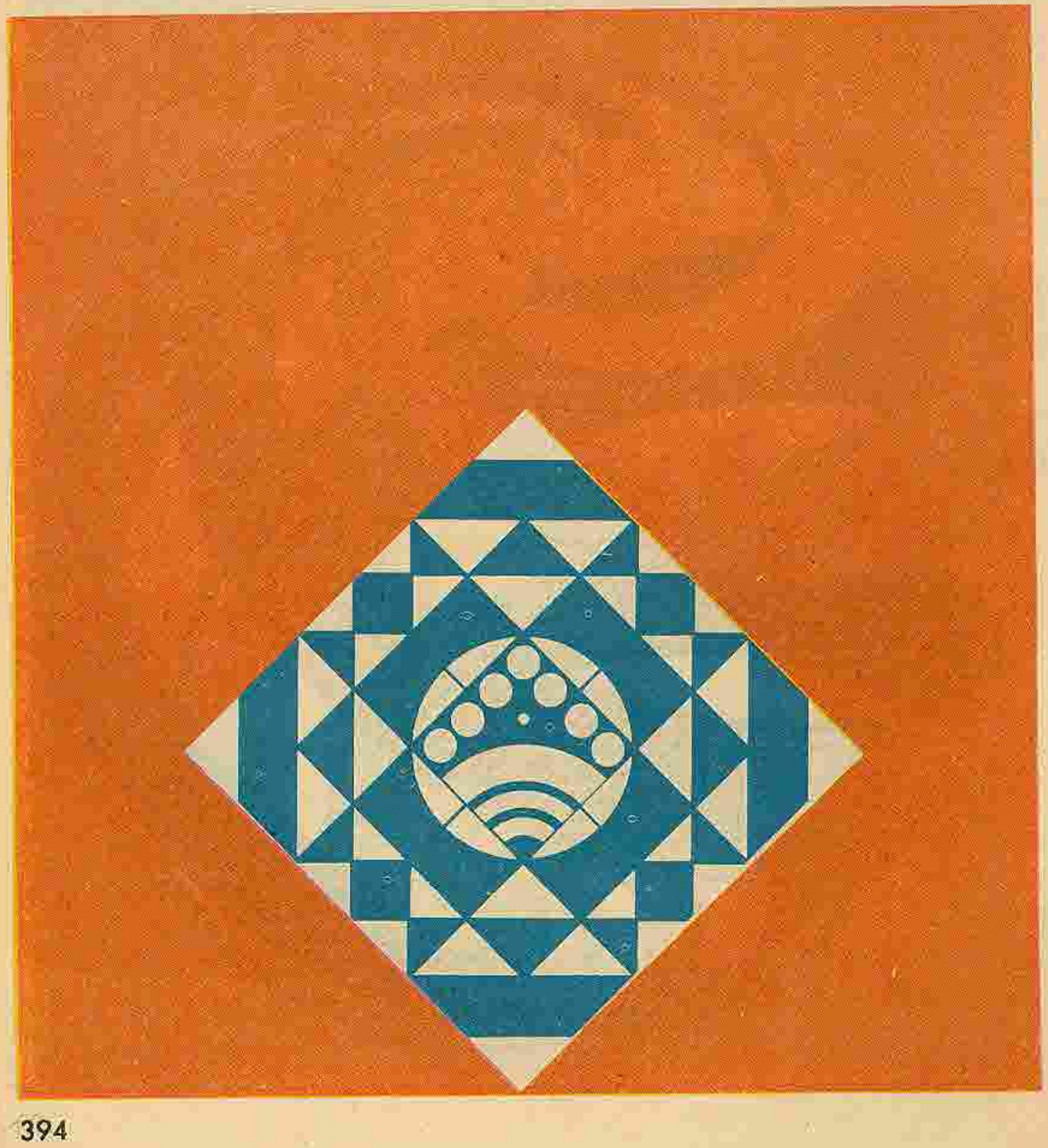
Notación decimal para los números racionales



Hasta ahora hemos trabajado con los números racionales expresados por medio de fracciones. Sin embargo, es más frecuente expresar estos números con la notación decimal. Por ejemplo, un comerciante marca el precio de algún artículo con la expresión $3.75 y no con la expresión "3 pesos y $\frac{3}{4}$". Si una persona desea indicar su estatura, escribe 1.68 m y no "1 metro y $\frac{68}{100}$ de metro". En el frasco de alguna medicina se lee: cápsulas de .454 g y no "cápsulas de $\frac{454}{1000}$ g".

En la mayoría de los problemas que resuelvan obreros, técnicos, oficinistas y profesionistas, se emplean los números racionales expresados en notación decimal.

Al principio de este capítulo vimos cómo encontrar la notación decimal de un número racional expresado con una fracción. Ahora repasaremos esa idea y la ampliaremos.



1. Fracciones y decimales

Para encontrar la notación decimal de un número racional expresado con una fracción, simplemente dividimos el numerador entre el denominador. Por ejemplo, consideremos los números racionales $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{4}$. Para encontrar su expresión decimal procedemos de la siguiente manera.

$$\frac{1}{2} \qquad \begin{array}{r|l} & .5 \\ \cline{2-2} 2 & 1.0 \\ & 0 \end{array}$$

$$\frac{1}{2} = .5$$

$$\frac{3}{4} \qquad \begin{array}{r|l} & .75 \\ \cline{2-2} 4 & 3.00 \\ & 20 \\ & 0 \end{array}$$

$$\frac{3}{4} = .75$$

Observe usted que en los dos ejemplos anteriores al residuo de la división es cero. Sin embargo, esto no sucede siempre. Vea usted los siguientes ejemplos.

Ejemplo.

a) Dividiendo el numerador entre el denominador, encontremos la notación decimal para el número $\frac{2}{3}$.

$$\frac{2}{3} \qquad \begin{array}{r|l} & .666 \\ \cline{2-2} 3 & 2.00 \\ & 20 \\ & 20 \\ & 2 \end{array}$$

Observe usted, en esta división, que el residuo nunca será cero y que en el cociente se repetirá la cifra 6 indefinidamente.

Cuando se tiene un caso como éste, para indicar que en la expresión decimal se repite indefinidamente la cifra 6, se acostumbra escribir $.\overline{6}$ Así es que

$$\frac{2}{3} = .\overline{6}$$

b) Encontraremos ahora la notación decimal del número $\frac{3}{11}$

$\frac{3}{11}$

$$\begin{array}{rl} & \underline{272727} \\ 11 & \!\!\big)\, 3.0 \\ & 80 \\ & 30 \\ & 80 \\ & 30 \\ & 80 \\ & 3 \end{array}$$

También aquí se ve que el residuo nunca será cero, y las cifras que se repiten en el cociente son el 2 y el 7. Escribimos entonces,

$$\frac{3}{11} = .\overline{27}$$

c) Encontremos la notación decimal de los números $\frac{32}{9}$ y $\frac{11}{6}$

$\frac{32}{9}$

$$\begin{array}{rl} & \underline{3.555} \\ 9 & \!\!\big)\, 32.0 \\ & 50 \\ & 50 \\ & 50 \\ & 5 \end{array}$$

$$\frac{32}{9} = 3.\overline{5}$$

$\frac{11}{6}$

$$\begin{array}{rl} & \underline{1.833} \\ 6 & \!\!\big)\, 11.000 \\ & 50 \\ & 20 \\ & 20 \\ & 2 \end{array}$$

$$\frac{11}{6} = 1.8\overline{3}$$

Expresiones como $.\overline{6}$, $.\overline{27}$, $3.\overline{5}$ y $1.8\overline{3}$ se llaman *decimales periódicos* y la cifra o cifras que se repiten se denominan *periodo*. Las expresiones decimales como .5, .75, .08, 8.64, etc., reciben el nombre de *decimales finitos*.

Todo número racional se puede expresar en notación decimal, ya sea con un decimal finito o bien, con un decimal periódico.

Ejercicio 1. Exprese en notación decimal los números racionales que se indican.

a) $\frac{2}{9}$

b) $\frac{1}{3}$

c) $\frac{6}{8}$

d) $\frac{1}{18}$

e) $\frac{1}{4}$

f) $\frac{5}{11}$

g) $\frac{7}{20}$

h) $\frac{11}{8}$

i) $\frac{14}{3}$

j) $\frac{25}{10}$

k) 9

l) 1

m) 0

n) $\frac{15}{3}$

o) $\frac{10}{7}$

p) $\frac{35}{10}$

q) $\frac{8}{1000}$

r) $\frac{75}{100}$

s) $\frac{65}{1000}$

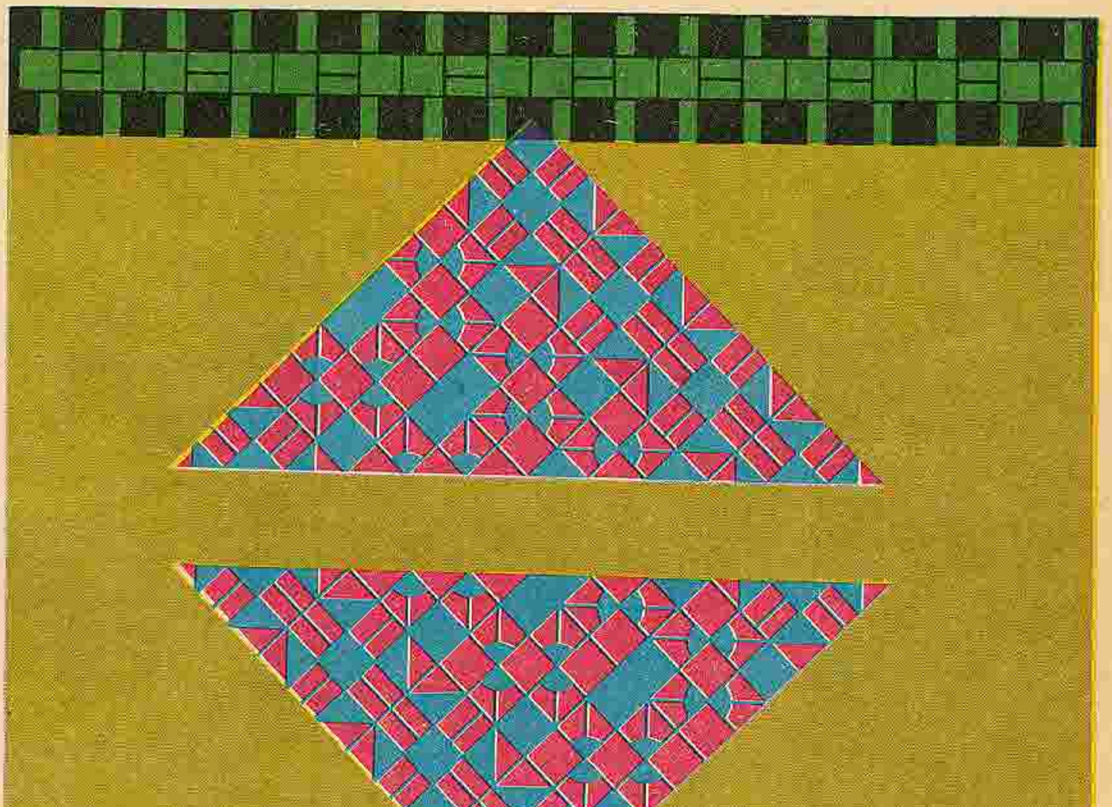
t) $\frac{8}{100}$

u) $\frac{496}{10}$

Problema.

a) ¿Representan al mismo número los decimales $.\overline{63}$ y $.63$?

b) ¿Representan al mismo número las expresiones 9 y $9.\overline{0}$?



2. Decimales y fracciones

En el párrafo anterior hemos resuelto el problema de encontrar un decimal para representar a un número racional denotado por una fracción. Ahora estudiaremos el problema inverso. Esto es, si nos dan un número racional expresado en notación decimal, ¿cómo encontramos una fracción que represente a ese mismo número racional?

Es fácil encontrar una fracción que represente a un número racional indicado por un decimal finito. Resuelva el siguiente ejercicio tomando como referencia los incisos resueltos.

Ejercicio 2. Complete las siguientes igualdades tal como se hace en algunos incisos.

a) $.1 = \boxed{\frac{1}{10}}$

b) $.2 = \boxed{\frac{2}{10}}$

c) $.3 = \boxed{\frac{\quad}{\quad}}$

d) $.4 = \boxed{\frac{\quad}{\quad}}$

e) $.9 = \boxed{\frac{\quad}{\quad}}$

f) $8.5 = \boxed{\frac{85}{10}}$

g) $1.0 = \boxed{\frac{10}{10}}$

h) $2 = 2.0 = \boxed{\frac{20}{10}}$

i) $3.2 = \boxed{\frac{\quad}{\quad}}$

j) $6.9 = \boxed{\frac{\quad}{\quad}}$

k) $5 = \boxed{\frac{\quad}{\quad}}$

l) $18.2 = \boxed{\frac{\quad}{\quad}}$

m) $.26 = \boxed{\frac{\quad}{\quad}}$

n) $.83 = \boxed{\frac{\quad}{\quad}}$

o) $.05 = \boxed{\frac{\quad}{\quad}}$

p) $.01 = \boxed{\frac{\quad}{\quad}}$

q) $3.75 = \boxed{\frac{}{}}$

r) $16.18 = \boxed{\frac{}{}}$

s) $20.01 = \boxed{\frac{}{}}$

t) $302.96 = \boxed{\frac{}{}}$

u) $8.00 = \boxed{\frac{}{}}$

Ejercicio 3. Complete las siguientes igualdades tal como se hace en algunos incisos.

a) $.856 = \boxed{\frac{856}{1\,000}}$

b) $.092 = \boxed{\frac{92}{1\,000}}$

c) $5.008 = \boxed{\frac{5\,008}{1\,000}}$

d) $.238 = \boxed{\frac{}{}}$

e) $.007 = \boxed{\frac{}{}}$

f) $.046 = \boxed{\frac{}{}}$

g) $6.400 = \boxed{\frac{}{}}$

h) $1.001 = \boxed{\frac{}{}}$

i) $9.075 = \boxed{\frac{}{}}$

j) $.0001 = \boxed{\frac{1}{10\,000}}$

k) $.0409 = \boxed{\frac{}{}}$

l) $.6007 = \boxed{\frac{}{}}$

m) $3.0049 = \boxed{\frac{}{}}$

n) $5.4860 = \boxed{\frac{}{}}$

o) $27.0475 = \boxed{\frac{}{}}$

Existe un procedimiento para encontrar la fracción que corresponde a un decimal periódico; pero en este curso no estudiaremos ese problema.

3. Orden

Analicemos ahora el siguiente problema: Cuando nos dan dos decimales finitos diferentes, ¿cómo se puede saber cuál de ellos representa al número racional mayor y cuál al menor?

El problema es fácil de resolver pues sabemos comparar dos números racionales cuando éstos se representan con fracciones de igual denominador y también somos capaces de encontrar fracciones con denominador 10, 100, 1000, etc., que representan a los números que deseamos comparar. Observe usted el siguiente ejemplo.

Ejemplo.

a) De los números .008 y .010, ¿cuál es el mayor?

Como sabemos que $.008 = \frac{8}{1\,000}$ y $.010 = \frac{10}{1\,000}$, comparamos estas fracciones y vemos que

$$\boxed{\frac{10}{1\,000} > \frac{8}{1\,000}}$$

por lo tanto,

$$\boxed{0.010 > .008}$$

b) De los números 1.4 y 1.8, ¿cuál es el menor?

Como $1.4 = \frac{14}{10}$ y $1.8 = \frac{18}{10}$, comparamos las fracciones $\frac{14}{10}$ y $\frac{18}{10}$ y vemos que

$$\boxed{\frac{14}{10} < \frac{18}{10}}$$

por lo tanto,

$$\boxed{1.4 < 1.8}$$

c) ¿Cuál es el número mayor, .008 o .07?

$$.008 = \frac{8}{1\,000} \text{ y } .07 = \frac{7}{100} = \frac{70}{1\,000},$$

$$\boxed{\frac{70}{1\,000} > \frac{8}{1\,000}}$$

En consecuencia,

$$\boxed{.07 > .008}$$

d) ¿Cuál es el número menor, 1.07 o 1.1?

$$1.07 = \frac{107}{100} \quad y \quad 1.1 = \frac{11}{10} = \frac{110}{100}.$$

$$\boxed{\frac{107}{100} < \frac{110}{100}}$$

Entonces,

$$\boxed{1.07 < 1.1}$$

Ejercicio 4. Ponga en cada cuadrito el signo $>$, $=$ o $<$, según corresponda.

a) .8 ☐ .2 b) .9 ☐ 1.1 c) 3.2 ☐ 3.09

d) .008 ☐ .09 e) .0003 ☐ .001 f) $\frac{2}{5}$ ☐ .3

g) .6 ☐ .075 h) $\frac{1}{2}$ ☐ .6 i) .009 ☐ .09

j) .8 ☐ .80 k) .13 ☐ .2 l) .07 ☐ .007

m) .9 ☐ .900 n) .01 ☐ .10 o) 0 ☐ .1

4. Operaciones con números racionales expresados en notación decimal

Una de las ventajas de usar decimales para representar números racionales aparece cuando efectuamos operaciones con ellos. Las reglas para efectuar operaciones con números racionales expresados en notación decimal son muy sencillas, pues se reducen a saber operar con números naturales, tomando en cuenta algunas reglas muy simples sobre el uso del punto decimal.

Desde la escuela primaria usted ya conoce esas reglas. Aquí sólo las repasaremos y veremos que los resultados obtenidos con ellas son los mismos que cuando se opera usando la notación de fraccciones.

Adición.

Si usted va a sumar los racionales 4, 7.4 y 9.28, lo hace así:

$$\begin{array}{r} 4.00 \\ +\ 7.40 \\ 9.28 \\ \hline \boxed{20.68} \end{array}$$

Coloca los sumandos de manera que el punto decimal quede "alineado"; luego procede a sumar como si fueran números naturales y, finalmente, pone el punto decimal de la suma alineado con el de los sumandos.

Si en lugar de la notación decimal se utiliza la notación en fracciones, se obtiene el mismo resultado:

$$4 + 7.4 + 9.28 = \frac{400}{100} + \frac{74}{100} + \frac{928}{100} = \frac{400 + 74 + 928}{100}$$

$$= \frac{2068}{100} = \boxed{20.68}$$

Ejemplo.

a) Sumemos los números .86, 2.3 y .9

$$\begin{array}{r} .86 \\ +\ 2.30 \\ .90 \\ \hline \boxed{4.06} \end{array}$$

$$.86 + 2.3 + .9 = \frac{86}{100} + \frac{230}{100} + \frac{90}{100} =$$

$$= \frac{86 + 230 + 90}{100} = \frac{406}{100} = \boxed{4.06}$$

b) Sumemos los números 4, .04 y .4

$$\begin{array}{r} 4.00 \\ +\quad .04 \\ .40 \\ \hline \boxed{4.44} \end{array}$$

$$4 + .04 + .4 = \frac{400}{100} + \frac{4}{100} + \frac{40}{100} =$$

$$= \frac{400 + 4 + 40}{100} = \frac{444}{100} = \boxed{4.44}$$

Ejercicio 5. Encuentre la suma de los números dados en cada inciso, tal como se hace en a), y compare los resultados.

a) 2.8, 3.54, 1.6

$$\begin{array}{r} 2.80 \\ +\quad 3.54 \\ 1.60 \\ \hline \boxed{7.94} \end{array}$$

$$2.8 + 3.54 + 1.6 = \frac{280}{100} + \frac{354}{100} + \frac{160}{100} =$$

$$= \frac{280 + 354 + 160}{100} = \frac{794}{100} = \boxed{7.94}$$

b) 6, 3.7, 12.56

c) 28.2, 35, 50.03

d) 37.04, 7.039, 8.0

e) 5.02, .039, 3.8

f) 7.42, .136, 2.935

Sustracción.

Cuando usted calcula la diferencia entre 12.8 y 7.43, procede así:

$$\begin{array}{r} 12.80 \\ -\quad 7.43 \\ \hline \boxed{5.37} \end{array}$$

Coloca el minuendo y el sustraendo de tal manera que el punto decimal queda alineado; después los resta como si fueran números naturales y, finalmente, coloca el punto decimal de la resta alineado con los del minuendo y el sustraendo.

Empleando la notación de fracciones en esta sustracción, tenemos el mismo resultado:

$$12.8 - 7.43 = \frac{1280}{100} - \frac{743}{100} = \frac{1280 - 743}{100} = \frac{537}{100} = \boxed{5.37}$$

Ejemplo.

a) Busquemos la diferencia entre 2.8 y 1.03

$$\begin{array}{r} 2.80 \\ -\ 1.03 \\ \hline \boxed{1.77} \end{array}$$

$$2.8 - 1.03 = \frac{280}{100} - \frac{103}{100} = \frac{280 - 103}{100} =$$

$$= \frac{177}{100} = \boxed{1.77}$$

b) Efectuemos la sustracción .8 − .08 =

$$\begin{array}{r} .80 \\ -\ .08 \\ \hline \boxed{.72} \end{array}$$

$$.8 - .08 = \frac{80}{100} - \frac{8}{100} = \frac{80 - 8}{100} = \frac{72}{100} = \boxed{.72}$$

Ejercicio 6. Encuentre la diferencia de los números dados en cada inciso, tal como se hace en a), y compare los resultados.

a) 18.3, 5.19

$$\begin{array}{r} 18.30 \\ -\ 5.19 \\ \hline \boxed{13.11} \end{array}$$

$$18.3 - 5.19 = \frac{1830}{100} - \frac{519}{100} = \frac{1830 - 519}{100} =$$

$$= \frac{1311}{100} = \boxed{13.11}$$

b) 7.56, 6.38

c) 8, 5.18

d) 12.3, 7.27

e) 4.63, 2.076

f) .875, .398

Multiplicación.

Si va usted a multiplicar los números 7.3 y 2.83, lo hace de la siguiente manera:

$$\begin{array}{r} 2.83 \\ \times \quad 7.3 \\ \hline 849 \\ 1981 \\ \hline \boxed{20.659} \end{array}$$

Coloca los factores como mejor le conviene y hace la multiplicación como si se tratara de números naturales. Después cuente las cifras que hay a la derecha de los puntos decimales en los factores (en este caso son tres) y coloca el punto en el producto. Esto lo hace de tal modo que a la derecha del punto quede el mismo número de cifras que contó en los factores.

La misma multiplicación ejecutada con la notación de fracciones da el mismo resultado.

$$2.83 \times 7.3 = \frac{283}{100} \times \frac{73}{10} = \frac{283 \times 73}{100 \times 10} = \frac{20659}{1000} = \boxed{20.659}$$

Ejemplo.

a) Multipliquemos los números 23.4 y 2.5

$$\left.\begin{array}{r} 23.4 \\ \times \quad 2.5 \end{array}\right\} \quad \boxed{2} \quad \text{cifras a la derecha de los puntos en los factores}$$

$$\begin{array}{r} 1170 \\ 468 \\ \hline \end{array}$$

$$\left.\boxed{58.50}\right\} \quad \boxed{2} \quad \text{cifras a la derecha del punto en el producto}$$

Operando con fracciones obtenemos el mismo resultado.

$$23.4 \times 2.5 = \frac{234}{10} \times \frac{25}{10} = \frac{234 \times 25}{10 \times 10} = \frac{5850}{100} = \boxed{58.50}$$

b) Multipliquemos .65 por .32

$$\begin{array}{r} 65 \\ \times \quad .32 \end{array} \quad \boxed{4} \quad \text{cifras a la derecha de los puntos en los factores}$$

$$\begin{array}{r} 130 \\ 195 \\ \hline \end{array}$$

$$\boxed{.2080} \quad \boxed{4} \quad \text{cifras a la derecha del punto en el producto}$$

Con fracciones tenemos que

$$.65 \times .32 = \frac{65}{100} \times \frac{32}{100} = \frac{65 \times 32}{100 \times 100} = \frac{2080}{10000} = \boxed{.2080}$$

Ejercicio 7. Encuentre el producto de los números dados en cada inciso, tal como se hace en a), y compare los resultados.

a) .42, 2.37

$$\begin{array}{r} 2.37 \\ \times\quad .42 \\ \hline 474 \\ 948 \\ \hline \boxed{.9954} \end{array}$$

$$2.37 \times .42 = \frac{237}{100} \times \frac{42}{100} = \frac{237 \times 42}{100 \times 100}$$

$$= \frac{9954}{10\,000} = \boxed{.9954}$$

b) 2.5, .8

c) 3.07, 2.7

d) .017, 12.3

e) 4, .58

f) 3.9, 2.019

División.

En la división de números racionales, cuando el divisor es un número natural, usted procede como en el siguiente ejemplo.

Ejemplo.

a) Dividamos 3.50 entre 25

$$\begin{array}{r|l} & \boxed{.14} \\ \hline 25 & 3.50 \\ & 1\,00 \\ & 0 \end{array}$$

Usted hace la división como si el dividendo fuera un número natural y después coloca el punto decimal del cociente alineado con el punto del dividendo.

Al operar con fracciones el resultado es el mismo.

$$3.50 \div 25 = \frac{350}{100} \div \frac{25}{1} = \frac{350}{2\,500} = \boxed{.14}$$

b) Dividamos .84 entre 12

$$\begin{array}{r|l} & \boxed{.07} \\ \hline 12 & .84 \\ & 0 \end{array}$$

(Observe usted el cero después del punto decimal en el cociente)

$$\frac{84}{100} \div \frac{12}{1} = \frac{84}{1200} = \boxed{.07}$$

c) Dividamos ahora 7.5 entre 8

$$\begin{array}{r} \boxed{.9} \\ 8\overline{)\,7.5} \\ 3 \end{array}$$

Si se desea obtener una mayor aproximación en el cociente se agregan tantos ceros en el dividendo como se quiera, ya que 7.5 = 7.50 = 7.500, etc.

$$\begin{array}{r} \boxed{.9375} \\ 8\overline{)\,7.5000} \\ 30 \\ 60 \\ 40 \\ 0 \end{array}$$

El mismo resultado se obtiene con la notación de fracciones.

$$7.5 \div 8 = \frac{75}{10} \div \frac{8}{1} = \frac{75}{80} = \boxed{.9375}$$

A veces obtendremos por cociente un decimal periódico. Por ejemplo, dividamos 14.5 entre 6.

$$\begin{array}{r} \boxed{2.416} \\ 6\overline{)\,14.5} \\ 2\,5 \\ 10 \\ 40 \\ 4 \end{array}$$

El cociente es aquí $2.41\bar{6}$

$$\frac{145}{100} \div \frac{6}{1} = \frac{145}{600} = \boxed{2.41\bar{6}}$$

Ejercicio 8. Efectúe las siguientes divisiones usando los dos procedimientos que se aplicaron en los ejemplos anteriores. Luego compare sus resultados.

a) $4\overline{)\,8.65}$

b) $6\overline{)\,42.3}$

c) $20\overline{)\,.750}$

d) $12\overline{)\,178.5}$

e) $27\overline{)\,.63}$

f) $7\overline{)\,45.9}$

Si en su división de números racionales el divisor no es un número natural, usted utiliza la regla de "correr el punto", tanto en el divisor como en el dividendo, para que el divisor quede como un número natural. De esa manera el problema queda reducido al caso anterior.

Ejemplo.

a) Para dividir 2.94 entre .7

$7\overline{)2.94}$

Usted "corre" el punto decimal a la derecha

$7.\overline{)29.4}$

y luego efectúa la división como antes

$$\begin{array}{r} \boxed{4.2} \\ 7\overline{)29.4} \\ 14 \\ 0 \end{array}$$

Usando la notación de fracciones se obtiene el mismo resultado.

$$2.94 \div .7 = \frac{294}{100} \div \frac{7}{10} = \frac{2940}{700} = \boxed{4.2}$$

b) Para dividir .04 entre .025

$.025\overline{).04}$

"corre" el punto decimal a la derecha

$025.\overline{)040.}$

y luego divide

$$\begin{array}{r} \boxed{1.6} \\ 25\overline{)40.0} \\ 150 \\ 0 \end{array}$$

(Recuerde usted que 40 es igual a 40.0, 40.00, etc.)

Trabajando con fracciones el resultado es el mismo.

$$.04 \div .025 = \frac{4}{100} \div \frac{25}{1\,000} = \frac{4\,000}{2\,500} = \boxed{1.6}$$

c) Dividamos 3 entre .006

$.006\overline{)3}$

Corriendo el punto decimal,

$006.\overline{)3000.}$

la división será:

$$\begin{array}{r} \boxed{500} \\ 6\overline{)3000} \\ 000 \\ 0 \end{array}$$

Con fracciones tenemos el mismo resultado.

$$3 \div .006 = \frac{3}{1} \div \frac{6}{1\,000} = \frac{3\,000}{6} \div \boxed{500}$$

Ejercicio 9. En las siguientes divisiones corra el punto de manera que el divisor quede como un número natural, tal como se hace en a) y b). Después, efectúe cada división.

a) $.003\,\overline{)\,3.8}$

$3\,\overline{)\,3800.}$

b) $.800\,\overline{)\,7}$

$800\,\overline{)\,7000.}$

c) $.09\,\overline{)\,0.793}$

d) $.0090\,\overline{)\,.0036}$

e) $.5\,\overline{)\,47.96}$

f) $.07\,\overline{)\,.003}$

g) $.009\,\overline{)\,8.3}$

h) $.07\,\overline{)\,3}$

Observación

El procedimiento que se sigue para efectuar divisiones como las anteriores se basa en:

Primero. La multiplicación por 10, por 100, por 1 000, etc.

Segundo. Si en una división se multiplican el dividendo y el divisor por un mismo número racional, distinto de cero, se obtiene una nueva división cuyo cociente es el mismo que en la división original.

Ejemplo.

$$.7\,\overline{)\,2.94} \longrightarrow 7\,\overline{)\,29.4}$$

Al aplicar este procedimiento para dividir 2.94 entre .7, vemos que al "correr" el punto decimal, lo que realmente hemos hecho es multiplicar por 10 al divisor, pues 7 = .7 × 10, y también al dividendo, pues 29.4 = 2.94 × 10.

De acuerdo con la propiedad que mencionamos arriba, al efectuar la segunda división, estamos seguros de que el cociente será el mismo que en la primera.

$$\begin{array}{r|l} & \;\;4.2 \\ \hline 7 & 29.4 \\ & \;\;1\,4 \\ & \;\;\;\;0 \end{array}$$

Efectivamente, este cociente corresponde también a la primera división, pues

$$\underset{\text{cociente}}{\underset{\uparrow}{4.2}} \times \underset{\text{divisor}}{\underset{\uparrow}{.7}} = \underset{\text{dividendo}}{\underset{\uparrow}{2.94}}$$

Ejercicio 10. Indique usted por qué número se multiplicaron el divisor y el dividendo al "correr" el punto en cada una de las divisiones del ejercicio 9.

Ejercicio 11. Efectúe las siguientes divisiones en su cuaderno.

a) $9\,\overline{)2.7}$ b) $3\,\overline{)4.5}$

c) $1.2\,\overline{)28.8}$ d) $2.5\,\overline{)30}$

e) $.04\,\overline{)2}$ f) $.3\,\overline{)18}$

g) $.008\,\overline{).16}$ h) $.005\,\overline{).0035}$

i) $.06\,\overline{).0024}$

Como habrá usted observado, en general es más sencillo operar con números racionales cuando éstos se expresan en notación decimal. Por ello es que en muchos casos se prefiere usar esta notación y no la de fracciones.

Practique usted un poco el uso de esta notación decimal resolviendo los siguientes problemas.

Problema.

a) Japón compró a México, en 1970, lo que en seguida se anota. (Los datos están en millones de dólares.)

Algodón	77.3	Frijol	0.1
Maíz	0.2	Zinc	2.9
Camarón	19.9	Piedras semipreciosas	5.1
Hormonas	1.7	Tungsteno	1.4
Cobre	4.2	Otros	11.4

¿Cuál es el importe total, en millones de dólares, de lo que Japón compró a México en 1970?

b) La silvanita es un mineral formado por teluro, oro y plata. ¿Cuántos gramos pesa un trozo de este mineral que contiene 124.2 gramos de teluro, 49 gramos de oro y 26.8 gramos de plata?

c) El costo de 1 kw/h (kilovatio-hora) es de $ 0.5. ¿Cuánto se debe pagar por un consumo de 128.8 kw/h?

d) Cierta pastilla medicinal está formada con .35 gramos de ácido acetilsalicílico, .2 gramos de cafeína y .005 gramos de belladona. ¿Cuánto pesa dicha pastilla?

e) 0.9 rublos (moneda de la Unión Soviética) equivalen a 1 dólar. ¿Cuántos dólares equivalen a 80.55 rublos?

f) 1 dólar equivale a 7.40 rupias (moneda de la India). ¿Cuántas rupias equivalen a 13.75 dólares?

g) ¿Cuál es la diferencia de altura entre el volcán de Colima, que tiene 3.85 kilómetros de altitud y el Kilimanjaro, cuya altura alcanza los 5.963 kilómetros?

h) Si el Paricutín tiene 2.746 kilómetros de altura y el Popocatépetl 5.452 kilómetros, ¿en cuántos kilómetros es más alto el Popocatépetl que el Paricutín?

i) El sulfuro de níquel está formado por azufre y níquel. Si cada 100 gramos de sulfuro de níquel contienen 64.7 gramos de níquel, ¿cuánto azufre hay en los 100 gramos de sulfuro de níquel?

j) El amoníaco es un compuesto de nitrógeno e hidrógeno. Si en 4.08 kilogramos de amoníaco hay .72 kilogramos de hidrógeno, ¿cuánto nitrógeno hay en esa cantidad de amoníaco?

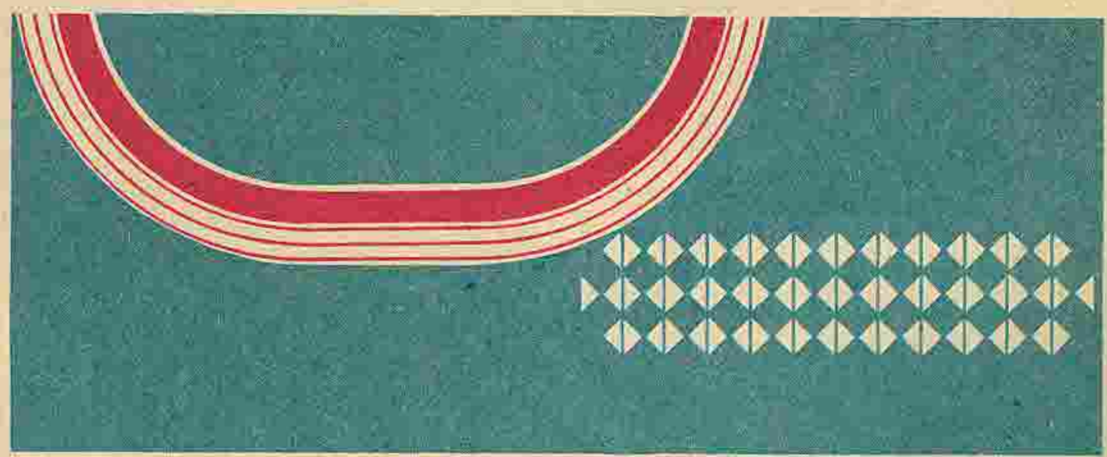
k) Las ondas de radar viajan a una velocidad constante de 300 000 km por segundo. Si estas ondas de radar tardan 2.56 segundos para ir de la Tierra a la Luna y regresar, ¿cuál es la distancia de la Luna a la Tierra?

l) El sonido recorre cerca de 1.7 kilómetros en 5 segundos. ¿Cuál es su velocidad en metros por segundo? Es decir, ¿cuántos metros recorre en un segundo?

m) Un trozo de hierro de 32.76 gramos ocupa un volumen de 4.2 cm^3. ¿Cuántos gramos de hierro ocupan un volumen de 1 cm^3?

n) La unidad astronómica (U.A.) equivale a 148.8 millones de kilómetros. Si Júpiter se halla a 800 millones de kilómetros del Sol, ¿cuál es la distancia de Júpiter al Sol, expresada en unidades astronómicas?

o) Plutón dista del Sol aproximadamente 40 unidades astronómicas. ¿Cuál es la distancia de Plutón al Sol en millones de kilómetros?



5. Resolución de ecuaciones

Ya sabemos resolver ecuaciones en las que aparecen números racionales expresados por medio de fracciones. Ahora, con el mismo procedimiento que conocemos, resolveremos algunas ecuaciones en las que hay números racionales expresados en notación decimal.

Ejemplo.

a) $\boxed{x + .2 = .8}$

Restamos .2 a ambos miembros

$$\boxed{(x + .2) - .2 = .8 - .2}$$

Como $(x + .2) - .2 = x$ y $.8 - .2 = .6$, tenemos entonces que

$$\boxed{x = 0.6}$$

b) $\boxed{1.2\,x = .48}$

Dividimos ambos miembros entre 1.2

$$\boxed{\frac{1.2x}{1.2} = \frac{.48}{1.2}}$$

Como $\frac{1.2x}{1.2} = x$ y $\frac{.48}{1.2} = .4$, tenemos que

$$\boxed{x = .4}$$

Ejercicio 12. Resuelva las siguientes ecuaciones.

a) $x + 2 = 3.2$

b) $2.4x = .72$

c) $x + .4 = 5$

d) $1.4x = 28$

e) $x - 2.3 = 5.5$

f) $.2x = .02$

g) $x - 0.6 = 2.4$

h) $.27x = 1$

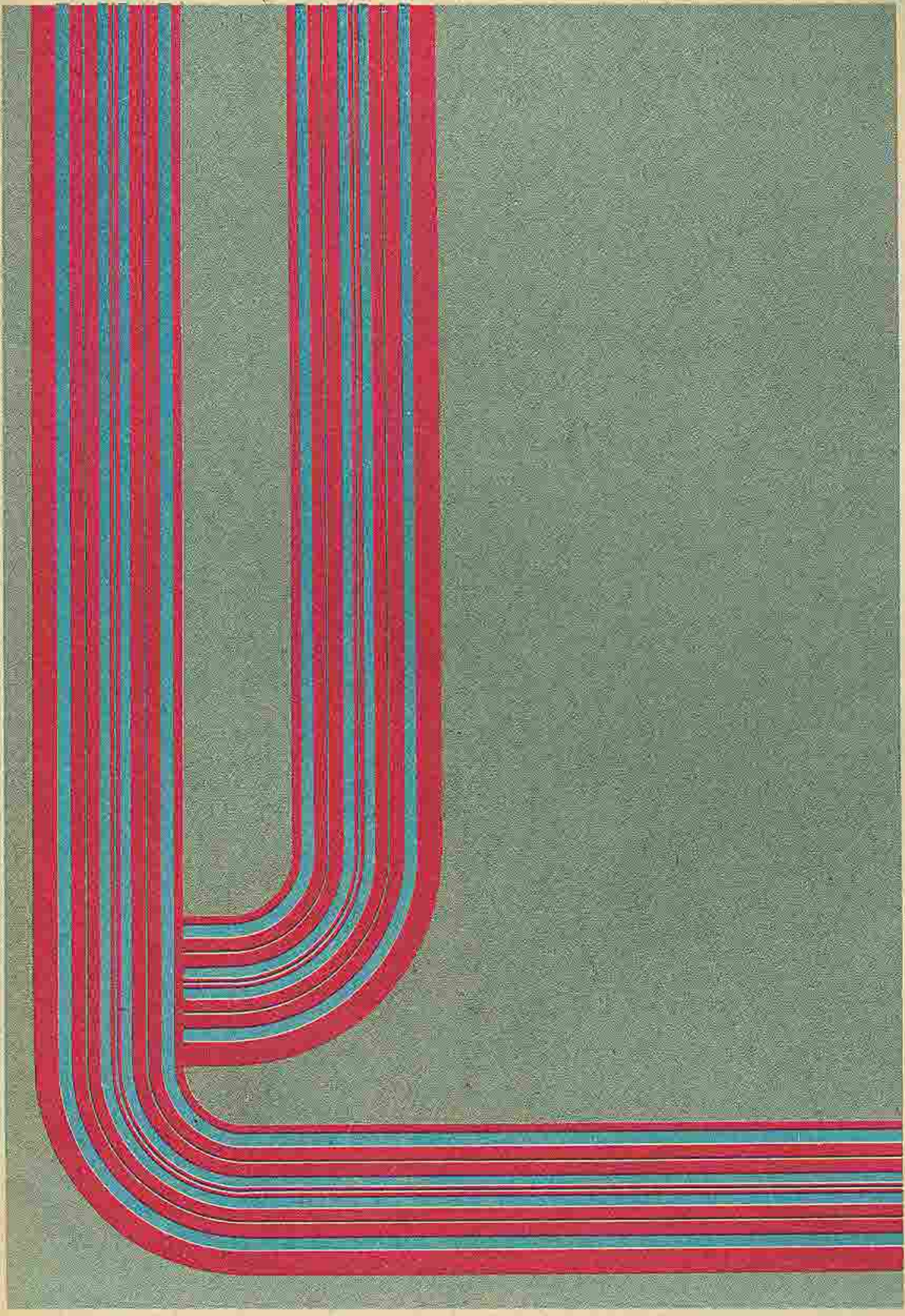
i) $.03 + x = .3$

j) $3.5 = .1x$

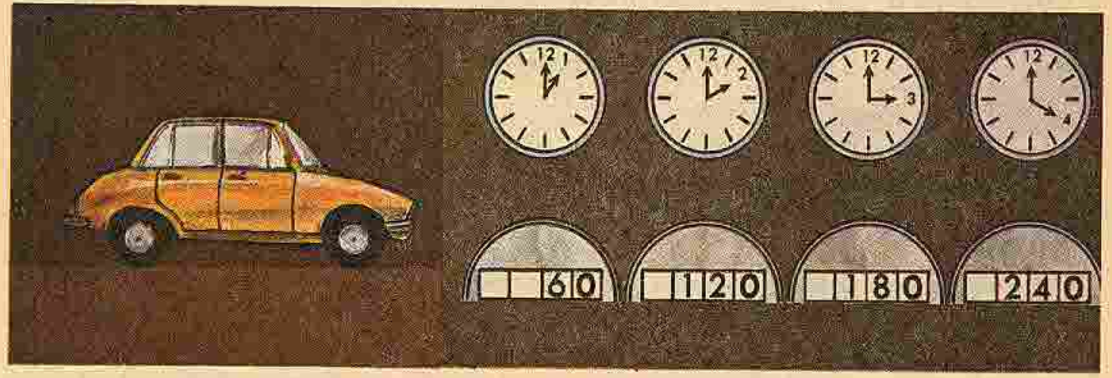
IX

Proporcionalidad directa e inversa

Ya hemos dicho antes que la multiplicación y la división de números racionales tienen diversas aplicaciones. A continuación vamos a estudiar algunos problemas de proporcionalidad en los que se utilizan tales operaciones.



1. Proporcionalidad directa



Un viajero avanza por una carretera recta y hace anotaciones de la distancia que va recorriendo. Estas anotaciones aparecen en una tabla como la siguiente:

d	60	120	180	240	300	360
t	1	2	3	4	5	6

En esta tabla de datos, *d* es la distancia recorrida en kilómetros y *t* es el tiempo medido en horas.

Ejercicio 1.

a) Observe la tabla anterior y conteste estas preguntas:

1. ¿Cuántos kilómetros recorrió el viajero en 3 horas?
2. ¿Cuántas horas tardó en recorrer 300 kilómetros?

b) Complete un tercer renglón en la tabla, dividiendo la distancia recorrida entre el tiempo, $(\frac{d}{t})$, y luego conteste la pregunta.

d	60	120	180	240	300	360
t	1	2	3	4	5	6
$\frac{d}{t}$		60				

¿Cómo son los cocientes que aparecen en este tercer renglón?

Observación 1. Si comparamos todos los cocientes de la tabla con el que aparece en la primera columna de la misma, nos damos cuenta que cualquiera de ellos nos indica el número de kilómetros que se recorren en una hora.

Observación 2. En la tabla se ve que cuando *d* toma valores cada vez mayores, también *t* los toma y viceversa. Es decir, al "aumentar" la distancia, "aumenta" el tiempo y al "disminuir" la distancia, también "disminuye" el tiempo.

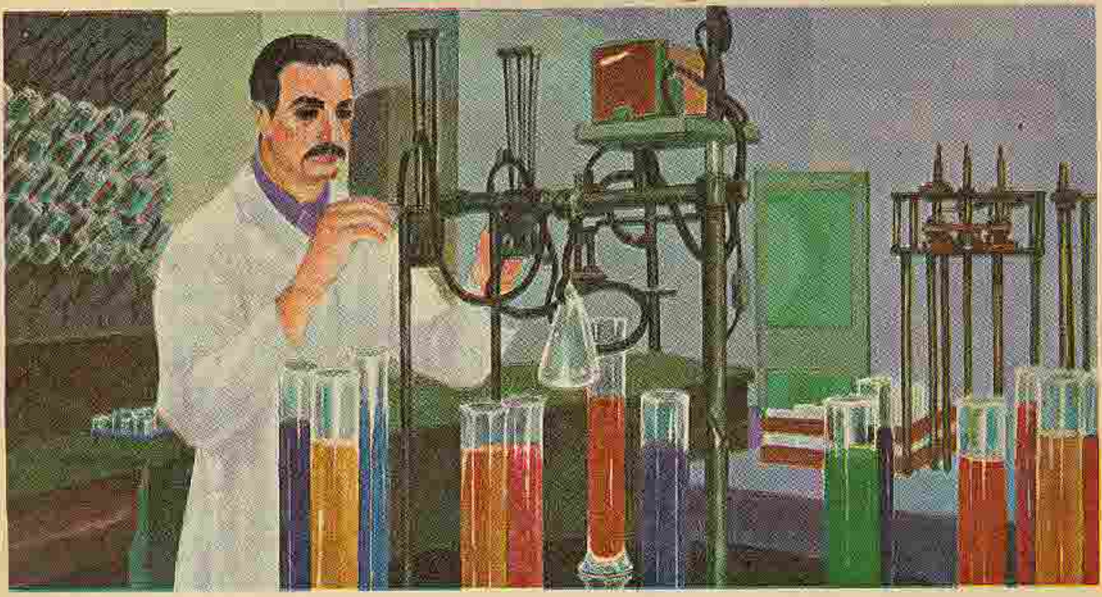
En la vida diaria frecuentemente se comparan números por medio de una división. Al cociente que se obtiene de esta manera también se le da el nombre de **razón.** En este ejemplo del viajero, el cociente que se obtiene al dividir el número de kilómetros entre el número de horas, es una razón y, según se observa, todas las razones anotadas en la tabla son iguales. Esto nos permite considerar algunas igualdades como

$\boxed{\frac{60}{1} = \frac{120}{2}}$, o bien, $\boxed{\frac{120}{2} = \frac{180}{3}}$, o bien, $\boxed{\frac{180}{3} = \frac{240}{4}}$, etc.

a las que se da el nombre de **proporciones.**

Si al anotar en una tabla los datos de alguna situación o de algún fenómeno ocurre, como en nuestra tabla anterior, que la razón obtenida en cada columna es la misma, se dice que en esa situación o en ese fenómeno existe **proporcionalidad directa** entre los datos Por ejemplo, en el problema que estamos estudiando hay proporcionalidad directa entre la distancia que se recorre y el tiempo que se emplea en recorrerla.

Analicemos ahora la siguiente situación para ver si en ella encontramos proporcionalidad directa.



Al medir, en un laboratorio de fisiología, la cantidad de sangre que bombea el corazón de un hombre cuyo peso es de 70 kilogramos, se encuentra lo siguiente

s	20	35	50	60	75
t	4	7	10	12	15

(Aquí s es el número de litros de sangre que bombea el corazón y t es el tiempo medido en minutos.)

Observación. En esta tabla se puede ver que cuando "aumenta" el valor de s, también "aumenta" el valor de t y viceversa, cuando "disminuye" s, también "disminuye" t.

Ejercicio 2.

a) Anote la razón de s entre t ($\frac{s}{t}$) que se obtiene en cada columna de la tabla.

s	20	35	50	60	75
t	4	7	10	12	15
$\frac{s}{t}$					

b) Diga usted cómo son las razones $\frac{s}{t}$ en esta tabla.

c) ¿Existe proporcionalidad directa entre el número de litros bombeados y el número de minutos transcurridos?

d) ¿Cuántos litros de sangre bombea el corazón de ese hombre en 1 minuto?

Ejercicio 3. Puesto que las razones son iguales en todas las columnas de la tabla anterior, podemos indicar varias proporciones. Complete los datos que faltan en las siguientes:

a) $\frac{20}{4} = \frac{35}{\square}$

b) $\frac{35}{7} = \frac{\square}{10}$

c) $\frac{60}{\square} = \frac{75}{15}$

$\frac{50}{\square} = \frac{\square}{15}$

Tomando en cuenta que hay proporcionalidad directa entre la cantidad de sangre bombeada y el tiempo transcurrido, podemos encontrar otros datos que no aparecen en la tabla. Por ejemplo, ¿cuántos litros bombea el corazón de ese hombre en 3 minutos?

Solución. Como sabemos que al dividir el número de litros entre el número de minutos, la razón que se obtiene es 5, podemos plantear la ecuación

$$\frac{x}{3} = 5$$

La solución de esta ecuación es $x = 15$. Por consiguiente, ese corazón bombea 15 litros de sangre en 3 minutos.

Problema. ¿Cuántos minutos deben transcurrir para que ese corazón bombee 40 litros de sangre?

Solución. Podemos plantear la ecuación.

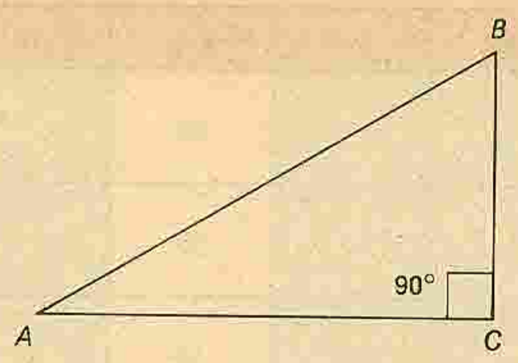
$$\frac{40}{x} = 5$$

Como la solución de esta ecuación es $x = 8$, la respuesta es: "Deben transcurrir 8 minutos".

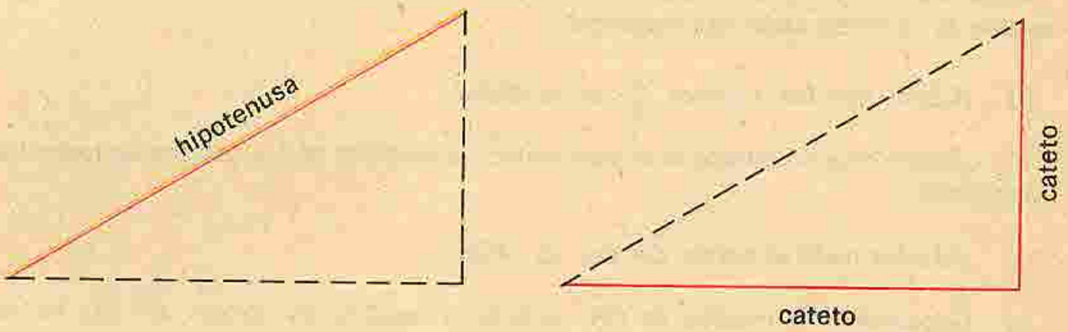
Ejercicio 4. Considerando los datos de la tabla dada anteriormente, conteste las preguntas.

a) ¿Cuántos litros bombea el corazón en 6 minutos?
b) ¿Cuántos litros bombea en 18 minutos?
c) ¿Cuántos litros bombea en 25 minutos?
d) ¿Cuánto tarda el corazón en bombear 100 litros?
e) ¿Cuánto tarda en bombear 150 litros?
f) ¿Cuánto tarda en bombear 80 litros?

Ahora vamos a utilizar triángulos rectángulos para seguir estudiando la proporcionalidad directa. Se llama triángulo rectángulo aquel que tiene un ángulo recto, como el $\triangle$ *ABC* (triángulo de vértices *A*, *B*, *C*) que se ilustra a continuación:

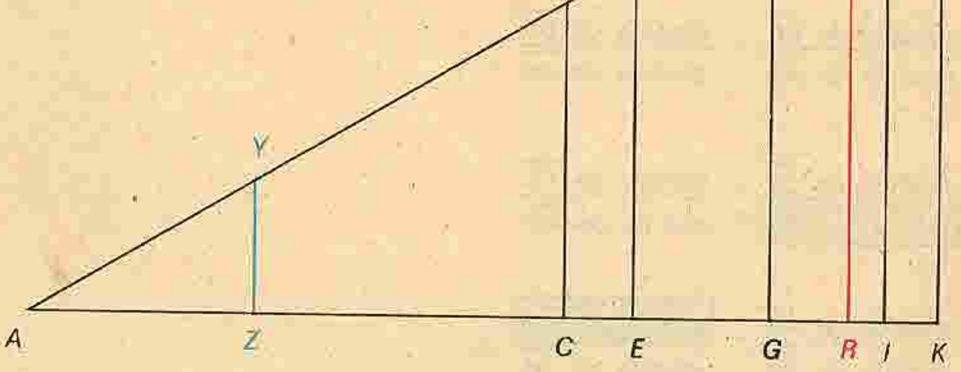


En un triángulo rectángulo los lados reciben nombres especiales.



Ejercicio 5.

a) Mida usted en milímetros los catetos de los siguientes triángulos rectángulos y anote los datos que faltan en la tabla.



	Δ *ABC*	Δ *ADE*	Δ *AFG*	Δ *AHI*	Δ *AJK*
a			56		
b			98		
$\frac{a}{b}$			.57		

(*a* es la medida del cateto vertical y *b* la medida del cateto horizontal, de cada triángulo.)

En la tabla se observa que a segmentos *a*, cada vez mayores, corresponden segmentos *b*, también cada vez mayores.

b) ¿Cómo son las razones $\frac{a}{b}$ en la tabla?

c) ¿Existe proporcionalidad directa entre las medidas de los catetos de todos esos triángulos?

d) ¿Cuánto mide el cateto $\overline{QR}$ del Δ *AQR*?

e) Conociendo la medida de $\overline{QR}$, calcule la medida del cateto $\overline{AR}$ (no lo mida directamente). Después de calcular la medida, mida el cateto y compare sus resultados.

f) ¿Cuánto mide el cateto $\overline{AZ}$?

g) Sabiendo lo que mide $\overline{AZ}$, encuentre la medida del cateto $\overline{ZY}$, sin medirlo directamente. Después mídalo y compare sus resultados.

Ejercicio 6. De la tabla anterior podemos obtener varias proporciones. Complete usted los datos que faltan en algunas de ellas.

a) $$\frac{\text{medida de } \overline{BC}}{\text{medida de } \overline{AC}} = \frac{\text{medida de } \overline{DE}}{\text{medida de } \overline{AE}}$$

b) $$\frac{\text{medida de } \overline{DE}}{\boxed{\phantom{\text{medida de } AE}}} = \frac{\text{medida de } \overline{FG}}{\text{medida de } \overline{AG}}$$

c) $$\frac{\text{medida de } \overline{FG}}{\text{medida de } \overline{AG}} = \frac{\boxed{\phantom{\text{medida de } HI}}}{\text{medida de } \overline{AI}}$$

d) $\dfrac{\text{medida de } \overline{JK}}{\text{medida de } \overline{AK}} = \dfrac{\text{medida de } \overline{HI}}{\boxed{}}$

e) $\dfrac{\boxed{}}{\text{medida de } \overline{AR}} = \dfrac{\text{medida de } \overline{AY}}{\boxed{}}$

Ejercicio 7. Observe cada tabla y conteste las preguntas.

a)

a	3	9	15	45
b	5	15	25	75

1. ¿Al aumentar *a*, aumenta *b*?

2. ¿La razón $\frac{a}{b}$ es igual en todas las columnas?

3. ¿Hay proporcionalidad directa entre los datos de esta tabla?

b)

a	2	3	6	12
b	7	14	21	28

1. ¿Al aumentar *a*, aumenta *b*?

2. ¿La razón $\frac{a}{b}$ es la misma en todas las columnas?

3. ¿Hay proporcionalidad directa entre los datos de esta tabla?

c)

a	11	22
b	35	45

1. ¿Al aumentar *a*, aumenta *b*?

2. ¿La razón $\frac{a}{b}$ es igual en las dos columnas de la tabla?

3. ¿Hay proporcionalidad directa entre los datos de esta tabla?

d)

a	30	10	5
b	36	12	6

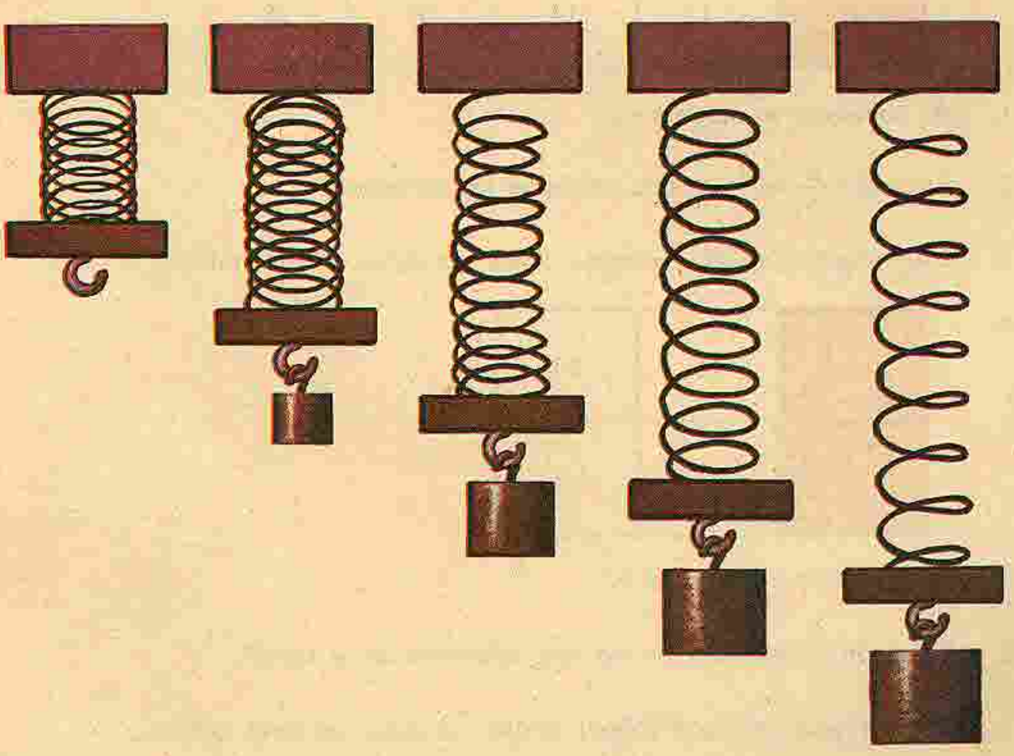
1. ¿Al disminuir *a*, disminuye *b*?
2. ¿La razón $\frac{a}{b}$ es la misma en todas las columnas de la tabla?
3. ¿Hay proporcionalidad directa entre los datos de esta tabla?

e)

a	39	13
b	75	25

1. ¿Al disminuir *a*, disminuye *b*?
2. ¿La razón $\frac{a}{b}$ es igual en las dos columnas de la tabla?
3. ¿Hay aquí proporcionalidad directa?

Problema.



A un resorte se le suspenden diferentes pesos en un extremo y se le miden los alargamientos que sufre. Con los datos obtenidos se forma la tabla siguiente:

p	.1	.2	.4	.6
a	3	6	12	18

(*p* es el peso, medido en kilogramos, que se aplica al resorte y *a* es el alargamiento, en milímetros, que sufre en cada caso.)

a) ¿Al aumentar *p*, aumenta *a*?

b) ¿La razón $\frac{p}{a}$ es igual en todas las columnas de la tabla?

c) ¿Hay proporcionalidad directa entre los pesos y los alargamientos, en esta situación?

Ejercicio 8. Considerando que hay proporcionalidad directa entre los datos *a* y *b* de la siguiente tabla, complete los cuadros que faltan.

a	7		17.5	35	
b		4	5		12
$\frac{a}{b}$					

Con lo que llevamos visto hasta aquí, seguramente usted ya puede decidir cuándo existe y cuándo no existe proporcionalidad directa en una situación dada. En la siguiente tabla se ilustran las dos propiedades que caracterizan la proporcionalidad directa.

Al aumentar *a*, aumenta *b* →
Al disminuir *a*, disminuye *b* ←
I

a	3	6	12	18	24	30
b	4	8	16	24	32	40
$\frac{a}{b}$	.75	.75	.75	.75	.75	75

Al dividir *a* entre *b*, se obtiene el mismo cociente
II

Observación. Conviene hacer notar que estas propiedades no son independientes una de la otra. Si en todas las columnas de una tabla, como la que estamos discutiendo, el cociente o razón de a entre b es un mismo número, debe ocurrir forzosamente que al aumentar a también aumente b. O que al disminuir a también disminuya b.

El conocimiento de estas propiedades nos servirá para resolver problemas en los que haya proporcionalidad directa. Veamos algunos ejemplos.

Problema. Si por 7 boletos para una función de teatro se pagaron $84.00, ¿cuántos boletos de la misma clase pueden adquirirse por $108.00?

Es claro que si se tiene *más* dinero se pueden comprar *más* boletos de la misma clase. Podemos plantear una tabla como la siguiente para resolver el problema.

p	84	108
b	7	x

(p es el dinero que se gasta en los boletos y b es el número de boletos que se pueden adquirir.)

Como el problema es de proporcionalidad directa, las razones $\frac{84}{7}$ y $\frac{108}{x}$ deben ser iguales.

$$\frac{84}{7} = \frac{108}{x}$$

$$12 = \frac{108}{x}$$

La solución de esta ecuación es $x = 9$.

Por consiguiente, la respuesta al problema será: "Se pueden adquirir 9 boletos de esa clase con $108.00".

Problema. Un automóvil, que viaja con velocidad constante, recorre 255 km en 3 horas. ¿Cuántas horas empleará en recorrer 425 km a la misma velocidad?

Obviamente, si ha de recorrer *más* kilómetros a la misma velocidad, tendrá que emplear *más* tiempo. Podríamos plantear el problema con la siguiente tabla

d	255	425
t	3	x

(d es la distancia en km y t es el tiempo en horas.)

De esta tabla obtenemos la ecuación

$$\frac{255}{3} = \frac{425}{x}$$

Y la solución de esta ecuación nos dará la solución del problema.

Problema. Si se sabe que 125 gramos de sal contienen 50 gramos de sodio, ¿cuánto sodio habrá en 30 gramos de sal?

Desde luego, si tenemos *menos* sal, tendremos *menos* sodio.

Podremos formular la tabla siguiente:

gramos de sal	125	30
gramos de sodio	50	x

Y al resolver la ecuación

$$\frac{125}{50} = \frac{30}{x}$$

sabremos cuántos gramos de sodio hay en 30 gramos de sal.

Ejercicio 9.

Resuelva los siguientes problemas de proporcionalidad directa.

a) Una enfermera le toma el pulso a un paciente y cuenta 12 pulsaciones en 10 segundos. ¿Cuántas pulsaciones deberá contar en 1 minuto?

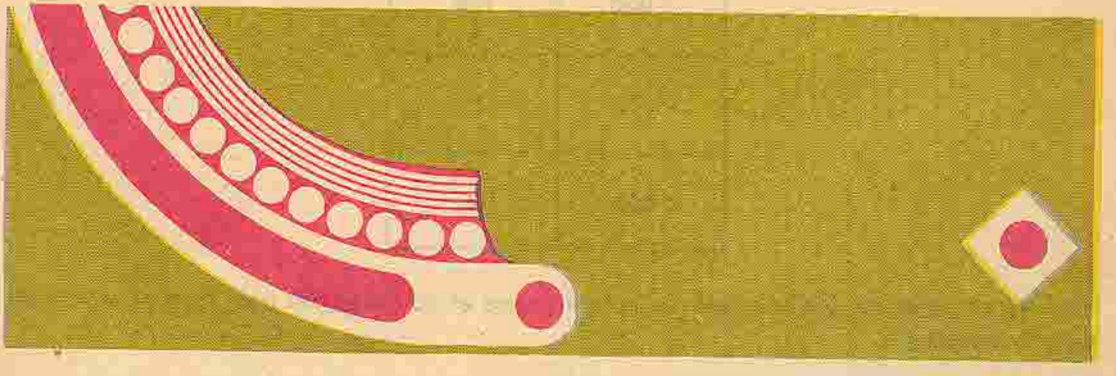
b) En 5 minutos los riñones filtran 625 mililitros de sangre. ¿Cuántos mililitros de sangre filtran en 1 hora?

c) Normalmente un hombre adulto respira 195 veces en 15 minutos. ¿En qué tiempo respirará 1'560 veces?

d) Si una máquina impresora puede imprimir 28 000 pliegos en un turno de 8 horas, ¿en qué tiempo imprimirá 70 000 pliegos?

e) ¿Cuál será el radio de una circunferencia que mide 31.40 pulgadas, si sabemos que otra circunferencia tiene un radio de 3 pulgadas y mide 18.84 pulgadas?

f) La distancia del Sol a la Tierra es de 150 millones de kilómetros. Si la luz del Sol tarda 500 segundos en llegar a la Tierra, ¿cuántos segundos tardará en llegar a Marte? Sabemos que la distancia de la Tierra a Marte es de 74 millones de kilómetros.



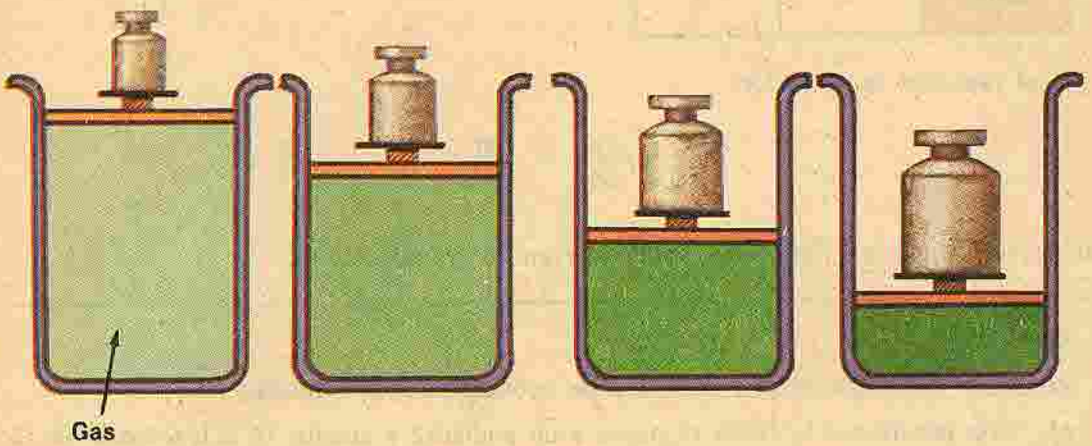
2. Proporcionalidad inversa

A continuación vamos a estudiar algunos problemas de tipo diferente a los que hemos visto.

Ejemplo:

Un físico irlandés, Roberto Boyle, y un francés, Edmundo Mariotte, realizaron varios experimentos con gases y descubrieron una Ley que relaciona el volumen de un gas con la presión que se aplica a ese gas.

Observemos las siguientes ilustraciones de un experimento que hicieron:



A una cantidad fija de gas le aplicaron diferentes pesos y vieron que al *aumentar* el peso, *disminuyó* el volumen. Al medir los diferentes pesos y volúmenes obtuvieron la siguiente tabla:

p	*v*
250	400
500	200
1 000	100
2 000	50
4 000	25

(*p* es el peso en gramos que se aplica y *v* es el volumen del gas, medido en centímetros cúbicos.)

Ejercicio 10. Vea la tabla y conteste estas preguntas:

a) ¿Qué volumen ocupó ese gas al aplicársele un peso de 1 kilogramo?

b) ¿Qué volumen ocupó el gas al aplicársele un peso de 2 kilogramos?

c) ¿Qué peso se aplicó al gas para que su volumen fuera de 25 centímetros cúbicos?

d) ¿Bajo qué peso el volumen del gas fue de 400 centímetros cúbicos?

En la tabla se observa que cuando el peso se *aumentó al doble*, el volumen *se redujo a la mitad*; cuando el peso *aumentó al cuádruplo*, el volumen se *redujo a una cuarta parte*; cuando el peso *aumentó 8 veces*, el volumen *redujo 8 veces*; etc.

Si se tienen dos conjuntos de datos relacionados, como en la tabla anterior, se dice que hay *proporcionalidad inversa* entre esos datos. Aquí, por ejemplo, *el* volumen del gas es *inversamente proporcional* a la presión que recibe. (Esta es la Ley que descubrieron Boyle y Mariotte).

Ejercicio 11.

a) Complete la tercera columna de la tabla, multiplicando *p* por *v*.

p	v	$p \cdot v$
250	400	
500	200	
1 000	100	
2 000	50	
4 000	25	

b) ¿Cómo son los productos $p \cdot v$ en esta tabla?

Según se observa, en este caso de proporcionalidad inversa *hay dos características:*

I

Al aumentar *p*, disminuye v

Al disminuir *p*, aumenta v

p	*v*	*p v*
250	400	100 000
500	200	100 000
1 000	100	100 000
2 000	50	100 000
4 000	25	100 000

II

El producto *pv* es el mismo en todos los renglones.

Como ya sabemos que existe *proporcionalidad inversa* entre *p* y *v*, podemos encontrar otros datos que no aparecen en la tabla. Por ejemplo, ¿qué volumen ocupará ese mismo gas, si se le aplica un peso de 1250 gramos?

Solución:

Para encontrar la respuesta podríamos anotar los datos en la siguiente forma:

p	*v*
1250	*x*

Sabemos que en este caso el producto *p v* debe ser 100 000. Entonces podemos plantear la ecuación

$$1250\,x = 100\,000$$

La solución de esta ecuación es $x = 80$. Por tanto, el volumen que ocupará ese gas bajo un peso de 1 250 gramos será de 80 cm^3.

Problema: ¿Qué peso debe aplicársele a ese gas para que su volumen sea de 40 cm^3 ?

Solución:

Como el producto *p v* debe ser 100 000, planteamos y resolvemos la ecuación

$$x \,.\, 40 = 100\,000$$

$$x = \quad 2\,500$$

Por consiguiente, el peso que debe aplicársele al gas es de 2 500 gramos.

Ejercicio 12. Encuentre los siguientes datos, que no aparecen en la tabla dada.

a) ¿Cuál es el volumen de ese gas cuando se le aplica una presión de 750 gramos?

b) ¿Qué volumen ocupará ese gas bajo una presión de 1500 gramos?

c) Si en la tabla $p = 2500$, entonces $v =$ ☐

d) Si $p = 4500$, entonces $v =$ ☐

e) Si $p = 5000$, entonces $v =$ ☐

f) ¿Qué peso debe aplicarse al gas para que su volumen sea de 300 cm^3 ?

g) Si $v = 75$, entonces $p =$ ☐

h) Si $v = 12.5$, entonces $p =$ ☐

Veamos ahora otra situación en la que existe proporcionalidad inversa.

Ejercicio 13.

a) Anote en la tabla las medidas de los siguientes rectángulos:

I

II

III

IV

	b	*a*	*ba*
Rectángulo I			
Rectángulo II			
Rectángulo III			
Rectángulo IV			

(*b* es la medida de la base y *a* es la medida de la altura, en milímetros, de cada rectángulo.)

b) ¿Cómo es el producto de *b* por *a* en todos los casos?

c) ¿Qué es en cada rectángulo el producto de *b* por *a*?

d) ¿Significa esto que los cuatro rectángulos tienen igual área?

e) ¿Al disminuir *b*, aumenta *a*?

f) ¿Al aumentar *b*, disminuye *a*?

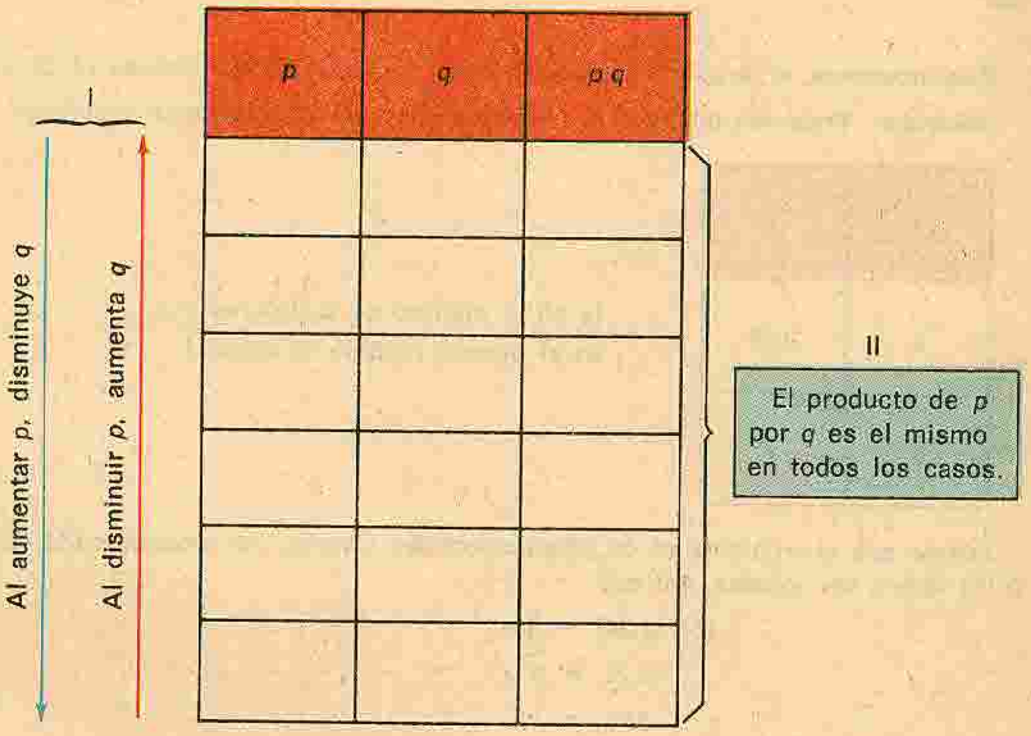
Considerando todas estas características, podemos afirmar que "en rectángulos de igual área, las medidas de las bases son inversamente proporcionales a las medidas de las alturas".

Ejercicio 14. En la siguiente tabla todos los rectángulos tienen igual área. Anote los datos que faltan en la tabla.

	b	*a*	*ba*
Rectángulo I	12	12	144
Rectángulo II		16	144
Rectángulo III	8		144
Rectángulo IV	6	24	
Rectángulo V	3		
Rectángulo VI		72	
Rectángulo VII	1		
Rectángulo VIII	5		
Rectángulo IX		360	

En resumen:

Dados dos conjuntos de datos p y q, si existe proporcionalidad inversa entre ellos, podemos formar una tabla con las características siguientes:



p	q	pq

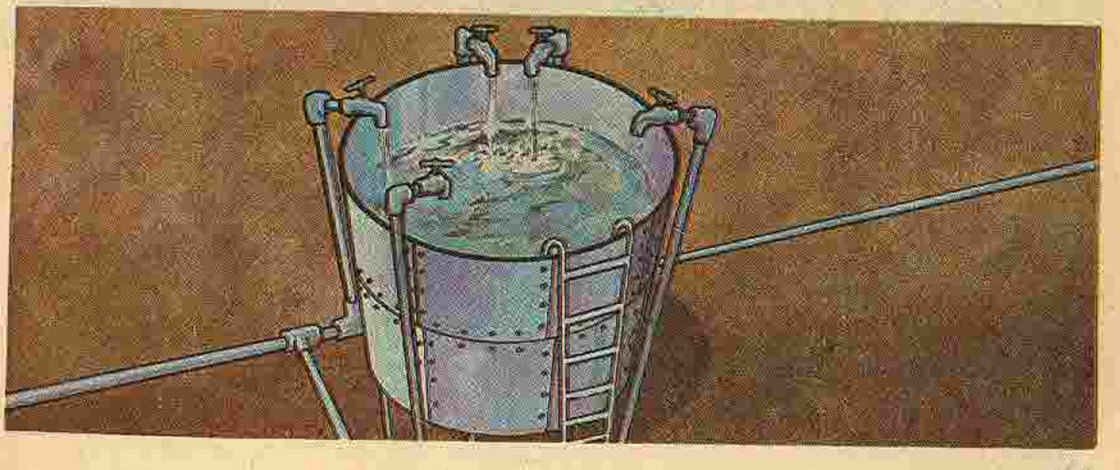
El producto de p por q es el mismo en todos los casos.

Observación:

Conviene hacer notar que estas características no son independientes una de la otra, pues si el producto $p\,q$ es el mismo en todos los renglones de la tabla, forzosamente ocurre que al aumentar p, disminuye q, y viceversa, al disminuir p, aumenta q.

Conociendo estas propiedades podemos resolver problemas de proporcionalidad inversa. Veamos, por ejemplo, los siguientes:

Problema.



Un depósito de agua se llena en 2 horas y $\frac{1}{4}$ empleando 5 surtidores de agua de igual diámetro. ¿En qué tiempo se llenará si se utilizan sólo 3 surtidores de esos cinco?

Evidentemente, si se usan *menos* surtidores, tardará *más* en llenarse el depósito.

Solución: Podemos plantear el problema con una tabla como la siguiente:

s	t
5	2.25
3	x

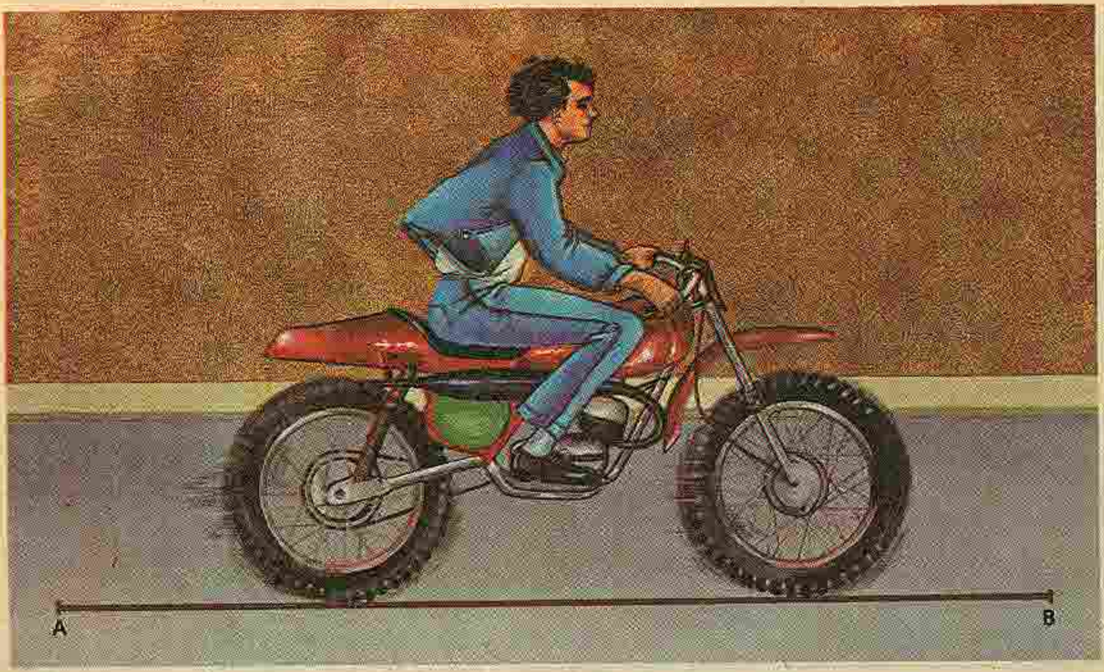
(s es el número de surtidores y t es el tiempo, medido en horas.)

Puesto que el problema es de proporcionalidad inversa, los productos (5) (2.25) y 3 (x) deben ser iguales. Así que

$$(5)\ (2.25) = 3\ x$$
$$11.25 = 3\ x$$
$$3.75 = x$$

Respuesta: Usando sólo 3 surtidores, el depósito se llenará en 3 horas y $\frac{3}{4}$.

Problema.



Un señor utiliza una motocicleta para ir de su casa a su trabajo y tarda 12 minutos viajando a una velocidad de 50 kilómetros por hora. ¿En qué tiempo hará el mismo recorrido viajando a 60 kilómetros por hora?

Es claro que si el señor *aumenta* su velocidad, *disminuye* su tiempo de recorrido.

Solución: Podemos plantear el problema con la siguiente tabla:

v	t
50	12
60	x

(v es la velocidad en $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ y t es el tiempo en minutos.

El producto $v\ t$ debe ser el mismo en los dos renglones. Por lo tanto,

$$50.12 = 60\ x$$
$$600 = 60\ x$$
$$10 = x$$

Respuesta: El señor hará el mismo recorrido en 10 minutos.

Ejercicio 15. Resuelva usted los siguientes problemas de proporcionalidad inversa.

a) Un tinaco, en el que se almacena agua, se llena en 3.25 horas, empleando 2 surtidores del mismo diámetro. ¿En qué tiempo se llenará ese tinaco si se emplean 5 surtidores iguales a los anteriores?

b) Dos terrenos rectangulares tienen la misma área. Uno de ellos mide 14 metros de frente y 24 metros de fondo. Si el otro terreno mide 8 metros de frente, ¿cuánto mide de fondo?

c) Un automovilista emplea 4.5 horas en ir de México a Orizaba, viajando a una velocidad de 75 kilómetros por hora. ¿A qué velocidad deberá viajar si desea hacer el mismo recorrido en 3.25 horas?

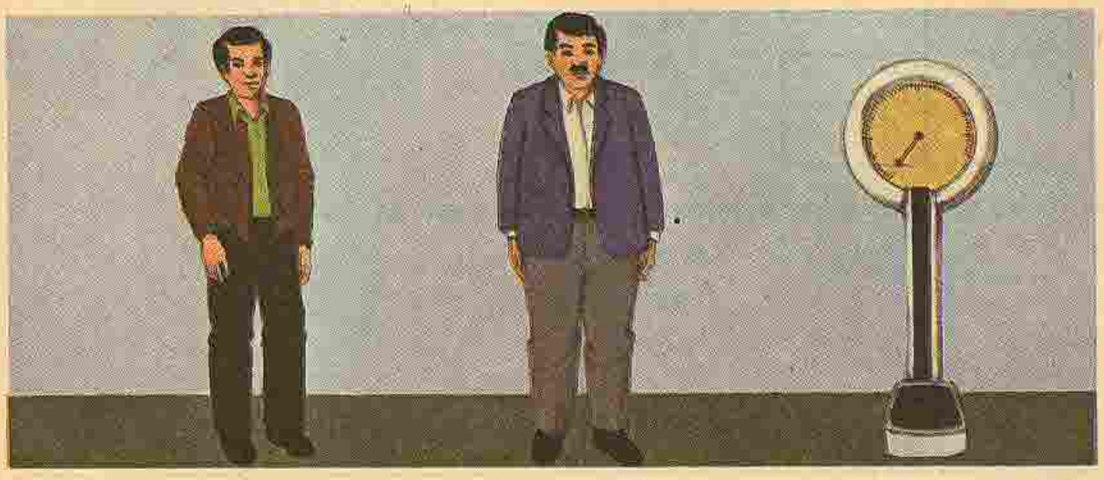
d) Viajando a una velocidad de 80 kilómetros por hora, un camión de pasajeros tarda 6.3 horas en ir de una ciudad a otra. Si un camión carguero hizo este mismo recorrido en 10 horas, ¿cuál fue su velocidad?

e) Un avión que vuela a 600 kilómetros por hora, tarda 3.9 horas en hacer un recorrido. ¿En qué tiempo hará el mismo recorrido otro avión que vuela a 900 kilómetros por hora?

3. Problemas

Resuelva los siguientes problemas. Unos son de proporcionalidad directa y otros de proporcionalidad inversa. Para distinguirlos, usted puede preguntarse en cada uno "¿Qué le pasaría a este dato si aumentara o disminuyera este otro?", tal como lo hemos hecho anteriormente.

a) El cuerpo de una persona que pesa 70 kg contiene 1.4 kg de calcio. Si se supone que todos tenemos la misma proporción de calcio, ¿cuánto calcio hay en el cuerpo de una persona que pesa 90 kg?

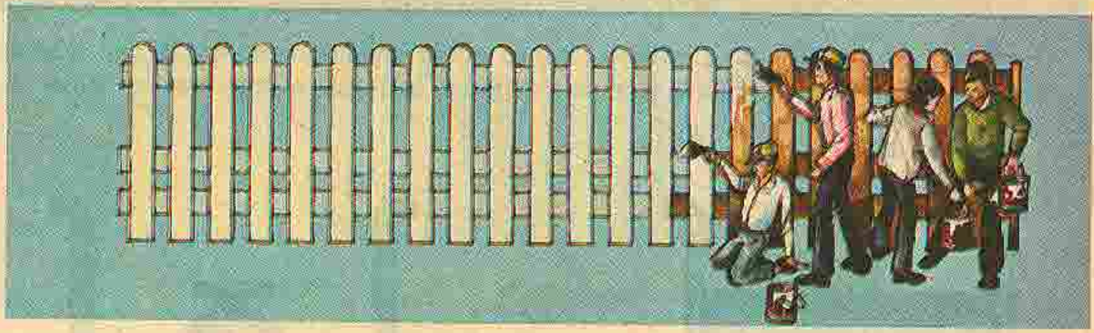


b) Si 4 hombres construyen una barda en 27 horas, ¿en cuánto tiempo la construirán 5 hombres? (Consideramos igual capacidad de trabajo en los trabajadores.)

c) Si un automóvil gasta 7 litros de gasolina en un recorrido de 84 km, ¿cuántos litros de gasolina gastará en un recorrido de 130 km?

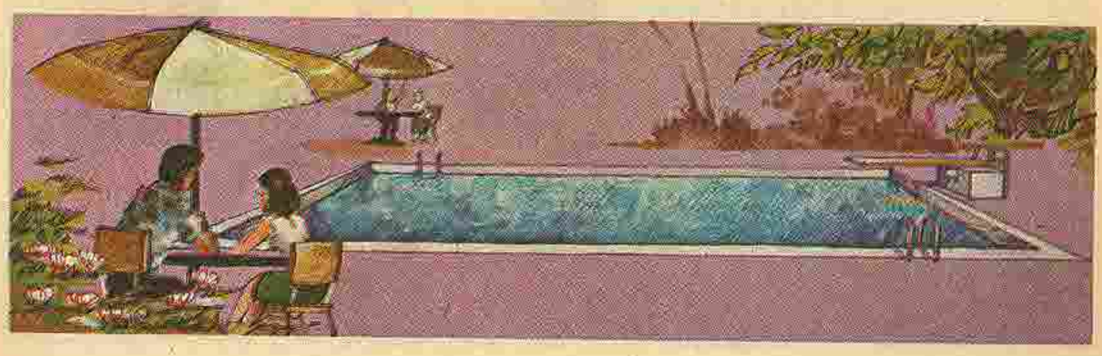
d) Si 5 dólares equivalen a 136 escudos portugueses, ¿cuántos escudos portugueses equivalen a 7 dólares?

e) Si 6 jóvenes pintan una cerca en 8 horas, ¿en cuánto tiempo la pintarán 4 jóvenes? (Suponemos igual capacidad de trabajo en cada uno de los jóvenes.)

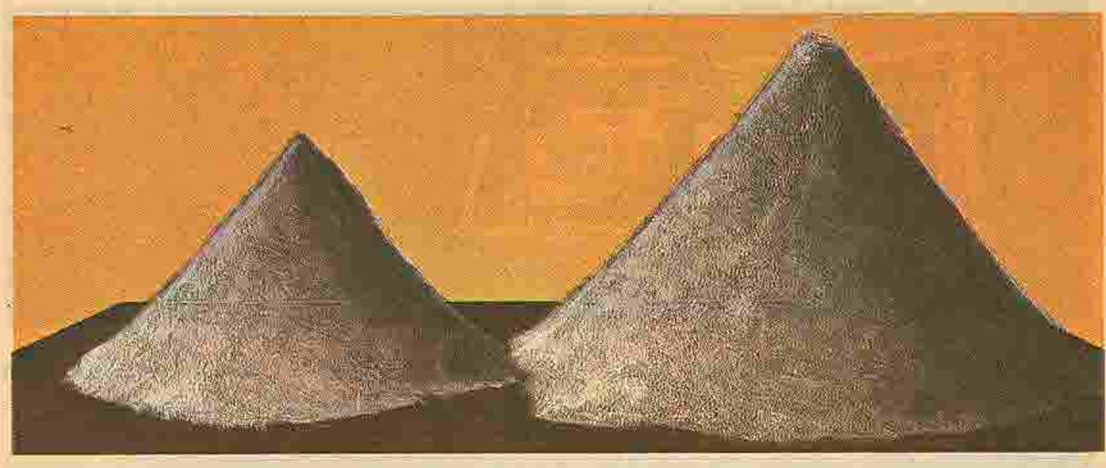


f) En 9 kg de covellina (sulfuro de cobre) hay 5.97 kg de cobre. ¿Cuántos kg de covellina serán necesarios para obtener 7.5 kg de cobre?

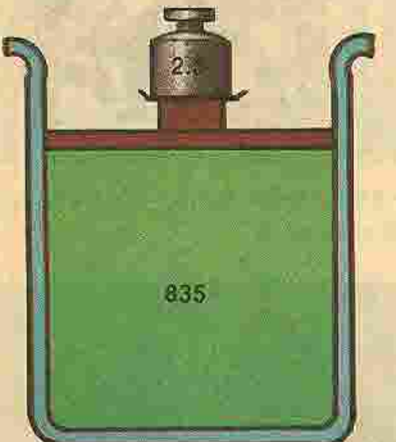
g) Una alberca se vacía en 3.5 horas abriendo 5 coladeras. ¿En cuánto tiempo se vaciará abriendo sólo 3 coladeras?

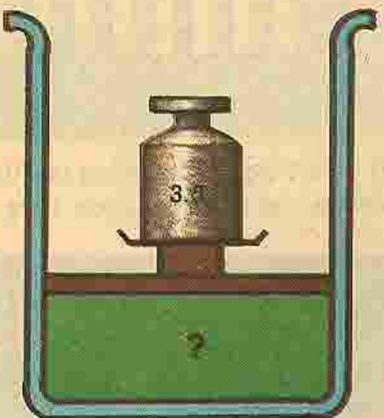


h) En 5 kg de querargirita (cloruro de plata) hay 3.76 kg de plata. ¿Qué cantidad de plata habrá en 9 kg de querargirita?



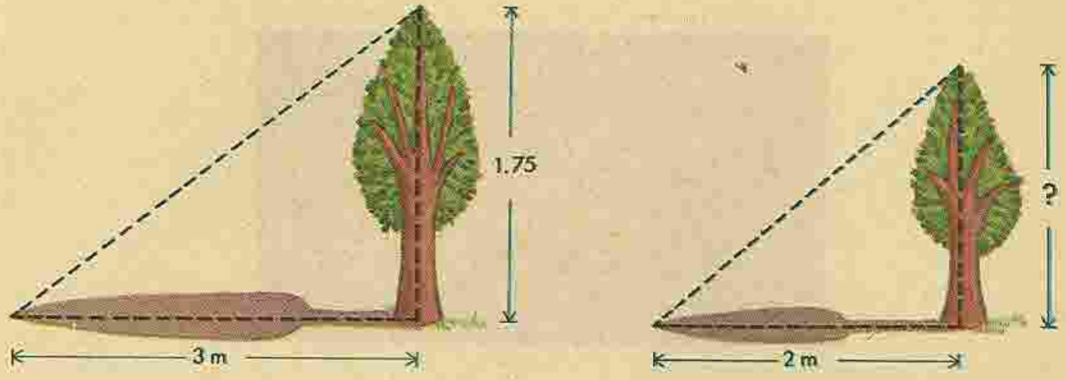
i) Como se muestra en el dibujo, un gas ocupa un volumen de 835 cm^3 cuando soporta un peso de 2.5 kg. ¿Qué volumen ocupará ese gas al soportar un peso de 3.5 kg?



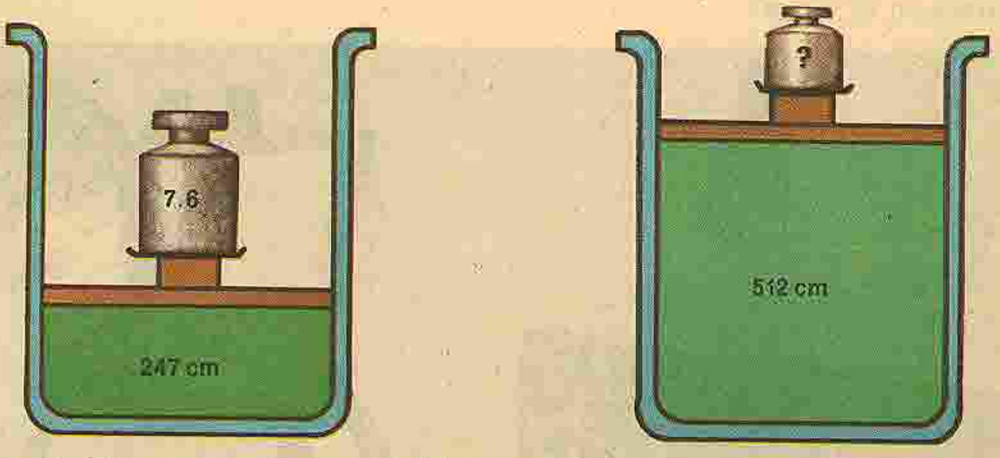


j) Un cuarto de litro de jugo de naranja contiene 132 miligramos de vitamina C. ¿Cuántos miligramos de vitamina C habrá en 3 litros de jugo de naranja?

k) Como se muestra en la figura, un árbol de 1.75 m de altura proyecta una sombra de 3 m. ¿Qué altura tendrá un árbol que proyecte una sombra de 2 m en el mismo instante?

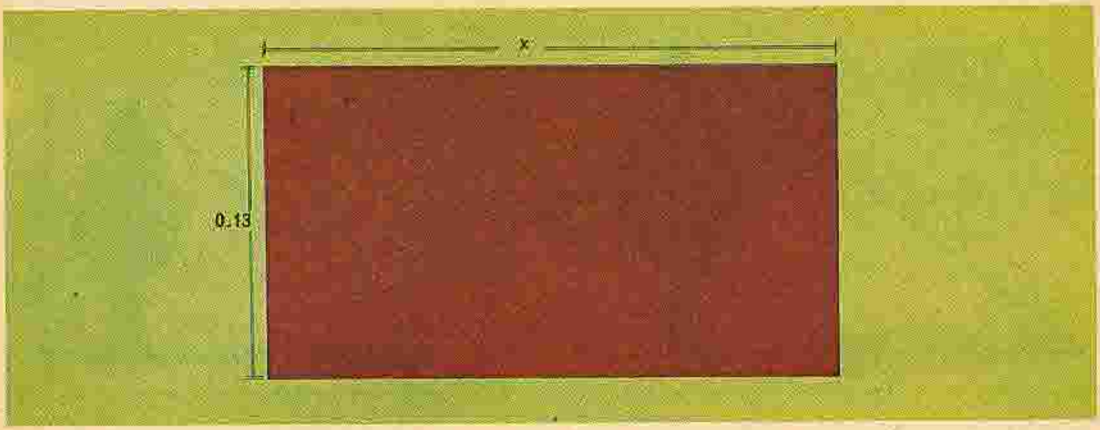


l) Cierta cantidad de gas, que soporta un peso de 7.6 kg, ocupa un volumen de 247 cm^3. Si se desea que esa cantidad de gas ocupe un volumen de 512 cm^3, ¿qué peso debe ponérsele?

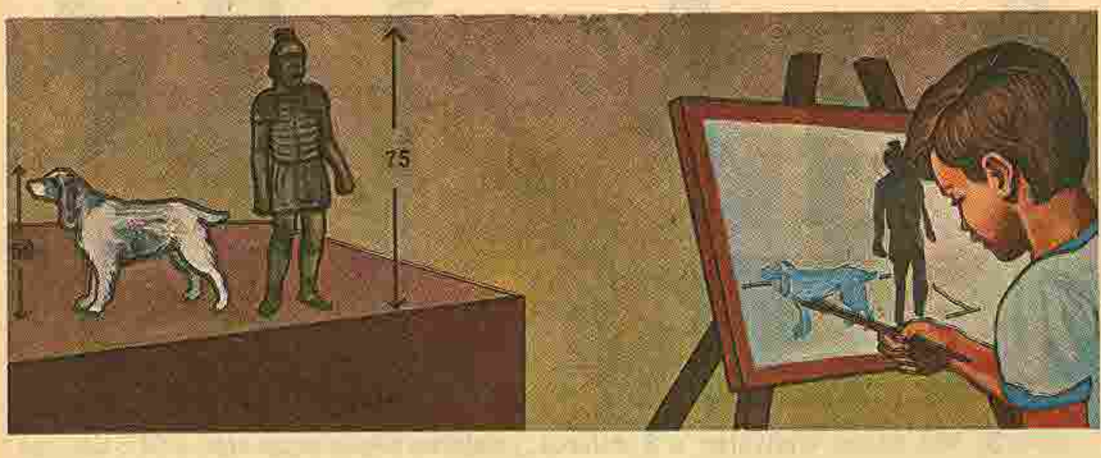


m) Si 100 pesos equivalen a 8 dólares, ¿cuántos pesos equivalen a 32.5 dólares?

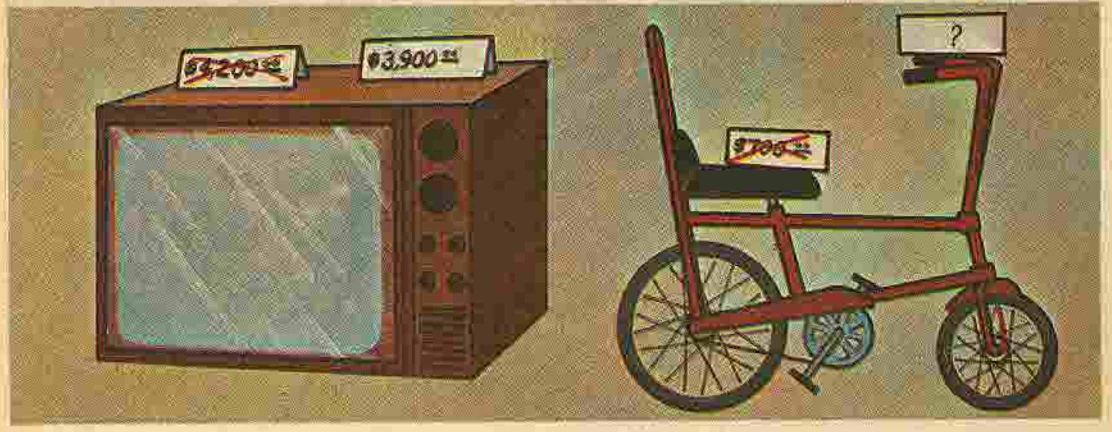
n) Las medidas reales de un terreno son de 15.50 m de ancho por 25.50 m de largo. Si se hace un plano a escala de ese terreno y se desea que el ancho mida 0.13 m, ¿cuánto debe medir el largo en el plano?



o) En una clase de dibujo al natural, las alturas reales del guerrero y el perro usados como modelos, son 75 cm y 50 cm respectivamente. Si en el dibujo se debe guardar la proporción y la altura del perro es de 23 cm, ¿cuál debe ser la altura del guerrero en el dibujo?



p) Una casa comercial rebaja todos sus precios proporcionalmente. Si un televisor de $4,200.00 se ofrece a $3,900.00 ¿Cuánto se debe pagar por una bicicleta que inicialmente costaba $700.00?



X

Tanto por ciento

Seguramente usted ha escuchado o leído expresiones como las siguientes:

"Hay un impuesto del 10% (diez por ciento) en la compra de artículos de lujo"

"El 95% (noventa y cinco por ciento) de los mexicanos hablan español"

"En la farmacia Tal hacen un descuento del 40% (cuarenta por ciento)"

"El banco Fulano ofrece el 4.5% (cuatro y medio por ciento) de interés anual en cuentas de ahorro"

¿Sabe usted qué indican las expresiones como 10%, 95%, 40% y 4.5%?

Tales expresiones indican la razón de un número entre 100. Por ejemplo, 10% quiere decir $\frac{10}{100}$ (10 entre 100); 95% es $\frac{95}{100}$; 40% es $\frac{40}{100}$; 4.5% es $\frac{4.5}{100}$; etc.

Ahora bien, ¿qué significado tiene la frase "5% de 300"?

La expresión "5% de 300" se interpreta como "$\frac{5}{100}$ de 300" y si deseamos obtener los $\frac{5}{100}$ de 300 sólo tenemos que multiplicar $\frac{5}{100} \times 300$. (Usted aprendió esto al estudiar la multiplicación de números racionales).

De esta manera,

$$\boxed{5\% \text{ de } 300} \text{ es } \boxed{\frac{5}{100} \text{ de } 300 = \frac{5}{100} \times 300} = \boxed{15.}$$

En consecuencia, el 5% de 300 es el número 15.

Para atacar los problemas de tanto por ciento, vamos a hacer uso de la siguiente definición:

Definición. Siendo x y r dos números racionales cualesquiera, el $x\%$ de r es el producto de $\frac{x}{100}$ por r.

En símbolos,

$$x\% \text{ de } r = \frac{x}{100} \cdot r$$

Como la razón $\frac{x}{100}$ se puede expresar en forma decimal, podemos manejarla en una notación o en otra

Ejemplo:

a) El $\boxed{10\% \text{ de } 50}$ es $\frac{10}{100} \times 50 = \boxed{10 \times 50} = 5$

b) El $\boxed{15\% \text{ de } 200}$ es $\frac{15}{100} \times 200 = \boxed{15 \times 200} = 30$

c) El $\boxed{2.5\% \text{ de } 60}$ es $\frac{2.5}{100} \times 60 = \boxed{.025 \times 60} = 1.5$

d) El $\boxed{.5\% \text{ de } 25}$ es $\frac{.5}{100} \times 25 = \boxed{.005 \times .25} = .125$

Ejercicio 1. Encuentre usted el número que se pide en cada inciso

a) 25% de 40 b) 50% de 12

c) 75% de 160 d) 10% de 90

e) 12% de 50 f) 1.8% de 300

g) .6% de 500 h) .2% de 100

Problema. En una huerta de 825 palmeras, el 12% de ellas fue atacado por una plaga. ¿Cuántas palmeras fueron atacadas?

Resolución. El problema se resuelve si encontramos el 12% de 825.

$$12\% \text{ de } 825 = \frac{12}{100} \times 825 = \boxed{.12 \times 825} = 99.00$$

Respuesta. Fueron atacadas 99 palmeras.

Observación:

Si dividimos 99 entre 825, obtenemos la misma razón que si dividimos 12 entre 100. Esto significa que el 12% es, en este caso, la razón del número de palmeras enfermas entre el número total de palmeras

$$\frac{12}{100} = \frac{99}{825}$$

Sabiendo esto podíamos haber planteado el problema con una tabla de proporcionalidad directa, como la siguiente:

12	x
100	825
.12	.12

En esta tabla, $\frac{12}{100} = .12$ y $\boxed{\frac{x}{825} = .12}$ Por lo tanto, x es el número 99.

Problema. Un banco ofrece anualmente el 4.5% de interés en cuentas de ahorros. ¿Cuánto ganarán en un año $500.00 ahorrados en ese banco?

Resolución.

$$\text{El } 4.5\% \text{ de } 500 \text{ es } \frac{4.5}{100} \times 500 = \boxed{.045 \times 500} = 22.50$$

Respuesta. Esos $500.00 ganan $22.50 de interés en un año.

Observación:

La razón $\frac{22.50}{500}$ y la razón $\frac{4.5}{100}$ son iguales. Esto significa que el 4.5% es, en este caso, la razón del interés ganado entre el capital ahorrado. Podríamos haber planteado el problema con una tabla y una ecuación, como las siguientes:

4.5	x
100	500
.045	.045

$$\boxed{\frac{x}{500} = .045}$$

$$x = 22.50$$

Problema. En 1969 nuestra producción de azufre fue de 1.6 millones de toneladas. Si en el Istmo de Tehuantepec se obtuvo el 95% de toda la producción, ¿cuántas toneladas de azufre produjo esa zona de nuestro país?

Resolución. ¿Cuál es el 95% de 1.6?

$$\frac{95}{100} \times 1.6 = .95 \times 1.6 = \boxed{1.520}$$

$$\begin{array}{r} .95\\ \times\ 1.6\\ \hline 570\\ 95\\ \hline \boxed{1.520}\end{array}$$

Respuesta. En 1969 el Istmo de Tehuantepec produjo 1.52 millones de toneladas de azufre.

Observación:

$$\frac{95}{100} = .95 \text{ y } \frac{1.52}{1.6} = .95$$

El 95% es aquí la razón de la producción del Istmo entre la producción total del país.

95	x
100	1.6
.95	.95

$$\boxed{\frac{x}{1.6} = .95}$$

$$x = 1.52$$

Ejercicio 2. Aplicando sus conocimientos del tanto por ciento, resuelva los siguientes problemas. (Si lo desea, puede plantearlos como problemas de proporcionalidad directa).

a) En una casa comercial ofrecen televisores a $2 500.00 cada uno. Si se compran en abonos el precio aumenta un 20%. ¿En cuánto sale un televisor comprado a plazos?

b) Jorge solicitó un préstamo personal a una institución bancaria. Si le prestaron $17 000.00 para pagar en un año con recargo del 12%, ¿cuánto debe devolver al banco al vencerse el plazo que le dieron?

c) Cierto tocadiscos tiene un precio de $458.00; pero descuentan el 15% si se paga al contado. ¿Cuánto debe pagarse al contado por ese tocadiscos?

d) Si un banco ofrece el 8% de interés anual para el dinero que se ahorra en esa institución, ¿cuánto debe recibir de intereses una persona que guardó $35 000.00 en ese banco durante 6 meses?

e) En 1969 la producción mundial de algodón fue de, aproximadamente, 11 500 millares de toneladas. Si México aportó el 4.6% de esta producción, ¿cuántas toneladas de algodón produjo nuestro país en ese año?

f) Tlaxcala ocupa, aproximadamente, el .199% de la extensión territorial de la República Mexicana. Si sabemos que el territorio nacional es de 1 972 545 kilómetros cuadrados, ¿cuál es la extensión aproximada de Tlaxcala?

g) Aproximadamente el 14.1% de la población de México se concentra en el Distrito Federal. Si sabemos que en la República hay 50 004 400 habitantes (según el censo de 1970), ¿cuál es la población del Distrito Federal??

h) El cuerpo humano está formado de la siguiente manera:

oxígeno	65%	calcio	2%
carbono	18%	fósforo	1%
hidrógeno	10%	nitrógeno	3%
otros minerales	1%		

1. Si una persona pesa 60 kilogramos, ¿cuántos kilogramos de oxígeno, cuántos de carbono y cuántos de hidrógeno contiene el cuerpo de esa persona?

2. Si otra persona pesa 70 kilogramos, ¿cuántos kilogramos de carbono, cuántos de hidrógeno, cuántos de nitrógeno y cuántos de calcio hay en el cuerpo de esa persona?

3. ¿Cuántos kilogramos de cada uno de los elementos anotados en la tabla contendrá el cuerpo de un muchacho que pesa 40 kilogramos?

Existe otro tipo de problemas de tanto por ciento. Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 1. El 8% de un grupo escolar salió reprobado. Si se sabe que son 6 los alumnos reprobados, ¿cuántos alumnos forman el grupo?

Resolución. Si denominamos con x al número de alumnos del grupo, podremos plantear el problema así:

El 8% de x es 6. ¿Qué número es x?

Esto nos lleva a la ecuación

$$\boxed{\frac{8}{100} \bullet x = 6}$$

o a la ecuación

$$\boxed{(0.8)\ (x) = 6}$$

Al resolver cualquiera de estas ecuaciones encontramos que $x = 75$. Por lo tanto, el problema está resuelto.

Respuesta. El grupo está formado por 75 alumnos

Observación:

$$\frac{8}{100} = .08 \text{ y } \frac{6}{75} = .08$$

El 8% nos indica, en este caso, la razón del número de reprobados entre el total del grupo. Podríamos haber planteado el problema así:

8	6
100	x
.08	.08

$$\boxed{\frac{6}{x} = .08}$$

$$x = 75$$

Ejemplo 2. A un veterinario le informan que el 15% de las ovejas de un rebaño ha enfermado. Si las ovejas enfermas son 36, ¿cuántas ovejas hay en el rebaño?

Resolución. Llamemos r al número de ovejas del rebaño. Entonces ocurre que el 15% de r es 36. Esto es,

$\boxed{\frac{15}{100} \bullet r = 36,}$ o bien, $\boxed{(.15)\,(r) = 36}$

Al resolver cualquiera de estas ecuaciones hallamos que r es el número 240. Por lo tanto, el problema está resuelto.

Respuesta. En el rebaño hay 240 ovejas.

Observación:

$$\frac{15}{100} = .15 \text{ y } \frac{36}{240} = .15$$

El 15% es aquí la razón del número de ovejas enfermas entre el total del rebaño. El problema podría plantearse también así:

15	36
100	r
.15	.15

$$\boxed{\frac{36}{r} = .15}$$

$$r = 240$$

Ejercicio 3. Usando ecuaciones, resuelva usted los siguientes problemas. (Si lo desea, puede plantearlos, como problemas de proporcionalidad directa).

a) En el reparto anual de utilidades de cierta compañía, un empleado sabe que recibe el 4%. Si por este concepto recibió \$3 700. ¿Cuál fue el total de las utilidades?

b) En cada programa de televisión el 30% del tiempo está destinado a anuncios comerciales. Si en un programa hubo 27 minutos de comerciales, ¿cuál fue la duración total de dicho programa?

c) El diteluro de oro es un mineral que contiene 44% de oro. ¿Cuántos kilogramos de diteluro son necesarios para obtener 8 kilogramos de oro?

d) Al comprar unos carbones para generador cobran 75 centavos de impuesto. Si tal impuesto es el 3% del precio, ¿cuánto cuestan dichos carbones sin el impuesto?

e) Una persona redujo el 15% de su peso. Si ahora pesa 12 kilogramos menos, ¿cuál era su peso antes de reducir?

f) Aproximadamente el 10% del cuerpo humano está formado por hidrógeno. Si en el cuerpo de una persona hay 6.5 kilogramos de hidrógeno, ¿cuánto pesa esa persona?

g) En 1970 aproximadamente el 15% de la población cubana estaba formada por mulatos. Si había 1.28 millones de mulatos, ¿cuál era, aproximadamente, la población total?

h) Aproximadamente el 20% de la cincita (óxido de cinc) es oxígeno. ¿Cuánta cincita es necesaria para obtener 3.2 kilogramos de oxígeno?

Resolvamos ahora otros problemas de tanto por ciento en los que también podemos usar ecuaciones.

Ejemplo. De un grupo de 50 alumnos, reprobaron 3. ¿Qué por ciento del grupo está reprobado?

Resolución. Si llamamos n al por ciento de reprobados, podemos plantear el problema con la ecuación

$$n \bullet 50 = 3$$

Al resolver esta ecuación encontramos que $n = .06$ y como $.06 = \frac{6}{100} = 6\%$, ya tenemos resuelto el problema.

Respuesta. Está reprobado el 6% del grupo.

Observación:

$$6\% = \frac{6}{100} = \boxed{.06} \text{ y } \frac{3}{50} = \boxed{.06}$$

El 6% es aquí la razón del número de reprobados entre el total del grupo. Podríamos haber planteado el problema así:

n	3
100	50
.06	.06

$$\frac{n}{100} = .06$$

$$n = 6$$

Ejercicio 4. Usando ecuaciones, resuelva los siguientes problemas. (Si lo desea, puede plantearlos como problemas de proporcionalidad directa).

a) Si en 30 kilogramos de cincita hay 6 kilogramos de oxígeno, ¿qué por ciento de la cincita es oxígeno?

b) Si al cabo de un año un capital de 2 000 pesos produjo 90 pesos de interés en cierto banco, ¿qué por ciento anual paga ese banco por el dinero depositado en él?

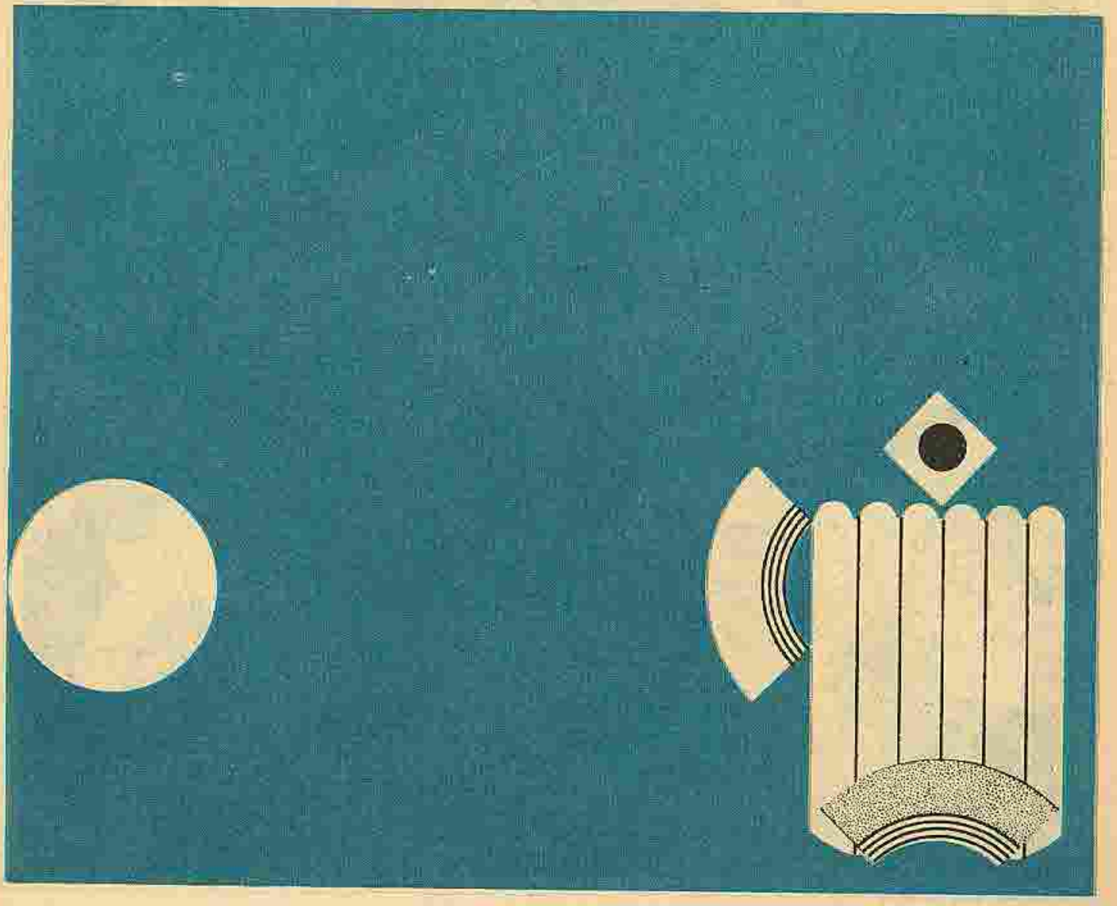
c) En Uruguay dedican, aproximadamente, 131 mil kilómetros cuadrados a la ganadería. Si la extensión territorial de dicho país es aproximadamente de 187 mil kilómetros cuadrados, ¿qué por ciento del territorio se ocupa en la ganadería?

d) En un terreno de 200 metros cuadrados hay 80 metros cuadrados que tienen construcción. ¿Qué por ciento del terreno está construido?

e) Un joven estudia durante 6 horas diariamente. ¿Qué por ciento del día dedica al estudio este joven?

f) Para elaborar 100 kilogramos de cierta tela se emplean 35 kilogramos de algodón. ¿Qué por ciento de algodón contendrá esa tela?

g) Un conductor llenó el depósito de su automóvil al empezar un viaje de México a Puebla. Al llegar a Puebla observó que había consumido 12 litros de combustible. Si la capacidad del depósito es de 60 litros, ¿qué por ciento de ese combustible se gastó en el viaje?



Solución a los ejercicios y problemas

Capítulo Segundo

Los números racionales

I. Fracciones y números racionales

1. Fracciones

Ejercicio 1

a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{3}{16}$ d) $\frac{4}{6}$

e) $\frac{2}{5}$ f) $\frac{1}{2}$ g) $\frac{3}{7}$ h) $\frac{5}{24}$

i) $\frac{3}{8}$ j) $\frac{1}{4}$ k) $\frac{7}{4}$ l) $\frac{8}{9}$

m) $\frac{5}{8}$ n) $\frac{1}{4}$ ó $\frac{3}{12}$ o) $\frac{1}{7}$ ó $\frac{2}{14}$ p) $\frac{4}{10}$

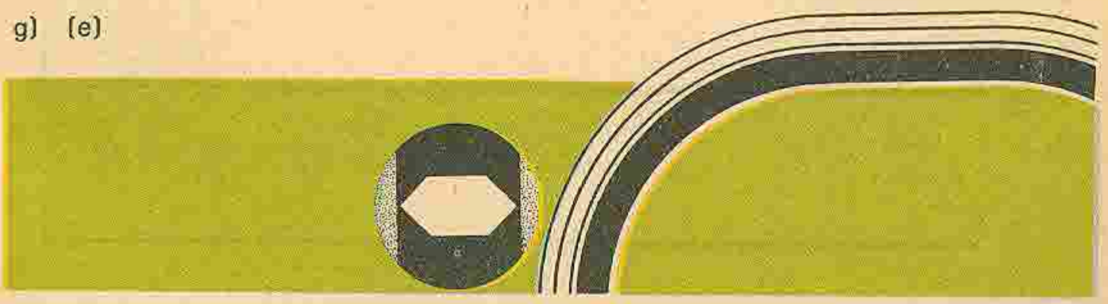
q) $\frac{5}{4}$ r) $\frac{14}{16}$

Ejercicio 2

a) (c) b) (g) c) (a)

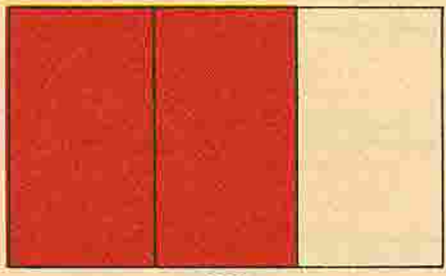
d) (f) e) (b) f) (d)

g) (e)

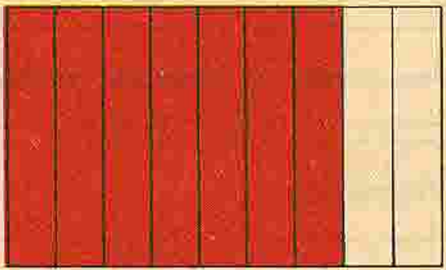


2. Fracciones y números racionales

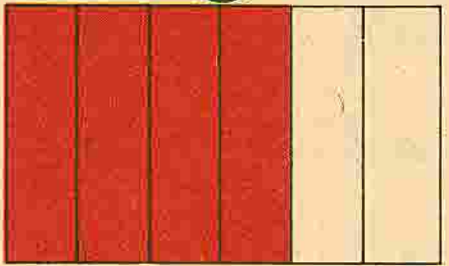
Ejercicio 3



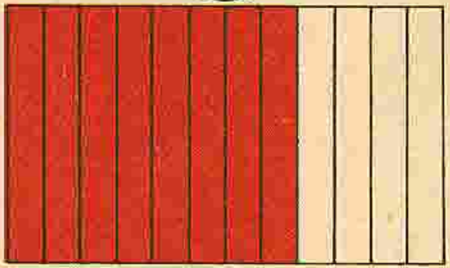
$\boxed{\frac{2}{3}}$



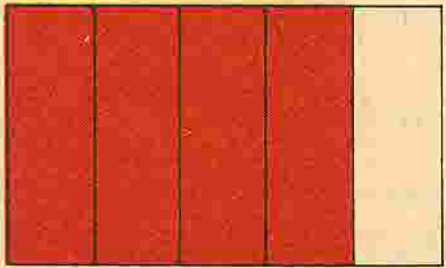
$\boxed{\frac{7}{9}}$



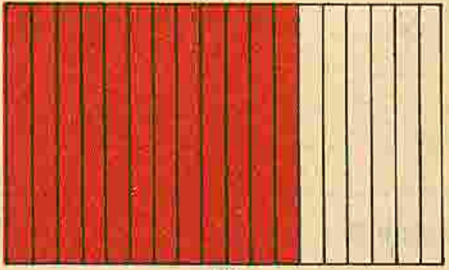
$\frac{4}{6}$



$\boxed{\frac{8}{12}}$



$\frac{4}{5}$



$\frac{12}{18}$

Ejercicio 4

$\frac{3}{4}$

$\frac{9}{12}$

$\frac{2}{5}$

Ejercicio 5

$\frac{4}{20} = .2,$ $\frac{10}{20} = .5,$ $\frac{9}{30} = .3,$ $\frac{8}{40} = .2,$

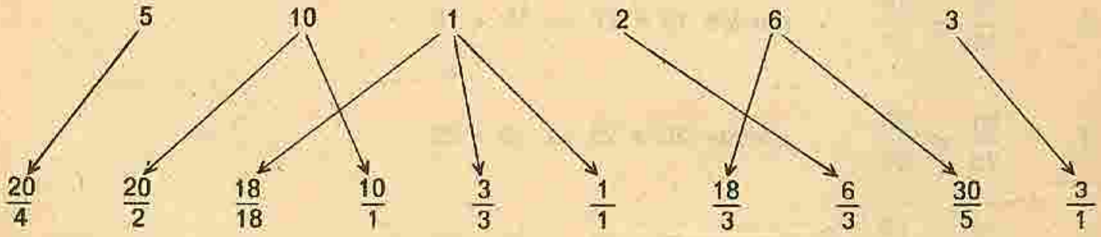
$\frac{12}{40} = .3,$ $\frac{6}{20} = .3,$ $\frac{30}{100} = .3,$ $\frac{5}{10} = .5,$

$\frac{3}{15} = .2,$ $\frac{7}{14} = .5,$ $\frac{7}{35} = .2,$ $\frac{4}{8} = .5$

De estas fracciones, las que representan al mismo número racional que $\frac{1}{2}$ son $\frac{10}{20}, \frac{5}{10}, \frac{7}{14}, \frac{4}{8}$; las que representan al mismo número que la fracción $\frac{1}{5}$ son $\frac{4}{20}, \frac{8}{40}, \frac{3}{15}, \frac{7}{35}$ y las que representan al número $\frac{3}{10}$ son $\frac{9}{30}, \frac{12}{40}, \frac{6}{20}, \frac{30}{100}$.

3. Los números racionales y los números naturales

Ejercicio 6



Ejercicio 7

$\frac{8}{4}$, $\frac{5}{1}$, $\frac{2}{2}$, $\frac{19}{19}$, $\frac{1}{1}$, $\frac{126}{1}$, $\frac{12}{3}$, $\frac{15}{15}$ y $\frac{20}{4}$

4. Fracciones que representan un mismo número

Ejercicio 8

a) $\frac{18}{36} = \frac{7}{14}$ porque $18 \bullet 14 = 36 \bullet 7$

b) $\frac{12}{32} \neq \frac{5}{6}$ porque $12 \bullet 6 \neq 32 \bullet 5$

c) $\frac{20}{60} = \frac{15}{45}$ porque $20 \bullet 45 = 60 \bullet 15$

d) $\frac{12}{60} \neq \frac{40}{100}$ porque $12 \bullet 100 \neq 60 \bullet 40$

e) $\frac{15}{20} = \frac{3}{4}$ porque $15 \bullet 4 = 20 \bullet 3$

f) $\frac{7}{12} = \frac{35}{60}$ porque $7 \bullet 60 = 12 \bullet 35$

g) $\frac{5}{6} = \frac{60}{72}$ porque $5 \bullet 72 = 6 \bullet 60$

h) $\frac{7}{9} \neq \frac{21}{18}$ porque $7 \bullet 18 \neq 9 \bullet 21$

i) $\frac{12}{15} = \frac{28}{35}$ porque $12 \bullet 35 = 15 \bullet 28$

j) $\frac{10}{15} = \frac{18}{27}$ porque $10 \bullet 27 = 15 \bullet 18$

k) $\frac{20}{25} \neq \frac{25}{20}$ porque $20 \bullet 25 \neq 25 \bullet 25$

l) $\frac{16}{20} = \frac{20}{25}$ porque $16 \bullet 25 = 20 \bullet 20$

m) $\frac{3}{5} = \frac{3a}{5a}$ porque $3 \bullet 5a = 5 \bullet 3a$

n) $\frac{2}{3} = \frac{2x}{3x}$ porque $2 \bullet 3x = 3 \bullet 2x$

o) $\frac{2r}{7r} = \frac{2}{7}$ porque $2r \bullet 7 = 7r \bullet 2$

p) $\frac{ab}{ac} = \frac{b}{c}$ porque $ab \bullet c = ac \bullet b$

q) $\frac{m}{n} = \frac{am}{an}$ porque $m \bullet an = n \bullet am$

r) $\frac{ab}{xb} = \frac{a}{x}$ porque $ab \bullet x = xb \bullet a$

Ejercicio 9. (Admite varias respuestas. Aquí se da una de ellas.)

a) $\frac{2}{5} = \frac{6}{15}$ b) $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$ c) $\frac{7}{12} = \frac{14}{24}$

d) $\frac{15}{16} = \frac{45}{48}$ e) $\frac{5}{6} = \frac{20}{24}$ f) $\frac{18}{25} = \frac{54}{75}$

Si usted obtiene como resultado una fracción distinta a las dadas, compruebe que ambas representan a un mismo número racional.

Ejercicio 10. De acuerdo con sus respuestas del ejercicio 9, compruebe multiplicando en "cruz". Aquí lo haremos con las fracciones de arriba.

a) $2 \bullet 15 = 5 \bullet 6$ b) $3 \bullet 8 = 4 \bullet 6$ c) $7 \bullet 24 = 12 \bullet 14$

d) $15 \bullet 48 = 16 \bullet 45$ e) $5 \bullet 24 = 6 \bullet 20$ f) $18 \bullet 75 = 25 \bullet 54$

Ejercicio 11

a) 8 b) 9 c) 3 d) 2

e) n f) x g) a h) y

i) $a + b$ j) $a \bullet c$ k) a^2 l) a

m) x n) a o) b^2

Ejercicio 12

a) $\frac{5}{6}$ b) $\frac{3}{4}$ c) $\frac{8}{13}$ d) $\frac{7}{9}$

e) $\frac{25}{13}$ f) $\frac{4}{5}$ g) $\frac{4}{3}$ h) $\frac{3}{5}$

i) $\frac{4}{5}$ j) $\frac{2}{3}$ k) $\frac{4}{7}$ l) $\frac{5}{6}$

m) $\frac{3}{8}$ n) $\frac{16}{13}$ o) $\frac{a}{b}$ p) $\frac{r}{q}$

q) $\frac{c}{n}$ r) $\frac{x}{y}$ s) $\frac{7}{8}$ t) $\frac{a}{b}$

u) $\frac{2}{5}$ v) $\frac{3}{8}$ w) $\frac{a}{b}$ x) $\frac{a}{m}$

y) $\frac{a + b}{c + d}$ z) $\frac{x}{3}$

II. Adición de números racionales

1. La adición de números racionales

Ejercicio 1

a) $\frac{8}{2}$ b) $\frac{6}{5}$ c) $\frac{9}{3}$ d) $\frac{5}{4}$

e) $\frac{9}{8}$ f) $\frac{7}{5}$ g) $\frac{9}{6}$ h) $\frac{15}{7}$

i) $\frac{10}{8}$ j) $\frac{17}{10}$

Ejercicio 2

a) $\frac{7}{3}$ b) $\frac{11}{5}$ c) $\frac{20}{8}$ d) $\frac{18}{9}$

e) $\frac{11}{11}$ f) $\frac{7}{x}$ g) $\frac{11}{b}$ h) $\frac{n + n}{15} = \frac{2n}{15}$

i) $\frac{20}{b}$ j) $\frac{x + x}{a} = \frac{2x}{a}$ k) $\frac{a + x}{y}$ l) $\frac{r + a}{b}$

Ejercicio 3

	Solución	*Comprobación*
a)	$x = \frac{6}{4}$	$\frac{3}{4} + \frac{6}{4} = \frac{9}{4}$
b)	$b = \frac{3}{7}$	$\frac{1}{3} + \frac{7}{3} = \frac{8}{3}$

c) $n = \frac{13}{5}$ $\qquad \frac{13}{5} + \frac{4}{5} = \frac{17}{5}$

d) $a = \frac{6}{7}$ $\qquad \frac{6}{7} + \frac{9}{7} = \frac{15}{7}$

e) $x = \frac{2}{13}$ $\qquad \frac{8}{13} + \frac{2}{13} = \frac{10}{13}$

f) $y = 0$ $\qquad \frac{16}{17} + 0 = \frac{16}{17}$

g) $b = 0$ $\qquad 0 + \frac{11}{12} = \frac{11}{12}$

Ejercicio 4

a) $\frac{1}{4} + \frac{3}{8} = \frac{2}{8} + \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$ $\qquad$ b) $\frac{5}{6} + \frac{4}{3} = \frac{5}{6} + \frac{8}{6} = \frac{11}{6}$

c) $\frac{3}{5} + \frac{4}{10} = \frac{6}{10} + \frac{4}{10} = \frac{10}{10}$ $\qquad$ d) $\frac{2}{3} + \frac{7}{9} = \frac{6}{9} + \frac{7}{9} = \frac{13}{9}$

e) $\frac{3}{4} + \frac{5}{8} = \frac{6}{8} + \frac{5}{8} = \frac{11}{8}$ $\qquad$ f) $\frac{4}{9} + \frac{1}{3} = \frac{4}{9} + \frac{3}{9} = \frac{7}{9}$

g) $\frac{7}{8} + \frac{1}{4} = \frac{7}{8} + \frac{2}{8} = \frac{9}{8}$ $\qquad$ h) $\frac{5}{6} + \frac{2}{3} = \frac{5}{6} + \frac{4}{6} = \frac{9}{6}$

i) $\frac{3}{5} + \frac{7}{20} = \frac{12}{20} + \frac{7}{20} = \frac{19}{20}$ $\qquad$ j) $\frac{2}{5} + \frac{9}{15} = \frac{6}{15} + \frac{9}{15} = \frac{15}{15}$

k) $\frac{7}{12} + \frac{3}{4} = \frac{7}{12} + \frac{9}{12} = \frac{16}{12}$ $\qquad$ l) $\frac{1}{8} + \frac{11}{40} = \frac{5}{40} + \frac{11}{40} = \frac{16}{40}$

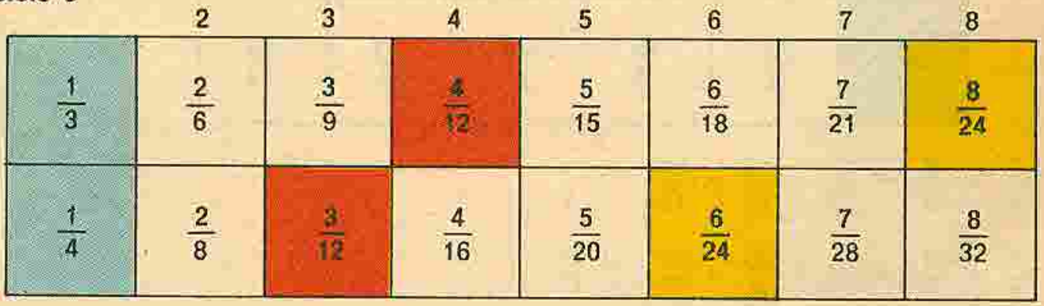
Ejercicio 5

a) $n = \frac{3}{6}$ $\qquad$ b) $m = 0$ $\qquad$ c) $x = 0$ $\qquad$ d) $y = 0$

e) $n = \frac{915}{100}$ $\qquad$ f) $r = \frac{12}{14}$ $\qquad$ g) $s = \frac{48}{36}$ $\qquad$ h) $x = \frac{2}{8}$

Ejercicio 6

a)



	2	3	4	5	6	7	8
$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{4}{12}$	$\frac{5}{15}$	$\frac{6}{18}$	$\frac{7}{21}$	$\frac{8}{24}$
$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{5}{20}$	$\frac{6}{24}$	$\frac{7}{28}$	$\frac{8}{32}$

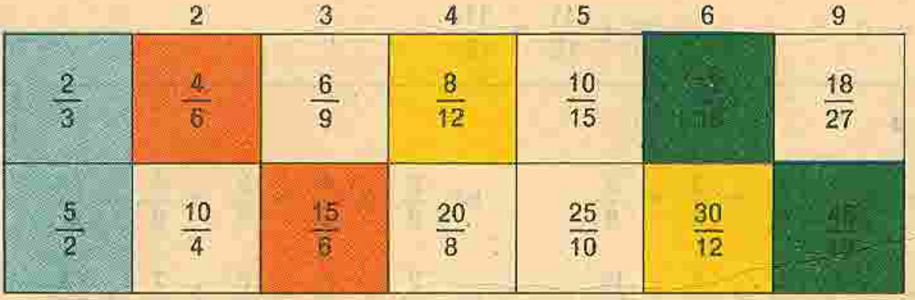
$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{4}{12} + \frac{3}{12} = \frac{7}{12}$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{8}{24} + \frac{6}{24} = \frac{14}{24}$$

Comprobación.

$\frac{7}{12} = \frac{14}{24}$ porque $7 \cdot 24 = 12 \cdot 14$

b)



	2	3	4	5	6	9
$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{6}{9}$	$\frac{8}{12}$	$\frac{10}{15}$	$\frac{12}{18}$	$\frac{18}{27}$
$\frac{5}{2}$	$\frac{10}{4}$	$\frac{15}{6}$	$\frac{20}{8}$	$\frac{25}{10}$	$\frac{30}{12}$	$\frac{45}{18}$

$$\frac{2}{3} + \frac{5}{2} = \frac{4}{6} + \frac{15}{6} = \frac{19}{6}$$

$$\frac{2}{3} + \frac{5}{2} = \frac{8}{12} + \frac{30}{12} = \frac{38}{12}$$

$$\frac{2}{3} + \frac{5}{2} = \frac{12}{18} + \frac{45}{18} = \frac{57}{18}$$

Comprobación.

$\frac{19}{6} = \frac{38}{12}$ porque $19 \cdot 12 = 6 \cdot 38$

$\frac{19}{6} = \frac{57}{18}$ porque $19 \cdot 18 = 6 \cdot 57$

c)

	2	3	4	6	9
$\frac{3}{4}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{9}{12}$	$\frac{12}{16}$	$\frac{18}{24}$	$\frac{27}{36}$
$\frac{5}{6}$	$\frac{10}{12}$	$\frac{15}{18}$	$\frac{20}{24}$	$\frac{30}{36}$	$\frac{45}{54}$

$$\frac{3}{4} + \frac{5}{6} = \frac{9}{12} + \frac{10}{12} = \frac{19}{12}$$

$$\frac{3}{4} + \frac{5}{6} = \frac{18}{24} + \frac{20}{24} = \frac{38}{24}$$

$$\frac{3}{4} + \frac{5}{6} = \frac{27}{36} + \frac{30}{36} = \frac{57}{36}$$

$$\frac{19}{12} = \frac{38}{24} \text{ porque } 19 \bullet 24 = 12 \bullet 38$$

$$\frac{19}{12} = \frac{57}{36} \text{ porque } 19 \bullet 36 = 12 \bullet 57$$

d)

	5	7	10	14
$\frac{4}{5}$	$\frac{20}{25}$	$\frac{28}{35}$	$\frac{40}{50}$	$\frac{56}{70}$
$\frac{9}{7}$	$\frac{45}{35}$	$\frac{63}{49}$	$\frac{90}{70}$	$\frac{126}{98}$

$$\frac{4}{5} + \frac{9}{7} = \frac{28}{35} + \frac{45}{35} = \frac{73}{35}$$

$$\frac{4}{5} + \frac{9}{7} = \frac{56}{70} + \frac{90}{70} = \frac{146}{70}$$

Comprobación.

$$\frac{73}{35} = \frac{146}{70} \text{ porque } 73 \bullet 70 = 35 \bullet 146$$

e)

$\frac{5}{4}$	$\frac{15}{12}$

$\frac{7}{3}$	$\frac{28}{12}$

$$\frac{5}{4} + \frac{7}{3} = \frac{15}{12} + \frac{28}{12} = \frac{43}{12}$$

f)

$\frac{6}{5}$	$\frac{18}{15}$

$\frac{4}{3}$	$\frac{20}{15}$

$$\frac{6}{5} + \frac{4}{3} = \frac{18}{15} + \frac{20}{15} = \frac{38}{15}$$

g)

$\frac{6}{4}$	$\frac{36}{24}$

$\frac{7}{6}$	$\frac{28}{24}$

$$\frac{6}{4} + \frac{7}{6} = \frac{36}{24} + \frac{28}{24} = \frac{64}{24}$$

h)

$\frac{3}{5}$	$\frac{30}{50}$

$\frac{9}{10}$	$\frac{45}{50}$

$$\frac{3}{5} + \frac{9}{10} = \frac{30}{50} + \frac{45}{50} = \frac{75}{50}$$

Ejercicio 7

a) $\frac{6}{8} + \frac{1}{3} = \frac{18}{24} + \frac{8}{24} = \frac{26}{24}$

b) $\frac{4}{5} + \frac{1}{4} = \frac{16}{20} + \frac{5}{20} = \frac{21}{20}$

c) $\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{2}{6} + \frac{3}{6} = \frac{5}{6}$

d) $\frac{3}{2} + \frac{6}{7} = \frac{21}{14} + \frac{12}{14} = \frac{33}{14}$

e) $\frac{9}{10} + \frac{8}{3} = \frac{27}{30} + \frac{80}{30} = \frac{107}{30}$

f) $\frac{2}{9} + \frac{2}{3} = \frac{2}{9} + \frac{6}{9} = \frac{8}{9}$

g) $\frac{5}{6} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6} + \frac{3}{6} = \frac{8}{6}$

h) $\frac{3}{5} + \frac{7}{4} = \frac{12}{20} + \frac{35}{20} = \frac{47}{20}$

i) $\frac{9}{12} + \frac{2}{3} = \frac{9}{12} + \frac{8}{12} = \frac{17}{12}$

j) $\frac{2}{5} + \frac{1}{8} = \frac{16}{40} + \frac{5}{40} = \frac{21}{40}$

k) $\frac{11}{15} + \frac{1}{3} = \frac{11}{15} + \frac{5}{15} = \frac{16}{15}$

l) $\frac{7}{4} + \frac{9}{10} = \frac{70}{40} + \frac{35}{40} = \frac{106}{40}$

2. Propiedades de la adición

Ejercicio 8

a) $\frac{3}{5} + \frac{7}{3}$

(c) $\frac{1}{2} + n$

b) $\frac{3}{8} + \frac{4}{5}$

(d) $x + \frac{7}{9}$

c) $n + \frac{1}{2}$

(b) $\frac{4}{5} + \frac{3}{8}$

d) $\frac{7}{9} + x$

(a) $\frac{7}{3} + \frac{3}{5}$

e) $\frac{3}{7} + x$

(g) $s + r$

f) $z + \frac{5}{9}$

(e) $x + \frac{3}{7}$

g) $r + s$

Ejercicio 9

a) $x = \frac{5}{8}$ b) $y = \frac{2}{8}$ c) $n = 5$

d) $x = 34$ e) $a = \frac{1}{4}$ f) $b = \frac{1}{2}$

Ejercicio 10

a) $\frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \frac{5}{2} = \frac{1 + 3 + 5}{2} = \frac{9}{2}$

b) $\frac{5}{3} + \frac{6}{3} + \frac{2}{3} = \frac{5 + 6 + 2}{3} = \frac{13}{3}$

c) $\frac{3}{4} + \frac{4}{4} + \frac{9}{4} = \frac{3 + 4 + 9}{4} = \frac{16}{4}$

d) $\frac{6}{5} + \frac{5}{5} + \frac{8}{5} = \frac{6 + 5 + 8}{5} = \frac{19}{5}$

e) $\frac{1}{6} + \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{1 + 3 + 2}{6} = \frac{6}{6}$

f) $\frac{4}{8} + \frac{9}{8} + \frac{12}{8} = \frac{4 + 9 + 12}{8} = \frac{25}{8}$

g) $\frac{8}{10} + \frac{23}{10} + \frac{2}{10} = \frac{8 + 23 + 2}{10} = \frac{33}{10}$

h) $\frac{15}{12} + \frac{12}{12} + \frac{13}{12} = \frac{15 + 12 + 13}{12} = \frac{40}{12}$

i) $\frac{5}{25} + \frac{4}{25} + \frac{8}{25} = \frac{5 + 4 + 8}{25} = \frac{17}{25}$

j) $\frac{16}{38} + \frac{7}{38} + \frac{6}{38} = \frac{16 + 7 + 6}{38} = \frac{29}{38}$

k) $\frac{10}{76} + \frac{12}{76} + \frac{8}{76} = \frac{10 + 12 + 8}{76} = \frac{30}{76}$

l) $\frac{6}{x} + \frac{2}{x} + \frac{3}{x} = \frac{6 + 2 + 3}{x} = \frac{11}{x}$

m) $\frac{10}{a} + \frac{12}{a} + \frac{9}{a} = \frac{10 + 12 + 9}{a} = \frac{31}{a}$

n) $\frac{a}{y} + \frac{b}{y} + \frac{c}{y} = \frac{a + b + c}{y}$

Ejercicio 11

Es posible que usted encuentre fracciones distintas a las que se dan como solución.

Compruebe si denotan al mismo número racional multiplicando en "cruz".

a) $\frac{58}{24}$ b) $\frac{61}{30}$ c) $\frac{82}{24}$ d) $\frac{185}{42}$

e) $\frac{6}{13}$ f) $\frac{20}{183}$ g) $\frac{110}{12}$ h) $\frac{58}{21}$

i) $\frac{20}{10}$ j) $\frac{379}{140}$ k) $\frac{149}{60}$ l) $\frac{23}{12}$

Ejercicio 12

a) $\frac{7}{8}$ b) $\frac{8}{9}$ c) $\frac{5}{8}$

d) $\frac{9}{a}$ e) $\frac{11}{x}$ f) $\frac{a + x}{b}$

g) $\frac{n + b}{a}$ h) $\frac{5}{4}$ i) $\frac{a + x}{y}$

Ejercicio 13

a) Conmutativa b) Conmutativa

c) Asociativa d) Elemento neutro

e) Asociativa f) Elemento neutro
g) Conmutativa h) Conmutativa
i) Elemento neutro j) Conmutativa

III. Sustracción de números racionales

1. El orden entre los números racionales

Ejercicio 1

a) $\frac{4}{3} > \frac{2}{3}$ b) $\frac{2}{3} < \frac{5}{3}$ c) $\frac{1}{3} < \frac{2}{3}$

d) $\frac{3}{3} > \frac{1}{3}$ e) $\frac{6}{3} > \frac{5}{3}$ f) $\frac{2}{3} < \frac{7}{3}$

g) $\frac{7}{3} > \frac{6}{3}$ h) $\frac{5}{3} > \frac{2}{3}$ i) $\frac{1}{3} < \frac{7}{3}$

j) $\frac{3}{3} < \frac{6}{3}$ k) $\frac{5}{3} < \frac{6}{3}$ l) $\frac{2}{3} < \frac{3}{3}$

m) $\frac{1}{3} > 0$ n) $0 < \frac{1}{3}$ o) $\frac{2}{3} > 0$

Ejercicio 2

a) $\frac{2}{3} > \frac{3}{5}$ b) $\frac{1}{2} > \frac{3}{7}$ c) $\frac{5}{9} > \frac{2}{4}$

d) $\frac{7}{3} > \frac{5}{4}$ e) $\frac{12}{3} > \frac{5}{2}$ f) $\frac{87}{10} > \frac{35}{5}$

g) $\frac{23}{5} > \frac{10}{3}$ h) $\frac{19}{4} < \frac{24}{3}$ i) $\frac{8}{9} < 1$

j) $\frac{23}{7} < 4$ k) $3 < \frac{11}{3}$ l) $\frac{236}{2} < 178$

2. Sustracción de números racionales

Ejercicio 3

a) $\frac{8}{9} - \frac{2}{9} = \frac{6}{9}$ porque $\frac{6}{9} + \frac{2}{9} = \frac{8}{9}$

b) $\frac{14}{15} - \frac{9}{15} = \frac{5}{15}$ porque $\frac{5}{15} + \frac{9}{15} = \frac{14}{15}$

c) $\frac{15}{8} - \frac{7}{8} = \frac{8}{8}$ porque $\frac{8}{8} + \frac{7}{8} = \frac{15}{8}$

d) $\frac{18}{35} - \frac{7}{35} = \frac{11}{35}$ porque $\frac{11}{35} + \frac{7}{35} = \frac{18}{35}$

e) $\frac{97}{100} - \frac{19}{100} = \frac{78}{100}$ porque $\frac{78}{100} + \frac{19}{100} = \frac{97}{100}$

f) $\frac{74}{80} - \frac{57}{80} = \frac{78}{100}$ porque $\frac{17}{80} + \frac{57}{80} = \frac{74}{80}$

g) $\frac{3}{5} - \frac{0}{5} = \frac{3}{5}$ porque $\frac{3}{5} + \frac{0}{5} = \frac{3}{5}$

h) $\frac{6}{7} - 0 = \frac{6}{7}$ porque $\frac{6}{7} + 0 = \frac{6}{7}$

i) $\frac{12}{4} - \frac{7}{4} = \frac{5}{4}$ porque $\frac{5}{4} + \frac{7}{4} = \frac{12}{4}$

j) $\frac{15}{x} - \frac{7}{x} = \frac{8}{x}$ porque $\frac{8}{x} + \frac{7}{x} = \frac{15}{x}$

k) $\frac{12}{a} - \frac{5}{a} = \frac{7}{a}$ porque $\frac{7}{a} + \frac{5}{a} = \frac{12}{a}$

l) $\frac{x}{b} - \frac{y}{b} = \frac{x - y}{b}$ porque $\frac{x - y}{b} + \frac{y}{b} = \frac{(x - y) + y}{b} = \frac{x}{b}$

m) $\frac{a}{n} - \frac{b}{n} = \frac{a - b}{n}$ porque $\frac{a - b}{n} + \frac{b}{n} = \frac{(a - b) + b}{n} = \frac{a}{n}$

n) $\frac{y}{r} - \frac{x}{r} = \frac{y - x}{r}$ porque $\frac{y - x}{r} + \frac{x}{r} = \frac{(y - x) + x}{r} = \frac{y}{r}$

o) $\frac{7}{10} - \frac{5}{10} = \frac{2}{10}$ porque $\frac{2}{10} + \frac{5}{10} = \frac{7}{10}$

p) $\frac{86}{100} - \frac{58}{100} = \frac{28}{100}$ porque $\frac{28}{100} + \frac{58}{100} = \frac{86}{100}$

q) $\frac{18}{10} - \frac{13}{10} = \frac{5}{10}$ porque $\frac{5}{10} + \frac{13}{10} = \frac{18}{10}$

Ejercicio 4

a) $\frac{3}{4} - \frac{2}{5} = \frac{7}{20}$

b) $\frac{1}{3} - \frac{2}{9} = \frac{3}{27}$

c) $\frac{5}{6} - \frac{12}{15} = \frac{3}{90}$

d) $\frac{7}{8} - \frac{3}{5} = \frac{11}{40}$

e) $\frac{6}{8} - 0 = \frac{6}{8}$

f) $\frac{9}{12} - \frac{0}{3} = \frac{9}{12}$ o bien $\frac{27}{36}$

g) $\frac{5}{9} - \frac{1}{2} = \frac{1}{18}$

h) $\frac{10}{3} - \frac{8}{4} = \frac{16}{12}$

i) $3 - \frac{1}{4} = \frac{11}{4}$

j) $5 - \frac{7}{8} = \frac{33}{8}$

k) $\frac{7}{2} - \frac{2}{7} = \frac{45}{14}$

l) $\frac{2}{3} - \frac{3}{6} = \frac{3}{18}$

m) $1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

n) $1 - \frac{10}{12} = \frac{2}{12}$

o) $\frac{5}{12} - \frac{3}{10} = \frac{14}{120}$

p) $\frac{9}{10} - \frac{1}{2} = \frac{8}{20}$

q) $\frac{5}{3} - 1 = \frac{2}{3}$

r) $\frac{12}{7} - 1 = \frac{5}{7}$

s) $\frac{6}{10} - \frac{2}{8} = \frac{28}{80}$

t) $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = \frac{xb - ay}{ab}$

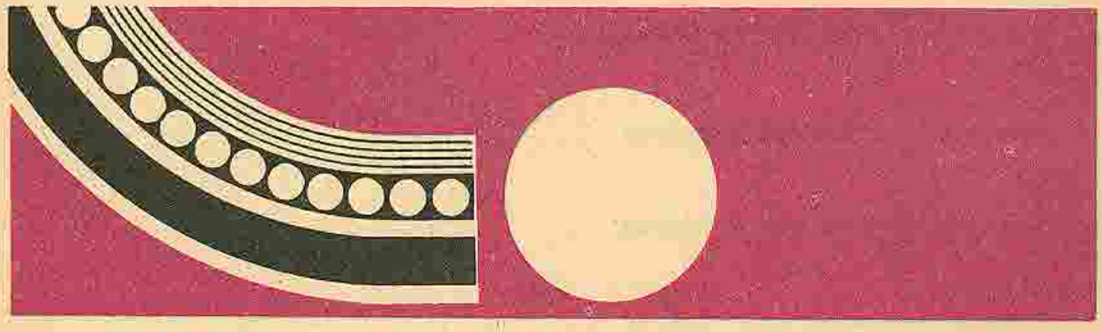
u) $\frac{7}{10} - \frac{12}{100} = \frac{580}{1000}$

v) $\frac{4}{10} - \frac{35}{100} = \frac{50}{1000}$

w) $\frac{5}{100} - \frac{8}{1000} = \frac{4\,200}{100\,000}$

x) $\frac{68}{100} - \frac{600}{1000} = \frac{8\,000}{100\,000}$

Si obtiene como resultado una fracción diferente a las mostradas, compruebe usted si ambas nombran al mismo número racional.



IV. Ecuaciones

1. Resolución de ecuaciones

Ejercicio 1

a) $$\left(\frac{3}{6}+\blacksquare\right)+\frac{5}{6}=\frac{10}{6}+\frac{5}{6}$$

Comprobación: $$\left(\frac{3}{6}+\frac{7}{6}\right)+\frac{5}{6}=\frac{10}{6}+\frac{5}{6}$$

b) $$\left(\frac{3}{6}+\blacksquare\right)-\frac{2}{6}=\frac{10}{6}-\frac{2}{6}$$

Comprobación: $$\left(\frac{3}{6}+\frac{7}{6}\right)-\frac{2}{6}=\frac{10}{6}-\frac{2}{6}$$

Ejercicio 2

La solución es $\frac{9}{8}$

Ejercicio 3

a) Restando $\frac{3}{8}$ a los dos miembros.

b) Sumando $\frac{6}{7}$ a los dos miembros.

c) Restando $\frac{1}{2}$ a los dos miembros.

d) Restando $\frac{3}{4}$ a los dos miembros.

e) Restando $\frac{1}{3}$ a los dos miembros.

f) Restando $\frac{6}{8}$ a los dos miembros.

g) Sumando $\frac{2}{3}$ a los dos miembros.

h) Sumando $\frac{1}{8}$ a los dos miembros.

i) Sumando $\frac{5}{12}$ a los dos miembros.

Ejercicio 4

a) $n = \frac{2}{4}$ b) $x = \frac{6}{8}$ c) $y = \frac{2}{9}$

d) $x = \frac{1}{4}$ e) $y = \frac{3}{6}$ f) $n = \frac{1}{8}$

g) $x = \frac{1}{9}$ h) $y = \frac{13}{8}$ i) $a = \frac{5}{6}$

j) $x = \frac{17}{5}$ k) $y = \frac{7}{8}$ l) $b = \frac{5}{4}$

m) $x = \frac{3}{2}$ n) $y = \frac{7}{3}$ o) $c = \frac{11}{8}$

p) $x = \frac{11}{2}$ q) $a = \frac{14}{3}$ r) $n = \frac{31}{4}$

Si usted obtiene por solución otras fracciones, pruebe si las fracciones nombran al mismo número racional.

---

2. Resolución de problemas por medio de ecuaciones

Problemas

a) *Resolución.*

$$x + \frac{1}{2} = \frac{5}{4}$$

$$x = \frac{3}{4}$$

Comprobación.

$$\frac{3}{4} + \frac{1}{2} \text{ sí es igual a } \frac{5}{4}$$

Respuesta. El número que sumado con $\frac{1}{2}$ da $\frac{5}{4}$ es $\frac{3}{4}$

b) *Resolución.*

$$m - \frac{1}{2} = \frac{3}{5}$$

$$m = \frac{11}{10}$$

Comprobación.

$$\frac{11}{10} - \frac{1}{2} = \frac{11}{10} - \frac{5}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

Respuesta. El número mayor es $\frac{11}{10}$.

---

c) *Resolución.*

$$x + \frac{1}{4} = \frac{5}{8}$$

$$\left(x + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{4} = \frac{5}{8} - \frac{1}{4}$$

$$x = \frac{3}{8}$$

Comprobación.

$$\frac{3}{8} + \frac{1}{4} = \frac{3}{8} + \frac{2}{8} = \frac{5}{8}$$

Respuesta. El número es $\frac{3}{8}$

---

d) *Resolución.*

$$x - \frac{1}{6} = \frac{4}{3}$$

$$\left(x - \frac{1}{6}\right) + \frac{1}{6} = \frac{4}{3} + \frac{1}{6}$$

$$x = \frac{9}{6}$$

Comprobación.

$$\frac{9}{6} - \frac{1}{6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

Respuesta. El número es $\frac{9}{6}$

e) *Resolución.*

$$x + \frac{1}{2} = \frac{7}{10}$$

$$\left(x + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} = \frac{7}{10} - \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{2}{10}$$

Comprobación.

$$\frac{2}{10} + \frac{1}{2} = \frac{2}{10} + \frac{5}{10} = \frac{7}{10}$$

Respuesta. El otro número es $\frac{2}{10}$

---

f) *Resolución.*

$$x - \frac{4}{5} = 6$$

$$\left(x - \frac{4}{5}\right) + \frac{4}{5} = 6 + \frac{4}{5}$$

$$x = \frac{34}{5}$$

Comprobación.

$$\frac{34}{5} - \frac{4}{5} = \frac{30}{5} = 6$$

Respuesta. El número es $\frac{34}{5}$

Ejercicio 5

a) *Ecuación.* $\frac{1}{3} + x = \frac{3}{4}$ *Solución.* $x = \frac{5}{12}$

Respuesta. Debe sembrar espinaca en $\frac{5}{12}$ de su parcela.

b) *Ecuación.* $x + \frac{1}{4.} = \frac{7}{8}$ *Solución.* $x = \frac{5}{8}$

Respuesta. Le faltan $\frac{5}{8}$ de tinaco.

c) *Ecuación.* $n + \frac{1}{3} = \frac{3}{4}$ *Solución.* $n = \frac{5}{12}$

Respuesta. El otro pedazo es $\frac{5}{12}$ de pastel.

d) *Ecuación.* $x + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ *Solución.* $x = \frac{2}{4}$

Respuesta. El cuerpo pesa $\frac{2}{4}$ kg.

e) *Ecuación.* $x + \frac{1}{5} = \frac{9}{2}$ *Solución.* $x = \frac{43}{10}$

Respuesta. Se sirvieron $\frac{43}{10}$ de bote.

f) *Ecuación.* $x + \frac{2}{5} = \frac{7}{10}$ *Solución.* $x = \frac{3}{10}$

Respuesta. Por la planilla azul votaron $\frac{3}{10}$ de todos los alumnos.

g) *Ecuación.* $\frac{1}{2} + c = \frac{8}{10}$ *Solución.* $c = \frac{3}{10}$

Respuesta. En corregir cartas ocupa $\frac{3}{10}$ de su jornada.

V. Multiplicación de números racionales

1. La multiplicación de números racionales

Ejercicio 1

a) $\frac{6}{24}$ b) $\frac{14}{10}$ c) $\frac{6}{80}$ d) $\frac{22}{36}$

e) $\frac{24}{100}$ f) $\frac{90}{10\,000}$ g) $\frac{28}{10\,000}$ h) $\frac{1}{15}$

i) $\frac{24}{1000}$ j) $\frac{12}{12}$ k) $\frac{90}{90}$ l) $\frac{5}{5}$

m) $\frac{1}{3}$ n) 0

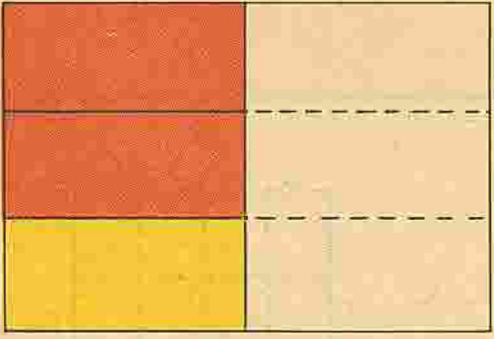
Ejercicio 2

a) $\frac{8m}{15}$
b) $\frac{3m}{27}$
c) $\frac{15}{4r}$
d) $\frac{15}{7s}$
e) $\frac{3r}{2s}$
f) $\frac{12x}{4y}$
g) $\frac{9m}{7n}$
h) $\frac{rm}{5t}$
i) $\frac{10m}{nx}$
j) $\frac{8f}{pg}$
k) $\frac{rm}{sp}$
l) $\frac{am}{bn}$
m) $\frac{af}{g}$
n) $\frac{ma}{b}$
o) $\frac{mx}{n}$
p) $\frac{a^2}{b^2}$
q) $\frac{m^2}{n^2}$
r) $\frac{x^2}{y^2}$
s) 1
t) 1
u) 1
v) 0

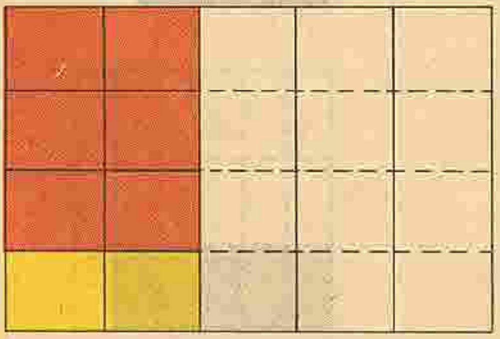
2. Una interpretación de la multiplicación de racionales

Ejercicio 3

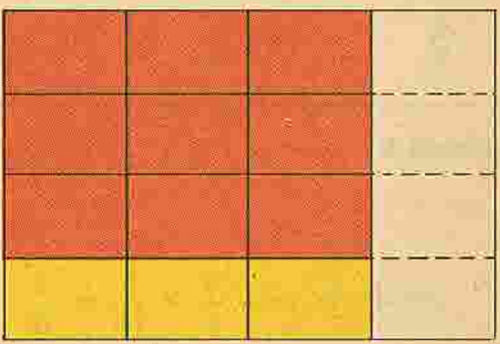
a)



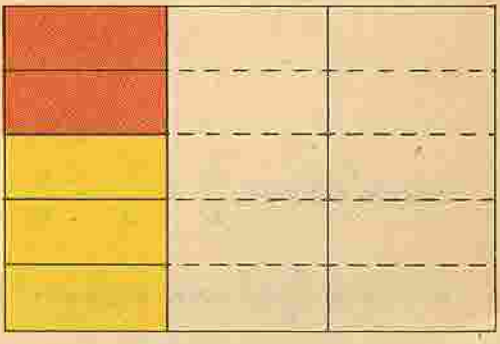
b)



c)



d)



Ejercicio 4

a) $\frac{1}{2} \times \frac{2}{5} = \frac{2}{10}$

b) $\frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{3}{12}$

c) $\frac{2}{3} \times \frac{5}{6} = \frac{10}{18}$

d) $\frac{2}{3} \times \frac{5}{8} = \frac{10}{24}$

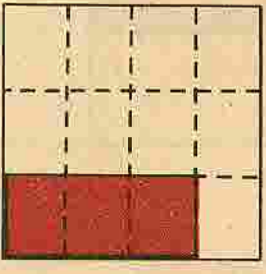
e) $\frac{3}{4} \times \frac{7}{10} = \frac{21}{40}$

Problemas

a)	$\frac{12}{40}$	b)	$\frac{6}{12}$	c)	$\frac{1}{36}$
d)	$\frac{1}{3\,600}$	e)	$\frac{1}{50}$	f)	$\frac{17}{40}$
g)	$\frac{2}{9}$	h)	$\frac{2}{6}$	i)	$\frac{1}{8}$

Ejercicio 5

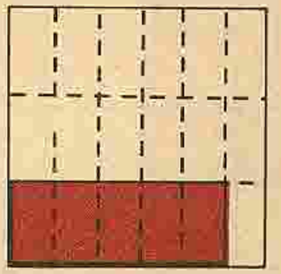
a)



cálculo del área. $\frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{3}{12}$

El área es $\frac{3}{12}$ de metro cuadrado.

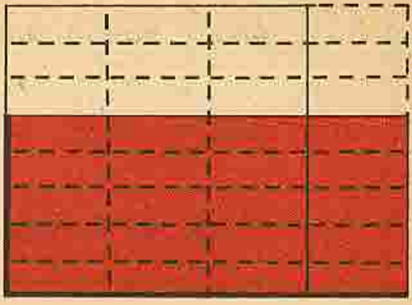
b)



cálculo del área. $\frac{5}{6} \times \frac{1}{3} = \frac{5}{18}$

El área es $\frac{5}{18}$ de metro cuadrado.

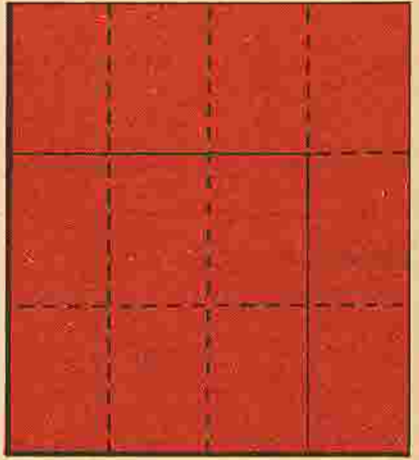
c)



cálculo del área, $\frac{4}{3} \times \frac{5}{8} = \frac{20}{24}$

El área es $\frac{20}{24}$ de metro cuadrado.

d)



cálculo del área, $\frac{4}{3} \times \frac{3}{2} = \frac{12}{6}$

El área es $\frac{12}{6}$ de metro cuadrado ó 2 metros cuadrados.

3. Propiedades de la multiplicación de números racionales

Ejercicio 6

a) Área = base × altura = $\frac{4}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{12}{20}$

Área = altura × base = $\frac{3}{4} \times \frac{4}{5} = \frac{12}{20}$

El área del rectángulo es $\frac{12}{20}$ de metro cuadrado.

b) Área = base × altura = $\frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{6}{20}$

Área = altura × base = $\frac{2}{4} \times \frac{3}{5} = \frac{6}{20}$

El área del rectángulo es $\frac{6}{20}$ de metro cuadrado.

c) $$\text{Área} = \text{base} \times \text{altura} = \frac{7}{4} \times \frac{9}{5} = \frac{63}{20}$$

$$\text{Área} = \text{altura} \times \text{base} = \frac{9}{5} \times \frac{7}{4} = \frac{63}{20}$$

El área del rectángulo es $\frac{63}{20}$ de metro cuadrado.

Ejercicio 7

(e) $\frac{2}{3} \bullet \frac{5}{4}$ (c) $\frac{2}{7} \bullet \frac{1}{8}$ (f) $x \bullet \frac{5}{4}$

(a) $\frac{m}{n} \bullet \frac{x}{z}$ (d) $\frac{9}{5} \bullet \frac{f^2}{g^3}$

Ejercicio 8

a) $x = \frac{7}{4}$ b) $z = \frac{15}{9}$ c) $q = 2$

d) $p = \frac{2a^3}{15}$ e) $x = \frac{7}{8}$ f) $a = \frac{8}{25}$

Ejercicio 9

a) $$v = \left(\frac{7}{3} \times \frac{5}{4}\right) \times \frac{9}{6} = \frac{35}{12} \times \frac{9}{6} = \frac{315}{72}$$

$$v = \frac{7}{3} \times \left(\frac{5}{4} \times \frac{9}{6}\right) = \frac{7}{3} \times \frac{45}{24} = \frac{315}{72}$$

b) $$v = \left(2 \times \frac{3}{2}\right) \times \frac{5}{2} = \frac{6}{2} \times \frac{5}{2} = \frac{30}{4}$$

$$v = 2 \times \left(\frac{3}{2} \times \frac{5}{2}\right) = 2 \times \frac{15}{4} = \frac{30}{4}$$

c) $$v = \left(\frac{12}{4} \times \frac{3}{4}\right) \times \frac{4}{5} = \frac{36}{16} \times \frac{4}{5} = \frac{144}{80}$$

$$v = \frac{12}{4} \times \left(\frac{3}{4} \times \frac{4}{5}\right) = \frac{12}{4} \times \frac{12}{20} = \frac{144}{80}$$

d) $$v = \left(\frac{6}{4} \times \frac{6}{4}\right) \times \frac{6}{4} = \frac{36}{16} \times \frac{6}{4} = \frac{216}{64}$$

$$v = \frac{6}{4} \times \left(\frac{6}{4} \times \frac{6}{4}\right) = \frac{6}{4} \times \frac{36}{16} = \frac{216}{64}$$

Ejercicio 10

(d) $\left(\frac{3}{4} \bullet \frac{2}{7}\right) \bullet \frac{1}{4}$ (f) $\left(\frac{4}{7} \bullet \frac{3}{5}\right) \bullet \frac{e}{f}$

(g) $\frac{4}{7} \bullet \left(\frac{m}{n} \bullet \frac{s}{t}\right)$ (b) $\frac{n}{i} \bullet \left(\frac{7}{1} \bullet \frac{1}{a}\right)$

(c) $\frac{m^2}{n}\left(\frac{z}{x} \bullet \frac{7}{b}\right)$ (a) $\frac{3}{4} \bullet \left(\frac{5}{2} \bullet \frac{v}{x}\right)$

Ejercicio 11

a) $\frac{15}{60}$ b) $\frac{64}{120}$ c) $\frac{120}{350}$ d) $\frac{432}{240}$

e) $\frac{84}{189}$ f) $\frac{24a}{105}$ g) $\frac{63x}{40y}$ h) $\frac{6ab}{50c}$

i) $\frac{a^2x}{bn^2}$

Ejercicio 12

a) $\left(\frac{3}{6}\right)^2 = \frac{3}{6} \bullet \frac{3}{6} = \frac{9}{36}$

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{2} \bullet \frac{1}{2} \bullet \frac{1}{2} \bullet \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$

c) $\left(\frac{4}{5}\right)^3 = \frac{4}{5} . \frac{4}{5} \bullet \frac{4}{5} = \frac{64}{125}$

d) $\left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{7}{2} \bullet \frac{7}{2} = \frac{49}{4}$

e) $\left(\frac{2}{q}\right)^6 = \frac{2}{q} \bullet \frac{2}{q} \bullet \frac{2}{q} \bullet \frac{2}{q} \bullet \frac{2}{q} \bullet \frac{2}{q} = \frac{64}{q^6}$

f) $\left(\frac{m}{n}\right)^8 = \frac{m}{n} \bullet \frac{m}{n} \bullet \frac{m}{n} \bullet \frac{m}{n} \bullet \frac{m}{n} \bullet \frac{m}{n} \bullet \frac{m}{n} \bullet \frac{m}{n} = \frac{m^8}{n^8}$

Ejercicio 13

a) $\left(\frac{2}{5}\right)^3$ b) $\left(\frac{3}{2}\right)^4$ c) $\left(\frac{m}{n}\right)^3$

d) $(\frac{x}{y})^2$ e) $(\frac{s}{r})^4$

Ejercicio 14

a) $y = 1$ b) $x = 1$ c) $t = 1$

d) $z = \frac{p}{q}$ e) $w = \frac{10}{23}$ f) $n = \frac{a + b}{x}$

g) $x = \frac{78}{n}$

Ejercicio 15

a) $\frac{3}{4} \bullet \frac{n}{n} = \frac{3}{4}$

b) $\frac{7}{3} \bullet \frac{4}{4} \bullet \frac{2}{5} = \frac{7 \bullet 2}{3 \bullet 5} = \frac{14}{15}$

c) $\frac{1}{5} \bullet \frac{8}{8} \bullet \frac{2}{3} = \frac{1 \bullet 2}{5 \bullet 3} = \frac{2}{15}$

d) $\frac{3}{8} \bullet \frac{x}{x} \bullet \frac{2}{5} = \frac{3 \bullet 2}{8 \bullet 5} = \frac{6}{40}$

e) $\frac{m}{n} \bullet \frac{y}{y} = \frac{m}{n}$

f) $\frac{a^2}{b^2} \bullet \frac{n}{n} = \frac{a^2}{b^2}$

g) $5 \bullet \frac{m^3}{m^3} \bullet ax = 5ax$

h) $\frac{3}{3} \bullet \frac{a + b}{a + b} \bullet \frac{2}{y} = \frac{2}{y}$

Ejercicio 16

a) $\frac{2}{3}$ sí es el inverso multiplicativo de $\frac{3}{2}$

porque $\frac{2}{3} \times \frac{3}{2} = 1$

b) $\frac{7}{5}$ no es el inverso multiplicativo de $\frac{10}{7}$

porque $\frac{7}{5} \times \frac{10}{7} \neq 1$.

c) $\frac{6}{8}$ sí es el inverso multiplicativo de $\frac{8}{6}$

porque $\frac{6}{8} \times \frac{8}{6} = 1$.

d) $\frac{10}{3}$ sí es el inverso multiplicativo de $\frac{3}{10}$

porque $\frac{10}{3} \times \frac{3}{10} = 1$.

e) 14 no es el inverso multiplicativo de $\frac{2}{14}$

porque $14 \times \frac{2}{14} \neq 1$.

f) $\frac{1}{x}$ sí es el inverso multiplicativo de x

porque $\frac{1}{x} \bullet x = 1$.

g) $\frac{m}{n}$ sí es el inverso multiplicativo de $\frac{n}{m}$

porque $\frac{m}{n} \times \frac{n}{m} = 1$.

h) $\frac{a}{b}$ sí es el inverso multiplicativo de $\frac{b}{a}$

porque $\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = 1$.

Ejercicio 17

a) $\frac{5}{3}$ b) $\frac{2}{18}$ c) $\frac{9}{6}$ d) $\frac{23}{13}$

e) $\frac{1}{9}$ f) 100 g) 40 h) $\frac{1}{15}$

i) $\frac{1}{200}$ j) $\frac{1}{n}$ k) $\frac{1}{1000}$ l) 1

m) x n) $\frac{1}{a^2}$ o) y^3 p) $\frac{1}{a + b}$

q) $x^2 + 8$ r) $\frac{1}{x^2 + y^3}$

Ejercicio 18

a) $x = \frac{4}{3}$ b) $y = \frac{6}{5}$ c) $b = \frac{a}{6}$

d) $n = \frac{5x}{4a}$ e) $x = \frac{8}{a + b}$ f) $y = \frac{3b}{8a^2}$

Ejercicio 19

a) $$\frac{7}{2}\left(\frac{3}{4} + \frac{12}{3}\right) = \frac{7}{2} \bullet \frac{57}{12} \qquad \frac{399}{24}$$

$$\frac{7}{2} \bullet \frac{3}{4} + \frac{7}{2} \bullet \frac{12}{3} = \frac{21}{8} + \frac{84}{6} = \frac{798}{48} = \frac{399}{24}$$

b) $$\frac{2}{5}\left(\frac{2}{5} + \frac{2}{5}\right) = \frac{2}{5} \bullet \frac{4}{5} = \frac{8}{25}$$

$$\frac{2}{5} \bullet \frac{2}{5} + \frac{2}{5} \bullet \frac{2}{5} = \frac{4}{25} + \frac{4}{25} = \frac{8}{25}$$

c) $$\frac{1}{2}\left(\frac{10}{4} + \frac{3}{5}\right) = \frac{1}{2} \bullet \frac{62}{20} = \frac{62}{40}$$

$$\frac{1}{2} \bullet \frac{10}{4} + \frac{1}{2} \bullet \frac{3}{5} = \frac{10}{8} + \frac{3}{10} = \frac{124}{80} = \frac{62}{40}$$

d) $$8\left(\frac{3}{4} + \frac{3}{4}\right) = 8 \bullet \frac{6}{4} = \frac{48}{4} = 12$$

$$8 \bullet \frac{3}{4} + 8 \bullet \frac{3}{4} = \frac{24}{4} + \frac{24}{4} = \frac{48}{4} = 12$$

e) $$\frac{4}{7}\left(\frac{6}{7} + \frac{2}{7}\right) = \frac{4}{7} \bullet \frac{8}{7} = \frac{32}{49}$$

$$\frac{4}{7} \bullet \frac{6}{7} + \frac{4}{7} \bullet \frac{2}{7} = \frac{24}{49} + \frac{8}{49} = \frac{32}{49}$$

Ejercicio 20

Valores	$r\ (s + t)$	$rs + rt$
$r = \frac{1}{2},\ s = \frac{1}{4},\ t = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{8}$	$\frac{1}{2} \bullet \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \bullet \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$
$r = 3,\ s = \frac{1}{5},\ t = \frac{2}{3}$	$3\left(\frac{1}{5} + \frac{2}{3}\right) = \frac{39}{15}$	$3 \bullet \frac{1}{5} + 3 \bullet \frac{2}{3} = \frac{39}{15}$
$r = \frac{1}{2},\ s = \frac{7}{4},\ t = \frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}\left(\frac{7}{4} + \frac{1}{3}\right) = \frac{25}{24}$	$\frac{1}{2} \bullet \frac{7}{4} + \frac{1}{2} \bullet \frac{1}{3} = \frac{50}{48}$
$r = \frac{3}{10},\ s = \frac{1}{10},\ t = \frac{5}{10}$	$\frac{3}{10}\left(\frac{1}{10} + \frac{5}{10}\right) = \frac{18}{100}$	$\frac{3}{10} \bullet \frac{1}{10} + \frac{3}{10} \bullet \frac{5}{10} = \frac{18}{100}$

Ejercicio 21

(c) $\frac{6}{7} \bullet \frac{17}{4} + \frac{12}{10} \bullet \frac{17}{4}$

(a) $\frac{5}{6} \bullet \frac{3}{5} + \frac{5}{6} \bullet \frac{4}{10}$

(b) $\frac{7}{5} \bullet \left(\frac{6}{10} + \frac{8}{7}\right)$

(d) $\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3} + \frac{4}{3}\right) x$

(f) $\frac{a}{15} \bullet (x^2 + n)$

(g) $\frac{3}{4} \bullet a + \frac{3}{4} b + \frac{3}{4} \bullet c$

(e) $r^2 s + r^2 x^3$

Ejercicio 22

a) $\frac{6}{4}(x + y) = \frac{6}{4}x + \frac{6}{4}y$

b) $\frac{18}{7}(t + y + \frac{5}{4}) = \frac{18}{7}t + \frac{18}{7}y + \frac{18}{7} \bullet \frac{5}{4} = \frac{18}{7}t + \frac{18}{7}y + \frac{90}{28}$

c) $\frac{a}{b}\left(\frac{5}{9} + \frac{x}{y}\right) = \frac{5a}{9b} + \frac{ax}{by}$

d) $\frac{p}{q}\left(\frac{z}{y} + \frac{5}{6}\right) = \frac{pz}{qy} + \frac{5p}{6q}$

e) $a\left(\frac{8}{5} + r + \frac{b}{c}\right) = \frac{8}{5} \bullet a + ra + \frac{b}{c} \bullet a$

f) $\left(\frac{6}{9} + q\right) \frac{3}{10} = \frac{18}{90} + \frac{3}{10}q$

g) $\left(\frac{10}{8} + \frac{p}{q} + \frac{r}{s}\right) \frac{7}{2} = \frac{70}{16} + \frac{7p}{2q} + \frac{7r}{2s}$

h) $\left(x + \frac{a}{b} + \frac{m}{n}\right) \frac{c}{d} = \frac{c}{d}x + \frac{ac}{bd} + \frac{mc}{nd}$

Ejercicio 23

a) $\frac{2}{5}x + \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}x = \left(\frac{2}{5} + \frac{3}{5} + \frac{4}{5}\right) x = \frac{9}{5}x$

b) $\frac{n}{8} \bullet \frac{a}{b} + \frac{n}{8} \bullet \frac{x}{y} = \frac{n}{8} \left(\frac{a}{b} + \frac{x}{y}\right)$

c) $\frac{1}{4} \bullet a + \frac{3}{4} \bullet a = a \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right) = a \bullet \frac{4}{4} = a \bullet 1 = a$

d) $\frac{5}{8} \bullet y + \frac{7}{8} \bullet y = y \left(\frac{5}{8} + \frac{7}{8}\right) = \frac{12}{8}y$

e) $\frac{9}{10} \bullet \frac{3}{x} + \frac{6}{10} \bullet \frac{3}{x} = \frac{3}{x} \left(\frac{9}{10} + \frac{6}{10}\right) = \frac{3}{x} \bullet \frac{15}{10} = \frac{45}{10x}$

f) $\frac{2}{7} \bullet \frac{1}{3} + \frac{2}{7} \bullet \frac{5}{3} = \frac{2}{7} \left(\frac{1}{3} + \frac{5}{3}\right) = \frac{2}{7} \bullet \frac{6}{3} = \frac{12}{21}$

g) $a \bullet x + b \bullet x + c \bullet x = x\,(a + b + c)$

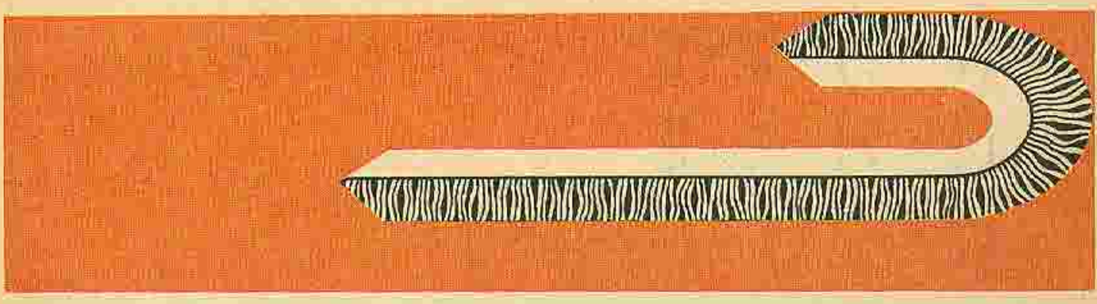
h) $\frac{3}{4} \bullet \frac{1}{y} + \frac{7}{4} \bullet \frac{1}{y} = \frac{1}{y} \left(\frac{3}{4} + \frac{7}{4}\right) = \frac{1}{y} \bullet \frac{10}{4} = \frac{10}{4y}$

i) $n \bullet \frac{2}{5} + n \bullet \frac{4}{5} + n \bullet \frac{1}{5} = n \left(\frac{2}{5} + \frac{4}{5} + \frac{1}{5}\right) = \frac{7}{5}n$

j) $\frac{2}{3} \bullet n^2 + \frac{1}{3} \bullet n^2 = n^2 \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right) = n^2 \bullet 1 = n^2$

k) $a^2 x^3 + a^2 y^2 = a^2 \,(x^3 + y^2)$

l) $(a + b)\, x + (a + b)\, y = (a + b)\,(x + y)$



VI. División de números racionales

1. La división de números racionales

Ejercicio 1

a) $\frac{3}{5} \div \frac{2}{3} = \frac{3 \bullet 2}{5 \bullet 2} = \frac{9}{10}$

b) $\frac{3}{9} \div \frac{7}{8} = \frac{3 \bullet 8}{9 \bullet 7} = \frac{24}{63}$

c) $\frac{7}{5} \div \frac{3}{12} = \frac{7 \bullet 12}{5 \bullet 3} = \frac{84}{15}$

d) $\frac{12}{3} \div \frac{3}{1} = \frac{12 \bullet 1}{3 \bullet 3} = \frac{12}{9}$

e) $\frac{15}{1} \div \frac{3}{1} = \frac{15 \bullet 1}{1 \bullet 3} = \frac{15}{3} = 5$

f) $\frac{2}{4} \div \frac{1}{2} = \frac{2 \bullet 2}{4 \bullet 1} = \frac{4}{4} = 1$

g) $\frac{12}{12} \div \frac{5}{5} = \frac{12 \bullet 5}{12 \bullet 5} = \frac{60}{60} = 1$

h) $8 \div \frac{1}{2} = \frac{8 \bullet 2}{1} = 16$

i) $\frac{13}{4} \div 3 = \frac{13 \bullet 1}{4 \bullet 3} = \frac{13}{12}$

j) $\frac{a}{b} \div \frac{2}{3} = \frac{3a}{2b}$

k) $\frac{3}{7} \div \frac{r}{s} = \frac{3s}{7r}$

l) $\frac{a}{5} \div \frac{m}{3} = \frac{3a}{5m}$

m) $\frac{1}{m} \div \frac{1}{n} = \frac{1 \bullet n}{1 \bullet m} = \frac{n}{m}$

n) $\frac{m}{n} \div \frac{a}{b} = \frac{mb}{na}$

o) $\frac{a}{b} \div \frac{a}{b} = \frac{ab}{ab} = 1$

p) $\frac{1}{a} \div \frac{1}{a} = \frac{a}{a} = 1$

q) $5 \div \frac{a}{b} = \frac{5b}{a}$

r) $10 \div \frac{1}{a} = \frac{10a}{1} \quad 10a$

s) $\frac{x}{y} \div \frac{y}{x} = \frac{x^2}{y^2}$

t) $\frac{1}{x} \div \frac{x}{1} = \frac{1}{x^2}$

u) $\frac{0}{n} \div \frac{x}{y} = \frac{0y}{nx} = \frac{0}{nx} = 0$

2. La división de racionales y la división de naturales

Ejercicio 2

a) $15 \div 18 = \frac{15}{1} \div \frac{18}{1} = \frac{15 \bullet 1}{1 \bullet 18} = \frac{15}{18}$

b) $5 \div 7 = \frac{5}{1} \div \frac{7}{1} = \frac{5}{7}$

c) $4 \div 6 = \frac{4}{1} \div \frac{6}{1} = \frac{4}{6}$

d) $18 \div 6 = \frac{18}{1} \div \frac{6}{1} = \frac{18}{6} = 3$

e) $3 \div 8 = \frac{3}{1} \div \frac{8}{1} = \frac{3}{8}$

f) $23 \div 9 = \frac{23}{1} \div \frac{9}{1} = \frac{23 \bullet 1}{1 \bullet 9} = \frac{23}{9}$

g) $5 \div 2 = \frac{5}{1} \div \frac{2}{1} = \frac{5}{2}$ h) $2 \div 5 = \frac{2}{1} \div \frac{5}{1} = \frac{2}{5}$

i) $4 \div 9 = \frac{4}{1} \div \frac{9}{1} = \frac{4}{9}$ j) $9 \div 4 = \frac{9}{1} \div \frac{4}{1} = \frac{9}{4}$

k) $13 \div 6 = \frac{13}{1} \div \frac{6}{1} = \frac{13}{6}$ l) $6 \div 13 = \frac{6}{1} \div \frac{13}{1} = \frac{6}{13}$

Ejercicio 3

a) $\frac{21}{16}$ b) $\frac{2}{33}$ c) $\frac{6}{11}$ d) $\frac{9}{7}$

e) $\frac{3}{35}$ f) 4 g) b h) $\frac{ac}{ba}$

i) $\frac{x}{5y}$ j) $\frac{5x}{y}$ k) $\frac{6n}{m}$ l) $\frac{6}{mn}$

m) z n) $\frac{vz}{3}$ o) $\frac{un}{vn} = \frac{u}{v}$ p) $\frac{gi}{gh} = \frac{i}{h}$

---

3. La división de números racionales y los inversos multiplicativos

Ejercicio 4

a) $\frac{15}{12}$ b) $\frac{3}{32}$

c) $\frac{20}{9}$ d) 36

e) $\frac{7}{3} \div \frac{1}{2} = \frac{7}{3} \bullet 2 = \frac{14}{3}$ f) $\frac{8}{9} \div \frac{4}{3} = \frac{8}{9} \bullet \frac{3}{4} = \frac{24}{36}$

g) $\frac{2}{10} \div 7 = \frac{2}{10} \bullet \frac{1}{7} = \frac{2}{70}$ h) $15 \div \frac{1}{3} = 15 \bullet 3 = 45$

i) $10 \div \frac{1}{6} = 10 \bullet 6 = 60$ j) $3 \div \frac{1}{8} = 3 \bullet 8 = 24$

k) $7 \div 3 = 7 \bullet \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$ l) $13 \div 5 = 13 \bullet \frac{1}{4} = \frac{13}{4}$

---

4. Una propiedad de la división

Ejercicio 5

a) $\frac{6}{4} \div \frac{2}{5} = \frac{30}{8}$; $\frac{18}{8} \div \frac{6}{10} = \frac{180}{48} = \frac{30}{8}$

b) $\frac{4}{8} \div \frac{1}{2} = \frac{8}{8} = 1$; $\frac{16}{40} \div \frac{4}{10} = \frac{160}{160} = 1$

c) $\dfrac{\frac{7}{5}}{\frac{4}{6}} = \frac{42}{20}$; $\frac{14}{30} \div \frac{8}{36} = \frac{504}{240} = \frac{42}{20}$

d) $\dfrac{9}{\frac{4}{12}} = \frac{108}{4} = 27$; $\frac{18}{10} \div \frac{8}{120} = \frac{2160}{80} = 27$

e) $\dfrac{\frac{6}{5}}{3} = \frac{6}{15}$; $\dfrac{\frac{60}{5}}{30} = \frac{60}{150} = \frac{6}{15}$

f) $\dfrac{\frac{20}{10}}{\frac{5}{10}} = \frac{200}{50} = 4$; $\dfrac{\frac{200}{100}}{\frac{50}{100}} = \frac{20\,000}{5000} = 4$

g) $3 \div 4 = \frac{3}{4}$; $6 \div 8 = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

h) $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{x}{y}} = \frac{ay}{bx}$; $\dfrac{\frac{an^2}{b}}{\frac{xn^2}{y}} = \frac{ayn^2}{bxn^2} = \frac{ay}{bx}$

VII. Ecuaciones

1. Resolución de ecuaciones

Ejercicio 1

a) Dividir entre $\frac{3}{4}$

b) Multiplicar por $\frac{5}{6}$

c) Multiplicar por 2

d) Multiplicar por $\frac{1}{4}$

e) Dividir entre $\frac{3}{4}$

f) Dividir entre $\frac{6}{8}$

g) Dividir entre 3

h) Dividir entre 3

i) Dividir entre $\frac{1}{2}$

j) Multiplicar por $\frac{1}{2}$

k) Dividir entre $\frac{2}{3}$

l) Dividir entre 6

m) Dividir entre 3

Ejercicio 2

a) $x = \frac{1}{2}$ b) $b = 15$ c) $y = 10$

d) $a = \frac{12}{14}$ e) $n = 24$ f) $a = 4$

g) $x = \frac{36}{24}$ h) $n = 4$ i) $x = \frac{8}{15}$

j) $y = \frac{12}{60}$ k) $r = \frac{10}{24}$ l) $c = \frac{16}{3}$

m) $x = \frac{8}{6}$ n) $b = \frac{my}{nx}$

Ejercicio 3

c) $$4 = \frac{2}{5} \bullet y$$

$$4 \bullet \frac{5}{2} = \left(\frac{2}{5} \bullet y \right) \bullet \frac{5}{2}$$

$$\frac{20}{2} = y$$

d) $$\frac{4}{7} = \frac{2}{3} \bullet a$$

$$\frac{4}{7} \bullet \frac{3}{2} = \left(\frac{2}{3} \bullet a \right) \bullet \frac{3}{2}$$

$$\frac{12}{14} = a$$

e) $$n \bullet \frac{2}{8} = 6$$

$$\left(n \bullet \frac{2}{8} \right) \bullet \frac{8}{2} = 6 \bullet \frac{8}{2}$$

$$n = \frac{48}{2} = 24$$

f) $$\frac{10}{3} = a \bullet \frac{5}{6}$$

$$\frac{10}{3} \bullet \frac{6}{5} = a \bullet \frac{5}{6} \bullet \frac{6}{5}$$

$$\frac{60}{15} = a$$

g) $x \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{8}$

$$x \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3} = \frac{9}{8} \cdot \frac{4}{3}$$

$$x = \frac{36}{24}$$

Ejercicio 4

a) $x = \frac{3}{8}$ b) $y = 12$ c) $a = \frac{1}{8}$

d) $x = \frac{3}{24}$ e) $y = 14$ f) $4m = 3$

g) $m = \frac{15}{12}$ h) $\frac{4}{3}m = 2$

i) $\frac{a}{b} \cdot x = \frac{5}{3}$ j) $y = \frac{4m}{24}$

k) $\frac{a}{b} \cdot x \cdot \frac{b}{a} = \frac{5}{3} \cdot \frac{b}{a}$

$$x = \frac{5b}{3a}$$

Ejercicio 5

a) $x = \frac{5}{8}$ b) $y = 40$ c) $a = \frac{1}{16}$

d) $b = \frac{1}{35}$ e) $e = \frac{1}{10}$ f) $f = 1$

g) $m = 20$ h) $n = 16$ i) $p = \frac{1}{21}$

j) $q = \frac{1}{100}$ k) $m = \frac{1}{8}$ l) $x = 1$

m) $y = 1$

2. Resolución de problemas por medio de ecuaciones

Problemas

a) *Ecuación.* $x \cdot \frac{3}{4} = 6$

Solución. $x = 8$

Respuesta. Ese número es 8.

---

b) *Ecuación.* $\frac{x}{\frac{1}{2}} = \frac{5}{3}$

Solución. $x = \frac{5}{6}$

Respuesta. Ese número es $\frac{5}{6}$

---

c) *Ecuación.* $x \cdot \frac{6}{5} = \frac{2}{3}$

Solución. $x = \frac{10}{18}$

Respuesta. Ese número es $\frac{10}{18}$

---

d) *Ecuación.* $\frac{x}{\frac{7}{8}} = 1$

Solución. $x = \frac{7}{8}$

Respuesta. El número es $\frac{7}{8}$

---

e) *Ecuación.* $5n = \frac{10}{3}$

Solución. $n = \frac{10}{15}$

Respuesta. Ese número es $\frac{10}{15}$

f)—*Ecuación.* $c \bullet \frac{1}{2} = 6$

Solución. $c = 12$

Respuesta. El número es 12.

g) *Ecuación.* $\frac{x}{4} = \frac{3}{5}$

Solución. $x = \frac{12}{5}$

Respuesta. El número es $\frac{12}{15}$

h) *Ecuación.* $\frac{2}{5} \bullet x = \frac{1}{2}$

Solución. $x = \frac{5}{4}$

Respuesta. El número es $\frac{5}{4}$

i) *Ecuación.* $4n = \frac{8}{9}$

Solución. $n = \frac{8}{36}$

Respuesta. El número es $\frac{8}{36}$

j) *Ecuación.* $\frac{x}{\frac{3}{4}} = \frac{5}{6}$

Solución. $x = \frac{15}{24}$

Respuesta. El número es $\frac{15}{24}$

k) *Ecuación.* $\frac{x}{2} = \frac{7}{8}$

Solución. $x = \frac{14}{8}$

Respuesta. El número es $\frac{14}{8}$

---

l) *Ecuación.* $\frac{x}{6} = \frac{3}{8}$

Solución. $x = \frac{18}{8}$

Respuesta. El número es $\frac{18}{8}$

Ejercicio 6

a) *Ecuación.* $\frac{x}{8} = \frac{3}{4}$

Solución. $x = \frac{24}{4} = 6$

Respuesta. El segmento $\overline{AB}$ mide 6 metros.

b) *Ecuación.* $x \bullet \frac{1}{2} = 2$

Solución. $x = 4$

Respuesta. La base mide 4 metros.

c) *Ecuación.* $x \bullet 5 = \frac{1}{2}$

Solución. $x = \frac{1}{10}$

Respuesta. El objeto mide $\frac{1}{10}$ de centímetro.

d) *Ecuación.* $5x = \frac{3}{2}$

Solución. $x = \frac{3}{10}$

Respuesta. Cada barra pesa $\frac{3}{10}$ de kilogramo.

e) *Ecuacion.* $300 \cdot \frac{1}{6} = x$

Solución. $x = 50$

Respuesta. El engrane mayor gira 50 vueltas.

f) *Ecuación.* $\frac{9}{2} \cdot \frac{1}{6} = x$

Solución. $\frac{9}{12}$

Respuesta. En la Luna el objeto pesa $\frac{9}{12}$ de kilogramo.

VIII. Notación decimal para los números racionales

1. Fracciones y decimales

Ejercicio 1

a) $\overline{.2}$ b) $\overline{.3}$ c) .75
d) $\overline{.05}$ e) .25 f) $\overline{.45}$
g) .35 h) 1.375 i) $4.\overline{6}$
j) 2.5 k) 9.0 l) 1.0
m) 0.0 n) 5.0 o) $1.\overline{428571}$
p) 3.5 q) .008 r) .75
s) .065 t) .08 u) 49.6

Problema

a) No, porque $\overline{.63}$ es un decimal periódico y .63 no lo es.
b) Sí.

2. Decimales y fracciones

Ejercicio 2

a) $\frac{1}{10}$ b) $\frac{2}{10}$ c) $\frac{3}{10}$

d) $\frac{4}{10}$ e) $\frac{9}{10}$ f) $\frac{85}{10}$

g) $\frac{10}{10}$ h) $\frac{20}{10}$ i) $\frac{32}{10}$

j) $\frac{69}{10}$ k) $5.0 = \frac{50}{10}$ l) $\frac{182}{10}$

m) $\frac{26}{100}$ n) $\frac{83}{100}$ o) $\frac{5}{100}$

p) $\frac{1}{100}$ q) $\frac{375}{100}$ r) $\frac{1\,618}{100}$

s) $\frac{2\,001}{100}$ t) $\frac{30\,296}{100}$ u) $\frac{800}{100}$

Ejercicio 3

a) $\frac{856}{1\,000}$ b) $\frac{92}{1\,000}$ c) $\frac{5\,908}{1\,000}$

d) $\frac{238}{1\,000}$ e) $\frac{7}{1\,000}$ f) $\frac{46}{1\,000}$

g) $\frac{6\,400}{1\,000}$ h) $\frac{1\,001}{1\,000}$ i) $\frac{9\,075}{1\,000}$

j) $\frac{1}{10\,000}$ k) $\frac{409}{10\,000}$ l) $\frac{6\,007}{10\,000}$

m) $\frac{30\,049}{10\,000}$ n) $\frac{54\,860}{10\,000}$ o) $\frac{270\,475}{10\,000}$

3. Orden

Ejercicio 4

a) $.8 > .2$ b) $.9 < 1.1$ c) $3.2 > 3.09$

d) $.008 < .09$ e) $.0003 < .001$ f) $\frac{2}{5} > .3$

g) $.6 > .075$ h) $\frac{1}{2} < .6$ i) $.009 < .09$

j) $.8 = .80$ k) $.13 < .2$ l) $.07 > .007$

m) $.9 = .900$ n) $.01 < .10$ o) $0 < .1$

4. Operaciones con números racionales expresados en notación decimal

Ejercicio 5

a) 7.94 b) 22.26 c) 113.23

d) 52.079 e) 8.859 f) 10.491

Ejercicio 6

a) 13.11 b) 1.18 c) 2.82

d) 5.03 e) 2.554 f) .477

Ejercicio 7

a) .9954 b) 2.00 c) 8.289

d) .2091 e) 2.32 f) 7.8741

Ejercicio 8

a) 2.1625 b) 7.05 c) .0375

d) 14.875 e) $.02\overline{3}$ f) $6.55\overline{714285}$

Ejercicio 9

a) $1266.\overline{6}$ b) 8.75 c) $8.8\overline{1}$

d) .4 e) 95.92 f) $.0\overline{428571}$

g) $922.\overline{2}$ h) $\overline{42.8571}$

Ejercicio 10

a) 1 000 b) 1 000 c) 100

d) 10 000 e) 10 f) 100

g) 1 000 h) 100

Ejercicio 11

a) .3 b) 1.5 c) 24.0

d) 12.0 e) 50.0 f) 60.0

g) 20.0 h) .7 i) .04

Problemas

a) 124.2 millones de dólares.

b) Pesa 200 gramos.

c) Se debe pagar $64.40

d) Pesa .555 gramos.

e) 89.50 dólares equivalen a 80.55 rublos.

f) 101.75 rupias equivalen a 13.75 dólares.

g) La diferencia es de 2.113 km.

h) Es más alto en 2.706 km.

i) Hay 35.3 gramos de azufre.

j) Hay 3.36 kg. de hidrógeno.

k) La distancia es de 384 000 km.

l) Su velocidad es de 340 m en un segundo.

m) 7.8 gramos de hierro ocupan el volumen de 1 cm^3.

n) De Júpiter al Sol hay 5.376 U. A.

o) De Plutón al Sol hay 5 952 millones de kilómetros.

5. Resolución de ecuaciones

Ejercicio 12

a) $x = 1.2$ b) $x = .3$ c) $x = 4.6$

d) $x = 20$ e) $x = 7.8$ f) $x = .1$

g) $x = 3$ h) $x = \overline{3.70}$ i) $x = .27$

j) $x = 35$

IX. Proporcionalidad directa e inversa

1. Proporcionalidad directa

Ejercicio 1

a) 1. Recorrió 180 kilómetros en tres horas.

2. Tardó 5 horas en recorrer 300 km.

b)

d	60	120	180	240	300	360
t	1	2	3	4	5	6
$\frac{d}{t}$	60	60	60	60	60	60

Los cocientes son iguales.

Ejercicio 2

a)

s	20	35	50	60	75
t	4	7	10	12	15
$\frac{s}{t}$	5	5	5	5	5

b) Las razones $\frac{s}{t}$ son iguales.

c) Sí existe proporcionalidad directa.

d) Bombea 5 litros por minuto.

Ejercicio 3

a) 7 b) 50

c) 12 d) 10, 75

Ejercicio 4

a) 30 litros b) 90 litros c) 125 litros

d) 20 minutos e) 30 minutos f) 16 minutos

Ejercicio 5

a)

	△ *ABC*	△ *ADE*	△ *AFG*	△ *AHI*	△ *AJK*
a	40	46	56	65	69
b	70	80	98	113	120
$\frac{a}{b}$	.57	.57	.57	.57	.57

b) Las razones $\frac{a}{b}$ son iguales.

c) Sí existe proporcionalidad directa.

d) 64

e) $\frac{64}{AR} = .46\ ;\ AR = \frac{64}{.46} = 139.1$

f) 39

g) $\frac{ZY}{39} = .46\ ;\ ZY = 39 \times .46 = 17.9$

Ejercicio 6

b) Medida de $\overline{AE}$ c) Medida de $\overline{HI}$

d) Medida de $\overline{AI}$ e) Medida de $\overline{AQ}$.

Medida de $\overline{AZ}$.

Ejercicio 7

a) 1. Sí
2. Sí
3. Sí

b) 1. Sí
2. No
3. No

c) 1. Sí
2. No
3. No

d) 1. Sí
2. Sí
3. Sí

e) 1. Sí
2. Sí
3. Sí

Problema

a) Sí b) Sí c) Sí

Ejercicio 8

a	7	14	17.5	35	42
b	2	4	5	10	12
$\frac{a}{b}$	3.5	3.5	3.5	3.5	3.5

Problema

La solución de la ecuación $\frac{255}{3} = \frac{425}{x}$ es $x = 5$. Por lo tanto, el automóvil tardará 5 horas en recorrer 425 kilómetros.

La solución de la ecuación $\frac{125}{50} = \frac{30}{x}$ es $x = 12$. Por lo tanto, en 30 gramos de sal hay 12 gramos de sodio.

Ejercicio 9

a) Deberá contar 72 pulsaciones en un minuto.

b) Filtran 7 500 mililitros de sangre en una hora.

c) Respirará 1 560 veces en 120 minutos.

d) Imprimirá 70 000 pliegos en 20 horas.

e) El radio de esa circunferencia mide 5 pulgadas.

f) La luz del Sol tarda $746.\overline{6}$ segundos en llegar a Marte.

2. Proporcionalidad inversa

Ejercicio 10

a) 100 centímetros cúbicos.

b) 50 centímetros cúbicos.

c) 4 kilogramos.

d) 250 gramos.

Ejercicio 11

a)

p	v	pv
250	400	100 000
500	400	100 000
1 000	100	100 000
2 000	50	100 000
4 000	25	100 000

b) Los productos $p \bullet v$ son iguales.

Ejercicio 12

a) $133.\bar{3}$ centímetros cúbicos.

b) 66.6 centímetros cúbicos.

c) $v = 40$ centímetros cúbicos.

d) $v = 22.\bar{2}$ centímetros cúbicos.

e) $v = 20$ centímetros cúbicos.

f) $333.\overline{3}$ gramos.

g) $p = 1\,333.\overline{3}$ gramos.

h) $p = 8$ kilogramos.

Ejercicio 13

a)

	b	*a*	*ba*
Rectángulo I	12	12	144
Rectángulo II	9	16	144
Rectángulo III	8	18	144
Rectángulo IV	6	24	144

b) Es igual en todos los casos.
c) Es el área de cada rectángulo.
d) Sí
e) Sí
f) Sí

Ejercicio 14

	b	*a*	*ba*
Rectángulo I	12	12	144
Rectángulo II	9	16	144
Rectángulo III	8	18	144
Rectángulo IV	6	24	144
Rectángulo V	3	48	144
Rectángulo VI	2	72	144
Rectángulo VII	1	144	144
Rectángulo VIII	.5	288	144
Rectángulo IX	.4	360	144

Ejercicio 15

a) El tinaco se llena en 1.3 horas.

b) El terreno mide 42 metros de fondo.

c) Deberá viajar a 104 kilómetros por hora.

d) La velocidad del camión carguero fue de 50.4 km por hora.

e) Hace el mismo recorrido en 2.6 horas.

3. Problemas

a) Hay 1.8 kg. de calcio en el cuerpo de esa persona.

b) La construirán en 21.6 horas.

c) Gastará 10.83 litros de gasolina.

d) Siete dólares equivalen a 190.4 escudos portugueses.

e) La pintarán en 12 horas.

f) Son necesarios 11.306 kg de covellina.

g) Se vaciará en $5.8\overline{3}$ horas.

h) Habrá 6.768 kg. de plata en 9 kg. de querargirita.

i) Ocupará 596.428 cm^3.

j) Habrá 1 584 mg de vitamina C.

k) Tendrá $1.1\overline{6}$ m. de altura.

l) Deben ponérsele 3.666 kg.

m) 406.25 pesos equivalen a 32.5 dólares.

n) Debe medir .213 metros de largo

o) La altura del guerrero debe ser de 34.5 cm.

p) Deben pagarse $ 650.00.

X. Tanto por ciento

Ejercicio 1

a) 10 b) 6 c) 120

d) 9 e) 6 f) 5.4

g) 3 h) .2

Ejercicio 2

a) Un televisor comprado a plazos sale en $ 3 000.00.

b) Debe devolver $ 19 040.00.

c) Se debe pagar $ 389.30 por el tocadiscos.

d) Debe recibir $ 1 400.00 de intereses.

e) México produjo 529 millares de toneladas de algodón en 1969.

f) La extensión de Tlaxcala es de 3 925 kilómetros cuadrados, aproximadamente.

g) En el Distrito Federal, según el Censo de 1970, había 7 050 620 habitantes.

h) 1. Si pesa 60 kilogramos, tiene
    39 kg de oxígeno,
    10.8 kg de carbono,
    6 kg de hidrógeno.
  2. Si pesa 70 kilogramos, tiene
    12.6 kg de carbono,
    7.0 kg de hidrógeno,
    2.1 kg de nitrógeno,
    1.4 kg de calcio.
  3. El muchacho de 40 kilogramos tendrá
    26 kg de oxígeno,
    7.2 kg de carbono,
    4 kg de hidrógeno,
    1.2 kg de nitrógeno,
    .8 kg de calcio,
    .4 kg de fósforo y
    .4 kg de otros minerales.

Ejercicio 3

a) El total de utilidades fue de $ 92 500.00

b) Duró 90 minutos el programa.

c) Se necesitan $18.1\overline{8}$ kg de oro.

d) Cuestan $ 25.00

e) Pesaba 80 kg.

f) Pesa 65 kilogramos.

g) La población era aproximadamente de 8.53 millones de habitantes.

h) Se necesitan 16 kilogramos de cincita.

Ejercicio 4

a) El 20% de la cincita es oxígeno.

b) Ese banco paga el 4.5% anualmente.

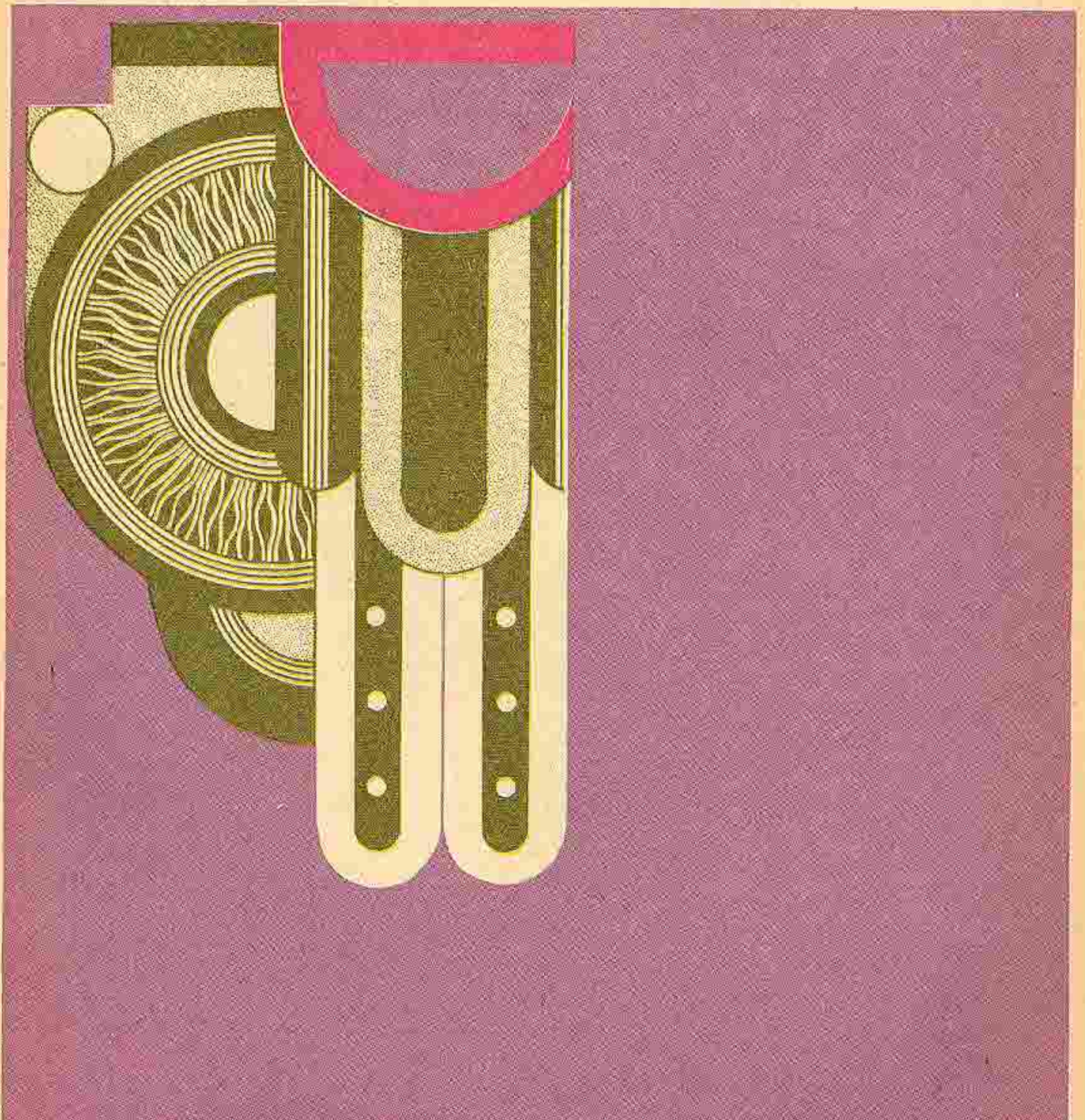
c) El 70% del territorio se ocupa en la ganadería.

d) Está construido el 40% del terreno.

e) Dedica al estudio el 25% del día.

f) Contendrá 35% de algodón.

g) Se gastó el 20% del combustible en el viaje.



Esta edición
de 20,000
ejemplares se
terminó de imprimir en el mes
de febrero
de 1975, en
los talleres
de la Cía.
Editorial
Continental, S. A.,
Calzada de
Tlalpan No.
4620, México 22, D. F.