Algunos Aspectos de la Geometría[1]

Emilio Lluis Riera

Por su belleza y su gran valor estético, por la elegancia de sus construcciones y la nitidez de sus razonamientos, la Geometría ha sido siempre una de las ramas más queridas de la Matemática.

Para el pedagogo, la Geometría se distingue como la disciplina más apropiada para desarrollar la capacidad de razonamiento del alumno y despertar su interés por la Matemática. Esto ocurre en todos los niveles. En el más elemental, cuando al alumno únicamente puede exigírsele que distinga una figura de otra, que se fije en los conceptos intuitivos más elementales de la Geometría, las simples figuras ya inspiran en él un agradable sentido de estética, de simetría, de regularidad y belleza. En los siguientes niveles, cuando el alumno ya es capaz de efectuar razonamientos lógicos, es cuando la Geometría le permite aclarar perfectamente el significado, en la Matemática, de una demostración, analizando paso a paso los razonamientos seguidos. Más adelante, la Geometría, mediante los problemas que en ella se plantean, nos proporciona el mejor medio para que el alumno perfeccione sus facultades de investigación, es decir, que intuya resultados para él aún desconocidos y los demuestre con todo rigor.

Estas excepcionales cualidades de la Geometría se deben esencialmente a la imagen que nos formamos de los conceptos geométricos los cuales son una excelente guía tanto en la forma de intuir una propiedad como en la demostración de la misma.

Sin embargo, desde hace ya varios años se ha notado una tendencia a suprimir la Geometría en la enseñanza de la matemática; a veces parcialmente y en algunos niveles totalmente. Esto, creo yo, es un grave error, no únicamente por el valor que la Geometría tiene como asignatura formativa, sino como base para muchas ramas de la Matemática que más adelante se estudien.

En este breve artículo no tratare de lo que debe enseñarse o no, en el nivel de nuestras escuelas secundarias; esto compete a personas mucho más preparadas que yo y con mayor experiencia en la enseñanza de la Matemática en este nivel. Pero si creo conveniente mencionar varios puntos que a mi parecer es conveniente que conozca el profesor de matemática de la Escuela Secundaria. Tengo la impresión de que si al profesor de escuela secundaria se le proporcionan sólidos conocimientos de la Geometría, éste, a su vez, los trasmitirá a sus alumnos.

Uno de los primeros temas que considero conveniente tratar es el de la axiomática en la Matemáticas y en particular en la Geometría.

Quién de nosotros no ha oído o leído "definiciones" como la siguiente: "Se llama axioma a

[1]Primer Seminario Nacional sobre la Enseñanza Moderna de la Matemática en las Escuelas Secundarias de México. Conceptos Fundamentales de la Geometría. ANPM. Toluca, 1969.

una verdad evidente por sí misma". Y es aquí cuando el alumno inteligente puede hacer la pregunta: ¿evidente para quién, maestro? Desde luego, lo que para uno puede ser evidente, para otro puede ser no evidente.

Este error, es decir, el interpretar los axiomas como "verdades evidentes" es un error muy común en la enseñanza de la Geometría. En lo que sigue trataré de explicar cuál es el punto de vista matemático acerca de los axiomas; pero antes observemos lo falso del punto de vista antes mencionado con un simple ejemplo. En la Geometría Euclidiana uno de los axiomas dice que: por un punto que no esté en una recta puede trazarse una y solamente una paralela a dicha recta. Podríamos decir que esto es evidente en la Geometría Euclidiana.

Hay otras geometrías, sin embargo, en las cuales, a través de un punto que no esté en una recta, pueden trazarse no una sola, sino muchas paralelas a esta recta, es decir, el concepto de paralelismo en esta nueva geometría es diferente del concepto de paralelismo en la Geometría Euclidiana. ¿Cuál de los dos axiomas es evidente? Todo está en el punto de vista que se adopte. Es decir, todo está en la geometría en la cual se quiera trabajar.

Desde hace ya muchas décadas, el método axiomático quedó definitivamente establecido en la Matemática. Según éste, una teoría matemática, por ejemplo la Geometría Euclidiana, la Geometría Proyectiva, la Teoría de los Grupos, etc., consiste en una colección de afirmaciones de las cuales se parte y a las que se acostumbra llamar axiomas o postulados y de una serie de proposiciones deducidas lógicamente de ellos. En el enunciado de los postulados figuran con frecuencia términos "no definidos".

Por ejemplo, en la Geometría Euclidiana, los términos no definidos pueden ser los de "punto", "recta" y "plano" y las siguientes afirmaciones pueden formar parte de un sistema de axiomas que determina la Geometría Euclidiana:

Dados dos puntos distintos existe una recta que los con tiene y solamente una.

Todo plano contiene al menos tres puntos que no están alineados.

El espacio contiene al menos cuatro puntos que no están en un plano.

Si dos puntos de una recta están en un plano entonces la recta está contenida en el mismo plano.

Tres puntos arbitrarios están al menos en un plano y tres puntos cualesquiera no alineados están en un solo plano.

Si dos planos diferentes se intersecan, su intersección es una recta. Es decir, éstos junto con otros axiomas más, permiten demostrar todos los teoremas de la Geometría Euclidiana y podríamos decir que la Geometría Euclidiana consta de una colección de axiomas y de las proposiciones o teoremas que de ella se pueden deducir.

Veamos otro ejemplo, en la Geometría Proyectiva, mejor dicho, en las Geometrías Proyectivas, el primero de los axiomas de la lista que dimos antes se toma también como axioma, es decir:

Dos puntos distintos (del espacio proyectivo ahora) pertenecen a una y solamente una recta.

Otro de los axiomas en esas geometrías es:

Dos rectas distintas se intersecan en uno y solamente un punto.

Y siguen otros axiomas más que van definiendo la geometría proyectiva de que se trate.

Observemos que este segundo axioma de la Geometría Proyectiva que acabamos de enunciar no es válido en la Geometría Euclidiana, en esta hay rectas distintas cuya intersección es vacía, es decir, que no se intersecan. Estas se llaman rectas paralelas.

Aquí pues, podemos repetir el comentario: el hecho de que dos rectas distintas se intersequen siempre ¿Es "una verdad evidente por sí misma"? No, esto no tiene sentido. Simplemente es una afirmación que al aceptarla, junto con otras, da lugar a toda una teoría matemática, la Geometría Proyectiva.

Analicemos otro postulado de la Geometría Euclidiana:

Dados una recta L y un punto P que no esté en L, existe solamente una recta que contiene a P y que es paralela a L.

En la Geometría Proyectiva esta afirmación carece de sentido, pues, como hemos visto, en ella dos rectas siempre tienen al menos un punto en común y no hay rectas paralelas.

(Obsérvese que en el postulado anterior se asegura únicamente la unicidad de la recta paralela. Su existencia se demuestra a partir de otros de los axiomas.)

Creo oportuno en esta etapa hacer un comentario acerca del mencionado axioma, al cual se acostumbra darle el nombre de "Decimoquinto postulado de Euclides". En un afán de reducir el sistema de axiomas de la Geometría Euclidiana o simplemente guiados por su intuición, muchos fueron los matemáticos que trataron de probar este postulado basándose en los postulados restantes. Todos los esfuerzos fueron vanos. En efecto más adelante veremos que esto es imposible, es decir, este postulado es independiente de los restantes. Por otro lado, si queremos que en la Geometría Euclidiana la suma de los tres ángulos internos de un triángulo sea 180 grados nos vemos forzados a aceptar el Decimoquinto Postulado de Euclides.

¿Cómo demostrar que el mencionado postulado no es consecuencia de los restantes? Para ello debemos remontarnos a principios del siglo XIX, cuando Lobachevski (1793-1856) construyó una geometría en la cual valen todos los axiomas de la Geometria Euclidiana excepto el Decimoquinto, en cuyo lugar se postula:

Por un punto P externo a una recta L pasan al menos dos paralelas a L.

A la geometría así obtenida se le llama la Geometría de Lobachevski o Geometría Hiperbólica y no es difícil construir un modelo concreto. Esta fue una de las primeras geometrías no euclidianas que se encontraron.

En esta geometría hay teoremas como los siguientes:

Por un punto exterior a una recta pasa al menos una perpendicular a dicha recta. (En la Euclidiana pasa una sola).

Por un punto de una recta pasa una y solo una perpendicular a la recta.

La suma de los ángulos internos de un triángulo es menor o igual que 180 grados.

Este paso dado por Lobachevski tuvo gran trascendencia no por lo que su geometría haya dado sino por el punto de vista axiomático con el que se empezaron a tratar desde entonces las distintas teorías matemáticas.

Es decir, desde entonces se empezaron a dar cuenta que para construir una cierta teoría matemática se requiere un conjunto de axiomas y una colección de resultados obtenidos a partir de aquellos.

Es por esta enorme libertad de que se goza en la Matemática y que ha permitido el gigantesco desarrollo actual de esta ciencia que el gran matemático, filósofo y Hombre de Paz, Bertrand Russell, dijo: "la Matemática es una ciencia en la que nunca se sabe de qué se habla ni si lo que se dice es cierto". Con esto Bertrand Russell recalca el papel fundamental que en la Matemática juega la axiomática, la cual "define" los objetos con los cuales se trabaja y las leyes que ellos obedecen. Por otro lado, no hay otra ciencia tan precisa como la Matemática, y podemos decir, con Emile Borel, que "la Matemática es la única ciencia en la que se sabe exactamente de lo que se habla y se está seguro de que lo que se dice es cierto".

Para finalizar con el tema del método axiomático en la Matemática expondré dos ejemplos de teorías matemáticas "en miniatura", de M. Richardson, sumamente simples, y otro de una Geometría Proyectiva Finita (con 7 puntos y 7 rectas).

Consideremos la siguiente "mini teoría" (para estar con la moda):

Los términos no definidos son tres: A, B, C. Los axiomas son:

Axioma 1. Toda A es B.
Axioma 2. Toda B es C.
Teorema 1. Toda A es C.

Otra teoría:

Se tienen 4 términos no definidos: X, Y, Z, W. Los -axiomas son:

Axioma 1. Toda X es Y.
Axioma 2. Alguna X es Z.
Axioma 3. Toda Y es W.
Teorema 1. Alguna Y es Z.
Definición 1. Toda Y que sea Z se llamará V.
Teorema 2. Alguna W es V.

Siguiendo el comentario de Richardson, aquí tenemos dos simplísimas teorías en las cuales se reflejan ya todas las características de una teoría matemática.

Pasemos a describir (en forma muy breve pues la longitud de este artículo no nos permite ver muchos detalles) las geometrías proyectivas planas.

Una geometría proyectiva plana consta de un conjunto P de elementos (que llamaremos puntos) y una colección de subconjuntos (que llamaremos rectas). Si un punto P pertenece a una recta L escribiremos $P \in L$ y diremos que P y L son incidentes, que L pasa por P o que P está en L. Los axiomas que debe satisfacer una geometría proyectiva son:

Axioma 1. Si P y Q son dos puntos distintos, existe una y solamente una recta L incidente con P y Q.

Axioma 2. Si L_1 y L_2 son dos rectas distintas, existe un punto único P tal que es incidente con L_1 y L_2.

Antes de enunciar el Axioma 3 conviene dar una definición que facilite el lenguaje.

Definición 1. Se dice que tres puntos son colineales si existe una recta que pasa por los tres.

Axioma 3. Hay al menos cuatro puntos en P que no son colineales tres a tres.

Dicho en palabras menos precisas, el Axioma 1 dice que dos puntos determinan una recta única, el Axioma 2 dice que dos rectas determinan un punto único (su intersección) y el Axioma 3, que hay "bastantes" puntos no colineales.

Obsérvese que la Geometría Euclidiana satisface los Axiomas 1 y 3, no así el 2, como ya hemos mencionado antes.

No es muy difícil ver que hay muchas geometrías proyectivas planas, es decir, muchos modelos distintos que satisfacen estos tres axiomas.

Uno de ellos, posiblemente el más conocido, es el plano proyectivo real. Aunque no podemos ahora entrar en detalles pues la longitud de este artículo no lo permitiría, éste puede describirse como el plano real, el de la Geometría Analítica usual, junto con "recta al infinito" (la cual debe definirse con precisión) formada con "un punto al infinito por cada dirección" (esto debe definirse también con todo rigor). Así, dos rectas que en la Geometría Euclidiana son paralelas se dice que se intersecan en el punto al infinito en la dirección de dichas rectas paralelas, con lo cual se satisface ya el axioma 2.

El ejemplo que sigue es el de una geometría plana con 7 puntos y 7 rectas. Sea $P = \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7\}$ el conjunto de puntos. Consideremos los siguientes subconjuntos a los cuales llamaremos rectas:

$L_1 = \{P_1, P_2, P_3\}$ $L_2 = \{P_1, P_4, P_5\}$

$L_3 = \{P_1, P_6, P_7\}$ $L_4 = \{P_2, P_4, P_6\}$

$L_5 = \{P_2, P_5, P_7\}$ $L_6 = \{P_3, P_4, P_7\}$

$L_7 = \{P_3, P_5, P_6\}$

Una comprobación directa nos hace ver que valen los 3 axiomas de las geometrías proyectivas:

1.- Dados dos puntos distintos hay una sola recta que los contiene (deben hacerse 7·6/1 ·2=21 comprobaciones). Por ejemplo, si tomamos P_3 y P_5, la única recta que los contiene es L_{17}.

2.- Dos rectas distintas se intersecan en un solo punto (mismo número de comprobaciones). Por ejemplo, L_4 y L_7 se intersecan en el punto P_6.

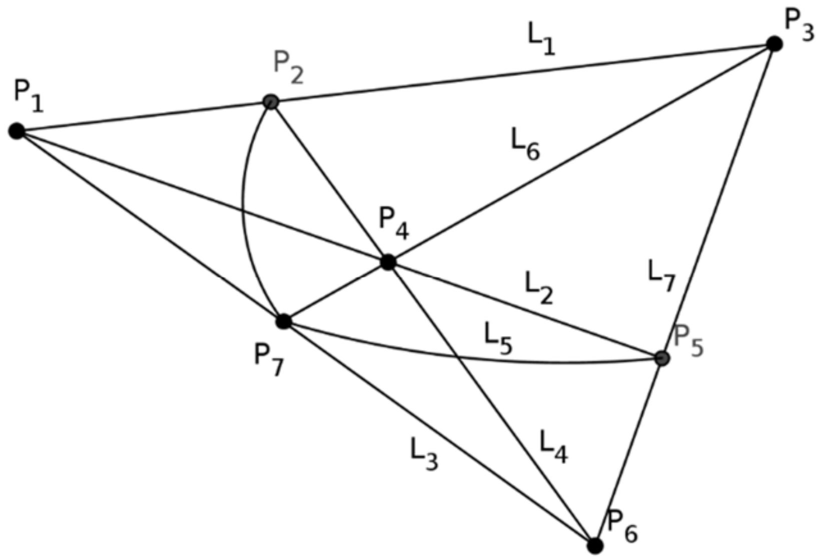
3.- Los puntos P_1, P_3, P_4, P_6, son tres a tres no colineales (debemos hacer $(4 \cdot 3 \cdot 2) / (1 \cdot 2 \cdot 3) = 4$ comprobaciones). En efecto P_1, P_2, P_4 no son colineales; P_1, P_2, P_7 tampoco; P_1, P_4, P_7 tampoco y P_2, P_4, P_7 tampoco.

Para facilitar estas comprobaciones puede sernos útil una tabla, llamada la tabla de incidencia:

	L_1	L_2	L_3	L_4	L_5	L_6	L_7
P_1	X	X	X				
P_2	X			X	X		
P_3	X					X	X
P_4		X		X		X	
P_5		X			X		X
P_6			X	X			X
P_7			X		X	X	

cuya interpretación no necesita muchas explicaciones.

También podemos formarnos "una imagen geométrica" de esta geometría proyectiva:

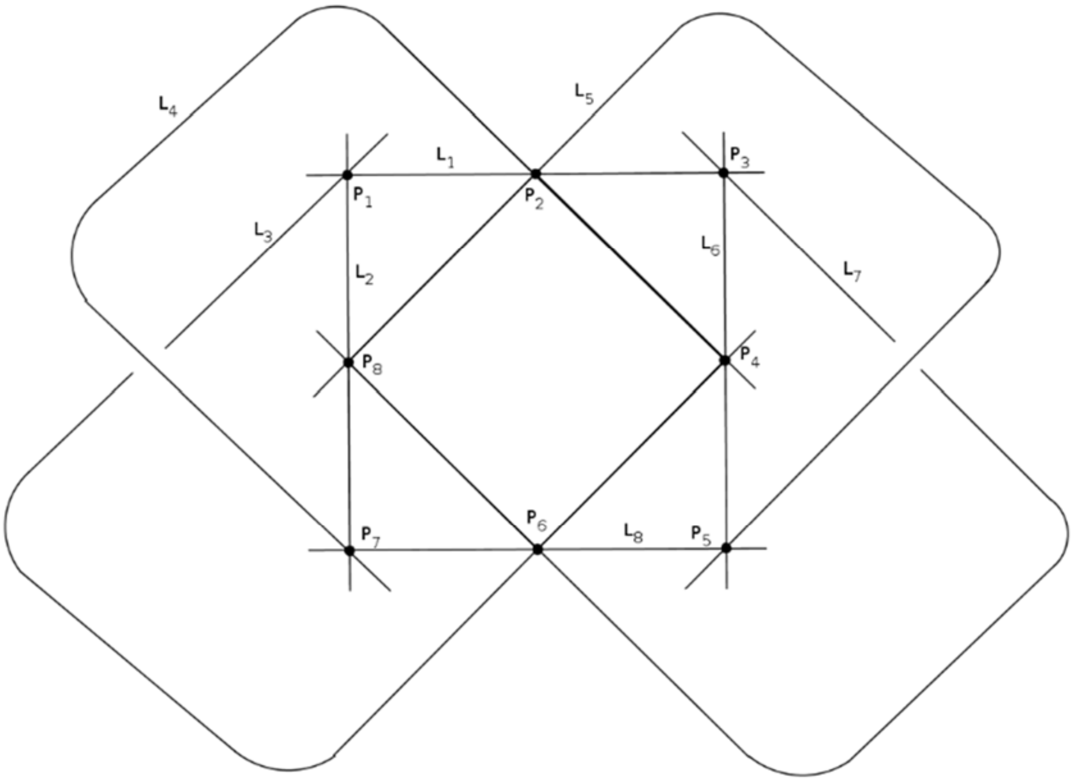


Debemos, desde luego, interpretar correctamente este dibujo. Las rectas son únicamente conjuntos de 3 puntos cada uno. El hecho de que, por ejemplo, P_3 P_5 P_6 lo unamos con una "recta" (ésta en el plano euclidiano) es simplemente para indicar que los puntos mencionados constituyen una recta. Los tres puntos de la recta $L_5 = \{P_2, P_5, P_7\}$ no los hemos podido unir con una recta "euclidiana" pero lo hemos indicado simplemente con una línea curva.

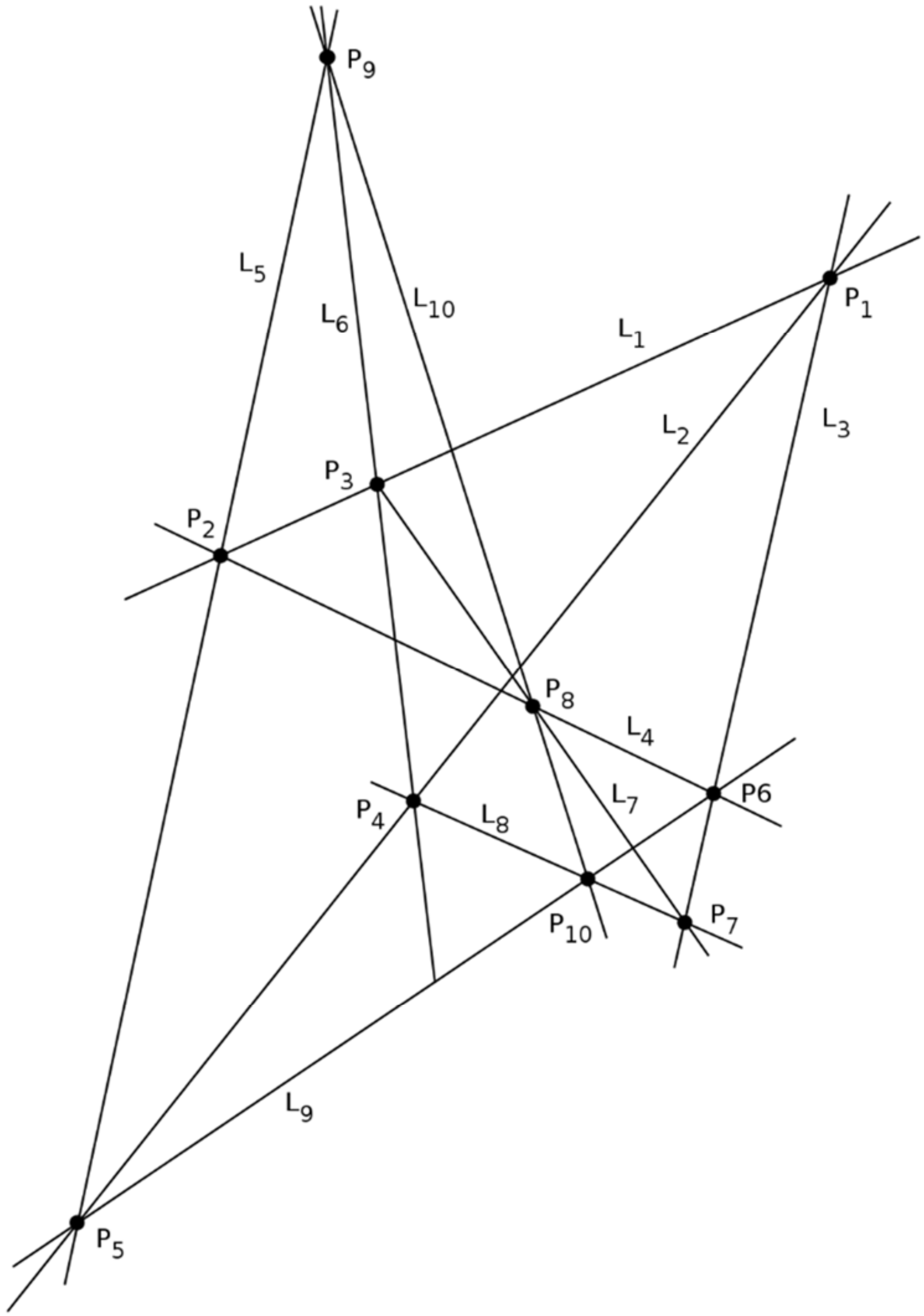
Como datos complementarios puedo mencionar que se pueden construir geometrías proyectivas con 7, 13, 21, 31, 43,… puntos.

Si tratáramos de construir una geometría proyectiva con 8 puntos o 10 puntos, por ejemplo, no lo lograríamos. Como ejemplos voy a dar dos tablas de incidencia con sus respectivos diagramas para que veamos qué axiomas de la geometría fallan en cada una de esas configuraciones.

	L_1	L_2	L_3	L_4	L_5	L_6	L_7	L_8
P_1	X	X	X					
P_2	X			X	X			
P_3	X					X	X	
P_4			X	X		X		
P_5					X	X		X
P_6			X				X	X
P_7		X		X				X
P_8		X			X		X	



	L_1	L_2	L_3	L_4	L_5	L_6	L_7	L_8	L_9	L_{10}
P_1	X	X	X							
P_2	X			X	X					
P_3	X					X	X			
P_4		X				X		X		
P_5		X			X				X	
P_6			X	X					X	
P_7			X				X	X		
P_8				X			X			X
P_9					X	X				X
P_{10}								X	X	X



Es fácil comprobar que en estos dos ejemplos se cumple el axioma 3 pero no así el 1 y el 2, pues, por ejemplo, en ambos casos los puntos P_4 y P_8 no están en una recta.

Finalmente, voy a transcribir la tabla de incidencia de una geometría proyectiva con 13 puntos (y trece rectas). Sugerimos elaborar también un dibujo que ilustre de que puntos consta cada recta, (consejo: no se trate de unir los 4 puntos que constituyen cada una de las rectas proyectivas con una "recta euclidiana").

	L_1	L_2	L_3	L_4	L_5	L_6	L_7	L_8	L_9	L_{10}	L_{11}	L_{12}	L_{13}
P_1	X	X	X	X									
P_2	X				X	X	X						
P_3	X							X	X	X			
P_4	X										X	X	X
P_5		X				X				X	X		
P_6		X			X			X					
P_7		X					X	X				X	
P_8			X				X		X		X		
P_9			X			X		X					X
P_{10}			X		X					X		X	
P_{11}				X	X			X			X		
P_{12}				X			X			X			X
P_{13}				X		X			X			X	

Es conveniente aquí hacer resaltar una de las grandes ventajas del método axiomático. Supongamos que, a partir de los tres axiomas de las geometrías proyectivas, logramos demostrar una serie de teoremas, entonces podemos asegurar que estos resultados son válidos en cada una de las geometrías proyectivas: la de 7 puntos, la de 13, etc., la geometría proyectiva real, la geometría proyectiva correspondiente a los números complejos, etc.

En la Teoría de los Grupos se establece una serie de postulados que debe satisfacer una operación (binaria) en un conjunto, el cual se llama grupo, y se demuestran muchísimos resultados a partir de estos postulados. Ahora bien, los números enteros con la adición, los números racionales con la adición, el conjunto de los racionales sin el cero con la multiplicación y otros muchos sistemas numéricos satisfacen los postulados de grupo y, por lo tanto, todos los resultados que hayamos demostrado para un grupo abstracto los podemos aplicar a cada uno de estos grupos particulares. En especial, hay muchos conjuntos de transformaciones geométricas que son grupos y a ellos podemos aplicar también los resultados generales de la Teoría de los Grupos.

Universidad Nacional Autónoma de México.