La Geometría en la Enseñanza, Siglo XXI

Emilio Lluis Riera

Prefacio

Es un honor iniciar las “Publicaciones Electrónicas del Instituto Mexicano de Ciencias y Humanidades por invitación” con el artículo del Dr. Emilio Lluis Riera “La Geometría en la Enseñanza” por considerarlo de una actualidad sobresaliente. Fue escrito en 1979 y su vigencia permanece. Este artículo fue publicado en las Memorias de la Oficina Regional de Ciencia y Tecnología de la UNESCO para América Latina y el Caribe en su sección de Educación Matemática en las Américas V. Su accesibilidad es muy limitada y por lo tanto hemos considerado el poner al alcance de todo el mundo este magnífico artículo sobre la Geometría, la Enseñanza y la Pedagogía.

En este artículo, el autor nos describe cómo una de las piezas más hermosas y complejas, producto de la evolución del cerebro humano, ha sido motivo de información, pero sobretodo de formación para el estudiante y hacer que éste pueda apreciar y disfrutar de la Geometría. También nos comenta acerca de que permite al estudiante adquirir destreza en el pensar (con un conocimiento que fue creado durante muchos años y que después Euclides publica como sus “Elementos” sintetizando y describiendo el método axiomático por primera vez, hace más de 2300 años).

Invitamos al lector a leer este interesante artículo.

Instituto Mexicano de Ciencias y Humanidades.

LA GEOMETRIA EN LA ENSEÑANZA

NOTAS DE UNA CONFERENCIA

Emilio LLUIS
(Instituto de Matemáticas de la Universidad Nacional Autónoma de México)

I only wish to make a plea for the widest possible use of geometrical thinking at all levels.

M.F. Atiyah

"Por su belleza y su gran valor estético, por la elegancia de sus construcciones y la nitidez de sus razonamientos, la geometría ha sido siempre una de las ramas más queridas de la matemática. Para el pedagogo, la geometría se distingue como la disciplina más apropiada para desarrollar la capacidad de razonamiento del alumno y despertar su interés por las matemáticas. Esto ocurre en todos los niveles. En el más elemental, cuando al alumno únicamente puede exigírsele que distinga una figura de otra, que se fije en los conceptos intuitivos más elementales de la geometría, las simples figuras ya inspiran en el un agradable sentido de estética, de simetría, de regularidad y belleza. En los siguientes niveles, cuando el alumno ya es capaz de efectuar razonamientos lógicos, es cuando la geometría le permite aclarar perfectamente el significado, en matemáticas, de una demostración, analizando paso a paso los razonamientos seguidos. Más adelante, la geometría, mediante los problemas que en ella se plantean nos proporciona el mejor medio para que el alumno perfeccione sus facultades de investigación, es decir, que intuya resultados para él aún desconocidos y los demuestre con todo rigor. Estas excepcionales cualidades de la geometría se deben esencialmente a la imagen que nos formamos de los conceptos geométricos, los cuales son una excelente guía tanto en la forma de intuir una propiedad como en la demostración de la misma ..."

Con las palabras anteriores inicié mi intervención al examinar algunos aspectos de la enseñanza de la geometría en un seminario de educación matemática que se realizó en México en 1968 [4].

Ahora, pasados ya más de diez años, sigo creyendo fervientemente en las grandes cualidades didácticas de la geometría. Sin embargo, ya no me atrevería ahora a afirmar que la geometría sigue siendo para el maestro "una de las ramas más queridas de la matemática". Desde luego que sí para muchos maestros, pero probablemente no para la mayoría. ¿Que ha ocurrido con la enseñanza de la geometría?

Es innegable que la geometría es el tema cuya enseñanza ha sufrido los cambios más caóticos en las últimas décadas creando con ello un grave desconcierto en los maestros. Y esto ha ocurrido tanto en nuestros países como en muchas otras partes del mundo. Además estos cambios se han manifestado en todos los niveles, desde el más elemental hasta el más elevado.

Por esto considero que la selección de este tema como uno de los grandes tópicos a tratar en esta 5a. Conferencia ha sido un gran acierto. Y precisamente con el título "la geometría en la enseñanza" más que, como podía haberse anunciado, "la enseñanza de la geometría", pues con eso se quiso destacar que lo más interesante de la geometría debe ser la formación que se adquiere al estudiarla.

EUCLIDES Y LA MODA. Empezaré con unos comentarios acerca de un acontecimiento que mucho influyó en los cambios que ha habido en la enseñanza de la geometría.

Con mucha frecuencia la moda, como los niños, nos llega de París. Que Madame Chanel "lanzó" un nuevo perfume, pronto tenemos el privilegio de aspirar su aroma. Que en París lanzan el grito "Abajo Euclides", pronto en nuestras escuelas se rompen todas las estatuas y se queman los retratos de tan célebre personaje (como en cualquier cambio de gobierno).

Quisiera aquí dar una versión acerca de ese famoso grito de guerra que, como cualquier otra, tendrá un tanto de fantasía y un tanto de realidad.

La geometría siempre se enseñó bien en Francia. Y mucho. Cuando un alumno llegaba a las ahí llamadas clases terminales y a las superiores su preparación geométrica era excelente. Conocía muchísimos resultados de la geometría euclidiana y tenía una sólida formación en cuanto a los métodos de razonamiento. Todo esto iba muy bien. Sin embargo, los métodos algebraicos de la geometría estaban relegados a segundo término; casi prohibidos: "No debemos ensuciar la pureza de la geometría con herramienta extraña"

Ahora bien, por otro lado ya en esos tiempos el álgebra seguía incursionando cada vez más en los terrenos de la enseñanza de la geometría. Recordemos como ejemplo el célebre libro de texto de Shreier y Sperner. Y en algunos países, los métodos algebraicos (en ciertos niveles de la enseñanza), se iban imponiendo a los puramente geométricos. Y claro está, Francia no podía qudarse a la zaga y se desató ahí una fuerte reacción; cansados de estudiar 2000 teoremas de geometría con métodos euclidianos y sintiendo la obligación de no menospreciar la potencia del álgebra con sus vectores, matrices, transformaciones ortogonales y afines, valores propios, etc., etc., un grupo de jóvenes y destacados matemáticos lanzó ese grito de guerra: "Abajo Euclides". Aparecieron revistas y panfletos humorísticos haciendo burla de las faltas de rigor usuales en la enseñanza tradicional de la geometría y se desató una fuerte campaña para que la geometría dejara de enseñarse "a la Euclides" y se hiciera con álgebra lineal. Algunos temas, como el de cónicas y cuádricas podían tratarse de manera muy elegante con álgebra. Además fácilmente se podían generalizar los resultados y pasar a formas cuadráticas en IR^n; y después en C^n! Maravilloso.

Pero, desgraciadamente, todo eso que estaba enfocado a cierto nivel (ya no elemental) de la enseñanza se quiso aplicar a todos los niveles. Y es natural: Si yo estoy enseñando geometría en la escuela elemental o en secundaria y oigo que alguien de ahí arriba está gritando "Abajo Euclides" y yo respeto a ese alguien por ser un gran matemático y un magnífico educador es natural decirme, pues bien, yo tampoco enseñaré estas tonterías de Euclides; vengan los vectores, las matrices, el grupo ortogonal de transformaciones y demás hierbas; vengan las geometrías no euclidianas; y la topología. Resultado: un desastre. Veamos, como ejemplo, un pequeño fragmento de un libro de texto que se usó en ciertos lugares de Europa hace ya unos cuantos años:

ESTRUCTURA DE RECTA AFIN

Sea $\mathbb{D}$ un conjunto equipotente a $\mathbb{R}$; $\mathbb{D} = \{A; B; C; D; ...\}$. Existe entonces una aplicación biyectiva de $\mathbb{D}$ sobre $\mathbb{R}$.

$$f: M \in \mathbb{D} \mapsto f(M) \in \mathbb{R}$$

Evidentemente f^{-1} es una aplicación biyectiva de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{D}$.

$$f^{-1}: x \in \mathbb{R} \mapsto f^{-1}(x) = M \in \mathbb{D}$$

Los elementos de $\mathbb{D}$ se llaman puntos y $\mathbb{D}$ es una *recta afín real*.

Una relación. Sea d la diagonal de $\mathbb{D}^2$. Se considera $\mathbb{D}^2-d$. Sean $(M;M')$ una pareja de puntos distintos y $P;P'$ una segunda pareja de puntos distintos:

$$(M;M') \in \mathbb{D}^2-d \quad \text{y} \quad (P;P') \in \mathbb{D}^2-d$$

Se consideran las coordenadas de esas parejas:

$$X = (\overline{MM'}/r), \quad Y = (\overline{PP'}/r) \quad (\text{r es un "repère"})$$

Se define una relación, denotada s, por:

$$[(M;M') \; s \, (P;P')] \Leftrightarrow [X \text{ tiene el mismo signo que } Y].$$

La relación s es una relación de equivalencia y parte $\mathbb{D}^2 - d$ en dos clases. Estas dos clases son las dos orientaciones de la recta.

....

ESTRUCTURA DE PLANO PUNTUAL

Se considera un conjunto no vacío $\mathbb{P}$ y una familia $\mathcal{D}$ de partes de $\mathbb{P}$. Se supone que $\mathbb{P}$ satisface los tres axiomas siguientes, llamados axiomas de incidencia.

1. $\mathcal{D}$ es una familia no vacía y todo elemento de $\mathcal{D}$ es una parte propia de $\mathbb{P}$.

2. Todo par de elementos de $\mathbb{P}$ pertenece a uno y sólo un elemento de $\mathcal{D}$.

3. Para todo elemento D de $\mathcal{D}$ y para todo elemento M de $\mathbb{P}$ que no pertenezca a D existe un elemento D' de $\mathcal{D}$ y uno solo tal que M pertenezca a D' y que la intersección $D \cap D'$ sea vacía.

Los elementos de $\mathbb{P}$ se llaman puntos y los elementos de $\mathcal{D}$ se llaman rectas

....

PLANO AFIN REAL

Se considera un plano $\mathbb{P}$ que satisface los dos axiomas siguientes:

1. Toda recta de $\mathbb{P}$ tiene una estructura de recta real.

2. Sean D y D' dos ejes y Δ una dirección tal que $\Delta \neq$ dir D, $\Delta \neq$ dir D'. Se considera una proyección P de D sobre D' paralela a Δ. Sean M y N dos puntos de D y M' = P (M), N' = P (N) las proyecciones de M y N sobre D'. Se admite el siguiente axioma:

Existe un número real k tal que para toda pareja (M,N) se tiene $\overline{M'N'} = k\,\overline{MN}$

....

Y claro, así es muy difícil aprender geometría.

Recuerdo la reacción de uno de los principales autores del movimiento "Abajo Euclides" cuando en una reunión de enseñanza de las matemáticas alguien lo acusó como responsable de las funestas consecuencias de ese grito en la enseñanza elemental. Levantó la voz y dijo muy claramente "Yo solamente hablo de la enseñanza en el nivel que conozco". Habló del ciclo terminal y superior. Dijo que ellos no eran culpables del mal uso de sus puntos de vista. Y tenía toda la razón. Que yo sepa ellos nunca dijeron que se hablara del grupo de transformaciones afines y el de transformaciones ortogonales en la escuela primaria. Ni en secundaria básica.

Desde luego que, en todos esos países donde se ensayaron métodos como el del ejemplo anterior pronto rectificaron el rumbo y racionalizaron la enseñanza de la geometría; pero en algunos de nuestros países donde la moda nos llega un tanto retardada, todavía ahora hay quien busque imponer este tipo de tratamiento de la geometría en niveles elementales con los desastrosos resultados que todos conocemos.

Después de un examen de este tipo podríamos pensar así: Qué bueno que alguien lanzó el grito de guerra "Abajo Euclides". Se necesitaba dar una sacudida a la enseñanza de la geometría, Pero no exageremos. En la más tradicional de las enseñanzas hay verdaderas joyas que no deben tirarse a la basura por pereza de reexaminarlas o por "ir a la moda". Además nos conviene saber "experimentar en cabeza ajena". Evitemos los errores que se han cometido y ensayemos nuevos métodos.

OBSERVACION:

En lo que sigue hablaré un poco de programas y métodos. Pero antes quiero hacer la siguiente observación.

Es costumbre, al iniciar la exposición de algún tema, dedicar unas palabras a destacar su importancia. En este caso debo aclarar desde un principio que si bien considero muy importantes los contenidos y métodos, éstos no constituyen lo esencial. A mi juicio lo básico, lo más importante en la enseñanza es el maestro. Un maestro con excelente preparación matemática y pedagógica, en adecuadas condiciones de trabajo y, desde luego, con una gran dosis de buena voluntad y entusiasmo logrará maravillas con cualquier programa, cualquier tema y cualquier método. Sin embargo ya que la labor del mejor de los maestros se dificulta en alto grado cuando se le imponen programas y métodos defectuosos creo que lo que aquí y en la mesa redonda se va a tratar es muy importante.

DESCRIPCION VS. CONTENIDO

Empezaré con un problema que no sólo afecta a la geometría sino a la enseñanza de la matemática en general. He aquí una síntesis del contenido de un programa típico (¿de geometría?).

1. Lógica
2. Conjuntos
3. Producto cartesiano
4. Relaciones
5. Funciones
6. Operaciones
7. Semigrupos
8. Grupos
9. Anillos
10. Campos
11. Campos ordenados
12. El campo de los números reales
13. Estructura de recta afín real
14. Estructura de plano afín
15. Proyecciones paralelas
16. Vectores
17. Traslaciones. Homotecias
18. Espacio con un origen
19. Subespacios
20. Ecuación de una recta
21. Espacio con sistema de referencia
22. Cambio de sistema de referencia
23. Producto escalar
24. El espacio euclidiano
25. Distancia entre dos puntos
26. Simetrías

Salta a la vista que programas como éste están estructurados tomando en cuenta cierta *clasificación*, cierto *orden* de la propia matemática y que olvidan por completo el *contenido* matemático. Por lo menos, en ellos no se ve. Recuerdo la exclamación espontánea de un colega al hojear un libro de texto basado en un programa de ese tipo: ¡Pero si aquí no hay nada de matemáticas! Y en efecto, me pregunto ¿dónde están en estos programas los teoremas que merezcan el nombre de teoremas? ¿dónde está la geometría? ¿qué resultados interesantes se demuestran? Porque si me dicen que en el punto 17 se demuestra que las traslaciones forman un grupo, esto me deja frío; que en 23 se demuestra que el producto escalar es conmutativo, bueno, y qué; que en 23 se demuestra que la distancia de P a Q es igual a la distancia de Q a P, bien, pero con eso será bastante difícil entusiasmar a alguien.

Yo considero que la selección de *qué* vamos a enseñar y *cómo* debe basarse no en una clasificación u orden de la matemática (con la que, dicho sea de paso, muchos podemos no estar de acuerdo) sino en una finalidad. Y por finalidad entiendo yo una *serie de resultados* interesantes por sí mismos, por los caminos que pueden seguirse para llegar a ellos y por la formación que se obtiene al recorrer esos caminos.(*)

(*) En un principio iba a utilizar la palabra "objetivo" en vez de "finalidad" pero ante la penosa enfermedad (contagiosa) que lleva el nombre de *objetivitis perniciosa* y que actualmente flagela los programas y la enseñanza en general, preferí evitar la tan maltrecha palabra. También evité decir "conjunto de resultados" para no traer malos recuerdos de otra enfermedad que creo se llamó *conjuntivitis aguda* (de la cual ya se ha repuesto la enseñanza de la matemática casi en todas partes.)

Para dar un ejemplo típico, pensemos en un cursillo de grupos. Un programa "clasificador" u "ordenador" podría consistir en tratar cuidadosamente conjuntos, producto cartesiano, relaciones, funciones, etc.; operaciones, propiedades conmutativa, asociativa, distributiva por la derecha y por la izquierda, elementos neutros, inversos derechos e izquierdos; definición de grupo, subgrupo, grupo conmutativo, grupo finito, orden, homomorfismos, imagen, núcleo, etc., etc. Un programa con "finalidad" podría pensarse así: A mí me gustan los teoremas de Sylow; son interesantes, útiles; además puedo elegir un camino que conduce a su demostración y que es muy atractivo e instructivo; al recorrerlo se aprende mucha álgebra; no es demasiado largo. Pues con ese camino estructuro el programa del curso (*).

Podríamos así llegar a la siguiente conclusión: Enseñemos verdaderas matemáticas: resultados interesantes y razonamientos formativos. Evitemos una simple descripción de lo que son las matemáticas (según el criterio de alguien) a base de subdividirlas, clasificarlas y ordenarlas.

ACERCA DE LOS FUNDAMENTOS

No creo conveniente que, por elemental que sea un curso, cada uno de los temas que se van a tratar se base en principios diferentes. Considero que a lo largo de toda la enseñanza de la geometría euclidiana debe haber cierta unidad propiciada por una fundamentación común.

Durante muchos siglos la geometría se enseñó siguiendo casi al pie de la letra los Elementos de Euclides. A fines del siglo pasado y principios del presente aparecieron otros sistemas de axiomas (Hilbert, Hadamard, Pogorelov, etc) los cuales dieron unidad a los cursos de geometría de las décadas siguientes. (Más comentarios en [5] y [9]). Posiblemente la axiomática de los *Grundlagen der Geometrie* de Hilbert [H] fue la más utilizada. Más tarde aparecieron los axiomas de George D. Birkhoff [B]. Debido a su simplicidad y al hecho de que utilizan los números desde el principio la enseñanza basada en éstos tuvo mucho éxito. Como ejemplo de libros de texto basados en ellos puedo mencionar el del mismo Birkhoff y Beatley [B-B], el de Nichols, Palmer y Schacht [N-P-S] y el de Moise y Downs [M-D]. (De paso sea dicho, en muchos de nuestros países se siguieron utilizando textos netamente "a la Euclides" hasta los años 50).

Otra manera de construir la geometría es la de proceder al revés de Descartes, como lo hace la geometría algebraica (y, en particular, el álgebra lineal). Se parte de un campo, en este caso el de los números reales y se define el espacio como $\mathbb{R}^3$. Los planos y las rectas son conjuntos de soluciones de sistemas de ecuaciones lineales Este punto de vista no requiere axiomas; conceptualmente es más simple pero requiere ya cierto manejo algebraico.

En fin, muchos más son los sistemas axiomáticos, "constructivos" como el anterior o "combinados" en los que se puede fundamentar la geometría euclidiana. (Ver, por ejemplo [Ch].)

(*) Ver, por ejemplo, el texto de álgebra de Herstein. Creo que así pensó él al organizar el curso.

Lo que aquí quiero destacar, y por eso toqué este tema, es algo con lo que no estoy de acuerdo:

Se considera como un hecho fuera de toda discusión que cualquier método de enseñanza de la geometría que esté basado en axiomáticas del tipo de las de Euclides, Hilbert, Birkhoff, etc. son forzosamente malos. Y que, en cambio, los métodos basados en la idea del álgebra lineal son automáticamente buenos; o en cualquier otro tipo de ideas que puedan parecer "modernas"; por ejemplo las del Programa de Erlangen de Klein (que, dicho sea de paso no tiene ya nada que hacer en la geometría de ahora).

Yo considero que cada una de las fundamentaciones tiene sus pros y sus contras y que los métodos de enseñanza de la geometría deberán basarse en aquella que los haga más fáciles y efectivos. Eso sin tomar en cuenta qué tan fáciles o complicados son los propios fundamentos pues no se trata de enseñar los fundamentos de la geometría sino de enseñar geometría. (Claro que es muy bonito enseñar "toda" la geometría, incluyendo sus fundamentos, pero esto sólo es posible en cursos avanzados y bastante completos.)

MOSAICOS DEDUCTIVOS

Una situación que durante varias décadas perjudicó la enseñanza de la geometría es que se trató de seguir con la tradición de enseñar "toda" la geometría. Por "toda" me refiero a contenidos clásicos como, por ejemplo, [W-S], [N-P-S] y [M-D]. Pero, por otro lado, desde hace ya algunos años en nuestra enseñanza no se dispone, como antiguamente, de varios cursos completos dedicados a la geometría. Por lo menos eso no es lo usual. Más aún, el número de horas dedicadas a la geometría es muy pequeño. Por ejemplo, en México, en el primer año de secundaria (*) se cuenta con tres horas a la semana durante un mes; en segundo de secundaria, lo mismo; en tercero, tres horas a la semana durante unos tres meses y en bachillerato, salvo raras excepciones, no hay geometría; solamente se enseña una geometría analítica cuyo contenido geométrico es prácticamente nulo.

¿Cómo podríamos entonces proceder para que nuestros alumnos adquieran aunque sea una pequeña noción de geometría? Un camino que al principio se siguió fue el de enseñar "lo que alcance", empezando "desde el principio". Se hablaba de los primeros axiomas euclidianos y se demostraban unos cuantos teoremas, que, por lo tanto, tenían muy poco interés. Los resultados de tal procedimiento fueron realmente malos.

Es mejor pensar así: si únicamente vamos a enseñar unas cuantas pequeñas partes de geometría ¡que sean interesantes y formativas! Adoptemos el método que podríamos llamar de "secciones razonadas" o "secciones deductivas" o "islotes deductivos" (siguiendo a Choquet [Ch]). Posiblemente sería mejor bautizar el método como de "mosaicos deductivos", utilizado la palabra "mosaicos" a la Dante [2]. Aclaremos de que se trata.

(*) Primaria: 6 años (6 a 12 años de edad); secundaria; 3 años; bachillerato: 2 ó 3 años; después, nivel universitario.

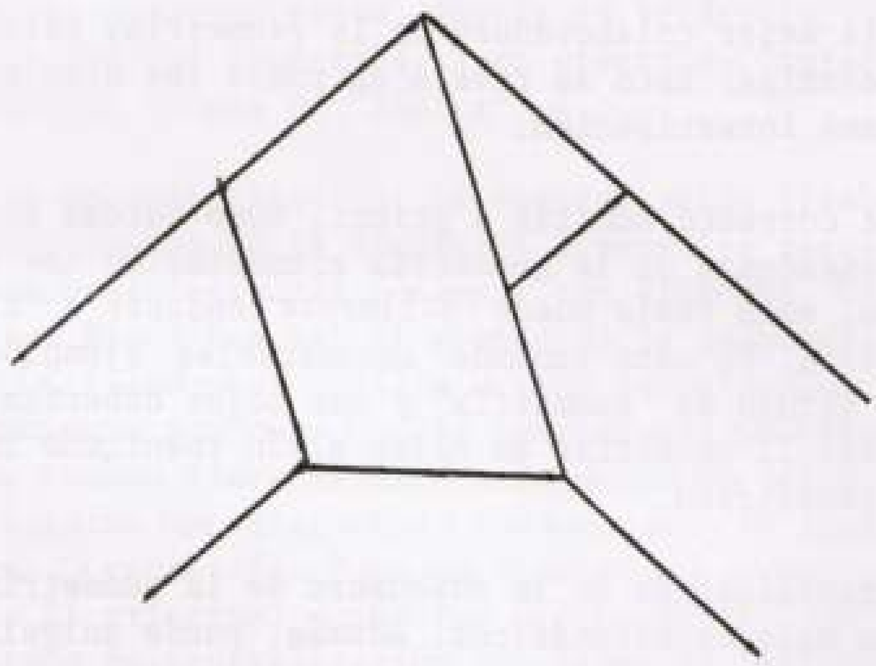
Tres elementos constituyen la esencia de un mosaico deductivo.

1. El resultado a que se quiere llegar.

2. Las demostraciones que conducen a dicho resultado.

3. Las propiedades en que se apoyan las demostraciones.

1. Para el éxito de un mosaico, la meta, el resultado final debe poseer varias cualidades. En primer lugar y quizás sea lo más importante, debe ser algo que fácilmente atraiga la atención, la curiosidad, que sea interesante. Por ejemplo, que el paralelismo de rectas sea una relación de equivalencia, o que una translación transforme rectas paralelas en rectas paralelas, son resultados con los que difícilmente se pueda atraer la atención; son resultados que jamás quitarán el sueño a nadie. Por otro lado, que al hacer un nudo con una tira de papel resulte un pentágono regular, o bien ¿por qué sólo hay cinco poliedros regulares? eso sí puede ponernos a pensar.



Evidentemente, el interés del tema dependerá en buena medida del trabajo previo de motivación pero, todos estaremos de acuerdo en que algunos temas son fácilmente "motivables" y que hay otros cuya motivación puede ser más difícil que el mismo tema (claro está que esto dependerá de la formación del alumno.).

2. En cuanto a las varias maneras de demostrar el resultado o los resultados finales del mosaico deductivo conviene seleccionar aquellas que presenten dificultades normales para la edad y preparación del alumno, que no sean demasiado largas, que sean formativas, etc.

3. Claro está que las demostraciones que acabamos de mencionar deben apoyarse en unas cuantas proposiciones que constituirán el punto de partida del mosaico deductivo. Serán lo que podríamos llamar "axiomas locales". Estos conviene que sean afirmaciones que el alumno acepte fácilmente ya sea por su carácter intuitivo, ya sea por haberse tratado anteriormente. Lo que sí debe hacerse es establecer bien cuáles son.

Otra cosa que debe buscarse al elaborar varios mosaicos para un curso o para una serie de cursos es que estos queden, hasta cierto punto, relacionados entre sí; sobre todo en lo relativo a la fundamentación común de que hablamos hace poco. Y también en los métodos de trabajo. Por esto me gusta más la palabra "mosaicos" que "sección" o "islote" pues esta última puede sugerir cierto aislamiento mientras que "pegando" varios mosaicos se puede lograr cierta estructura tanto en contenido como en el método.

Como experiencia personal con esta forma de proceder y contando con la entusiasta colaboración de Carlos Lucio Alvarez, profesor en la Escuela Secundaria anexa a la Escuela Normal Superior del Estado de México, ensayamos varios temas. Considero que tuvieron mucho éxito. Para recalcar la idea de que no importa lo "viejo" o "moderno" del tema y que la matemática posee joyas imperecederas, elegí temas basados en poliedros regulares y en la razón áurea o divina proporción [P]. En el I Congreso Internacional y V Nacional de Profesores de Matemáticas que se realizó en Toluca, Estado de México presentamos estos temas con sus respectivos talleres ([6], [7], [8]).

¿ALGEBRA vs. GEOMETRIA?

El álgebra es la mejor colaboradora de la geometría, pero, mal usada, puede convertirse en su peor enemiga. Esto se revela en todos los niveles de la enseñanza y, lo que es más, en la misma investigación.

No creo que sea correcto admitir a priori, como verdad absoluta que "es conveniente encuadrar la enseñanza de la geometría elemental en los métodos del álgebra lineal" [11]. En efecto, esta tesis puede fácilmente conducir a "algebraizaciones" innecesarias de la geometría. De esto tenemos innumerables ejemplos. Todos hemos visto libros de texto con el título de "geometría" y que mejor deberían anunciarse como "antigeometría" pues es difícil encontrar en ellos algún resultado interesante de la geometría o algún método geométrico.

La excesiva algebraización de la enseñanza de la geometría despoja a ésta de uno de los más admirables modelos matemáticos. Además, puede aniquilar por completo la intuición. Recordemos una estupenda frase, muy significativa, que detectaron unos colegas brasileños al examinar a alguien: "Consideremos dos puntos colineales..."

Conviene recordar a Poincaré:

"La principal finalidad de la enseñanza de las matemáticas es desarrollar ciertas facultades de la mente y, entre ellas, la *intuición* no es la menos preciada".

Muchas veces hemos oído la opinión de que la enseñanza "geométrica" de la geometría es poco rigurosa; que solamente se puede enseñar con rigor utilizando métodos algebraicos. Esto es falso. Pero, aún suponiendo que fuera cierto, ¿valdría la pena sacrificar el "razonamiento geométrico" en aras de un rigor, muchas veces innecesario ? Recordemos nuevamente a Poincaré:

"Al hacerse rigurosa, la ciencia matemática toma un carácter artificial que choca a todos; se olvida de sus orígenes; aprendemos a contestar preguntas, mas ya no sabemos de dónde vienen esas preguntas".

"Es con lógica que uno demuestra; es por intuición que uno inventa".

René Thom también protesta. Después de hacer una comparación del lenguaje común con el lenguaje de la geometría euclidiana y con el lenguaje algebraico formal, dice [10]:

"El lenguaje de la geometría euclidiana es una etapa natural (y quizá irreemplazable) intermedia entre el lenguaje común y el lenguaje algebraico"

Y prosigue:

"La geometría permite una ampliación psicológica de la sintaxis manteniendo aún el significado proporcionado siempre por la intuición espacial. La moda, implantada por el dogma del modernismo, de eliminar la geometría elemental para ser reemplazada por el cálculo y el álgebra lineal es poco recomendable desde el punto de vista psicológico pues los objetos algebraicos (símbolos) son semánticamente demasiado pobres para ser entendidos directamente, como en el caso de las figuras espaciales".

Yo he llegado a oír a algunos profesores de bachillerato, ofuscados por esa "moda, implantada por el dogma del modernismo" presumir de que "en nuestro curso de geometría no se mencionan las palabras recta, ángulo ni triángulo..." Deberíamos decirles: señores, ustedes no enseñan geometría. Y en efecto su "curso" no es más que una colección de intrascendentes juegos de "lógica".

En los terrenos de la investigación, la interrelación álgebra-geometría ha tenido grandes vaivenes. Todo amante de la geometría algebraica recuerda con admiración y algo de nostalgia la monumental escuela italiana con Albanese, Enriques, Castelnuovo, Severi, Segre... . En esa época fue tal el avance de la geometría que los métodos y las técnicas se quedaron atrás. Llegó en su auxilio la gran escuela de Zariski y Weil. Esta no sólo fortaleció los fundamentos y proporcionó la herramienta para poder seguir adelante, sino que propició un grande y nuevo florecimiento de la geometría algebraica. Después sobrevino otra revolución. Llegaron las categorías y los esquemas. El lenguaje de los conjuntos dejó de ser el lenguaje de la geometría. Hubo que trasladar a otras categorías muchos de los conocimientos clásicos. El principal actor fue Grothendieck, con la colaboración de Dieudonné. Fue tal el grado de generalización que desde la introducción de sus famosos *Eléments de Géometrie Algébrique* [EGA] los autores advierten que los conocimientos "clásicos" pueden constituir un estorbo: "et il s'est même avéré qu'une telle connaissance, malgré ses avantages évidents, pouvait parfois être nuisible..." Y explican:

"Comme dans beaucoup de parties de la Mathématique moderne, l'intuition première s'éloigne de plus en plus, en apparence, du langage propre a l'exprimer avec toute la précision et la généralité voulues. En l'occurrence, la difficulté psychologique tient à la nécessité de transporter aux objets d'une catégorie déjà assez différente de la catégorie des ensembles (à savoir la catégorie des préschémas, ou la catégorie des préschémas sur un préschéma donné) des notions familières pour los ensembles: produits cartésiens, lois de groupe, d'anneau, de module, fibrés, fibrés principaux homogènes, etc. Il sera sans doute difficile au mathématicien, dans l'avenir, de se dérober a ce nouvel effort d'abstraction, peut-être assez minime, somme toute, en comparaison de celui fourni par nos pères, se familiarisant avec la Théorie des Ensembles".

A pesar de esa afirmación, es opinión de muchos matemáticos que con ese nuevo lenguaje y esas nuevas técnicas, la geometría algebraica ha enriquecido su espíritu geométrico. Esto puede parecer raro a primera vista pues, por ejemplo, en estas teorías una curva es algo así como un esquema separable, reducido, irreducible, de tipo finito y de dimensión uno sobre un campo algebraicamente cerrado; y cada uno de esos términos requiere una buena dosis de conocimientos previos, tanto algebraicos como topológicos. Sin embargo, las ideas están impregnadas de ese algo que no sabría definir pero que todos entendemos lo que es y que antes mencioné como "espíritu geométrico". Las excelentes obras de Hartshorne, Mumford y Shafarevich ([Ha], [M], [Sh]) creo confirman sobradamente esa opinión.

Finalmente, me uno a Atiyah ([ICME], pág. 74) en esa plegaria con la que encabecé esas notas: "que en todos los niveles se utilice el pensamiento geométrico tan ampliamente como sea posible".

Referencias

1. Ubiratan d'Ambrosio. The education of mathematics teachers:Problems and models for the situation in Latin America. ICMI Symposium Helsinki (1978).

2. Luiz Roberto Dante. O método mosaico em geometría. 5a. Conf. Interamericana de Educación Matemática.Campinas (1979).

3. Jean Dieudonné.L'enseignement des mathématiques dans les classes supérieures de l'école secondaire... Cuarta Conferencia sobre Educación Matemática. Caracas,Venezuela (1975).

4. Emilio Lluis. Algunos aspectos de la geometría. Revista Matemática de la Sociedad Matemática Méxicana 8 (1970).

5. Emilio Lluis. ¿Qué pasa con la enseñanza de la geometría? Tercer Congreso Nacional de la A.N.P.M., Saltillo, Coah.,México (1973).

6. Emilio Lluis. Poliedros regulares, I Congreso Internacional y V Nacional de la A.N.P.M., Toluca, Estado de México (1978).

7. Emilio Lluis. Tendencias en la enseñanza de la geometría. I Congreso Internacional y V Nacional de la A.N.P.M., Toluca, Estado de México (1978).

8. Emilio Lluis. La razón áurea. I Congreso Internacional y V Nacional de la A.N.P.M. Toluca, Estado de México (1978)

9. Artibano Micali. Geometría. Cuarta Conferencia sobre Educación Matemática. Caracas, Venezuela (1975).

10. René Thom. Modern mathematics: does it exist? Proceedings of the Second Int. Congress on Math. Education. Cambridge U. Press (1973).

11. Oscar G. Valdivia. Situación de la enseñanza de la geometría frente a las nuevas tendencias de la educación matemática. 5a. Conferencia Interamericana de Educación Matemática.Campinas (1979).

Libros citados

B. G.D. Birkhoff. A set of postulates of plane geometry... Ann. of Math.Vol. 33 (1932), pág. 329-345.

B-B. G.D. Birkhoff and R. Beatley, Basic Geometry. N.Y. (1941).

Ch. G. Choquet. L'enseignement de la Géométrie. Herman, Paris (1964).

D. J. Dieudonné. Algèbre linéaire et géométrie élémentaire. Herman, Paris.

E. Euclides. Elementos.

EGA. A. Grothendieck, J. Dieudonné. Eléments de géométrie algébrique.IHES (1960-67).

Ha. R. Hartshorne. Algebraic Geometry. Springer Verlag (1978).

Hi. D. Hilbert. Grundlagen der Geometrie. Teubner (1903).

ICME. Proceedings of the Third Int. Congress on Math. Ed. Karlsruhe (1976)

M D. Mumford. Algebraic Geometry I. Springer Verlag (1976)

M-D. E.E. Moise y F.L. Downs. Geometría moderna. Addison-Wesley (1966).

N-P-S. Nichols-Palmer-Shacht. Geometría moderna. CECSA, México.

P. Luca Pacioli. La divina proporción.

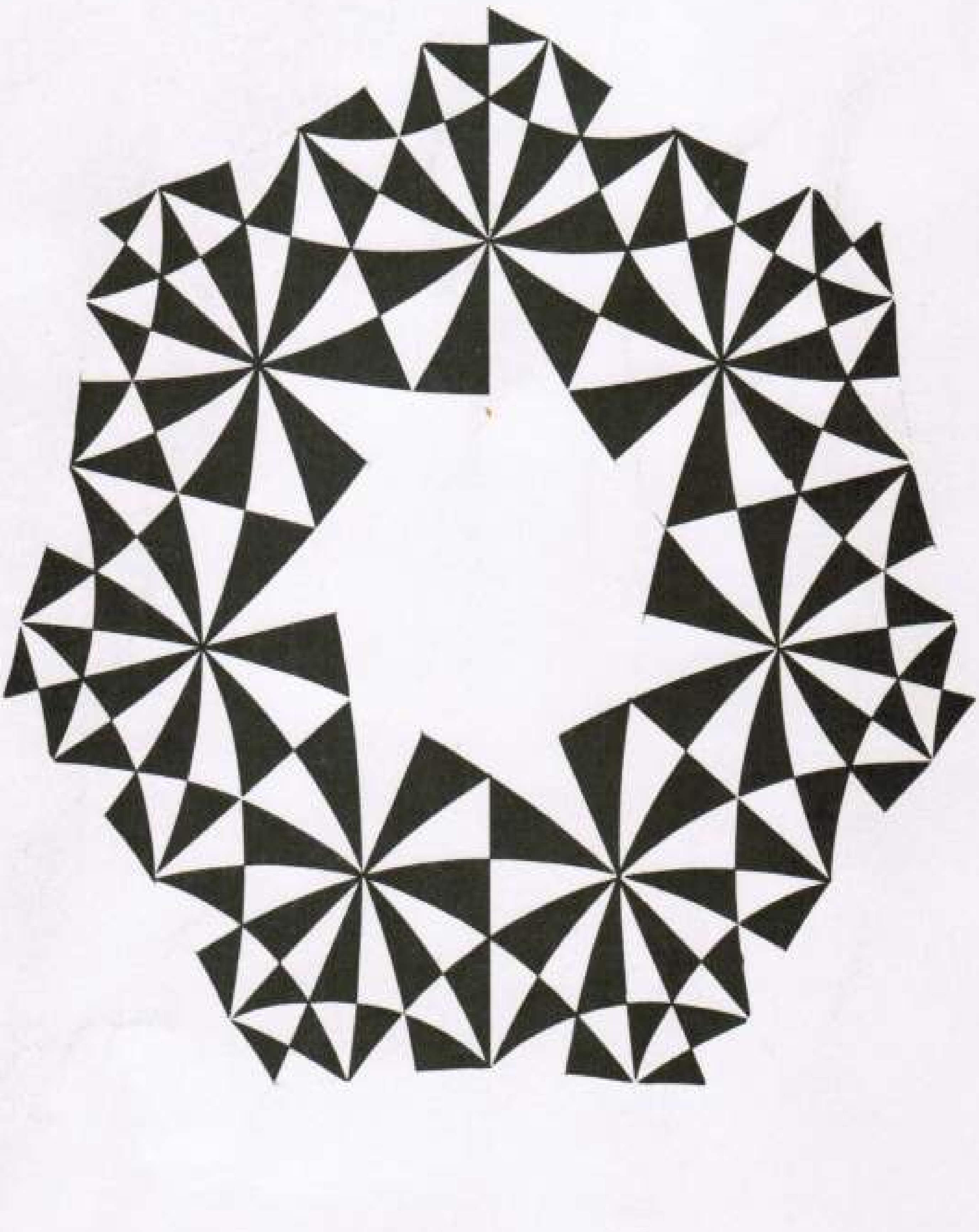
Sh. Shafarevich. Basic algebraic geometry. Springer Verlag (1976).

W-S. Wentworth y Smith. Geometría. Ginny y Cía. (1915).

* * *

educación matemática en las américas - V

oficina regional de ciencia y tecnología de
la unesco para américa latina y el caribe



unesco