Publicaciones Electrónicas
Instituto Mexicano de
Ciencias y Humanidades

# Panorama Internacional de la Enseñanza de la Geometría.

Emilio Lluis Riera

www.imch.org.mx

IMCH (2018)

## PANORAMA INTERNACIONAL DE LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRIA

(SINTESIS)

Emilio Lluis*

EN LA CONFERENCIA se trataron los siguientes puntos:

I. Algo de historia de la enseñanza de la geometría.

II. Grandes metas de la educación matemática y el papel que juega la geometría.

III. Métodos de enseñanza de la geometría euclidiana.

IV. Situación actual de los distintos países. Experiencias en México.

V. Algunas sugerencias. Mosaicos deductivos.

I. Se destacó el hecho de que la geometría es el tema cuya enseñanza ha sufrido cambios más caóticos en las últimas décadas. En efecto, hasta hace unos 20-30 años tanto en las escuelas secundarias como en las preparatorias se estudiaba bastante geometría. Ejemplo de ello es el venerable texto de Wentworth y Smith que desde su primera edición en los albores de este siglo hasta los años 50-60 se estudiaba casi de pasta a pasta durante la enseñanza de nivel medio (básico y superior).

Lo que sigue de este punto I es transcripción directa de la conferencia:

Pero he aquí (como dicen en las narracciones) que poco a poco en un principio y vertiginosamente después la enseñanza de la geometría se desplomó. A fines de los 50 y en los 60 la enseñanza de esta asignatura llegó a sus niveles más bajos.

Creo que fueron las causas de esto:

1. Influencia del medio internacional.

2. Problemas inherentes a la enseñanza de la geometría "a la Euclides".

3. La deficiente enseñanza de la geometría a los maestros en formación (en parte y, a su vez, consecuencia de 1. y 2.).

Hablaré un poco de las dos primeras causas.

1. La influencia que los países ejercen, unos en otros, es enorme. Más grande de lo que se piensa. Y es evidente que la influencia mayor sea la que se origina en los países más avanzados. Un ejemplo:

En países de latitud baja, países cercanos al Ecuador, observamos que con frecuencia los niños dibujan la luna así:

Mientras que ellos la ven así:

¡La influencia es más evidente!

Cosas pequeñas como ésta se corrigen fácilmente y no causan mayores problemas. Pero hay otras que sí causan grandes problemas. La enseñanza de la geometría es una de ellas. Ahí han sido tan graves los problemas que todavía no nos podemos reponer.

(De 2. se habló en III.)

Pero sigamos con nuestra historia. Ya en los 60 a muchos maestros nos preocupaba la situación e hicimos todo lo que pudimos para detener

* Instituto de Matemáticas de la Universidad Nacional Autónoma de México.

esta caída estrepitosa. Seminarios, conferencias, cursillos, propaganda. . . Recuerdo mis alabanzas a la geometría en el Primer Seminario Nacional sobre Enseñanza de las Matemáticas, allá por 1968, organizado por la entonces joven ANPM.[1]

Pero todo fue en vano. Se impuso la moda internacional de "Abajo Euclides".[2]

No voy a relatar de nuevo todo lo que sucedió después; todos lo hemos vivido. Lo que haré hoy es describir lo que ahora está ocurriendo en distintas partes de este nuestro mundo.

II. En la conferencia se habló de algunas de las grandes metas en la enseñanza de las matemáticas y del gran apoyo que para alcanzarlas nos da la geometría. Se mencionaron las siguientes metas: *a) Necesidades inmediatas.* La parte "utilitaria" de las matemáticas, lo indispensable para la "vida diaria" y el trabajo. *b)* Metas dictadas por la situación económica de cada país y que podríamos llamar *"metas nacionalistas"*. *c) Formación.* El valor formativo de la matemática. De éste se habla mucho pero los logros son frecuentemente muy pequeños y en ocasiones negativos. (A este respecto conviene recordar la intervención de Polya en la inauguración del IV Congreso Internacional de Educación Matemática, Berkeley 1980: *I repeat with conviction that* mathematics promotes the mind. *But in fact this is not unconditionally correct. There is a condition: Mathematics promotes the mind provided that it is taught and learned appropriately.) d)* Metas relacionadas con el gran *valor estético*, la *belleza.* A veces pienso que ésta debería ser casi la única meta. Y en este tiempo de "objetivitis aguda" me atrevería a imponer un Objetivo Unico: "Que el alumno capte y disfrute la indescriptible belleza de alguna de las joyas de la matemática, una de las supremas creaciones del hombre". Con esto me conformaría pues todas las demás metas se alcanzarían simultáneamente.

Recordemos unas palabras de Sir Bertrand Russell:

*Les mathématiques, a les bien comprendre, possèdent non seulement la vérité, mais la suprème beauté.* (Las matemáticas, cuando se entienden, poseen no sólo la verdad sino la suprema belleza.) *e)* Finalmente se habló de una meta que nunca se menciona. Una meta importante *para todos* independientemente de que se trate de países desarrollados o "en desarrollo" y que por esto la llamo *Meta genérica.*[3] Se transcribe de esta referencia:

META GENERICA

. . .

Acepto el siguiente principio que es mi punto de partida:

. *Las matemáticas juegan un papel en la vida de cada individuo que puede y debe ser el mismo que el que las matemáticas han jugado en la historia de la humanidad.*

Y éste es enorme.

He aquí una serie de afirmaciones del doctor Barajas (maestro que tanto ha contribuido en la formación de muchos de nosotros y de todo nuestro medio matemático).

. *La matemática es la más grande creación del hombre.*
. *Jamás ha habido otro invento como el de las matemáticas.*
. *La matemática es el tesoro más valioso del hombre.*
. *La humanidad era una antes de las matemáticas y otra después.*
. *Las matemáticas son la actividad más humana del hombre.*
. *Así como los pájaros vuelan y los peces nadan, los hombres hacen matemáticas.*

1. E. Lluis. "Algunos aspectos de la geometría". Revista Matemática, Núm. 8, p. 9. 1970, Sociedad Matemática Mexicana.
2. E. Lluis. *La geometría en la enseñanza.* Campinas, Brasil, 1979.
3. E. Lluis. *A generic goal.* Warsawa, 1983, Symposium on Goals and Content of General Mathematical Education.

. *El espíritu lógico y abstracto son las características del ser humano.*

Es por esto que

. *La humanidad ha encontrado en las matemáticas su más sólido punto de apoyo.*

Y las siguientes afirmaciones son esenciales:

. *Gracias a las matemáticas el hombre ha podido estar seguro de algo.*
. *Existe algo de lo que se puede estar seguro.*
Intercalo unas palabaras de Emile Borel que siempre me han gustado:
. *Las matemáticas son la única ciencia en la que uno sabe siempre exactamente de lo que se habla y en la que uno está seguro de que lo que dice es verdad.*

Gracias a todas estas excepcionales cualidades de las matemáticas podemos asegurar que:

. Las matemáticas han proporcionado a la humanidad un bienestar psicológico indescriptible.

Y como mencionamos en nuestro punto de partida esto que ocurre a nivel universal, ocurre también a nivel individual:

En cierto momento de nuestra vida, al penetrar en el maravilloso templo matemático, cada uno de nosotros ha tenido la sensación de que *existe algo verdadero, algo cierto, algo de lo que no podemos dudar.*

. *Conocemos* (y subrayo esta palabra), *conocemos algo en lo cual podemos creer.*

Y este bienestar psicológico que, según Barajas, los matemáticos han proporcionado a la humanidad se nos da también en cada uno de nosotros. Esto constituye la meta que quiero señalar y que llamo Meta genérica:

TODO SER HUMANO DEBE ADENTRARSE LO SUFICIENTE EN LAS MATEMATICAS HASTA QUE LLEGUE A SENTIR Y COMPRENDER QUE EXISTE ALGO VERDADERO, ALGO DE LO QUE SE PUEDE ESTAR SEGURO.
TODO SER HUMANO TIENE EL DERECHO DE ALCANZAR ESTA META.

III. Se señaló la conveniencia de que a lo largo de toda la enseñanza de la geometría euclidiana en los niveles elemental y medio se adopte un mismo punto de vista, una fundamentación común. Se debe contar con un sistema axiomático subyacente. Desde luego esto no significa que esta axiomática deba enseñarse (error que se ha cometido con demasiada frecuencia) pero sí deben existir estos principios unificadores. Cuando no es así y se cambia constantemente de punto de vista (o ni siquiera se ha fijado uno), la confusión que se crea hace imposible que la enseñanza sea buena.

En la conferencia se mencionaron los sistemas axiomáticos más usuales (Euclides, Euclides-Hilbert, Birkhoff, transformaciones y método algebraico), sus ventajas y dificultades que presentan.

IV. Se describieron algunos curricula de geometría en países que pueden considerarse típicos. Desde aquellos en que la geometría, como tal, ha desaparecido casi del todo hasta aquellos en que ésta ocupa un lugar privilegiado. Por ejemplo, países en que se ofrece una serie de hasta cinco cursos consecutivos de geometría en nivel medio (desde 11-12 años) a los que se dedica un total de más de 360 horas de clase. (Es oportuno señalar que en éstos la enseñanza de la geometría se fundamenta en la axiomática de Birkhoff.)

Se habló de la situación en algunos países de América Latina y en especial, en México. A este respecto se destacó el grave problema que causa en nuestro país la carencia de un punto de vista unificador del que se habló en III. En efecto, la fundamentación cambia de ciclo a ciclo y más aún, año con año. (Además en muchos puntos ni siquiera se entiende cuál es el punto de vista que deba adoptarse.) Se pasa de una especie de fundamentación en transformaciones (primaria), a Euclides (primero de secundaria), a transformaciones nuevamente (segundo curso de secundaria), a Euclides-Hilbert o Birkhoff (no muy claro, en tercero de secundaria) y después, en medio superior, predomina la geometría de tipo algebraico; es una geometría analítica en donde no se sabe bien si ahí se definen los conceptos geométricos (plano, recta, punto, etcétera) o bien simplemente se establecen coordenadas en un plano euclidiano (que se supone conocido pero, desgraciadamente, así es: sólo se supone).

V. En cuanto a sugerencias, en la conferencia se mencionó que en países como el nuestro en donde no se dispone de cursos completos de geometría sino que ésta se enseña en unos cuantos capítulos aislados y repartidos en varios años, un método que puede resultar conveniente es el de mosaicos deductivos.[4] Transcribimos unos párrafos de esta referencia:

MOSAICOS DEDUCTIVOS. Una situación que durante varias décadas perjudicó la enseñanza de la geometría es que se trató de seguir con la tradición de enseñar "toda" la geometría. Por "toda" me refiero a contenidos clásicos como, por ejemplo Wentworth o Moïse. Pero, por otro lado, desde hace ya algunos años en nuestra enseñanza no se dispone, como antiguamente, de varios cursos completos dedicados a la geometría. Por lo menos eso no es lo usual. Más aún, el número de horas dedicadas a la geometría es muy pequeño. Por ejemplo México, en el primer año de secundaria se cuenta con tres horas a la semana durante un mes; en segundo de secundaria, lo mismo; en tercero, tres horas a la semana durante unos tres meses y en bachillerato, salvo raras excepciones, no hay geometría; solamente se enseña una geometría analítica cuyo contenido geométrico es prácticamente nulo.

¿Cómo podríamos entonces proceder para que nuestros alumnos adquieran aunque sea una pequeña noción de geometría? Un camino que al principio se siguió fue el de enseñar "lo que alcance", empezando "desde el principio". Se hablaba de los primeros axiomas euclidianos y se demostraban unos cuantos teoremas que, por lo tanto, tenían muy poco interés. Los resultados de tal procedimiento fueron realmente malos.

Es mejor pensar así; si únicamente vamos a enseñar unas cuantas pequeñas partes de geometría ¡qué sean interesantes y formativas! Adoptemos el método que podríamos llamar de "secciones razonadas" o "selecciones deductivas" o "islotes deductivos" (siguiendo a Choquet. Posiblemente sería mejor bautizar el método como de "mosaicos deductivos" utilizando la palabra "mosaicos" a la Dante. Aclaremos de qué se trata.

Tres elementos constituyen la esencia de un mosaico deductivo:

1. El resultado a que se quiere llegar.

2. Las demostraciones que conducen a dicho resultado.

3. Las propiedades en que se apoyan las demostraciones.

1. Para el éxito de un mosaico, la meta, el resultado final debe poseer varias cualidades. En primer lugar, y quizá sea lo más importante, debe ser algo que fácilmente atraiga la atención, la curiosidad, que sea significativa. Por ejemplo, que el paralelismo de rectas sea una relación de equivalencia, o que una traslación transforme rectas paralelas en rectas paralelas, son resultados con los que difícilmente se pueda atraer la atención; son resultados que jamás quitarán el sueño a alguien. Por otro lado, que al hacer un nudo con una tira de papel resulte un pentágono regular, o bien ¿por qué sólo hay cinco poliedros regulares? eso sí puede ponernos a pensar.

4. E. Lluis. *La geometría en la enseñanza.* Quinta conferencia Interamericana de Educación Matemática. Campinas, S.P. Brasil, 1979. Publicado por la UNESCO.

Evidentemente, el interés del tema dependerá en buena medida del trabajo previo de motivación, pero, todos estaremos de acuerdo en que algunos temas son fácilmente "motivables" y que hay otros cuya motivación puede ser más difícil que el mismo tema (claro está que esto dependerá de la formación del alumno).

2. En cuanto a las varias maneras de demostrar el resultado o los resultados finales del mosaico deductivo conviene seleccionar aquellas que presenten dificultades normales para la edad y preparación del alumno, que no sean demasiado largas, que sean formativas, etcétera.

3. Claro está que las demostraciones que acabamos de mencionar deben apoyarse en unas cuantas proposiciones que constituirán el punto de partida del mosaico deductivo. Serán lo que podríamos llamar "axiomas locales". Estos, conviene que sean afirmaciones que el alumno acepte fácilmente ya sea por su carácter intuitivo, ya sea por haberse tratado anteriormente. Lo que sí debe hacerse es establecer bien cuáles son.

Otra cosa que debe buscarse al elaborar varios mosaicos para un curso o para una serie de cursos es que éstos queden, hasta cierto punto, relacionados entre sí; sobre todo en lo relativo a la fundamentación común de que hablamos hace poco. Y también en los métodos de trabajo. Por esto me gusta más la palabra "mosaicos" que "sección" o "islote", pues esta última puede sugerir cierto aislamiento mientras que "pegando" varios mosaicos se puede lograr cierta estructura tanto en el contenido como en el método.

Notas publicadas en las Memorias del VII Congreso Nacional de la ANPM. pp.81-85 (1984)