Publicaciones Electrónicas
Instituto Mexicano de
Ciencias y Humanidades

Matemáticas a través de problemas.

Emilio Lluis Riera
Humberto Cárdenas
Miguel Ángel Curiel Ariza
Fidel Peralta Corona
Cuauhtémoc Tavera Guerrero
Elías Villar Quijano

www.imch.org.mx

Academia de Ciencias. Vol. 4 (2018)

MATEMATICAS A TRAVES DE PROBLEMAS

Primer Curso de MATEMATICAS
Educación Media Básica

Este texto ha sido redactado para satisfacer cualquiera de las dos estructuras progamáticas: Areas - Asignaturas

SEP

CNIE

Este libro fue editado bajo el convenio:
Secretaría de Educación Pública - Cámara Nacional
de la Industria Editorial y aprobado por el
Consejo Nacional Técnico de la Educación

MATEMATICAS A TRAVES DE PROBLEMAS

Primer Curso de MATEMATICAS - Educación Media Básica

Dr. HUMBERTO CARDENAS TRIGOS

Instituto de Matemáticas, U.N.A.M.

Profr. MIGUEL ANGEL CURIEL ARIZA

Escuela Normal Superior, México

Dr. EMILIO LLUIS RIERA

Instituto de Matemáticas, U.N.A.M.

Profr. FIDEL PERALTA CORONA

Escuela Normal Superior, México

Profr. CUAUHTEMOC TAVERA GUERRERO

Escuela Normal Superior, México

Profr. ELIAS VILLAR QUIJANO

Escuela Normal Superior, México

COMPAÑIA EDITORIAL CONTINENTAL, S. A.

MEXICO – ESPAÑA – ARGENTINA – CHILE – VENEZUELA

SUCURSALES, DEPOSITOS Y REPRESENTACIONES EN:

Bolivia — Brasil — Colombia — Costa Rica — Dominicana — Ecuador — El Salvador
Estados Unidos — Guatemala — Honduras — Nicaragua — Panamá — Paraguay — Perú
Portugal — Puerto Rico — Uruguay

Edición autorizada bajo contrato con los autores

DIBUJOS:

Profr. FIDEL PERALTA CORONA
FRANCISCO MORALES ARRIAGA

Primera edición:
octubre de 1975

COMPAÑIA EDITORIAL CONTINENTAL, S. A.
CALZ. DE TLALPAN NÚM. 4620, MÉXICO 22, D. F.

MIEMBRO DE LA CAMARA NACIONAL DE LA INDUSTRIA EDITORIAL
Registro Núm. 43

AV. REP. ARGENTINA NÚM. 168, BARCELONA 6, ESPAÑA
SOLÍS NÚM. 1262, BUENOS AIRES, ARGENTINA
AMUNÁTEGUI NÚM. 458, SANTIAGO DE CHILE, CHILE
CRUZ VERDE A VELÁZQUEZ, EDIFICIO CENTRO CRUZ VERDE, LOCAL 12, CARACAS, VENEZUELA

IMPRESO EN MEXICO PRINTED IN MEXICO

PROLOGO

En el presente libro se desarrollan, a través del análisis y la resolución de diversos problemas, algunas ideas matemáticas que pueden considerarse básicas para el estudiante del primer grado de educación media.

Con esta manera de presentar los conceptos, a través de problemas, se pretende llevar al alumno al convencimiento de que en muchas actividades humanas existe la necesidad de aplicar ideas matemáticas.

Así, por ejemplo, vemos cómo en una simple actividad de contar se utilizan varias ideas relativas a los números, los conjuntos, las opreaciones, etcétera. En un levantamiento de planos es fundamental la aplicación de algunos conceptos geométricos como el de congruencia, el de semejanza, la medición de perímetros y áreas, etcétera. En el empleo de una palanca para mover grandes pesos es necesario considerar algunas ideas sobre ecuaciones y proporciones. Y también en las actividades agrícolas están presentes muchas ideas estadísticas y de probabilidad. Etcétera.

Los conceptos matemáticos no se presentan con excesivo formalismo, lo cual permite que el maestro realice la formalización y sistematización de acuerdo con las condiciones especiales de su grupo o de acuerdo con el método que él siga. Esta forma de tratar los conceptos también hace que el texto sea susceptible de adaptarse a cualquier programa de este nivel en secundarias, secundarias agropecuarias, secundarias técnicas, etc.

En el texto se han incluido diversas actividades de carácter práctico con las cuales el maestro puede enriquecer su labor en el grupo y que al alumno pueden serle útiles para darse una mejor idea de la realidad y para ver cómo las matemáticas tienen aplicación en esa realidad.

Confiamos en que, tanto para el maestro como para el estudiante, esta obra será de utilidad en sus actividades docentes y esperamos que sus críticas y opiniones nos ayuden a superarla en bien de una educación mejor.

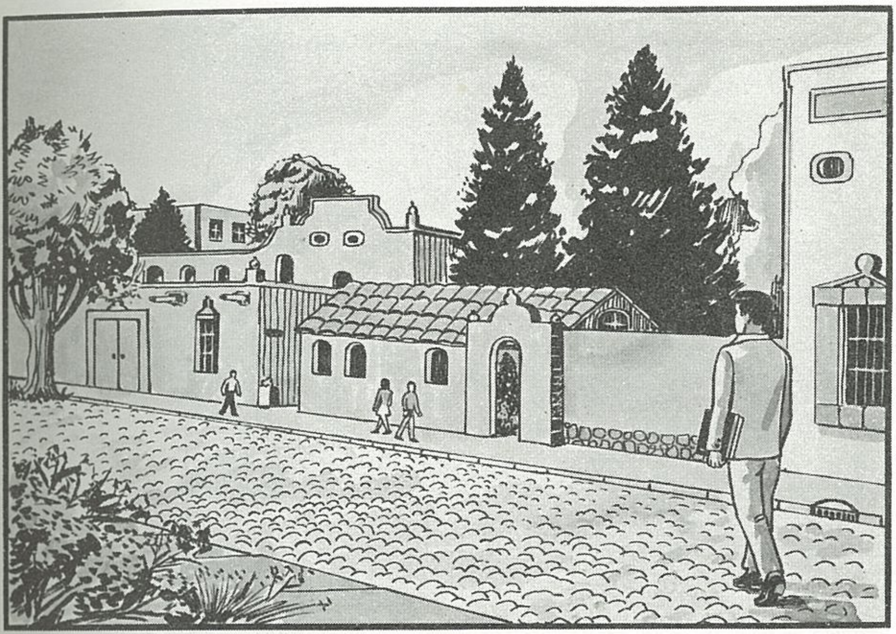
LOS AUTORES

CONTENIDO

CAPITULO 5

PROBABILIDAD Y ESTADISTICA

INTRODUCCION



Era una mañana otoñal. Los habitantes de Capultitlán se disponían a realizar sus labores habituales, sin presentir que aquel día iban a recibir la noticia esperada tanto tiempo: Al fin el Gobierno Federal había autorizado la construcción de una presa para proporcionar riego a las tierras laborables de la región.

El júbilo que despertó la noticia disminuyó bastante cuando la gente se enteró que el precio que debían de pagar por la realización de su sueño era muy alto: Todos tendrían que evacuar el pueblo porque éste iba a ser cubierto por las aguas cuando la presa se llenara.

Pero la alegría y el optimismo renacieron cuando fueron informados que en el mismo proyecto de construcción se incluía la planeación de *una nueva ciudad* para todos los habitantes de Capultitlán y de otros pueblos que también resultaran afectados.

—Oye papá: ¿Es cierto que vamos a tener un pueblo nuevo y que el nuestro va a desaparecer? —preguntó con ansiedad Emma Campos a su padre, un maestro de escuela primaria que llevaba muchos años laborando en Capultitlán.

—Sí hija —contestó, dejando a un lado el libro que estaba leyendo—; pero no lo digas en ese tono. La desaparición de nuestro viejo Capultitlán abre la posibilidad de una vida mejor para todos los ciudadanos.

—¡Pero si aquí vivimos muy a gusto! —dijo la chiquilla de 12 años.

—¡Claro hija mía!; pero no seamos egoístas. En el pueblo hay muchas personas que todavía sufren graves carencias. Para esas personas, igual que para nosotros, la presa y la nueva ciudad significarán la oportunidad de cambiar a una vida más productiva.

—¿Por qué crees que en el nuevo pueblo la vida será mejor?

—Porque, en primer lugar, las aguas de la presa permitirán mejorar nuestra producción agrícola. Luego, toma en cuenta que su misma construcción abrirá fuentes de trabajo para muchas personas. Posteriormente tendremos una planta generadora de electricidad, lo cual permitirá la creación de nuevas industrias. Tal vez se construya otra carretera mejor. Disfrutaremos también de las otras vías de comunicación como el teléfono, el telégrafo, la radio, la televisión. Y nuestras casas, escuelas y oficinas de trabajo serán diseñadas y construidas con los adelantos modernos y serán más cómodas y funcionales.

—¿Y todo eso nos va a dar el gobierno, papá?

—No hija; algunos creen que el gobierno nos debe dar todo, pero eso no es posible. El gobierno sólo nos puede proporcionar la oportunidad y alguna ayuda técnica que necesitemos; pero somos nosotros, el pueblo entero, quienes habremos de lograr nuestro mejoramiento. Inclusive tú, una niña de 12 años, puedes participar en la labor de crear una vida mejor para nuestra comunidad.

—¿Yooo? ¿Cómo podría ayudar yo, si apenas terminé la primaria y estoy empezando a estudiar la secundaria?

El padre de Emma sonrió comprensivamente antes de decir:

—En nuestro país hay muchísimas personas que no han recibido la educación que tú tienes. ¿No crees que tus conocimientos serán valiosos si deseas ayudar? ¿Piensas que esa educación que se te ha dado no puede ser útil a tu comunidad Habla con tus compañeros y tus maestros de la secundaria.

CAPITULO PRIMERO

CONJUNTOS Y LOGICA

1. CONJUNTOS. UNION. INTERSECCION

—Aquí tiene el trabajo de matemáticas que le tocó a mi equipo, maestro Ruiz —dijo Emma Campos, al tiempo que ponía sobre el escritorio una carpeta.

—¿Ya se enteró usted, maestro —intervino Pedro Hernández— que ahora sí se va a construir la presa que queríamos?

—Por supuesto, Pedro, si en el pueblo no se habla de otra cosa. Y tú, ¿ya sabes que nuestra escuela tendrá que desaparecer por ese motivo?

—Todos lo sabemos, maestro —contestó Carolina Rodríguez—, porque se va a levantar un nuevo pueblo y este Capultitlán va a ser destruido por las aguas de la presa.

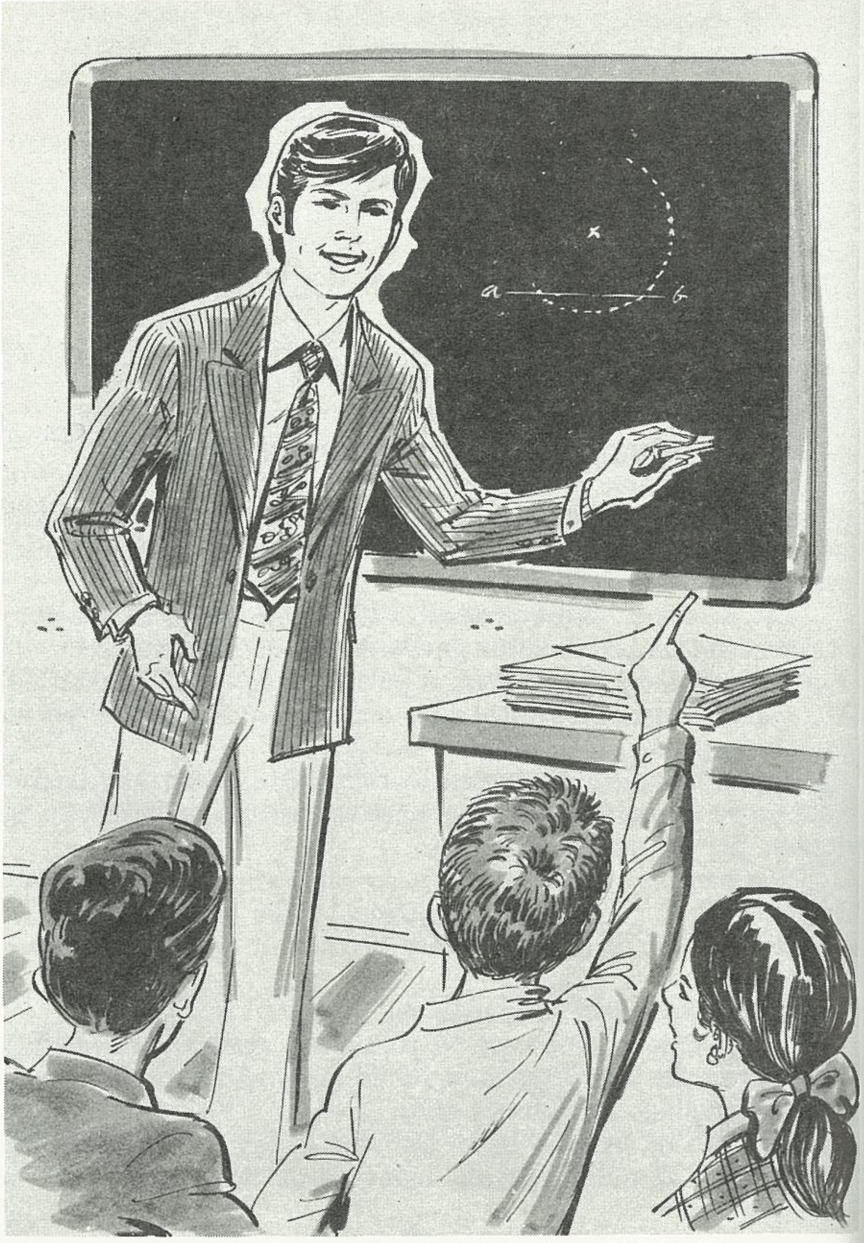
—Precisamente hablábamos de eso con Emma, profesor —intervino José Luis Garza en la conversación—. Ella piensa que nosotros podríamos ayudar en la construcción de nuestra escuela en el nuevo pueblo.

—¡Qué buena idea! ¿Y ustedes qué creen?

—Yo les digo a todos que sí podríamos ayudar acarreando ladrillos, pero nada más —propuso Julián Domínguez, un chico fuerte y muy desarrollado para sus 14 años.

—Pero eso no basta —habló Carolina— hay que cooperar también con ideas. O qué. . . ¿lo que hemos aprendido en la escuela no sirve para nada?

—Claro que algunas cosas servirán; pero hay muchas otras que hemos estudiado en la escuela y que no tienen aplicación alguna. Por ejemplo, matemáticas. ¿Verdad, maestro?


a
b

—Te equivocas, Julián. Las matemáticas son como una herramienta que todos podemos usar en nuestras actividades diarias.

—Sí, eso nos lo ha dicho usted muchas veces —dijo Pedro—. Y yo, por ejemplo, las he usado en ocasiones para ayudarle a mi papá con la contabilidad de su tienda. Pero la construcción de un pueblo ya es otra cosa. ¿Cómo pueden ayudarnos ahí las matemáticas? ¿En qué podríamos utilizar, por ejemplo, lo que hemos estado viendo sobre conjuntos?

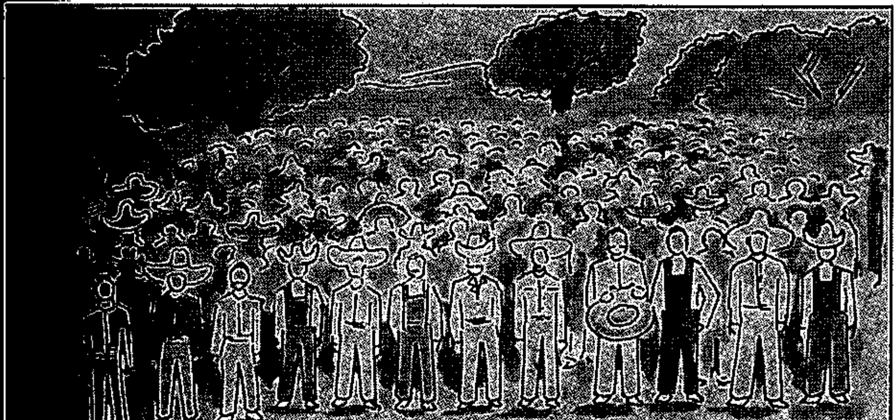
—Por lo que veo, ustedes dudan que los conocimientos que adquieren en mi clase tengan aplicación práctica y no encuentran cómo podrían servirse de esos conocimientos para ayudar en la construcción de nuestra nueva ciudad. ¿Es eso?

—¡Sí, maestro! —exclamaron casi a coro los alumnos.

—Entonces, vamos a realizar algunas actividades y algunas investigaciones especiales para ver qué ideas matemáticas se aplican en la planeación y construcción de una ciudad. Por lo pronto, voy a presentarles un problema en el que pueden utilizar algo de lo que saben sobre conjuntos.

Problema. A fin de informarles sobre la construcción de la nueva ciudad, y para formar brigadas de trabajadores, se citó a todos los agricultores de Capultitlán a una junta. Asistieron 500 personas. En otra ocasión, se citó a todos los obreros y se presentaron 300. Después de esas juntas informaron al ingeniero encargado de las obras que se podía contar con 800 trabajadores voluntarios.

Sin embargo, cuando el ingeniero citó a todos los agricultores y todos los obreros para organizar las brigadas de trabajo se encontró con que sólo había 700 personas.

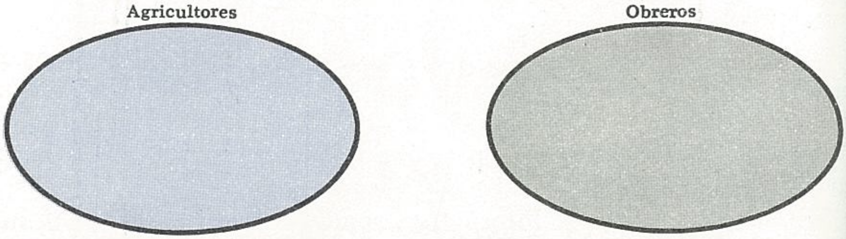


Como él esperaba que asistieran 800 personas, preguntó dónde se habían quedado las 100 restantes; pero le contestaron que no faltaba ninguno. ¿Podría ser cierto eso? ¿Cuál es la explicación? ¿O se habían equivocado al sumar?

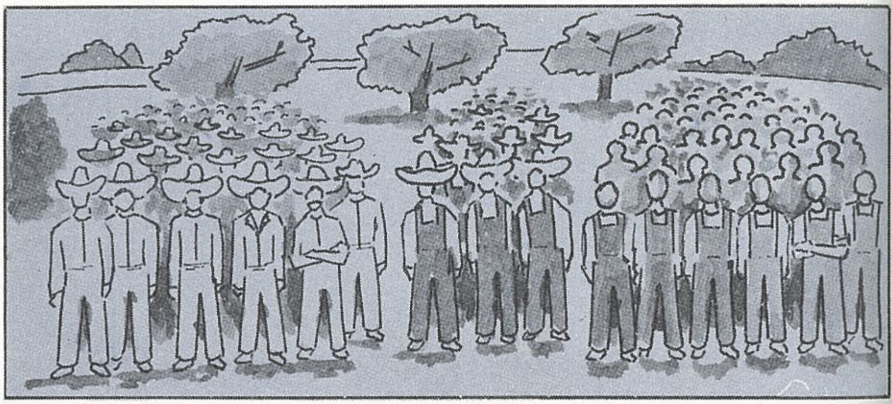
Después de pensarlo un momento, Emma exclamó alegremente: "¡La respuesta es muy sencilla, maestro!, sólo tenemos que pensar en que hay personas que son al mismo tiempo agricultores y obreros".

—¡Exactamente! ¿Quieres explicarnos cómo lo resuelves tú?

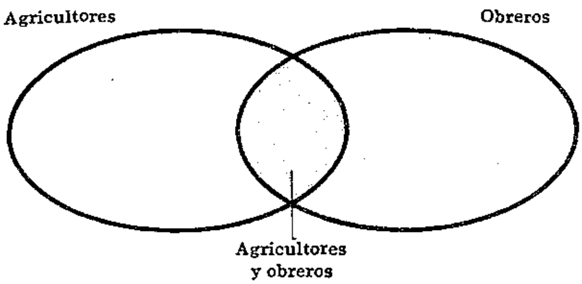
—Con mucho gusto maestro. Mire usted: en el problema se mencionan dos conjuntos de personas que realizan cierta actividad. Estos conjuntos podrían ilustrarse por separado, así:



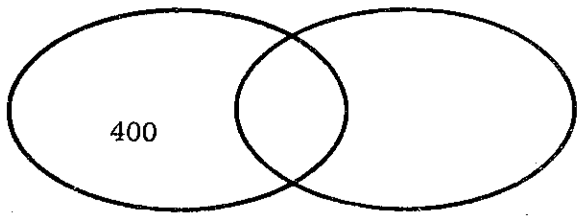
Pero, como una misma persona puede tener las dos ocupaciones, es decir, un agricultor también puede ser obrero, o un obrero puede ser también agricultor, la persona que esté en ese caso asistirá cuando citen a los agricultores y también asistirá cuando llamen a los obreros.



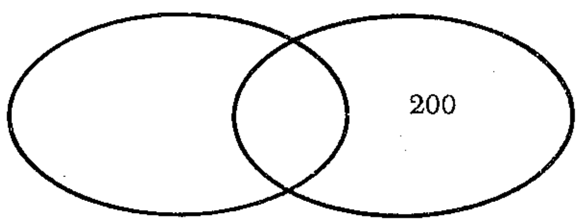
Como no se tomó eso en cuenta, esperaban que al reunirlos a todos hubiera 500 + 300. Si consideramos que, estando reunidos los dos conjuntos de personas, sólo había 700, debemos pensar que entre ellas hay 100 que tienen las dos ocupaciones. Esto puede ilustrarse así:



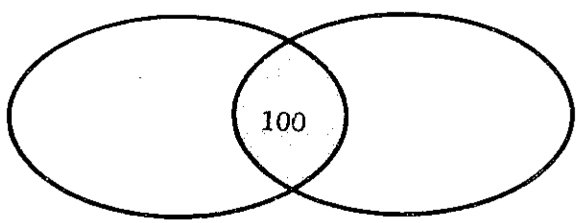
Así observamos claramente que en la unión de los dos conjuntos hay 400 personas que sólo son agricultores.



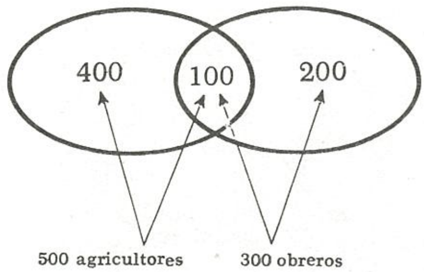
hay 200 personas que sólo son obreros,



y hay 100 que son *agricultores* y *obreros.*



Por eso es que sólo hubo 700 personas y no había faltado ninguna a la junta.



$$400 + 100 + 200 = 700$$

—Aquí podemos observar —dijo el profesor— que la unión de estos dos conjuntos está formada por las 700 personas que son *agricultores u obreros*. Es decir, por las personas que están en un conjunto *o* en el otro.

—Y la intersección —dijo Emma— está formada por las 100 personas que son *agricultores y obreros*. O sea, las que pertenecen a los dos conjuntos a la vez.

—Ahora ya podemos decir dónde estuvo el error. ¿Verdad maestro?

—Sí, Julián. Pero díganme todos, ¿se dan cuenta que lo que saben de conjuntos puede ayudarles a resolver algunos problemas de contar?

—¡Sí, maestro! ¿Por qué no nos da algunos otros problemas como ése para que nos ejercitemos en su resolución?

—Cómo no, Carolina. Aquí tienen una lista de problemas. (Algunos de ellos con sugerencias que los ayudarán a resolverlos.) Resuélvanlos y, si lo hacen bien, prometo llevarlos al campamento de los ingenieros y técnicos que están trabajando en lo de la presa y la nueva ciudad.

—¡Bravo! ¡Bravo! —exclamaron todos los alumnos.

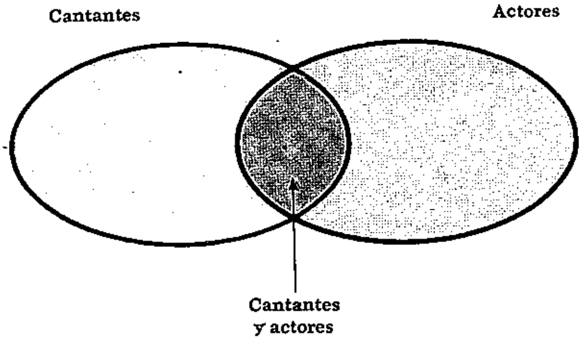
Y estos fueron los problemas que el maestro proporcionó a sus estudiantes. ¿Quiere usted, amigo lector, intentar la resolución de los mismos?

PROBLEMAS Y EJERCICIOS

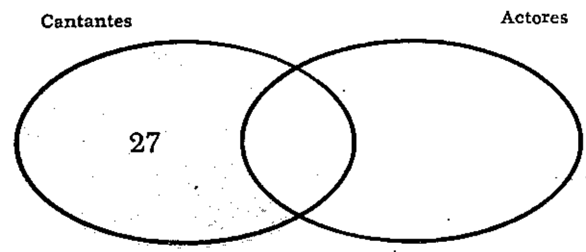
1. En una escuela existen dos clubes: el Club Coral y el Club de Teatro. Si se sabe que son 27 alumnos los que únicamente pertenecen al Club Coral, que hay 16 pertenecientes únicamente al Club de Teatro y hay otros 10 que toman parte en los dos clubes, ¿cuántos

alumnos integran esos dos clubes? ¿Cuántos forman el Club Coral? ¿Cuántos pertenecen al Club de Teatro?

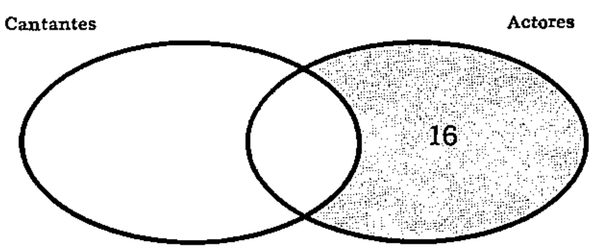
Resolución. Estos dos conjuntos de personas podrían ilustrarse con el siguiente diagrama:



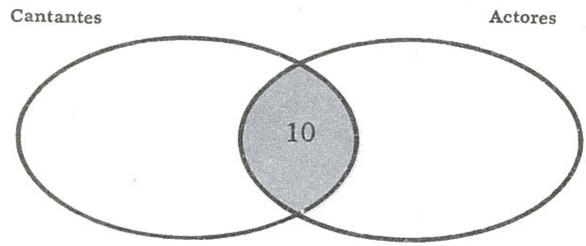
En esta unión de los dos conjuntos tenemos 27 personas que sólo son cantantes.



16 personas que sólo son actores,



y 10 que realizan las dos actividades; es decir, que son *cantantes* y *actores*.



Por lo tanto, en los dos clubes hay
____ + ____ + ____ = ____ alumnos.

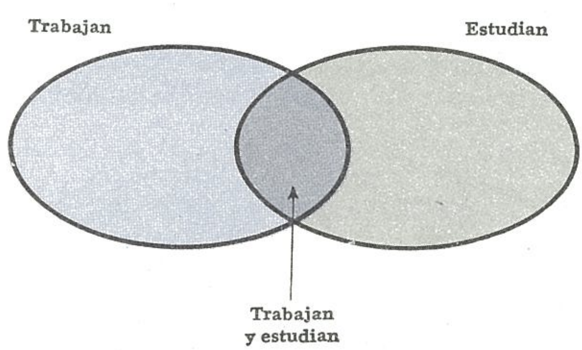
Los alumnos que pertenecen al Club Coral son
27 + ____ = ____.

Y los que pertenecen al Club de Teatro son
____ + 16 = ____.

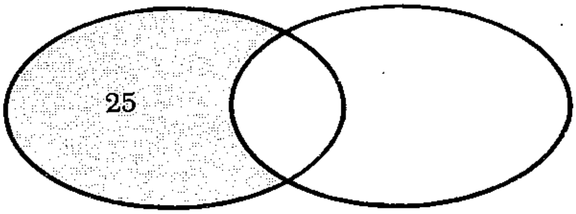
En este problema puede observarse que, aunque hay 37 alumnos en un club y 26 alumnos en el otro, el total de alumnos que integran los dos clubes no es 37 + 26 porque hay ____ alumnos que son ____ y ____. Es decir, porque en la intersección de los dos conjuntos hay ____ alumnos.

2. Se sabe que en un conjunto de 58 personas, todas trabajan o estudian. Si entre estas personas hay 25 que *sólo trabajan* y hay 13 que *trabajan y estudian*, ¿cuántas son las que se dedican únicamente a estudiar?

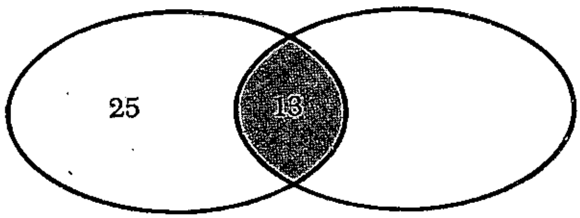
Resolución. Un diagrama para ilustrar esta situación podría ser el siguiente:



En este conjunto hay 25 personas que sólo trabajan

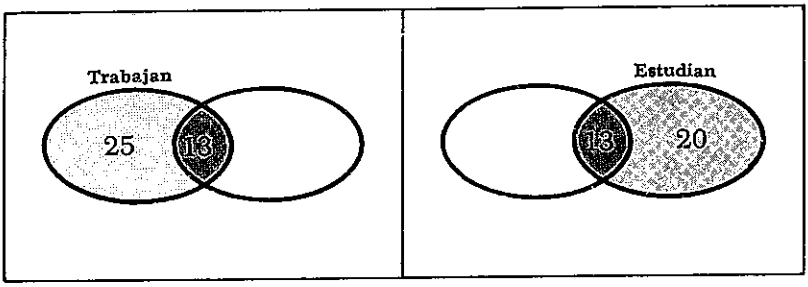


y hay 13 que trabajan y estudian.



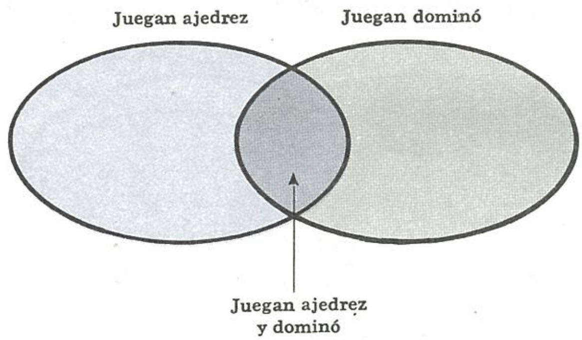
Si en la unión hay 58 personas, entonces las que únicamente estudian son ☐, porque 25 + 13 + ☐ = 58.

En virtud de que la intersección de estos dos conjuntos tiene 13 elementos, observamos que las personas que trabajan son 25 + ☐ = 38, y las que estudian son 13 + ☐ = 33.

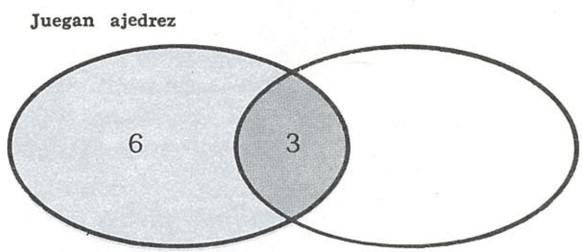


3. Hay una familia de 13 miembros en la cual todos juegan ajedrez o dominó. Si son 9 miembros de la familia los que juegan ajedrez y entre éstos hay 3 que también juegan dominó, ¿cuántos son los familiares que juegan dominó?

Resolución. Un diagrama para esta situación podría ser el siguiente:

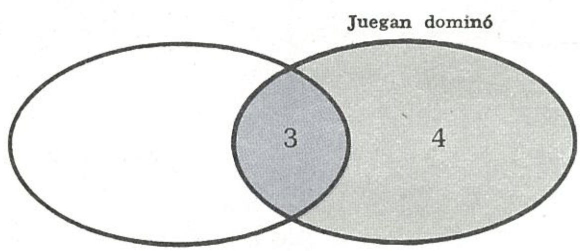


Como hay 3 miembros en la intersección, y son 9 los que juegan ajedrez, entonces los que únicamente juegan ajedrez son 9 – 3 = ____



Si son 13 los miembros de la familia, entonces los que únicamente juegan dominó son ____, porque 6 + 3 + ____ = 13.

En consecuencia, los que juegan dominó en la familia son 3 + ____ = ____.



4. En un taller trabajan 23 obreros que manejan el torno o la fresadora. Si son 9 los obreros que manejan *únicamente el torno*

y 8 los que manejan *únicamente la fresadora*, ¿cuántos son, en total, los que manejan el torno, y cuántos los que manejan la fresadora?

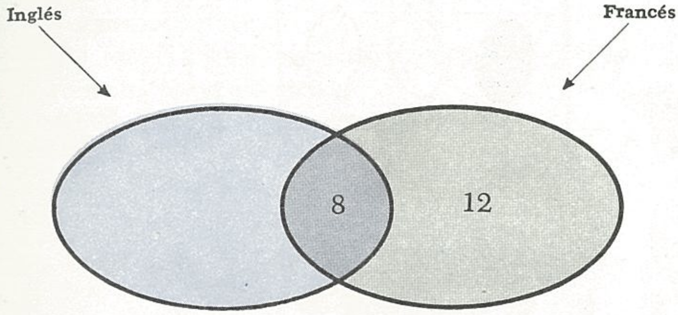
Solución. Los que manejan el torno y la fresadora, o sea, los que están en la intersección, son , porque 9 + + 8 = 23.

Los que manejan el torno son , porque 9 + 6 = .

Y los que manejan la fresadora son 8 + = .

5. En un grupo de personas hay 30 que hablan inglés y 20 que hablan francés. Si de éstas son 12 las que únicamente hablan francés, ¿cuántas personas hay en el grupo? ¿Cuántas son las que hablan inglés y francés? ¿Y cuántas sólo hablan inglés?

Resolución. Puesto que de las 20 personas que hablan francés, son 12 las que sólo hablan ese idioma, deben ser las que hay en la intersección; es decir, habrá que hablan los dos idiomas, francés e inglés.



Y ya que son 30 las que hablan inglés, entre éstas hay que sólo hablan ese idioma, pues + 8 = 30.

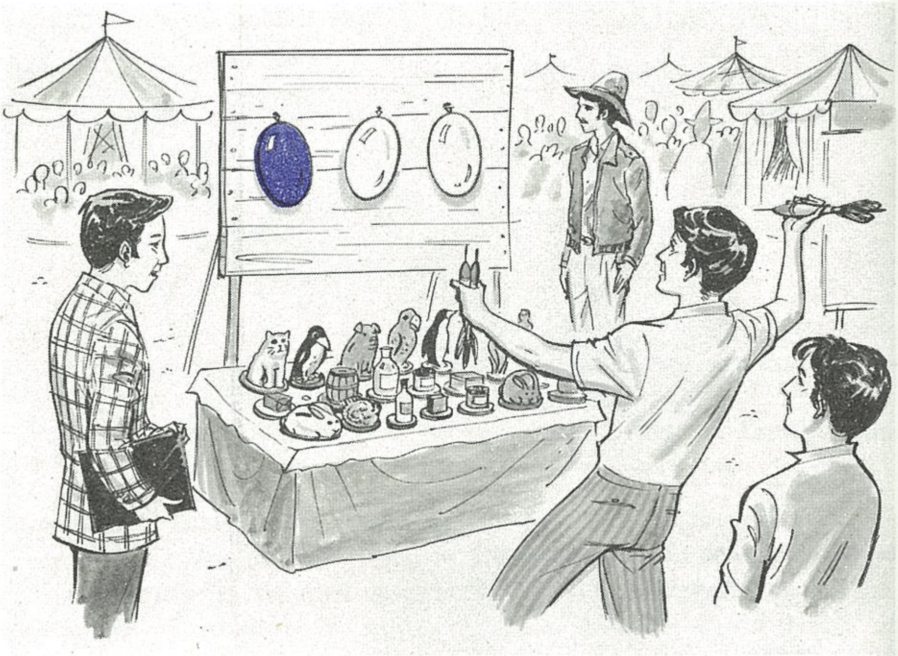
En consecuencia, las personas que forman el grupo son + + = . En otras palabras, el número de elementos en la unión es .

6. Hay un sindicato al cual se afilian personas que son plomeros o mosaiqueros. Si en este momento están afiliados 300 plomeros y 250 mosaiqueros, y se sabe que son 130 los que únicamente trabajan de plomeros, ¿cuántos miembros tiene ese sindicato? Entre esos trabajadores, ¿cuántos son *plomeros y mosaiqueros*? ¿Cuántos son únicamente mosaiqueros? ¿Cuántos son *plomeros o mosaiqueros*?

7. Todas las personas que asistieron cierto día a un restaurante tomaron café o postre. Si se sirvieron 170 cafés y 120 postres, y fueron 100 las personas que pidieron *café y postre*, ¿cuántas personas tomaron *café o postre*? Es decir, ¿cuántas personas fueron al restaurante ese día? ¿Cuántas pidieron sólo café? ¿Cuántas pidieron sólo postre?

8. Otro sindicato agrupa personas que trabajan en la carpintería o en la ebanistería. Si en total el sindicato cuenta con 390 miembros, y se sabe que 350 son carpinteros y 120 son ebanistas, ¿cuántas de esas personas son carpinteros y ebanistas ¿Cuántas son sólo carpinteros? ¿Cuántas son sólo ebanistas?

2. SUBCONJUNTOS



—¿Cuánto apuestas a que rompo los tres globos? —dijo Julián con aire retador.

—¿Cómo puedes estar tan seguro? —le preguntó José Luis. ¿No ves que son ocho tus resultados posibles y así solamente tienes una oportunidad entre ocho de acertar en tu apuesta?

—¿Cómo sabes que son ocho los resultados posibles?

—Es muy fácil: sólo estoy aplicando lo que estudiamos ayer sobre los subconjuntos.

—A ver, explícame eso.

—Sí, mira: cuando lances tus dardos puede ocurrir que rompas sólo un globo; o dos, o los tres, o ninguno. ¿De acuerdo?

—De acuerdo. . . , pero entonces sólo hay cuatro posibilidades y no ocho, como tú dices.

—¡Claro que son ocho! Fíjate bien: Si sólo rompieras un globo, tendrías *tres resultados posibles*: romper *el azul,* o bien, *el gris,* o bien, *el blanco.* Si rompieras dos globos, serían *otros tres resultados posibles*: romper *el azul y el gris,* o bien, *el azul y el blanco,* o bien, *el gris y el blanco*. Si rompieras los tres tendrías otro resultado, y si no rompieras ninguno, sería otro resultado más. ¿Verdad que sí son ocho?

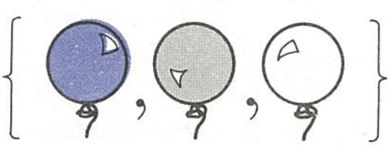
—Ahora lo veo, tú contaste todos los subconjuntos posibles en el conjunto de los tres globos.

—¡Exactamente! Ahora, ¿quieres insistir en tu apuesta?

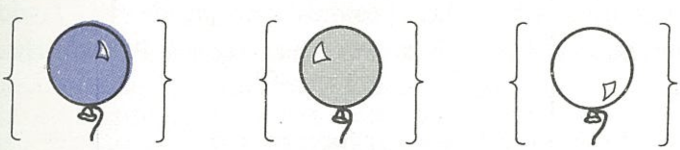
—No. Mejor lanzo mis dardos sin apostar y a ver si me saco una alcancía como premio.

Lo que hizo José Luis en esa ocasión, estimado lector, fue contar subconjuntos en la forma siguiente:

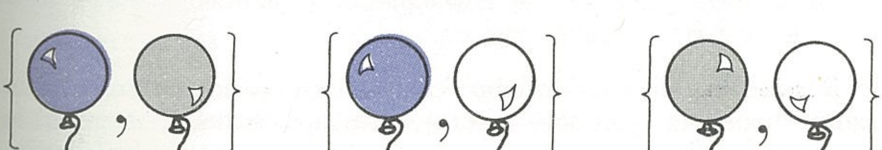
Consideró el conjunto de los tres globos



y luego pensó en los subconjuntos de un elemento que se pueden obtener de ese conjunto:



Después tomó en cuenta los subconjuntos de dos elementos:



También consideró el único subconjunto de tres elementos que podía formar:

Y, además, incluyó en su contabilidad un subconjunto sin elementos, o sea, el conjunto vacío:

$$\{\quad\}$$

Todo esto lo había estudiado en una clase anterior. Y los problemas que resolvieron en esa ocasión fueron los siguientes: (¿Quiere usted, amigo lector, resolverlos también?)

1. Si me piden dos personas para manejar la motoconformadora y cuento con tres voluntarios, Juan, Pedro y Luis —pensaba el jefe de personal—, ¿cuántas y cuáles son las parejas que puedo enviar a ese trabajo?

Resolución. Consideramos el conjunto {Juan, Pedro, Luis} y buscamos todos los subconjuntos de dos elementos que están contenidos en él:

{Juan, Pedro} {Juan, Luis} {Pedro, Luis}

Por lo tanto, son 3 las posibles parejas de trabajadores que pueden enviarse a manejar la máquina: *Juan y Pedro,* o bien, —— ————————, o bien, ————————.

2. Un jefe de familia necesita comprar un radio, una licuadora, una plancha y un ropero, que hacen falta en su casa; pero el dinero sólo le alcanza para tres de esos objetos. ¿Cuántas opciones diferentes tiene para hacer su compra?

Resolución. Si consideramos en un conjunto los cuatro objetos {radio, licuadora, plancha, ropero}, podemos formar subconjuntos de tres elementos:

{radio, licuadora, plancha}

{radio, __________, __________}

{radio, __________, __________}

{licuadora, __________, __________}

Así encontramos que el señor tiene ____ opciones para hacer su compra.

3. Si hay 6 deportistas registrados para jugar basquetbol, ¿cuántos equipos diferentes se pueden formar con ellos? (Cada equipo consta de 5 jugadores.)

Resolución. Llamemos a, b, c, d, e, f a los jugadores registrados. Y luego busquemos los subconjuntos de cinco elementos que estén contenidos en el conjunto $\{a, b, c, d, e, f\}$:

$\{a, b, c, d, e\}$ $\{b, c, d, e, f\}$

$\{c, d, e,$ ____, ____$\}$ $\{d, e,$ ____, ____, ____$\}$

$\{e,$ ____, ____, ____, ____$\}$ $\{$____, ____, ____, ____, ____$\}$

Por lo tanto, son ____ los equipos diferentes que se pueden formar con esos 6 jugadores.

4. Una persona tiene tres billetes en su billetera, uno de \$5.00, otro de \$10.00 y otro de \$50.00. Si sólo saca dos billetes, ¿cuántas y cuáles son las diferentes cantidades que le pueden salir?

Resolución. Si consideramos el conjunto de billetes {5, 10, 50}, podemos buscar los subconjuntos de dos elementos que hay en él. Estos son:

{5, 10} {5, ____} {____, ____}

Por consiguiente, son ____ las diferentes cantidades que le pueden salir: \$ ____, o bien, \$ ____, o bien, \$ ____.

5. El presidente invita a una comisión de dos o tres alumnos del profesor Ruiz para que lo acompañen en el recorrido de supervisión que hará a la nueva ciudad en construcción. Si hay cuatro alumnos (Emma, Julián, Carolina y Pedro) que merecen esa distinción, ¿cuántas son las posibles comisiones que pueden formarse?

Resolución. Hay que buscar los subconjuntos de dos y de tres elementos que están contenidos en el conjunto {Emma, Julián, Carolina, Pedro}.

Los de 2 elementos son:

{Emma, ————} {————, ————}

{————, ————} {————, ————}

{————, ————} {————, ————}

Los de 3 elementos son:

{Emma, ————, ————}

{————, ————, ————}

{————, ————, ————}

{————, ————, ————}

Por lo tanto, con esos cuatro alumnos es posible formar ▒ comisiones de dos personas y ▒ de tres personas. Esto es, en total, son ▒ las posibles comisiones para acompañar al presidente en su recorrido.

6. ¿Cuántos subconjuntos están contenidos en el conjunto {pera, melón, sandía, durazno}?

Resolución. En ese conjunto hay ▒ subconjuntos de 1 elemento:

{pera} {melón} {————} y {————}; hay ▒ subconjuntos de 2 elementos:

{pera, melón} {————, ————} {————, ————} {————, ————} {————, ————} {————, ————}; hay ▒ subconjuntos de 3 elementos:

{pera, melón, sandía} {————, ————, ————} {————, ————, ————} {————, ————, ————};

hay un subconjunto de cuatro elementos:

{————, ————, ————, ————};

y hay un subconjunto vacío, { }.

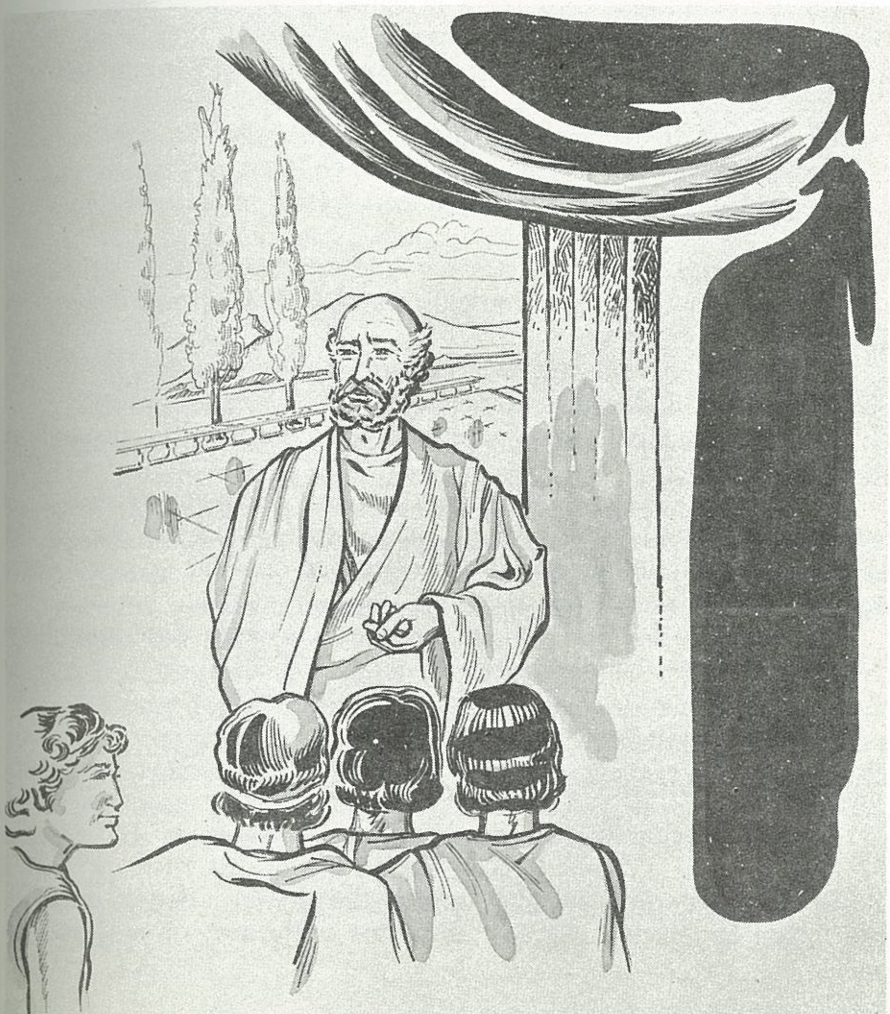
Por consiguiente, en ese conjunto de cuatro frutas están contenidos ▒ subconjuntos.

7. Un profesor de educación física dispone de 5 gimnastas preparadas para participar en una olimpiada; pero sólo le permiten enviar una selección de 3 gimnastas. ¿Cuántas selecciones diferentes puede hacer?

8. En una feria, una persona lanza dos dardos hacia un tablero en el que hay cuatro globos, un azul, un rojo, un amarillo y un verde. Si no falla ningún tiro, ¿de cuántas maneras diferentes puede ser su resultado?

9. En el grupo del profesor Emilio se han formado 6 equipos de voleibol y se va a llevar a cabo un torneo en el que todos los equipos deberán jugar contra todos. ¿Cuántos partidos deberán jugarse durante ese torneo? Si sólo se pueden jugar 3 partidos en cada fecha, ¿cuántas fechas serán necesarias para terminar ese torneo?

3. LOS CONJUNTOS Y EL RAZONAMIENTO LOGICO



Emma y Pedro, en el salón de clase, sostenían una acalorada discusión.

—¡Te digo que no! —exclamó en el colmo del disgusto Emma—. Mira, Pedro: yo no sé qué hay de malo en tu razonamiento; pero hay algo malo. ¡Lo sé!

—Las mujeres no son buenas para razonar —contestó molesto Pedro—. Mi deducción es buena y apuesto lo que quieras a que estoy bien. ¡Yo también lo sé!

—No se disgusten —intervino el maestro Emilio, que en esos momentos entraba al salón—. Recuerden que si se enojan, menos podrán ponerse de acuerdo. A ver, ¿cuál es el motivo de la discusión?

Los muchachos al ver al maestro depusieron su combativa actitud y, ya calmados, expusieron la causa de su altercado.

—Mire, maestro —inició la exposición Pedro—. Emma me pidió que le enseñara cuál es la diferencia entre un buen razonamiento y un mal razonamiento. Para hacerlo le puse un ejemplo y ahora resulta que mi deducción está mal... según ella. Yo razoné así:

Todos los varones están interesados en Matemáticas.

Todos los estudiantes sobresalientes están interesados en Matemáticas.

Por lo tanto, *todos los varones son estudiantes sobresalientes.*

—¡Qué tontería! —interrumpió Emma—. Esa es una deducción falsísima.

—Que con su autoridad el maestro decida —concluyó Pedro, adoptando una actitud arrogante.

El maestro pidió a los alumnos que anotaran la deducción de Pedro e indicó:

—Para saber si alguna inferencia es buena o mala no es necesario recurrir a la autoridad de nadie. Ustedes mismos pueden decidir en este caso. Pero creo que antes tendremos que analizar un poco algunas inferencias elementales.

Seguramente en muchos razonamientos ustedes han manejado expresiones como las siguientes:

Todos los mamíferos son vertebrados.

Ningún mexicano es europeo.

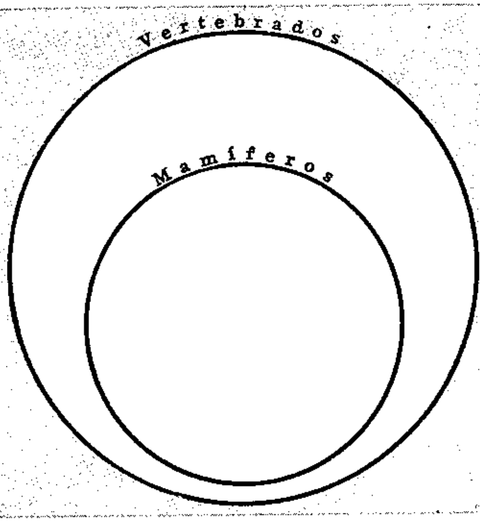
Algunos estudiantes de secundaria son curiosos.

Si observan con cuidado la primera expresión, notarán que ella nos indica la relación que hay entre dos conjuntos: el conjunto de los mamíferos y el conjunto de los vertebrados. De hecho, esa expresión podría escribirse así: "Todos los elementos del conjunto de los mamíferos son también elementos del conjunto de los vertebrados".

—¡Otra vez los conjuntos! —interrumpió José Luis.

—Efectivamente, José Luis, ¡otra vez los conjuntos! —repuso el maestro y prosiguió su explicación:

—Y ya que se trata de conjuntos, podemos ilustrar esa expresión en un diagrama como el siguiente:



Esto es, cuando decimos que "Todos los mamíferos son vertebrados", estamos afirmando que "El conjunto de los mamíferos es un subconjunto de los vertebrados". ¿Entendieron todos?

Los alumnos respondieron afirmativamente y entonces el maestro preguntó:

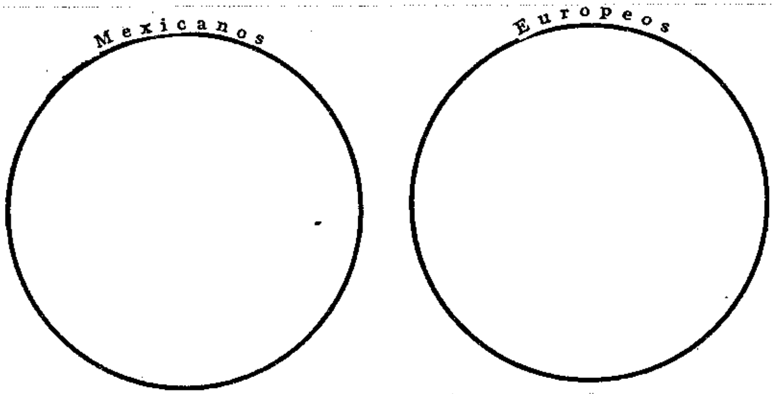
—Pedro, ¿cómo interpretarías la afirmación "Ningún mexicano es europeo"?

La contestación de Pedro fue rápida:

—Es muy fácil. En esa expresión también se habla de dos conjuntos: el conjunto de los mexicanos y el conjunto de los europeos. De hecho, estamos afirmando que ningún elemento del conjunto de los mexicanos pertenece al conjunto de los europeos. Es decir, que los dos conjuntos son...

—¡Ajenos! —completó enérgicamente Emma.

—Ajenos —terminó impertérrito Pedro—. El diagrama puede ser el siguiente:



Estimado lector: Trate usted de interpretar la expresión: "Algunos estudiantes de secundaria son curiosos", y represéntela con un diagrama, tal como se hizo con las dos afirmaciones anteriores.

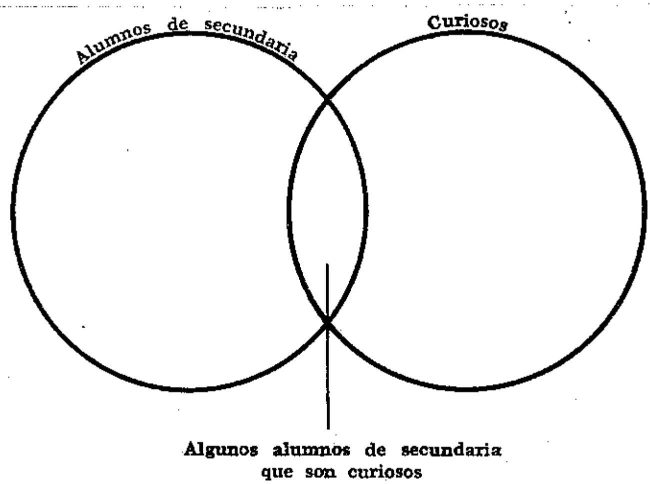
—Emma —ordenó el profesor— analiza la última afirmación.

La niña habló rápidamente para evitar ser interrumpida:

—En la afirmación "Alpunos estudiantes de secundaria son curiosos" se mencionan también dos conjuntos: el de los estudiantes de secundaria y el de los curiosos, y tal expresión nos indica que algunos elementos del conjunto de los alumnos de secundaria también pertenecen al conjunto de los curiosos. Y con un diagrama...

—¡Calma, calma! —interrumpió Pedro.

—Y con un diagrama... —siguió Emma, lanzando miradas furiosas a su compañero— y con un diagrama podemos ilustrar la afirmación así:



—Muy bien, veo que todos han entendido esto. Por lo tanto —señaló el profesor Emilio—, no tendrán dificultad al resolver los siguientes ejercicios.

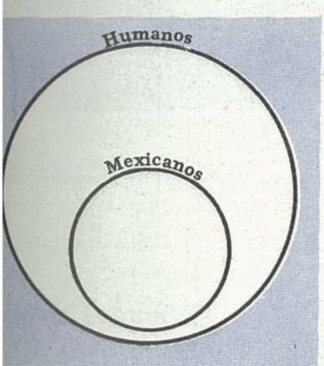
Ejercicio 1. Ilustre con un diagrama de conjuntos cada una de las siguientes expresiones.

a) Todas las mariposas son insectos.
b) Ningún número impar es par.
c) Algunos divisores de 60 son números impares.
d) Ningún planeta es estrella.
e) Todos los números naturales son enteros.
f) Todos los hombres son mortales.
g) Algunos vegetales son carnívoros.
h) Ningún verbo es adjetivo.
i) Todos los A son B.
j) Algunos M son N.
k) Ningún R es S.

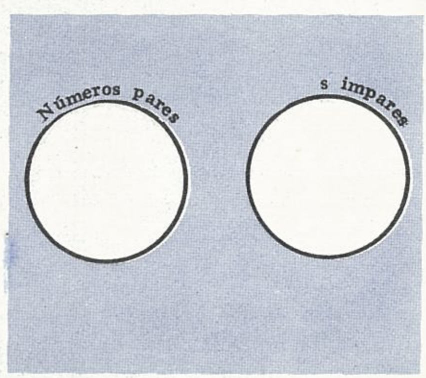
Estimado lector: Analice con su maestro y sus compañeros el significado de las expresiones i), j) y k).

Ejercicio 2. Cada uno de los siguientes diagramas sugiere una afirmación como las tratadas en el ejercicio anterior. Escríbala en la línea que se encuentra abajo.

a)

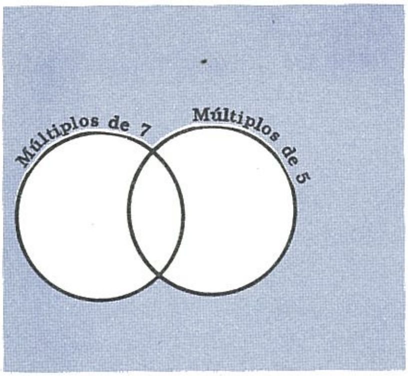


b)

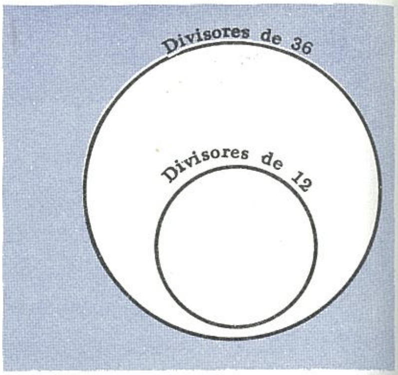


____________________ ____________________

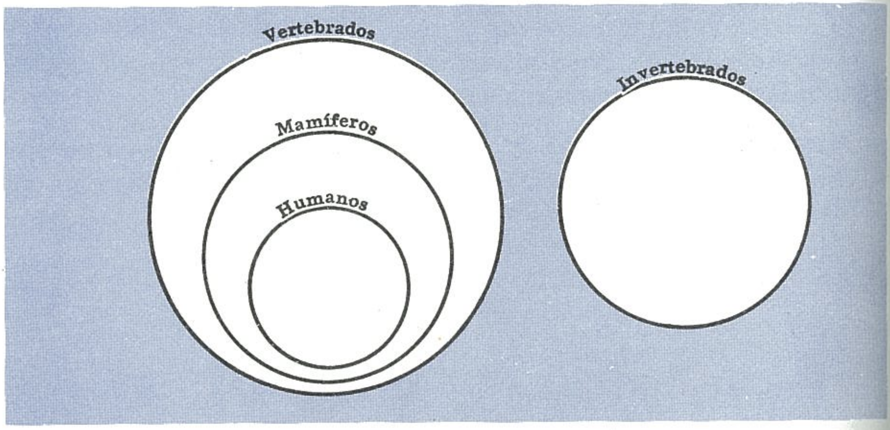
c)



d)



e)



Todos ______________________ Todos ______________________

Todos ______________________ Ningún ______________________

—Bueno —opinó el profesor Emilio cuando sus alumnos terminaron los ejercicios—, ahora tenemos conocimientos suficientes para construir algunos razonamientos —y luego escribió en el pizarrón lo siguiente:

Hipótesis { *Todos los mamíferos son vertebrados.*
Todos los cetáceos son mamíferos.

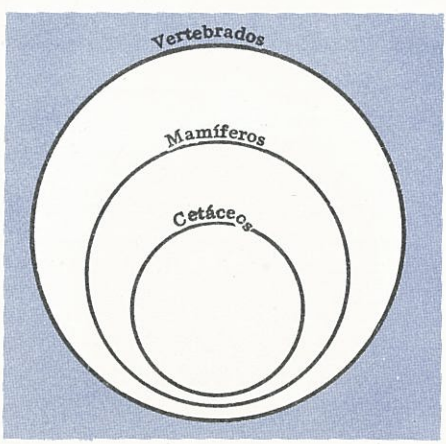
Por consiguiente,

Conclusión: *Todos los cetáceos son vertebrados.*

—Observen ustedes que la conclusión *se deduce,* o sea, es consecuencia de la hipótesis. Veamos esto en un diagrama:

La expresión "Todos los mamíferos son vertebrados" se puede ilustrar así:

Ahora, Emma, con ese mismo diagrama representa la expresión "Todos los cetáceos son mamíferos". La niña obedeció y completó el dibujo así:



—Como ven ustedes —continuó el maestro—, si aceptamos la hipótesis, tenemos que aceptar forzosamente que "Todos los cetáceos son vertebrados". Por eso decimos que la conclusión *se deduce o es consecuencia* de la hipótesis. En este caso podemos decir que nuestra inferencia *es válida. ¿Entendieron todos el ejemplo?*

Los muchachos asintieron.

—¿Y cuándo una inferencia no es válida? —preguntó Pedro.

—Seguramente —indicó con rapidez Emma— cuando no estemos obligados a aceptar la conclusión a partir de los datos de la hipótesis.

Pedro retó a Emma:

—Muy bien niña sabia, dame un ejemplo de inferencia no válida.

—¡Calma, muchachos! —intervino el maestro—. Discutiendo en esa forma no llegaremos a ninguna parte. Si me permiten yo daré el ejemplo que pide Pedro.

Y el profesor escribió en el pizarrón lo siguiente:

Hipótesis { *Todos los mexicanos son americanos.*
Todos los alumnos de este grupo son americanos.

Conclusión: *Todos los alumnos de este grupo son mexicanos.*

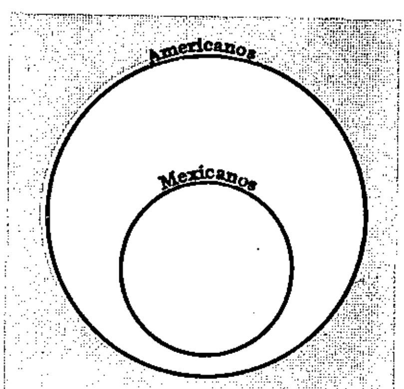
—¿Qué te parece esta inferencia, Pedro?

—La verdad, maestro, yo pienso que sí es válida porque todas las afirmaciones que hacemos en la hipótesis son ciertas y es cierta también la conclusión. ¿En dónde está lo malo?

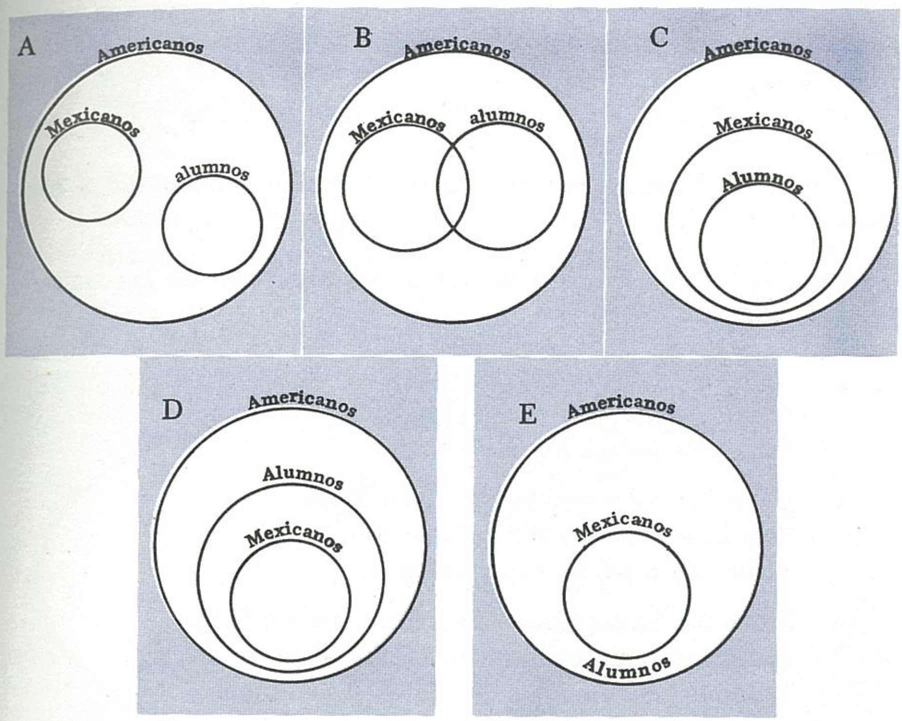
Sin contestar directamente el maestro prosiguió:

—Analicémosla como hicimos con el ejemplo anterior:

La afirmación "Todos los mexicanos son americanos" se puede representar así:



La segunda afirmación, "Todos los alumnos de este grupo son americanos", nos indica que el conjunto de los alumnos de este grupo es un subconjunto del conjunto de los americanos. Así que para ilustrarla podemos usar cualquiera de estos diagramas:



En los cinco diagramas vemos que "Todos los alumnos de este grupo son americanos". ¿Cuál de ellos es el bueno?

—Los cinco —contestó instantáneamente Emma.

—Así es —confirmó el maestro—. Por eso no estamos obligados a aceptar que la conclusión es: "Todos los alumnos de este grupo son mexicanos" (diagramas C y E) pues igualmente podríamos aceptar como conclusión que "Algunos alumnos del grupo son mexicanos" (diagrama B), o bien, que "Ningún alumno del grupo es mexicano" (diagrama A); o bien que "todos los mexicanos son alumnos de este grupo" (diagramas D y E). Por lo tanto, nuestra inferencia no es válida.

Pero, maestro —interrumpió Pedro—, si nosotros sabemos que todos los alumnos del grupo somos mexicanos...

—Es cierto —afirmó el maestro— nosotros sabemos eso; pero ese dato no aparece en la hipótesis. Cuando se razona en la forma en que lo hicimos, se acepta de antemano que los únicos datos que debemos manejar son los que proporciona la hipótesis y que solamente a partir de ellos es obligatorio aceptar la conclusión. En este caso podría ser cierto que "Todos los alumnos del grupo son mexicanos"; pero esa no es una conclusión que se deduzca de la hipótesis dada.

El maestro miró a sus alumnos por unos instantes y luego propuso:

—Para afirmar estas ideas haremos a continuación unos ejercicios.

Ejercicio 3. Ilustre con un diagrama cada una de las siguientes inferencias:

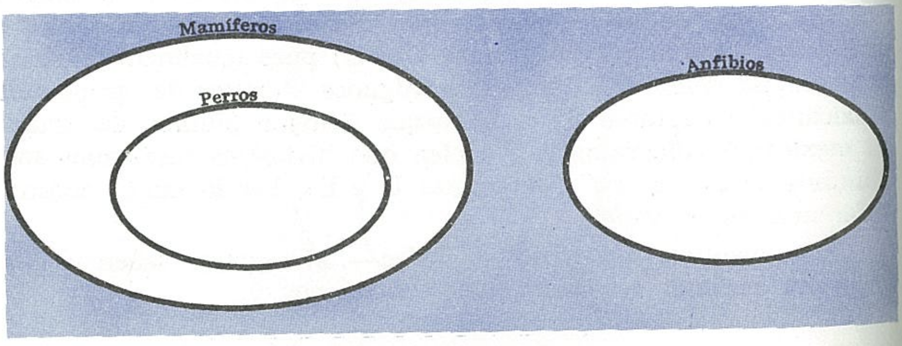
a) Todos los felinos son vertebrados.
Todos los leones son felinos.
Todos los leones son vertebrados.

b) Todos los jaliscienses son mexicanos.
Todos los tapatíos son jaliscienses.
Todos los tapatíos son mexicanos.

c) Todos los rectángulos son figuras geométricas.
Todos los cuadrados son rectángulos.
Todos los cuadrados son figuras geométricas.

d) Ningún mamífero es anfibio.
Todos los perros son mamíferos.
Ningún perro es anfibio.

Solución:

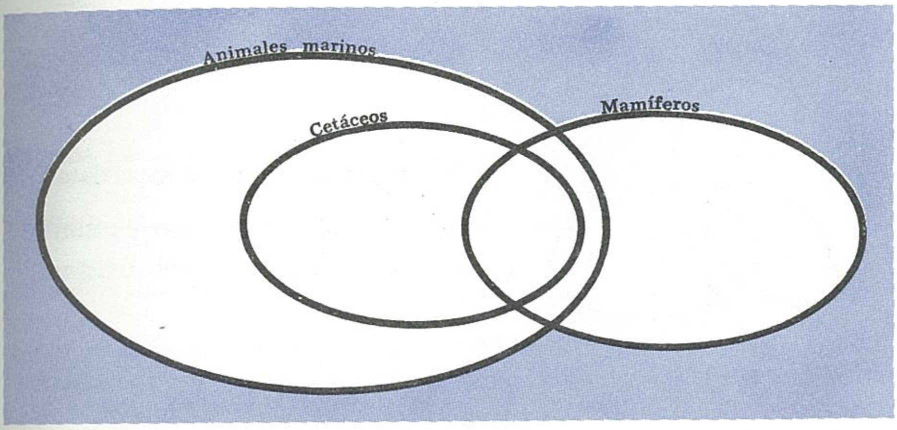


e) Ninguna ave es reptil.
Todos los pájaros son aves.
Ningún pájaro es reptil.

f) Ningún delincuente es bondadoso
Todos los ladrones son delincuentes.
Ningún ladrón es bondadoso.

g) Todos los cetáceos son animales marinos.
Algunos mamíferos son cetáceos.
Algunos mamíferos son animales marinos.

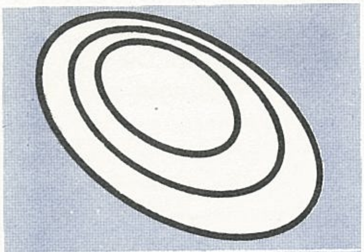
Solución:



h) Todos los mexicanos son americanos.
Algunos científicos son mexicanos.
Algunos científicos son americanos.

i) Todos los científicos son inteligentes.
Algunos graduados universitarios son científicos.
Algunos graduados universitarios son inteligentes.

Ejercicio 4. A continuación se dan algunas inferencias y su correspondiente diagrama. Escriba en cada diagrama los nombres de los conjuntos.

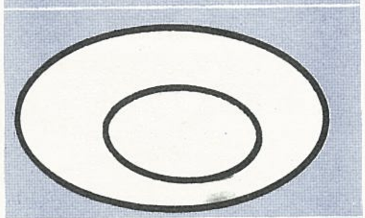


a)

Todos los números enteros son racionales.

Todos los números naturales son enteros.

Todos los números naturales son racionales.

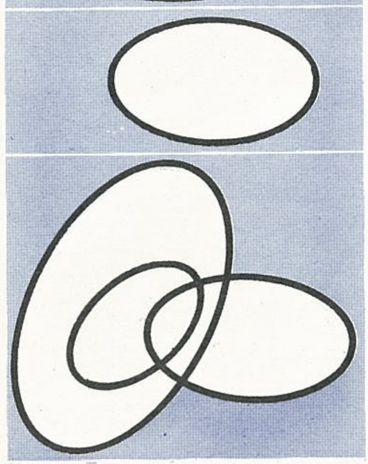


b)

Ningún mexicano es guatemalteco.

Todos los chiapanecos son mexicanos.

Ningún chiapaneco es guatemalteco.



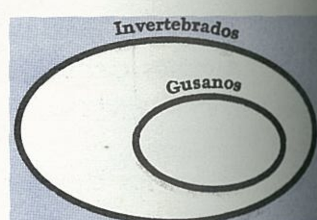
c)

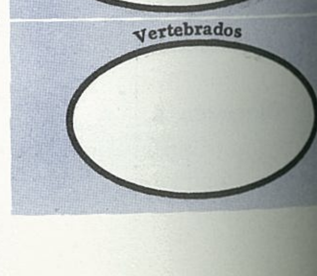
Todos los cantantes son artistas.

Algunos estudiantes son cantantes.

Algunos estudiantes son artistas.

Ejercicio 5. Complete cada razonamiento de acuerdo con el diagrama que lo ilustra.





a) Ningún ______________ es ______________.

Todos los ______________ son ______________.

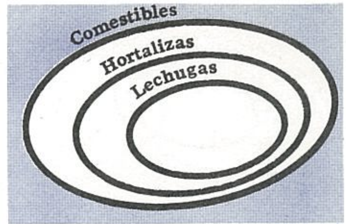
Ningún ______________ es ______________.

b)

Todas las ________ son ________.

Todas las ________ son ________.

Todas las ________ *son* ________.

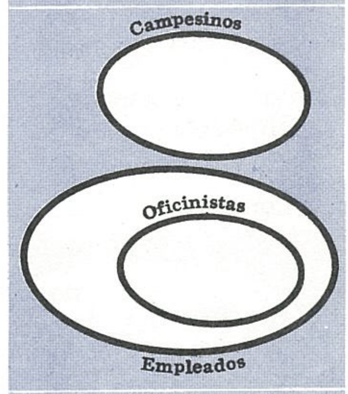


c)

Ningún ________ es ________.

Todos los ________ son ________.

Ningún ________ *es* ________.

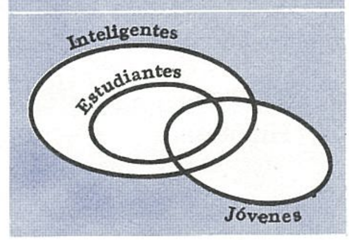


d)

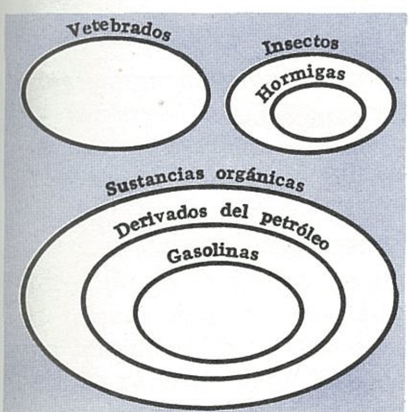
Todos los ________ son ________.

Algunos ________ son ________.

Algunos ________ *son* ________.



Ejercicio 6. Relacione, por medio de una raya, cada inferencia con su correspondiente diagrama. Después complete las deducciones.

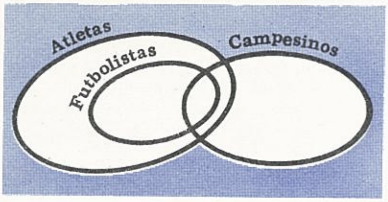


a)

Todos los ________ son ________.

Algunos ________ son ________

Algunos ________ *son* ________.



Todos los ______ son ______.

Todas las ______ son ______.

Todas las ______ *son* ______,

Ejercicio 7. Haga un diagrama que ilustre cada hipótesis y luego escriba la conclusión.

a) Hipótesis
- Todos los polígonos son figuras geométricas
- Todos los pentágonos son polígonos

Conclusión: ______

b) Hipótesis
- Todos los gases nobles son no-metales
- Algunas sustancias radiactivas son gases nobles

Conclusión: ______

c) Hipótesis
- Ningún animal es inmortal
- Todos los seres humanos son animales

Conclusión: ______

d) Hipótesis
- Todos los campesinos son trabajadores
- Algunos estudiantes son campesinos

Conclusión: ______

e) Hipótesis
- Ningún legislador es campesino
- Todos los diputados son legisladores

Conclusión: ______

f) Hipótesis
- Todo Z es Q
- Todo N es Z

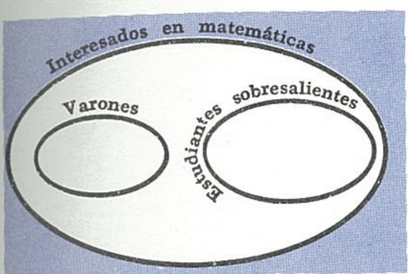
Conclusión: ______

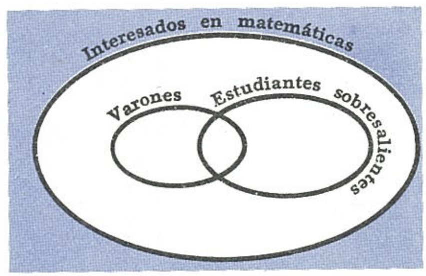
—Con estos conocimientos nos basta —dijo Emma, sonriendo burlonamente— para analizar el "razonamiento" de Pedro. ¿No es así, maestro?

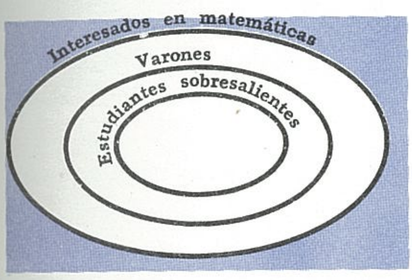
—Efectivamente, ahora están ustedes en posibilidad de decidir si la deducción que hizo Pedro es válida o no lo es. ¿Quién quiere hacer el análisis?

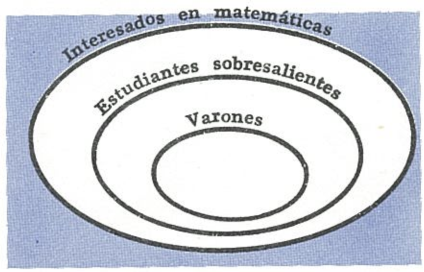
Emma casi salta de su asiento: "¡Yo! ¡Yo!, maestro". Y sin esperar la respuesta del profesor se dirigió al pizarrón.

—La hipótesis de Pedro es que todos los varones están interesados en Matemáticas y todos los estudiantes sobresalientes están interesados en Matemáticas. Esto puede ilustrarse con diferentes diagramas:









Cualquiera de estas situaciones está perfectamente de acuerdo con la hipótesis de Pedro y cada una de ellas nos lleva a una conclusión diferente... Así que no estamos obligados a aceptar la conclusión dada por Pedro y, por lo tanto, su inferencia no es válida.

Las últimas palabras de Emma resonaron con fuerza en los oídos de un Pedro que ya no se veía tan arrogante y tan seguro de sí mismo. Este pareció asimilar bien su derrota, pues con un tono de humildad dijo: "Tiene razón Emma. Yo me equivoqué al hacer así mi razonamiento. Pero de aquí en adelante, con lo que acabamos de estudiar, estoy seguro que ya no volveré a fallar".

Sin embargo, a la salida de la clase exclamó en tono resentido y un tanto retador:

—¿Por qué siempre las mujeres quieren tener la razón?

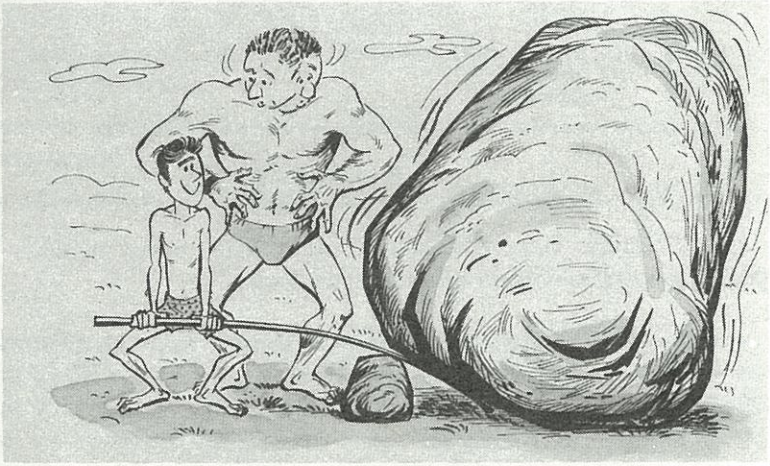
La respuesta de Emma no se hizo esperar, y fue de una contundencia tal, que Pedro ya no supo qué contestar.

—¡Machista! ¡Vámonos haciendo menos... menos "machos" y más lógicos, para ser mejores estudiantes!

CAPITULO SEGUNDO

ECUACIONES

1. ECUACIONES

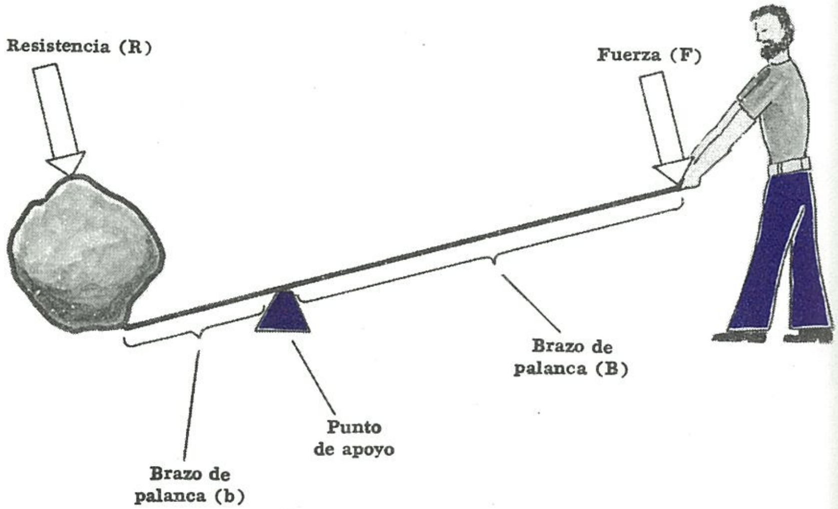


—¿Se fijó en eso, maestro? —preguntó Carolina entre incrédula y admirada— ¿Cómo es posible que ese hombre tan fuerte no haya podido mover la piedra y en cambio el otro, que se ve débil, la movió con tanta facilidad?

—Es que el primer hombre —explicó el maestro Ruiz— quiso aplicar su fuerza directamente a la piedra, mientras que el otro se la aplicó a través de una palanca.

—¿La palanca es esa barreta que usó?

—No exactamente, Pedro; la palanca es una barra rígida que se mueve alrededor de un punto de apoyo, para transmitir un movimiento. Miren ustedes este esquema:



$$R \cdot b = F \cdot B$$

—¿Y cómo funciona esa palanca para mover grandes pesos con poca fuerza? —Volvió a interrogar Pedro.

—Miren ustedes: Una palanca de este género se encuentra en equilibrio cuando el producto de la resistencia (R) por su brazo de palanca (b) es igual al producto de la fuerza (F) por su brazo de palanca (B)

"De manera que, por ejemplo, si la resistencia es de 90 kg y su brazo de palanca (b) es de 40 centímetros y el otro brazo de palanca

(B) es de 1.20 metros, entonces la palanca estará en equilibrio con una fuerza (F) de 30 kg, porque

$$R \cdot b = F \cdot B$$

$$(90)(.40) = (30)(1.20)$$

$$36 = 36.$$

En estas condiciones, basta con aumentar un poco la fuerza F para que se venza la resistencia. Esto es, la piedra se moverá cuando apliquemos una fuerza F que es un poco mayor de 30 kg".

—Entonces, ¿hasta yo podría mover esa piedrota, maestro? —preguntó Carolina, visiblemente impresionada.

—¡Claro que sí! ¿Quieres intentarlo?

—¡Un momento! ¡Un momento! —gritó Pedro—. Antes que Carolina nos demuestre su "poderosa" fuerza, me gustaría saber ¿qué ocurre si se *reduce* el brazo de palanca B?

—Pues entonces —contestó José Luis— tendrás que *aumentar* la fuerza F para lograr el equilibrio.

—¿Es cierto eso, maestro?

—Sí, Pedro. Por ejemplo, suponte que en las mismas condiciones que hemos señalado, tomas un brazo de palanca B igual a .80 metros. ¿Cuál es entonces la fuerza F que debes aplicar para que el sistema se equilibre? ¿Y qué fuerza tienes que aplicar para mover la piedra? Pedro meditó un momento y luego se dio por vencido: "No sé cómo resolver el problema, maestro".

—¡Es fácil! —Saltó Emma—. Todo lo que tienes que hacer es plantear una *ecuación*.

—Muy bien pensado Emma —aprobó el maestro—; pero dinos: ¿qué es una ecuación?

—*Una ecuación es una expresión de igualdad en la cual se desconoce un dato.*

—Sí —dijo Pedro—; pero, ¿cómo puedo plantear aquí una ecuación?

—Usa los datos que tienes —apuntó Carolina—. Mira: Ya sabemos que R por b es igual a F por B. Como en este caso, R = 90 kg b = .40 m, B = .80 m y F es el dato que buscamos, o sea, la *incógnita*, entonces podemos escribir la ecuación así:

$$(90)(.40) = (F)(.80)$$

Ahora, para saber qué valor tiene F, sólo tienes que dividir los dos miembros de la ecuación entre .80

$$\frac{(90)(.40)}{.80} = \frac{(F)(.80)}{.80}$$

$$\frac{36}{.80} = F$$

$$45 = F$$

—Ya tengo la respuesta, maestro: La fuerza que equilibra el sistema es de 45 kilogramos. Y, por lo tanto, para mover la piedra necesito aplicar una fuerza mayor de 45 kilogramos.

—Muy bien, Pedro. ¿Ya te fijaste que al reducir el brazo de palanca B fue necesario aumentar la fuerza F?

—Sí, maestro.

—¿Y qué pasará si aumentamos el brazo de palanca B?

—Entonces la fuerza F debe reducirse para que el sistema conserve su equilibrio —contestaron casi a coro todos los alumnos.

—Otra cosa: ¿Quién me puede decir por qué Pedro resolvió su ecuación dividiendo los dos miembros entre .80?

—Yo, maestro —Carolina se apresuró a contestar—: Pedro dividió entre .80 porque "*Si a los dos miembros de una ecuación se les divide o se les multiplica por un mismo número, se obtiene otra ecuación cuya solución es la misma que en la ecuación original*". Y, en este caso, al dividir entre .80 los dos miembros de la ecuación logró que la incógnita quedara sola en uno de dichos miembros. ¿Quiere usted —agregó con aire de suficiencia— que le dé algunos otros ejemplos de la aplicación de esta propiedad?

—No. —Contestó el maestro, complacido de que su alumna supiera tanto—. Mejor dinos qué otra propiedad se aplica en la resolución de ecuaciones, y después hacemos un ejercicio.

—La otra propiedad que utilizamos para resolver ecuaciones es la siguiente:

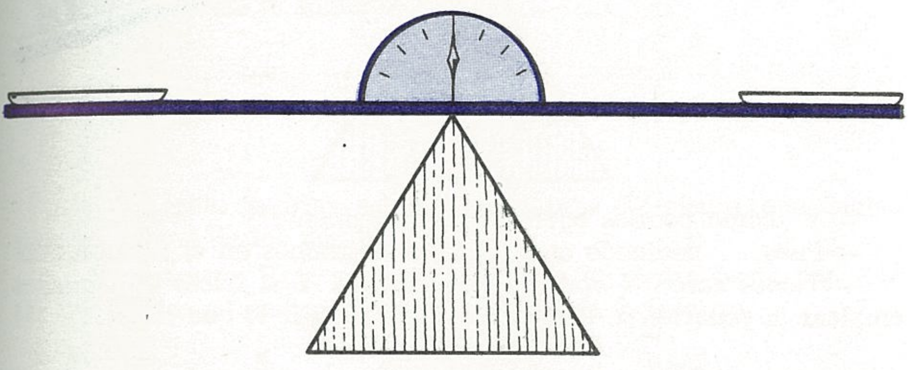
Si a los dos miembros de una ecuación se les suma o se les resta un mismo número, se obtiene otra ecuación cuya solución es la misma que en la ecuación original.

—Muy bien, Carolina. Se ve que has estudiado mucho las ecuaciones. ¿Quién quiere ahora —el maestro se dirigió a los demás estudiantes— dar algunos ejemplos de lo que acaba de mencionar su compañera?

Silencio completo. Nadie se atrevía a proporcionar los ejemplos pedidos.

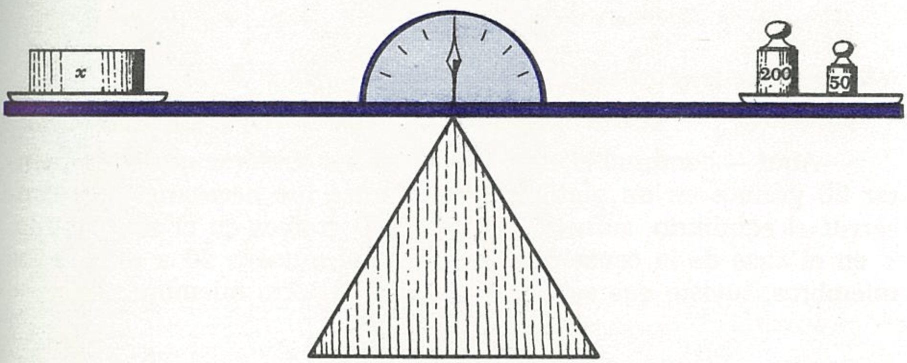
De pronto Joaquín Romo, un alumno de reciente ingreso al grupo, se levantó y dijo: "Yo no entiendo bien en qué consisten esas propiedades de las ecuaciones, maestro".

—Mira, Joaquín: Vamos a ilustrar esas propiedades usando esta balanza. A ver si así las puedes entender más rápidamente.



—¿Cómo, maestro?

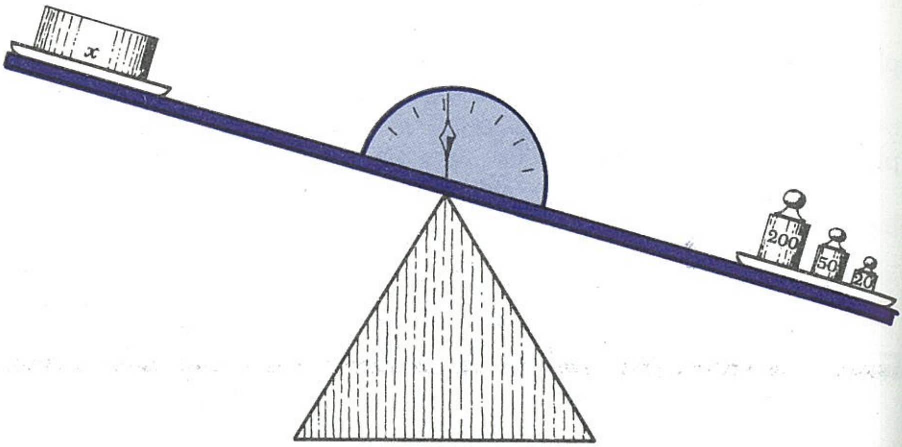
—Fíjate bien: Si ponemos un objeto x en uno de los platillos y varias pesas en el otro platillo, de tal modo que la balanza quede en equilibrio, podemos representar esto con una ecuación.



$$x = 250$$

—Ahora dime —preguntó el maestro—, ¿qué sucede si en uno de los platillos colocas una pesa de 20 gramos?

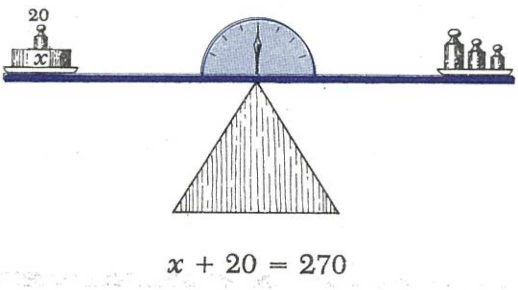
—La balanza se desequilibra, maestro.



—Y ¿cómo podrías equilibrarla nuevamente?

—Pues. . . poniendo otra pesa de 20 gramos en el otro platillo.

—Tienes razón —aprobó el maestro—. Y si haces eso, puedes emplear la ecuación $x + 20 = 270$ para indicar lo que hiciste.



$$x + 20 = 270$$

—Aquí —continuó el maestro— puedes observar que al aumentar 20 gramos en un platillo de la balanza fue necesario para conservar el equilibrio, aumentar también 20 gramos en el otro platillo. Y en el caso de la ecuación, si sumaste el número 20 a uno de los miembros, tuviste que sumar también 20 al otro miembro.

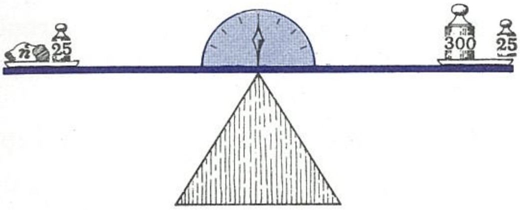
$$x = 250$$

$$x + 20 = 250 + 20$$

Observa que en estas dos ecuaciones el valor de x es el mismo.

—Sí, maestro. Ahora empiezo a comprender la propiedad.

—Bueno, observa ahora la balanza.



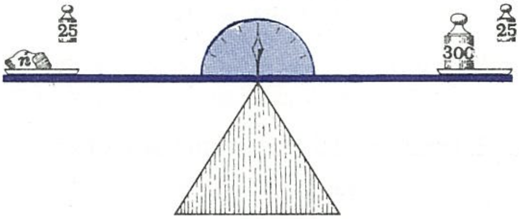
¿Qué ecuación te sugiere?

—Pues...

$$n + 25 = 325$$

—¿Con esto podrías saber cuánto pesa la piedra que hemos puesto en uno de los platillos?

—Sí, maestro. Para saber cuánto pesa la piedra basta con quitar 25 gramos en cada uno de los platillos de la balanza.



O bien, trabajando con la ecuación, lo que debemos hacer es restar el número 25 a sus dos miembros:

$$n + 25 = 325$$

$$n + 25 - 25 = 325 - 25$$

$$n = 300$$

Así encontramos que la piedra n pesa 300 gramos.

—Muy bien, Joaquín. Veo que ya entendiste esta propiedad. Ahora vamos a explicarte la otra propiedad.

—No, maestro, no es necesario, ya entendí muy bien. Ahora he comprendido que lo mismo que yo haga en uno de los miembros de la ecuación, debo hacerlo en el otro. Y eso me permite resolver ecuaciones.

—Me da mucho gusto que ya lo hayas comprendido; pero para estar completamente seguros, vamos a ver algunos ejemplos de resolución de ecuaciones.

Ejemplo. ¿Qué número representa x en la expresión $x + 13 = 45$?

Resolución. Restamos 13 a los dos miembros de la ecuación

$$x + 13 - 13 = 45 - 13$$

$$x = 32$$

Así encontramos que la x está representando al número 32.

Comprobación.

$$x + 13 = 45$$
$$\downarrow$$
$$32 + 13 = 45$$

Ejemplo. ¿Qué número expresa la n en la igualdad $n - 15 = 17$?

Resolución. Sumamos 15 a los dos miembros

$$n - 15 + 15 = 17 + 15$$

$$n = 32$$

Así vemos que la n representa al número 32.

Comprobación.

$$n - 15 = 17$$
$$\downarrow$$
$$32 - 15 = 17$$

Ejemplo. ¿Qué número es y en la expresión $\frac{y}{4} = 23$?

Resolución. Multiplicamos por 4 los dos miembros de la ecuación,

$$\frac{y}{4}(4) = 23(4)$$

$$y = 92$$

y encontramos que y es el número 92.

Comprobación.

$$\frac{y}{4} = 23$$

$$\frac{92}{4} = 23$$

Ejemplo. ¿Cuál es el valor de x en la ecuación $3x + 5 = 29$?

Resolución. Primero restamos 5 a los dos miembros

$$3x + 5 - 5 = 29 - 5$$

$$3x = 24$$

Después dividimos los dos miembros entre 3.

$$\frac{3x}{3} = \frac{24}{3}$$

$$x = 8$$

Así que el valor de x es 8.

Comprobación.

$$\begin{array}{c} 3x \quad + 5 = 29 \\ \downarrow \\ 3(8) + 5 = 29 \end{array}$$

Ejercicio. Resuelva las ecuaciones siguiendo las sugerencias que se anotan.

a) $x + 67 = 89$	Reste 67 a los dos miembros de la ecuación
b) $x - 38 = 23$	Sume 38 a los dos miembros
c) $43.6 + x = 89.2$	Reste 43.6 a los dos miembros
d) $52 = x + 17$	Reste 17 a los dos miembros
e) $17 = y - 39$	Sume 39 a los dos miembros
f) $3.9 = 5.8 - x$	Sume x y después reste 3.9 a los dos miembros
g) $t - \frac{3}{4} = \frac{5}{6}$	Sume $\frac{3}{4}$ a los dos miembros
h) $12.7 - r = 5.6$	Sume r y después reste 5.6 a los dos miembros
i) $\frac{17}{9} + z = \frac{14}{3}$	Reste $\frac{17}{9}$ a los dos miembros
j) $\frac{5}{2} - t = \frac{7}{4}$	Sume t y luego reste $\frac{7}{4}$ a los dos miembros

Ejercicio. Resuelva las ecuaciones considerando las sugerencias que se dan.

Ecuación	*Sugerencias*:
	A los dos miembros de la ecuación,
a) $3x + 9 = 24$	1. Résteles 9
	2. Divídalos entre 3
b) $5a + 17 \doteq 37$	1. Résteles 17
	2. Divídalos entre 5
c) $32 + 8y = 44$	1. Résteles 32
	2. Divídalos entre 8
d) $4x - 23 = 9$	1. Súmeles 23
	2. Divídalos entre 4
e) $75 - 6a = 27$	1. Súmeles $6a$
	2. Résteles 27

3. Divídalos entre 6

f) $2.5 = 4.6 - 7w$

1. Súmeles $7w$
2. Résteles 2.5
3. Divídalos entre 7

g) $20.4 = 3.5x + 12.35$

1. Résteles 12.35
2. Divídalos entre 3.5

h) $\frac{3}{4}y + \frac{7}{8} = \frac{22}{8}$

1. Résteles $\frac{7}{8}$
2. Multiplíquelos por $\frac{4}{3}$ (que es el inverso multiplicativo de $\frac{3}{4}$)

i) $6x - \frac{17}{5} = 7$

1. Súmeles $\frac{17}{5}$
2. Divídalos entre 6

j) $\frac{2}{9} = \frac{7}{9}w - \frac{4}{3}$

1. Súmeles $\frac{4}{3}$
2. Divídalos entre $\frac{7}{9}$

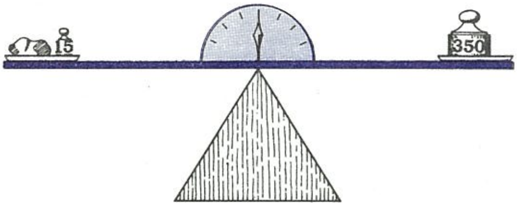
   o multiplíquelos por $\frac{9}{7}$

PROBLEMAS

Los problemas que se anotan a continuación pueden resolverse siguiendo distintos métodos. Pero se sugiere el empleo de las ecuaciones en su resolución, a fin de ejercitarse en la aplicación de este método.

Conviene observar primero, en cada problema, cuáles datos se conocen, qué dato se busca y en qué forma están relacionados unos con otros. Después, por medio de una ecuación, se indica la relación que hay entre los datos y posteriormente, con la solución de la ecuación, se da la respuesta al problema.

1. Se desea conocer el peso de un trozo de hierro (Fe). Para ello se coloca en uno de los platillos de una balanza junto con una pesa de 15 gramos. Si la balanza se equilibra colocando en el otro platillo una pesa de 350 gramos, ¿cuál es el peso del trozo de metal?



Resolución. El problema nos sugiere la ecuación

$$x + 15 = 350$$

la cual podemos resolver restando 15 a sus dos miembros,

$$x + 15 - 15 = 350 - 15$$

$$x = 335$$

Respuesta. El peso del trozo de hierro es de 335 gramos.

Comprobación.

$$x + 15 = 350$$

$$\downarrow$$

$$335 + 15 = 350$$

2. En uno de los platillos de una balanza se coloca una bolsa con bicarbonato de sodio ($NaCO_3$) y en el otro platillo se coloca una pesa de 200 gramos. Sin embargo, para que la balanza quede en equilibrio es necesario quitar 27 gramos de la bolsa. ¿Cuál es el peso de la sustancia que contenía inicialmente dicha bolsa?

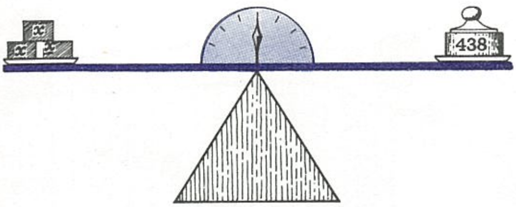
Resolución. El problema sugiere la ecuación $x -$ ____ $= 200$.

La solución de esta ecuación se encuentra sumando ____ a los dos miembros.

La solución es $x =$ ____ .

Respuesta. *En la bolsa había* ____ *gramos* de bicarbonato de sodio.

3. En uno de los platillos de una balanza se colocan 3 frascos con mercurio (Hg).



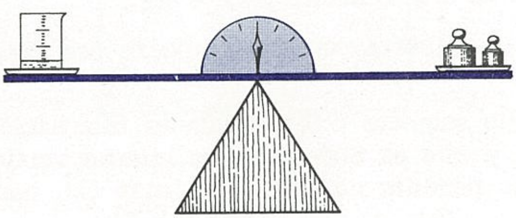
Si cada frasco vacío pesa 15 gramos y la balanza se equilibró colocando en el otro platillo pesas de 438 gramos, ¿cuánto pesa el mercurio que hay en cada frasco?

Resolución. El problema sugiere la ecuación $3x + 45 = \square$.

La solución de esta ecuación se encuentra restando primero $\square$ a sus dos miembros y después dividiendo entre $\square$ ambos miembros.
La solución es $x = \square$.

Respuesta. El mercurio de cada frasco pesa $\square$ gramos.

4. Una probeta que contiene ácido sulfúrico (H_2SO_4) hasta la cuarta parte, pesa 104 gramos. Si la probeta vacía pesa 28 gramos, ¿cuánto pesará el ácido sulfúrico de la probeta llena?



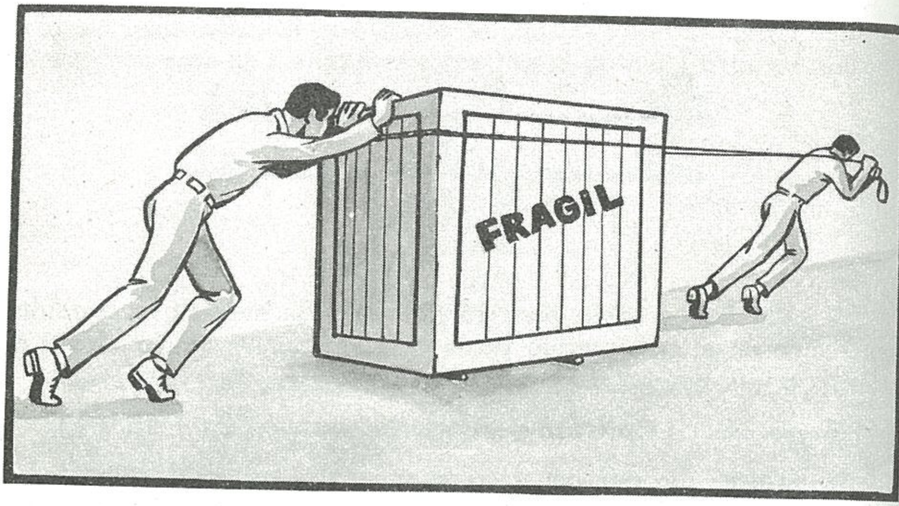
Resolución. El problema sugiere la ecuación

$$\frac{x}{\square} + 28 = \square$$

La solución de la ecuación se encuentra primero restando $\square$ a sus dos miembros y después multiplicándolos por $\square$
La solución es $x = \square$.

Respuesta. En la probeta llena habrá $\square$ gramos de ácido sulfúrico.

5. Para mover una caja se necesitan 100 kg de fuerza.



Si una persona la empuja con una fuerza x y otra persona la jala con una fuerza que es 14 kg menor que el doble de x ¿cuál es esa fuerza x?

Resolución. El problema sugiere la ecuación

$$x + (2x - 14) = \square$$

La solución de esta ecuación es $x = \square$.

Respuesta. La fuerza con que empujan esa caja es de $\square$ kilogramos.

6. Un adulto requiere 5 000 unidades internacionales de vitamina A al día y esto es 500 unidades internacionales más que el triple de lo que necesita un bebé. ¿Cuántas U.I. necesita un bebé diariamente?

Resolución. Sea x el número de U.I. que necesita un bebé al día.
El triple de esto es $\square$.
El triple de x más 500 es $\square$.
Esto es igual a lo que requiere un adulto. Por tanto, la ecuación es $\square$.
La solución de esta ecuación es $x = \square$.
Entonces, un bebé necesita $\square$ U.I. de vitamina A diariamente.

7. Un hombre adulto necesita 65 gramos de proteína al día. Si a los 11 años necesita 25 gramos menos que el doble de la que

necesita de adulto, ¿cuántos gramos de proteína necesita el hombre a los 11 años de edad?

Resolución. Sea x el requerimiento de proteína de un hombre a los 11 años de edad.

El doble de lo que necesita siendo adulto es $\square$.

El doble menos 25 es $\square$.

Por lo tanto, la ecuación es $x = \square$.

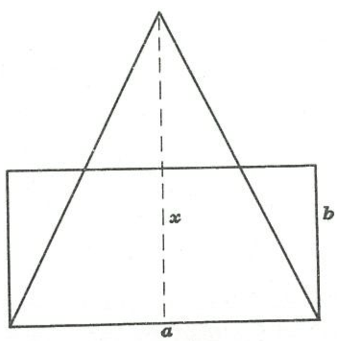
Así es que un hombre a los 11 años de edad necesita $\square$ gramos de proteína al día.

8. Un rectángulo mide a metros de base y b metros de altura. Si se desea construir un triángulo que tenga la misma base y la misma área, ¿cuánto medirá su altura?

Resolución. Sea x la altura de ese triángulo, si A_r es el área del rectángulo A_t el área del triángulo, entonces,

$$A_r = \square$$

$$A_t = \square$$



Por lo tanto, la ecuación será: $\square$.
En esta ecuación x es igual a $\square$.
De manera que la altura de ese triángulo deberá medir $\square$.

9. En 1972 el presupuesto de la Secretaría de Educación Pública (S.E.P.) fue de 1 413 millones de pesos más que el doble del presupuesto de 1965. Si en los dos años el presupuesto fue de 15 102 millones de pesos, ¿cuál fue el presupuesto de la S.E.P. en 1965 y en 1972?

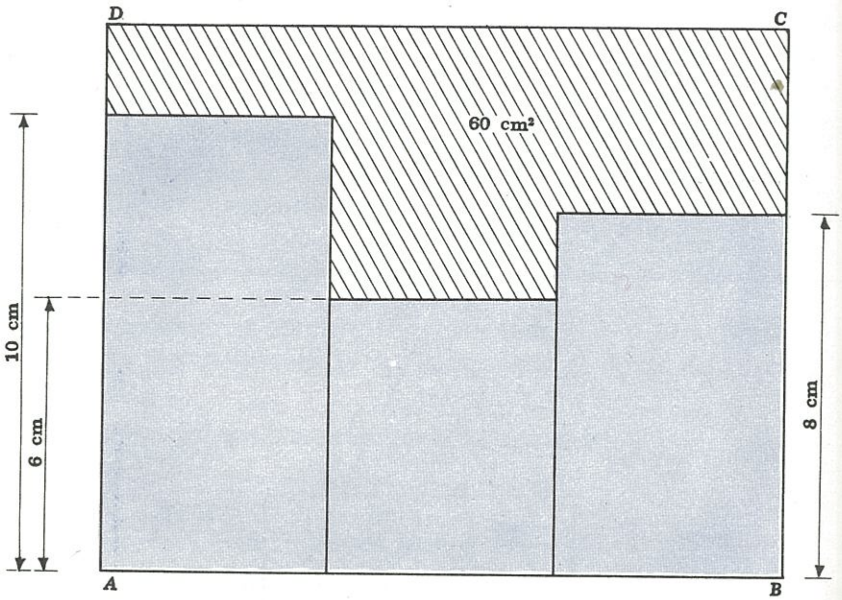
Resolución. Sea x el presupuesto de 1965.
El doble de este presupuesto es $\square$.
El doble más 1 413, o sea, el presupuesto de 1972, es $\square$.

Como el presupuesto de los dos años suma 15 102, la ecuación es

Resolviendo esta ecuación hallamos que $x =$.

Por consiguiente, el presupuesto en 1965 fue de y en 1972 fue de $2x + 1\,413$, o sea, millones de pesos.

10. En la siguiente figura los tres rectángulos tienen la misma base.



Si el área total del cuadrilátero *ABCD* es de 180 cm², ¿cuál es la medida de la base en cada uno de los rectángulos?

Resolución. Sea x la medida de la base de cada rectángulo. Entonces, el área de los tres rectángulos juntos es + + .

Considerando el área de la región sombreada podemos establecer la ecuación

$$\quad + \quad + \quad + 60 = \quad$$

Y resolviendo esta ecuación hallamos que $x =$.

Por lo tanto, la base de cada rectángulo mide centímetros.

11. Dos ángulos complementarios son aquellos cuya suma es 90. Si se tienen dos ángulos complementarios y uno de ellos es 18 grados mayor que el doble del otro, ¿cuánto mide cada uno?

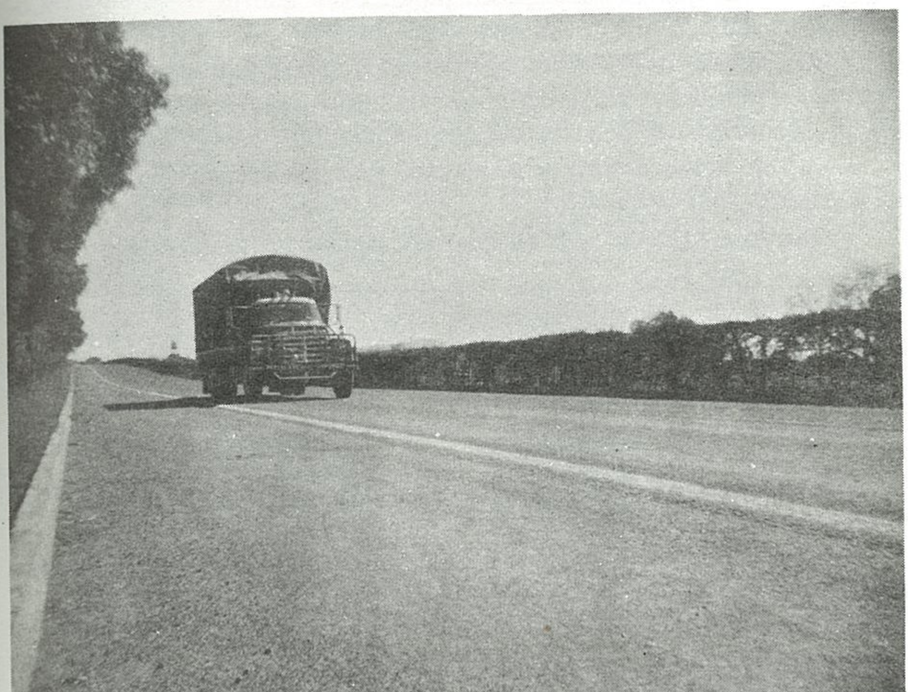
12. Dos ángulos suplementarios son aquellos cuya suma es 180. Si A y B son dos ángulos suplementarios y B es 20 grados mayor que el cuádruplo de A, ¿cuánto miden los dos ángulos?

13. Si se tiene una barra de 3 metros y se coloca un punto de apoyo a medio metro de una roca que pesa 75 kg, ¿qué fuerza debe aplicarse en el extremo de la barra para poder mover la roca?

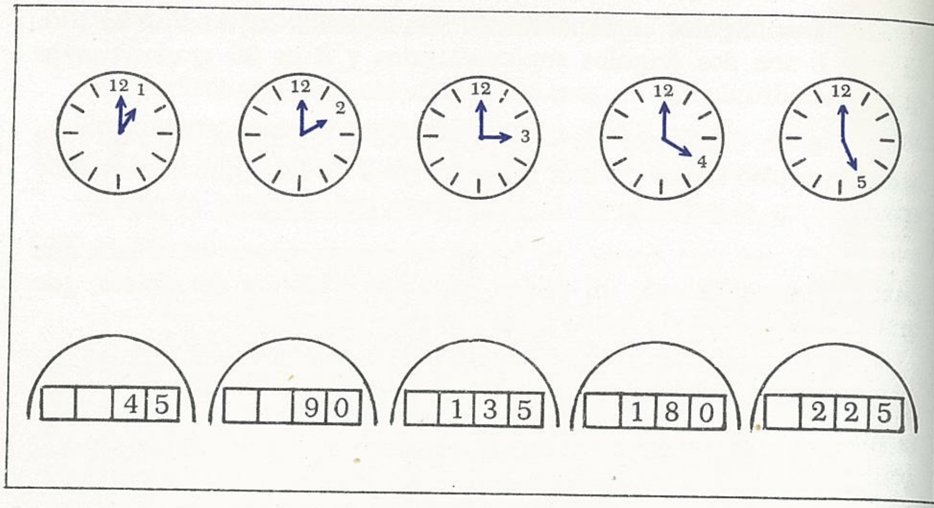
14. Si con una fuerza de 20 kg se quiere mover un objeto que pesa 100 kg, tomando un punto de apoyo a 80 cm del objeto, ¿de qué largo debe ser la barra para hacer la palanca?

15. Se levanta una carga de 114 kg con una fuerza de 24 kg. Si entre el punto de apoyo de la palanca y el punto donde se aplica la fuerza hay 1.5 metros más que entre el punto de apoyo y la carga, ¿cuál es la longitud de la barra que se está usando en esta palanca?

2. PROPORCIONES



—Ustedes ya saben —dijo Carolina a sus compañeros— que mi tío Nicolás maneja un camión carguero, ¿verdad?



—Sí —contestó Pedro—. El otro día lo ví cuando estaban descargando el maíz que le encargó mi papá. Creo que lo trajo desde Coyotepec el Alto. Pero. . . ¿A qué viene esto?

—Me acordé de él ahora que estamos estudiando razones y proporciones porque precisamente ese día que trajo el maíz me puso un problema sobre la velocidad de su camión.

—A ver, a ver —Emma se mostró muy interesada—. ¿Cuál fue el problema que te puso?

—Durante el viaje, mi tío hizo las siguientes anotaciones:

d	45	90	135	180	225
t	1	2	3	4	5

("En esta tabla, *d* es la distancia recorrida en kilómetros y *t* es el tiempo medido en horas".)

"Mi tío Nicolás me mostró su tabla de datos y me preguntó cuántos kilómetros había recorrido en 3 horas".

—¡135! —gritó José Luis.

—Efectivamente, eso mismo contesté yo. Luego mi tío me preguntó cuántas horas había tardado en recorrer 180 kilómetros.

—Tardó 4 horas, según se observa en la tabla —Dijo Emma en tono suave.

—Así es —confirmó Carolina—. También esa pregunta se la contesté bien; pero después ya no supe qué hacer cuando me preguntó cuál había sido su velocidad.

—Es fácil saber eso —dijo Emma—. Lo único que tienes que hacer es dividir la distancia entre el tiempo... y en esta tabla se ve algo curioso: todos los cocientes $\frac{d}{t}$ son iguales. O sea, que la velocidad con que manejó tu tío fue constante en todo el viaje.

d	45	90	135	180	225
t	1	2	3	4	5
$\frac{d}{t}$	45	45	45	45	45

—Por eso les decía que era un problema de razones y proporciones, pues al comparar la distancia y el tiempo por medio de una división, el cociente que obtenemos es una **razón**. O sea que la velocidad es una razón.

—Y además —agregó Emma—, puesto que todas las razones anotadas en la tabla son iguales, podemos establecer varias igualdades como

$$\frac{45}{1} = \frac{90}{2}, \text{ o bien } \frac{90}{2} = \frac{135}{3} \text{ o bien}$$

$$\frac{135}{3} = \frac{180}{4} \text{ o bien, } \frac{90}{2} = \frac{225}{5}, \text{ etc.}$$

—O sea —intervino Pedro— que podemos establecer *varias, proporciones*, pues cada una de esas igualdades que anotaste es una **proporción**.

—Y aún más —agrego José Luis—: Observemos que hay *proporcionalidad directa* entre la distancia que recorrió el señor Nicolás y el tiempo que empleó en recorrerla, pues en la tabla *todas las razones son iguales* y se ve que el "aumentar" la distancia también "aumenta" el tiempo; o bien, que si "disminuye" la distancia, también "disminuye" el tiempo.

—¡Los felicito, muchachos! —dijo el maestro Emilio, que se había acercado al grupo sin que ellos lo notaran—. Han hecho ustedes una buena discusión del problema. Analicen ahora la siguiente situación para ver si en ella hay proporcionalidad directa:

"En un laboratorio de fisiología se midió la cantidad de sangre que bombea el corazón de un hombre cuyo peso es de 70 kilogramos y se encontró lo siguiente:

s	15	35	50	75
t	3	7	10	15

"(s es el número de litros de sangre bombeada y t es el tiempo medido en minutos.)"

—De inmediato se ve que al aumentar s también va aumentando t.

—Buena observación, Pedro —aprobó el maestro—. Ahora anoten la razón $\frac{s}{t}$ que falta en cada columna de la tabla.

s	15	35	50	75
t	3	7	10	15
$\frac{s}{t}$				

"¿Son iguales todas las razones $\frac{s}{t}$ de esta tabla?"

"¿Existe proporcionalidad directa entre el número de litros bombeados y el número de minutos transcurridos?"

"¿Cuantos litros de sangre bombea el corazón de ese hombre en 1 minuto?"

Ejercicio. En virtud de que las razones $\frac{s}{t}$ son iguales en todas las columnas de la tabla, podemos plantear varias proporciones. Completen los datos que faltan en las siguientes:

a) $\dfrac{15}{3} = \dfrac{35}{\square}$ b) $\dfrac{35}{7} = \dfrac{\square}{10}$

c) $\dfrac{75}{\square} = \dfrac{35}{7}$ d) $\dfrac{15}{\square} = \dfrac{\square}{7}$

Considerando que hay proporcionalidad directa entre la cantidad de sangre bombeada y el tiempo transcurrido, podemos encontrar otros datos que no aparecen en la tabla. Por ejemplo, ¿cuántos litros de sangre bombea el corazón de ese hombre en 4 minutos?

—Yo le doy la respuesta, maestro —dijo entusiastamente Carolina— anotando en su cuaderno lo siguiente:

Solución. Puesto que todas las razones son iguales en la tabla, podemos establecer una proporción como

$$\frac{15}{3} = \frac{x}{4}$$

s	15	x	35
t	3	4	7

y para hallar el valor de x aplicamos lo que sabemos de ecuaciones:

$$\frac{15}{3} \cdot 4 = \frac{x}{4} \cdot 4$$

$$\frac{60}{3} = \frac{x}{4} \cdot 4$$

$$20 = x$$

Por lo tanto, el corazón de ese hombre bombea 20 litros de sangre en 4 minutos.

Problema. ¿Cuántos minutos deben transcurrir para que ese corazón bombee 30 litros de sangre?

—Permítame encontrar la respuesta, maestro —pidió Emma—, y luego anotó lo siguiente:

Solución. Para resolver este problema se puede plantear una proporción como

$$\frac{15}{3} = \frac{30}{x}$$

s	15	30	35
t	3	x	7

En esta proporción tenemos que $x = 6$ porque

$$\frac{15}{3} = \frac{30}{x}$$

$$5 = \frac{30}{x}$$

$$5 \cdot x = \frac{30}{x} \cdot x$$

$$\frac{5 \cdot x}{5} = \frac{30}{5}$$

$$x = 6$$

"Por consiguiente, para que ese corazón bombee 30 litros es necesario que transcurran 6 minutos."

Ejercicio. Considerando los datos de la tabla anterior, encuentre usted lo que se pide en cada inciso.

a) ¿Cuántos litros bombea el corazón en 8 minutos?
b) ¿Cuántos litros bombea en 17 minutos?
c) ¿Cuántos litros bombea en 30 minutos?
d) ¿Cuánto tarda el corazón en bombear 100 litros?
e) ¿En qué tiempo bombea 160 litros?
f) Cuánto tarda en bombear 12.5 litros?

Ejercicio. Aplique lo que sabe de ecuaciones para encontrar el número que se desconoce en cada proporción.

a) $\frac{x}{5} = \frac{9}{15}$ $x =$

b) $\frac{22}{y} = \frac{6}{21}$ $y =$

c) $\frac{40}{12} = \frac{30}{n}$ $n =$

d) $\frac{24}{10} = \frac{r}{35}$ $r =$

e) $\frac{x - 9}{6} = \frac{7}{5}$ $x =$

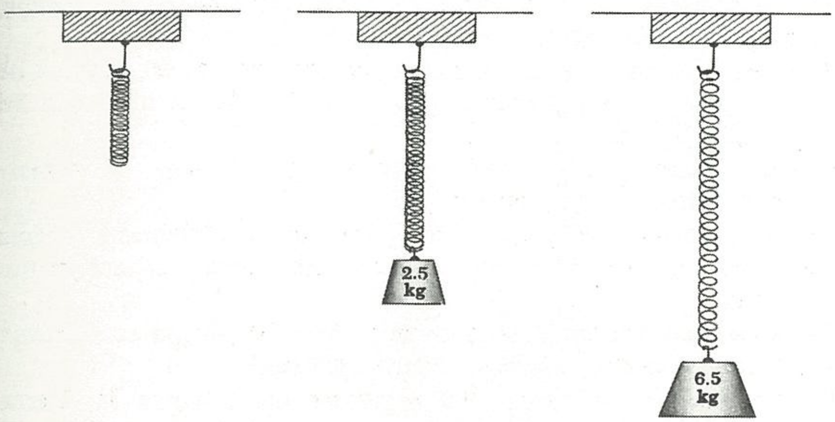
f) $\dfrac{18}{100} = \dfrac{x}{680}$ $\qquad x =$

g) $\dfrac{340}{x} = \dfrac{11.4}{100}$ $\qquad x =$

PROBLEMAS

Los siguientes son ejemplos de problemas que pueden plantearse y resolverse por medio de proporciones. En cada uno de ellos analice los datos, establezca la proporción correspondiente y, después de resolver tal proporción, dé la respuesta al problema.

1. Al aplicar una carga de 2.5 kg a un resorte, éste sufre un alargamiento de 5.2 cm. ¿Cuál será el alargamiento de ese mismo resorte si se le aplica una carga de 6.5 kg?



2. Un automóvil consume 35 litros de gasolina en un recorrido de 315 km. ¿Cuántos litros de gasolina consumirá el mismo automóvil en un recorrido de 558 km?

3. Un avión recorre 2 800 km en 3 horas y media. ¿Cuántos kilómetros recorrerá finalmente si permanece en vuelo todavía una hora y tres cuartos más? (Suponemos que durante todo el vuelo la velocidad es constante.)

4. En una fábrica hay 17 obreros que elaboran diariamente 544 piezas para ensamblar. Si se necesita aumentar la producción a 960 piezas al día, ¿cuántos obreros más deben contratarse para lograr ese propósito?

5. Una vela que mide 18 cm se prende a las 18:40 hs. Después, a las 18:55 hs., se vuelve a medir y se observa que mide 16.5 cm. Si conserva la misma velocidad de desgaste, ¿cuánto tiempo más podrá durar encendida esa vela?

6. Si F es una temperatura medida en grados Fahrenheit y C es la misma temperatura medida en grados centígrados, se tiene que

$$\frac{F - 32}{C} = \frac{9}{5}$$

De acuerdo con esto, ¿qué temperatura señalará el termómetro Fahrenheit cuando el termómetro centígrado marque 20 grados sobre cero?

Y si el termómetro Fahrenheit marca 104 grados sobre cero, ¿qué temperatura señalará el termómetro centígrado?

7. Se sabe que en 100 gramos de huevo están contenidos 11.3 gramos de proteína. Si un huevo pesa aproximadamente 60 gramos, ¿cuántos gramos de proteína proporcionan dos huevos?

8. Si en 4 litros de agua de mar están contenidos 90 gramos de cloruro de sodio (la sal común), ¿qué cantidad de sal habrá en 30 litros de agua de mar?

9. En 5 minutos los riñones filtran 625 mililitros de sangre. ¿Cuántos mililitros filtran en una hora?

10. Si al tomarle el pulso a un paciente, la enfermera cuenta 15 pulsaciones en 12 segundos, ¿cuántas pulsaciones deberá contar en un minuto?

11. Una máquina impresora imprime 24 000 pliegos en 6 horas. ¿En qué tiempo podrá imprimir 42 000 pliegos?

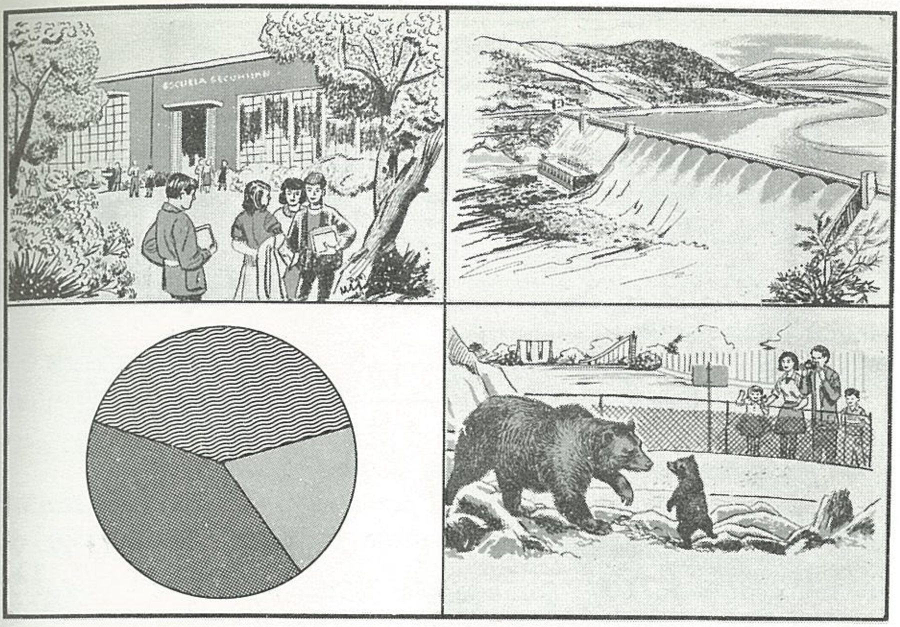
12. La luz del Sol tarda 500 segundos en llegar a la Tierra. ¿Cuántos segundos tardará en llegar a Marte, si sabemos que la distancia de la Tierra al Sol es de 150 millones de kilómetros y de la Tierra a Marte la distancia es de 74 millones de kilómetros?

3. TANTO POR CIENTO

—Maestro, ya me enteré que el 40 por ciento de lo que se gaste en las nuevas construcciones lo va a proporcionar el gobierno federal —dijo Pedro.

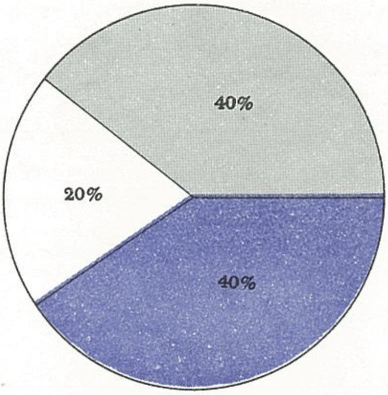
—¿Y quién da lo demás?

—Pues... otro 40% lo pondrá el gobierno del estado y el 20 restante lo tendremos que reunir los habitantes de Capultitlán.



—¿Qué significa eso, maestro? —preguntó tímidamente Julián.

—Significa —contestó el maestro— que de cada cien pesos que se gasten, el gobierno federal pondrá 40 pesos, el gobierno estatal, otros 40 pesos y el pueblo, los restantes 20.



—¿Y será mucho lo que tendrá que gastar el pueblo?

—Pues... depende del gasto total. Por ejemplo, si se gastaran cien mil pesos, el pueblo tendría que aportar solamente veinte mil pesos. Pero si se gastaran 100 millones, tendríamos que dar nosotros 20 millones. O bien, si se gastaran 60 mil pesos en total, únicamente tendríamos que juntar 12 mil.

—¿Cómo sabe que serían 12 mil en ese último caso, maestro? ¿No podrían ser 15 mil, por ejemplo?

—No, Ernesto, porque 12 mil es el 20% de 60 mil.

—Sí, pero, ¿cómo puedo yo estar seguro de que 12 mil es el 20% de 60 mil?

—En virtud de que 20% de 60 000 se interpreta como $\frac{20}{100}$ de 60 000, multiplicamos

$$\frac{20}{100} \times 60\,000 = \frac{20 \times 60\,000}{100} = 12\,000$$

y así encontramos que 12 000 es el 20% de 60 000.

—Entonces, maestro, ¿el tanto por ciento es como una *razón*?

—Efectivamente, Ernesto. Un tanto por ciento es la razón de un número entre 100. Por ejemplo, 25% es $\frac{25}{100}$, 12% es $\frac{12}{100}$, 3.5% es $\frac{3.5}{100}$ etcétera. De tal manera que cuando decimos "el 25% de 40", estamos hablando de los "veinticinco centésimos de 40", o sea, $\frac{25}{100} \times 40 = \frac{1\,000}{100} = 10$. Por eso afirmamos que "el 25% de 40 es el número 10"

Para afianzar mejor esta idea, resuelvan todos los siguientes ejercicios:

Ejercicio. Exprese cada tanto por ciento como una razón.

a) 7% = $\frac{7}{100}$ b) 18% =

c) 35% = d) 95% =

e) 120% = f) 300% =

g) 2.5% = h) 50.3% =

Ejercicio. Exprese cada cociente en la notación de tanto por ciento.

a) $\frac{50}{100}$ = 50% b) $\frac{75}{100}$ =

c) $\frac{48}{100} =$ ▭ d) $\frac{130}{100} =$ ▭

e) $\frac{5.5}{100} =$ ▭ f) $\frac{200.8}{100} =$ ▭

g) $\frac{1}{2} =$ ▭ h) $\frac{1}{4} =$ ▭

i) $\frac{3}{4} =$ ▭ j) $\frac{3}{10} =$ ▭

Ejercicio. Encuentre el número que se pide en cada inciso, tal como se hace en a)

$$\frac{25}{100} \times 60 = \frac{25 \times 60}{100} = \frac{1\,500}{100} = 15$$

a) 25% de 60 b) 50% de 16

c) 10% de 150 d) 100% de 40

e) 100% de 13 f) 200% de 45

g) 150% de 60 h) .5% de 3 000

i) 2.5% de 400

—Observen una cosa —continuó el maestro cuando los alumnos terminaron el último ejercicio—: ustedes encontraron que 15 es el 25% de 60. ¿No es así?

—¡Sí, maestro! —gritaron a coro los alumnos.

—Sí ahora consideramos la razón $\frac{15}{60}$ vemos que es igual a la razón $\frac{25}{100}$. De manera que podemos establecer una proporción.

$$\frac{25}{100} = \frac{15}{60}$$

"Y lo mismo podemos hacer en todos los incisos de su ejercicio. Por ejemplo, sabemos que el 50% de 16 es 8. Entonces podemos escribir

$$\frac{50}{100} = \frac{8}{16}$$

"Ya que 15 es el 10% de 150, podemos escribir la proporción

$$\frac{10}{100} = \frac{15}{150}$$

Ejercicio. Tal como se ha hecho en estos ejemplos, escriba usted la proporción correspondiente a cada inciso del ejercicio anterior.

—Lo que hemos observado aquí —dijo el maestro— nos permitirá resolver problemas de tanto por ciento planteándolos por medio de proporciones. Veamos unos ejemplos.

Problema. Un banco ofrece el 4.5% anual de intereses en cuentas de ahorro. ¿Cuánto ganarán en un año $600.00 ahorrados en ese banco?

Solución. Se puede plantear la proporción

$$\frac{4.5}{100} = \frac{x}{600}$$

y así encontramos que $x = 27$. O sea, que 27 es el 4.5% de 600.

Por lo tanto, los $600.00 ganan $27.00 de interés en un año.

Problema. De un grupo de 50 alumnos, reprobaron 3. ¿Qué por ciento del grupo está reprobado?

Solución. Podemos plantear la proporción

$$\frac{x}{100} = \frac{3}{50}$$

Aquí vemos que $x = 6$. O sea, que 3 es el 6% de 50.

Por lo tanto, en ese grupo está reprobado el 6% de los alumnos.

Ejercicio. Escriba una proporción que sirva para resolver cada problema.

a) Una bicicleta cuesta $1 200.00, en abonos; pero si se compra al contado descuentan el 20%. ¿Cuánto ahorra una persona que la compra al contado?

$$\frac{\square}{\quad} = \frac{\square}{\quad}$$

b) El 21% de la atmósfera es oxígeno. ¿Cuántos metros cúbicos de oxígeno están contenidos en 30 metros cúbicos de aire?

$$\frac{\square}{\quad} = \frac{\square}{\quad}$$

c) Si el 11% del agua es hidrógeno, ¿cuántos litros de hidrógeno habrá en 60 litros de agua?

$$\frac{\square}{\quad} = \frac{\square}{\quad}$$

d) ¿Cuál es el 50% de 390?

$$\frac{\square}{\quad} = \frac{\square}{\quad}$$

e) ¿Qué tanto por ciento de 80 es el número 20?

$$\frac{\square}{\quad} = \frac{\square}{\quad}$$

f) Una propiedad está gravada con $500.00 de impuesto anual. Si se paga por anticipado, la Tesorería cobra sólo $475.00. ¿Qué tanto por ciento se ahorran las personas que pagan anticipadamente?

$$\frac{\square}{\quad} = \frac{\square}{\quad}$$

PROBLEMAS

Resuelva los siguientes problemas aplicando lo que sabe del tanto por ciento.

1. El 33% del pollo no es comestible porque son los huesos y las vísceras. Si un pollo entero pesa 1.400 kilogramos y cuesta $28.00, ¿cuánto cuesta el kilogramo de la parte comestible, o sea la carne maciza?

2. En la República Mexicana hay 44 millones de hectáreas cubiertas por árboles. Si la extensión territorial es de aproximadamente 2 000 000 de kilómetros cuadrados, ¿qué porcentaje del territorio nacional está cubierto por árboles?

3. Una molécula de sal común (Na Cl) está formada por un átomo de sodio (Na) y un átomo de cloro (Cl_2). Se ha determinado que el peso atómico del sodio es 23 y que el peso atómico del cloro es 35.5. Calcule usted qué porcentaje de la molécula de sal es sodio y cuántos gramos de sodio hay en 6 gramos de sal.

4. La superficie total de la Tierra es de aproximadamente 510 millones de km². Si la parte sólida abarca 149 millones de km², ¿qué porcentaje de la superficie terrestre está cubierta de agua?

5. El Estado de Quintana Roo ocupa el 2.1% de la extensión territorial de México. Si sabemos que la extensión territorial de la República Mexicana es aproximadamente de 2 000 000 de kilómetros cuadrados, ¿cuántos kilómetros cuadrados abarca el Estado de Quintana Roo?

6. La soldadura es una aleación formada por 66% de estaño y 34% de plomo. Si un soldador tiene 39.6 gramos de estaño, ¿cuántos gramos de plomo necesita comprar para fabricar soldadura? ¿Cuántos gramos de soldadura puede fabricar con ese material?

7. La atmósfera es una mezcla de gases. Los más abundantes son el nitrógeno (N_2) y el oxígeno (O_2). Si se sabe que el nitrógeno forma el 78% y el oxígeno el 21% de la atmósfera, ¿cuál será el volumen de oxígeno que hay en un salón de clase que mide 7.30 metros de largo, 6.90 metros de ancho y 2.80 metros de alto?

8. Uno de los desayunos que proporciona el I.N.P.I., está formado por ¼ de litro de leche, un bollo de 40 gramos y una palanqueta de 20 gramos. El contenido de proteínas de estos alimentos es el siguiente:

Leche	3.4 gramos
Bollo	9.0 gramos
Palanqueta	8.1 gramos

Si un niño de 11 años necesita 50 gramos de proteína al día, ¿qué porcentaje de su requerimiento proteico cubre con ese desayuno?

9. Si en 40 kilogramos de cincita hay 8 kilogramos de oxígeno, ¿qué por ciento de la cincita es oxígeno?

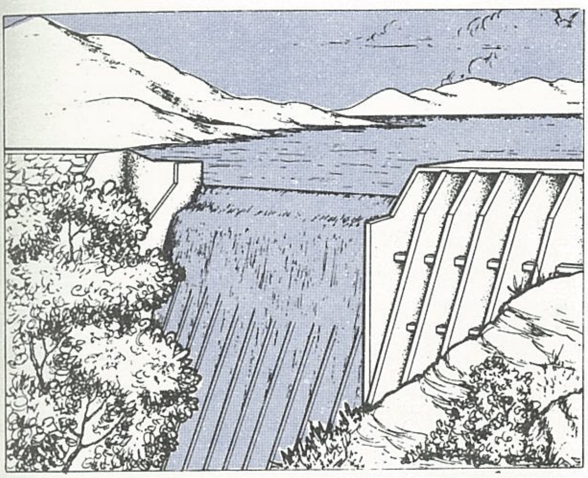
10. En un terreno de 300 metros cuadrados hay 90 metros cuadrados que tienen construcción. ¿Qué por ciento del terreno está construido?

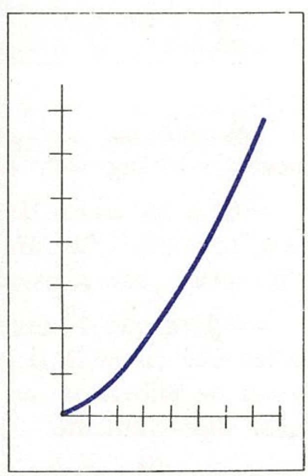
11. Para elaborar 50 kilogramos de cierta tela se emplean 17.5 kilogramos de algodón. ¿Qué por ciento de algodón contendrá esa tela?

CAPITULO TERCERO

FUNCIONES

1. TABLAS Y GRAFICAS





—Una presa no solamente sirve para almacenar agua —indicó el ingeniero López al maestro y sus alumnos— Yo, por ejemplo, soy ingeniero electricista y me ocupo de la parte de la presa con la que generamos electricidad.

¿¡Sacar electricidad del agua!? —preguntó sorprendido Julián.

—No exactamente, Julián —continuó el ingeniero—. Lo que hacemos es utilizar la gran energía que posee la corriente de agua para transformarla en energía eléctrica. Esto se logra por medio de unos aparatos especiales llamados generadores.

—Así es que en el pueblo nuevo tendremos mucha electricidad y, por lo tanto, mucho progreso —anotó animadamente Emma.

El maestro, que hasta ese momento no había entrado a la conversación, intervino diciendo: "El progreso de una comunidad se debe a muchos factores; pero tienes razón, Emma, la electrificación y el progreso siempre van de la mano. En nuestro país se está realizando un gran esfuerzo para hacer llegar ese fluido a todos los rincones de la República".

—Es verdad, profesor —ratificó el ingeniero—. Vean ustedes los datos de ese esfuerzo:

Años	1971	1972	1973	1974	1975	1976
Miles de millones de kilovatios	28	31	34	40	45	52

Los alumnos y el maestro se acercaron a ver la tabla que les mostraba el ingeniero López.

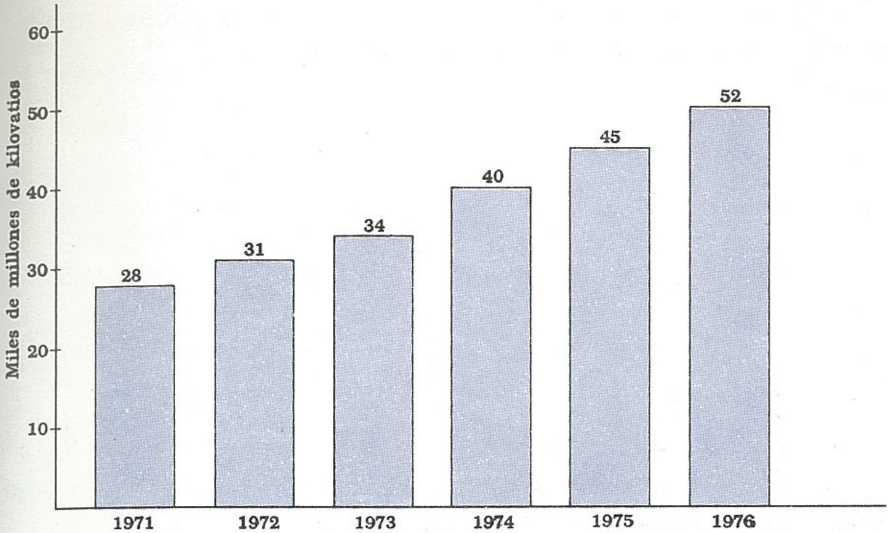
—Son los datos de producción de energía eléctrica en todo el país, tomados cada año a partir de 1971 —señaló el ingeniero—. Por cierto, ¿saben ustedes leer tablas de datos?

—Claro que sí, ingeniero —contestó Emma—. Aquí en la tabla se lee que en *1971* la producción de electricidad fue de *28 mil millones* de kilovatios; en *1972* fue de *31 mil millones* de kilovatios; y así sucesivamente.

—¡Bien, Emma! —exclamó el maestro—, pero, ¿podrías tú hacer una gráfica con los datos de esa tabla?

—Claro que sí, maestro.

La niña se puso a trabajar en su cuaderno y luego mostró el siguiente dibujo:

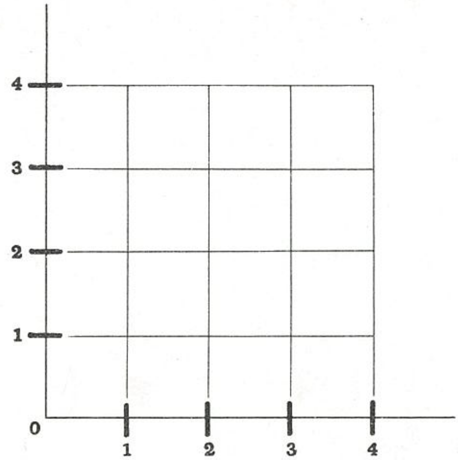


—Por medio de esta gráfica de barras —afirmó orgullosa Emma— podemos comparar fácilmente los datos proporcionados por la tabla.

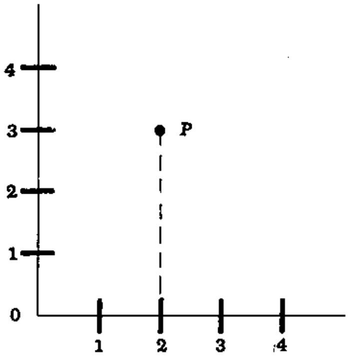
—Así es, en efecto. Ahora muchachos, ¿alguno de ustedes podría hacer una gráfica con los datos de esa misma tabla, pero usando un plano con ejes de coordenadas?

Los alumnos guardaron silencio y, ante esa actitud, el maestro los animó diciendo:

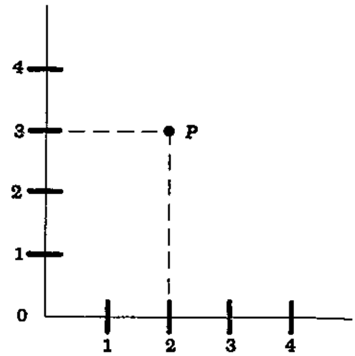
"Recordarán ustedes que en la Primaria aprendieron a localizar puntos en un plano usando dos ejes de coordenadas como éstos:



"Contando con estos ejes se puede distinguir cada punto del plano, como hacemos con *P* en el siguiente ejemplo:



El punto *P* tiene abscisa 2



El punto *P* tiene ordenada 3

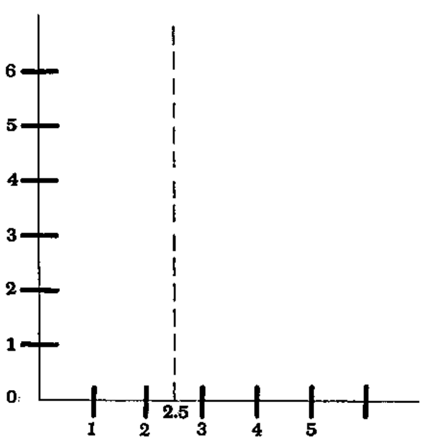
"Se dice que el punto *P* tiene abscisa 2 y ordenada 3 y esto se representa en símbolos así: $P = (2, 3)$.

"Utilizando este sistema se puede identificar cualquier punto por medio de 2 números (sus coordenadas) nombrados en cierto orden. Así podemos hablar indistintamente del punto *P* o del punto (2, 3).

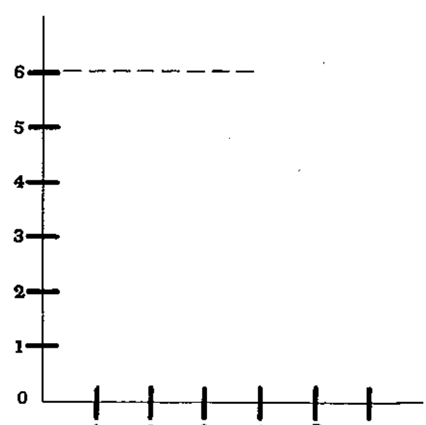
Para localizar un punto, si se conocen sus coordenadas, podemos proceder así:

"Supongamos que deseamos localizar un punto $Q = (2.5, 6)$:

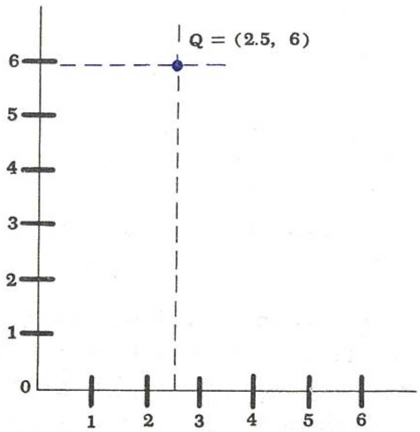
"El punto Q tiene abscisa 2.5; por consiguiente, estará en esta perpendicular negra.



"El punto Q tiene ordenada 6; por lo tanto, está también en esta perpendicular azul.

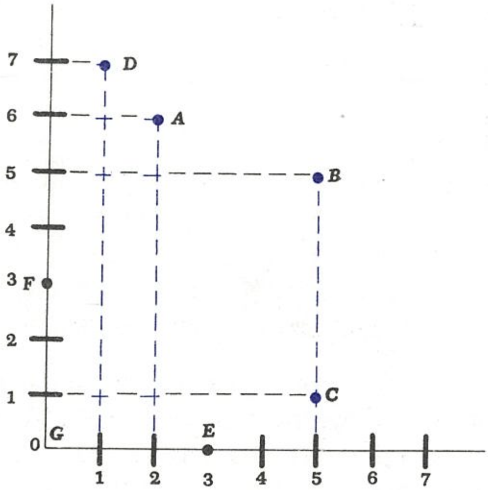


"El punto Q = (2.5, 6) es la intersección de esas dos perpendiculares; la que pasa por el punto de abscisa 2.5 y la que pasa por el punto de ordenada 6.



"Como esos conocimientos los aprendieron el año pasado, para repasarlos les sugiero que resuelvan los siguientes ejercicios:"

Ejercicio 1. Encuentre las coordenadas de los puntos *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G* y *H*.



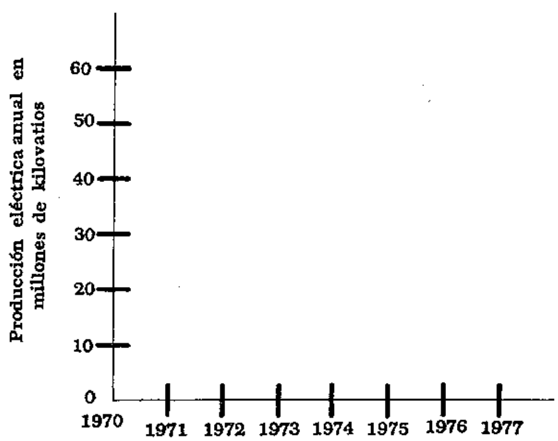
A = (,) *B* = (,) *C* = (,)
D = (,) *E* = (,) *F* = (,)
G = (,)

Ejercicio 2. En una hoja de papel milimétrico dibuje unos ejes de coordenadas y represente los siguientes puntos.

$H = (1.7, 3.6)$	$I = (2, 5.8)$
$J = (7.9, 6)$	$K = (1.2, 3.7)$
$L = (6.5, 6.5)$	$M = (2.3, 4.6)$
$N = (4.6, 2.3)$	$O = (5.5, 1.9)$

Después que los alumnos terminaron esos ejercicios, el maestro continuó:

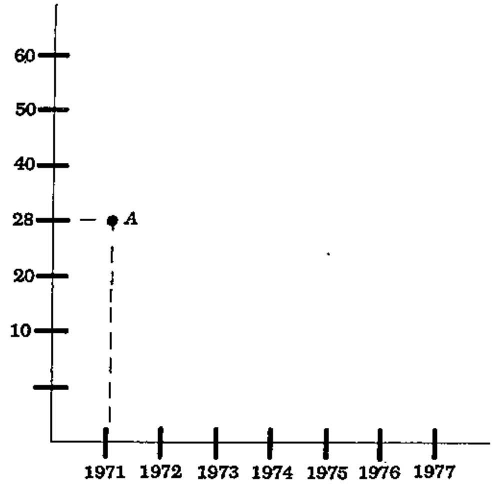
—Al leer Emma los datos de la tabla, lo hizo mencionando primero el año y luego la producción eléctrica correspondiente a ese año (1971, 28). Esto es, agrupó los datos en parejas ordenadas. Podemos entonces representar esas parejas por medio de puntos en un eje de coordenadas como el siguiente:



Diga usted, estimado lector, ¿son iguales las unidades empleadas en los dos ejes? ¿Empieza con cero el eje de las ordenadas? ¿Empieza con cero el eje de las abscisas? Señale una razón que justifique la elección de ejes que hizo al maestro Emilio.

El maestro prosiguió su explicación:

"La producción eléctrica de nuestro país en *1971*, se puede representar por medio de un punto de la siguiente manera:



¿Entendieron el proceso?"

Los alumnos contestaron que sí, que era muy fácil, y completaron el dibujo.

Ejercicio. Complete la gráfica anterior representando todos los datos de la tabla que se está discutiendo.

El ingeniero López había seguido con interés la charla de nuestros amigos y en un momento, al observar las gráficas dibujadas por ellos, exclamó:

—¡Muy bien, muchachos! La gráfica de esta función les quedó muy bonita.

Al oír la palabra "función", Emma se extrañó.

—¿Una función, ingeniero? Esa palabra es nueva para nosotros. ¿Qué cosa es una función? ¿Para qué sirve una función? ¿Cómo sabemos si. . .?

El grupo prorrumpió en una alegre carcajada ante el torrente de preguntas de Emma.

—¡Calma, calma, Emma! Son demasiadas preguntas para contestar de una sola vez —indicó entre risas el ingeniero—. Y además esas preguntas las responderá más adecuadamente tu profesor.

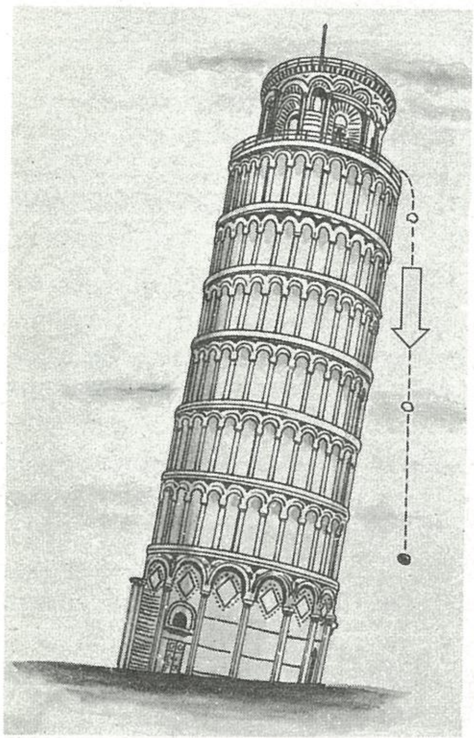
El maestro Emilio tomó entonces la palabra:

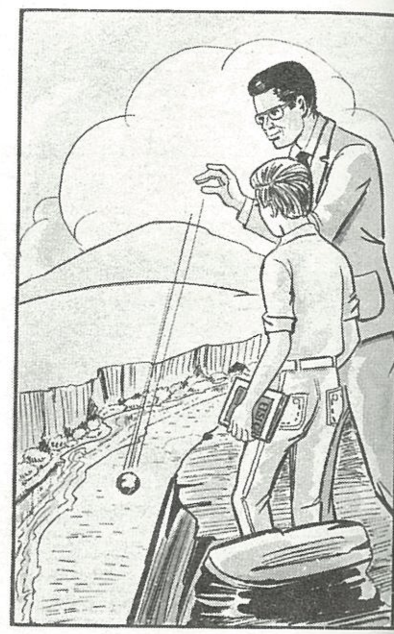
"Es cierto, muchachos, que hasta el momento no han usado ustedes la palabra *función;* pero les puedo asegurar que ustedes ya han manejado muchas funciones sin darles ese nombre. . . . La idea de función es una de las más importantes de las matemáticas y se usa al describir muchísimos fenómenos de la física, la química, la técnica, la industria, etc., etc.

"Sería muy fácil darles ahora una definición de función; pero prefiero, para que aprendan bien esta idea, darles a conocer varios ejemplos de funciones de modo que, al final, ustedes me puedan decir lo que es una función. Y esto lo haremos otro día. ¿De acuerdo?"

—¡De acuerdo, maestro! —aprobaron ruidosamente los alumnos.

LA CAIDA DE UNA PIEDRA





—¡Tengan cuidado de no acercarse mucho al borde! —advirtió el profesor Emilio a sus inquietos alumnos que, junto con él, habían subido hasta el borde de la hermosa cascada en que desparrama sus aguas el "Río Grande"—. ¡Ahora voy a plantearles un problema de Física! —gritó el maestro porque su voz casi se ahogaba ante el estrépito que las aguas producían en su caída—. Si yo suelto esta piedra que tengo en la mano, ¿cuáles serán los recorridos que efectuará al caer durante un segundo, dos segundos, tres segundos y cuatro segundos?

El profesor soltó la piedra y ésta cayó rápidamente acabando por desaparecer de la vista de todos.

Los alumnos hicieron algunas anotaciones y se retiraron, junto con el maestro, a un lugar más tranquilo y menos peligroso para discutir el problema.

—Oiga usted, profesor —inició la discusión Emma—, yo creo que no podemos resolver el problema, pues seguramente tendríamos que usar un reloj y un metro para medir los recorridos de la piedra en los segundos que usted nos pide. . . Además, pensándolo bien, ya no podemos resolverlo porque hemos perdido la piedra. Me imagino que una piedra pesada caerá más rápidamente que una piedra ligera. ¿No es así, maestro?

Sugerencia al lector: Tome usted dos piedras diferentes en peso y tamaño y suéltelas al mismo tiempo desde una altura determinada. ¿Cuál es la piedra que cae primero? Repita el experimento tomando otras alturas.

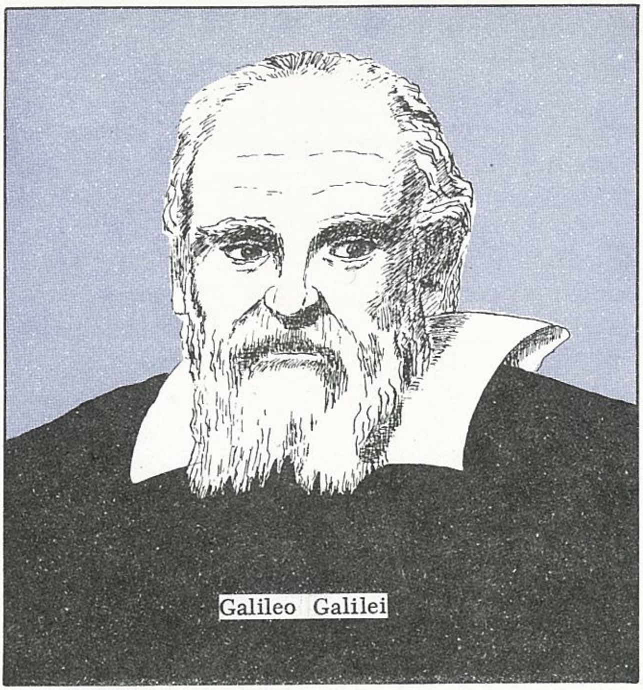
El profesor preguntó a sus alumnos qué pensaban al respecto, y todos coincidieron con Emma en sus apreciaciones. Entonces el maestro explicó lo siguiente:

"Yo creo que la mayoría de la gente piensa igual que Emma. Sin embargo, su razonamiento está equivocado.

"Hace muchos años, un joven italiano, Galileo Galilei, demostró que dos cuerpos cualesquiera cayendo libremente desde igual altura, llegan al piso al mismo tiempo ¡independientemente de su peso! Esto significa que los cuerpos en caída libre hacen recorridos iguales si se dejan caer desde el mismo lugar. Por lo tanto, con cualquier otra piedra podríamos repetir el experimento y obtener los datos que les pedí. Pero aún esto no es necesario, pues existe una ley, descubierta también por Galileo, que nos permite calcular las distancias recorridas por un cuerpo en un tiempo determinado. El genio de Galileo Galilei nos permite repetir el experimento y efectuar las medidas ¡usando nuestro cerebro!".

—Maestro —interrumpió José Luis—, ¿qué quiere decir eso de "los cuerpos en caída libre"?

—Se dice que un cuerpo —explicó el maestro— cae libremente cuando cae en el vacío. Es decir, cuando no hay nada, ni siquiera el aire, que obstaculice su caída. Tú mismo, José Luis, te encargarás de investigar con el maestro de Ciencias Naturales cuál es la ley de que estamos hablando. . . y en qué condiciones se cumple.



Galileo Galilei

—Ahora —continuó el maestro— les describiré con una tabla los recorridos de nuestra piedra (y de cualquier objeto). En ella, t significa el tiempo en segundos transcurridos desde que se soltó la piedra y d es la distancia, en metros, recorrida durante ese lapso.

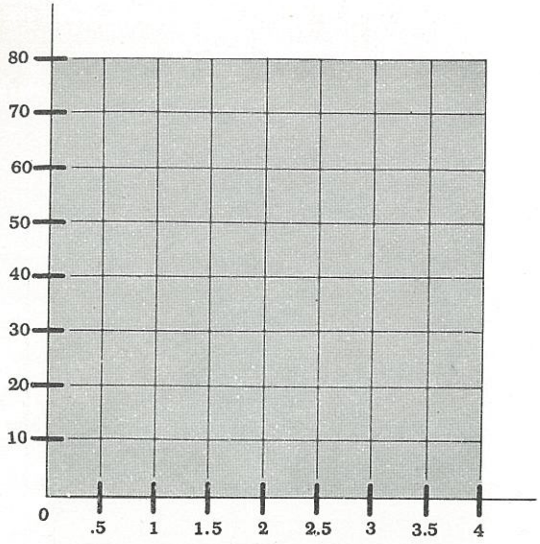
t	0	1	2	3	4
d	0	5	20	45	80

—Maestro —preguntó Pedro—, ¿esta tabla determina una función?

—Sí —fue la lacónica respuesta del maestro—. Ahora hagan una gráfica de esta función.

Ejercicio 3. Haga usted, amable lector, la gráfica pedida.

Teniendo esta gráfica, ¿cómo haría usted para calcular (aproximadamente) la distancia recorrida por la piedra a los 1 y medio segundos? Y ¿a los 2.5 segundos? Y ¿a los 3.5 segundos?



—Bueno muchachos —concluyó el maestro—, con la tabla y con la gráfica hemos determinado una función. Esta función nos ayuda a darnos una idea del recorrido que tiene un objeto al caer. Después vamos a ver otra función distinta.

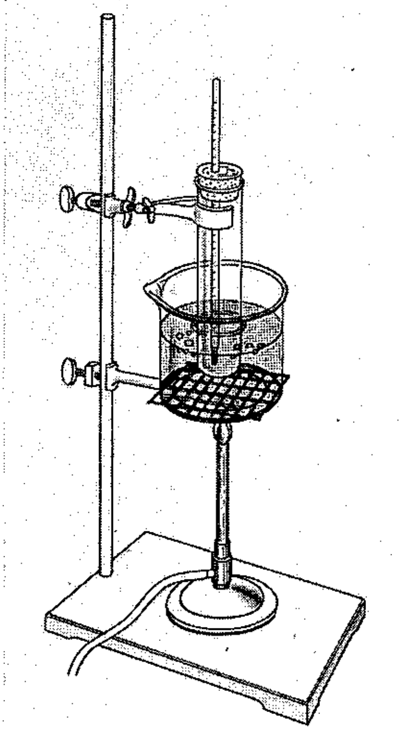
LA FUSION DE LA NAFTALINA

El profesor Emilio y sus alumnos se encontraban en su salón de clase y aquél exponía:

"El paso de un cuerpo del estado sólido al estado líquido se llama *fusión* y el paso de un cuerpo del estado líquido al sólido, *solidificación*. Para que el hielo empiece a derretirse, es decir, para que se funda es suficiente con sacarlo del refrigerador a la temperatura ambiente. Pero para fundir un pedazo de estaño o plomo hace falta ponerlo en una cuchara de hierro y calentarlo en una hornilla. Y para fundir el hierro, o cobre son necesarias altas temperaturas que sólo se logran con hornos especiales. Esto es, sustancias distintas se funden a diferentes temperaturas.

"Además, se ha establecido, experimentalmente, que los cuerpos cristalinos se funden a una temperatura determinada para cada sustancia. A esa temperatura en la cual ocurre la fusión se le llama *punto de fusión*.

"Les propongo un experimento: Determinen ustedes el punto de fusión de la naftalina."



—¿Naftalina? —exclamó dudosa Carolina.

—Es la sustancia que se usa para alejar la polilla de los trajes y libros. Se vende en cualquier farmacia o tlapalería. Para determinar su punto de fusión necesitaremos los siguientes aparatos:

Un tubo de ensayo grande (que podemos pedir prestado al maestro de Ciencias Naturales), un termómetro, una vasija con agua, algo para calentar el agua, un reloj, y, naturalmente, unas 10 bolas de naftalina que reduciremos a polvo previamente. Con este material podemos montar un "aparato" como el siguiente. (El maestro dibujó en el pizarrón un esquema como el que aparece en la ilustración inicial de este párrafo.)

Los alumnos salieron del salón y poco después volvieron y montaron su aparato.

—"Muy bien, jóvenes. Realizaremos ahora nuestro experimento" —indicó el maestro.

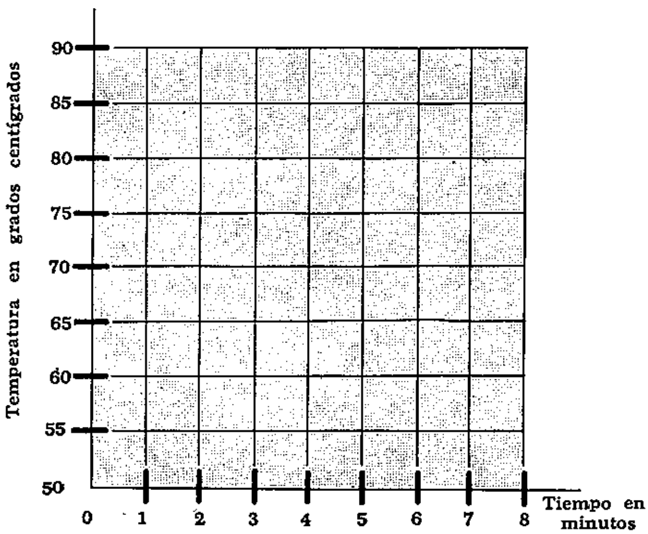
"Metan en el agua de la vasija (calentada con la fuente de calor) el tubo de ensayo con el polvo de naftalina y el termómetro sumergido en él.

"Cuando la naftalina se haya calentado 50°, empezarán a anotar la variación de su temperatura en los siguientes lapsos:

"Tú, Carolina, cada minuto; Pedro, cada medio minuto y, por último, Julián cada 15 segundos. ¿Entendieron?"

A coro, los alumnos contestaron que sí y de inmediato pusieron manos a la obra.

—Un momento, un momento —les interrumpió el maestro—; para anotar los datos que les pido háganlo llenando la siguiente gráfica. ¡Espero que no me vayan a preguntar cómo hacerlo!

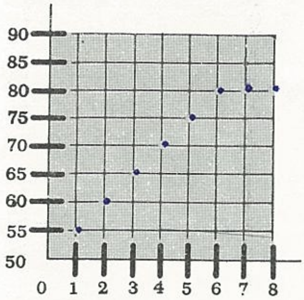


Sin ningún otro comentario, los alumnos empezaron a trabajar.

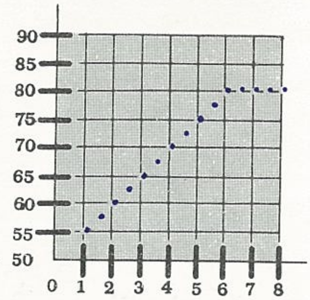
Amable lector: Es conveniente que usted realice el experimento descrito. Los útiles y el material para efectuarlo son fáciles de encontrar y el termómetro lo puede obtener prestado de su laboratorio de Ciencias Naturales. Llene además la gráfica de arriba.

Después de un corto periodo de tiempo los alumnos presentaron las siguientes gráficas.

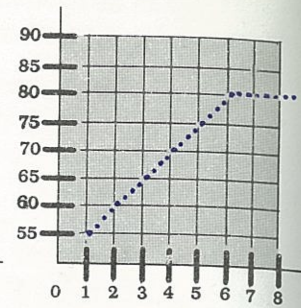
Ejercicio 4. Si no realizó el experimento, determine cuál fue la temperatura de fusión de la naftalina observando las gráficas. Le advertimos que cuando un cuerpo, al calentarse, pasa del estado sólido al estado líquido, conserva constante su temperatura durante un breve periodo de tiempo.



Carolina



Pedro

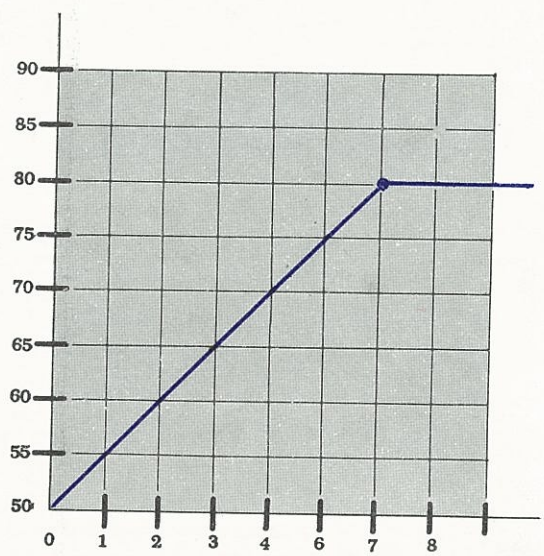


Julián

—Bueno, maestro —dijo Emma—, ya sabemos que la temperatura de fusión de la naftalina es de 80 grados centígrados. Pero, ¿por qué nos hizo construir 3 gráficas del fenómeno?

El maestro contestó:

—No es para hacerlos trabajar más, sino para que observen lo siguiente: Si yo les hubiera pedido que midieran la temperatura en lapsos cada vez más breves, ($\frac{1}{10}$ de minuto, 1 segundo, $\frac{1}{10}$ de segundo, etc.), su gráfica ¿no se parecería más a ésta?



Los alumnos coincidieron con la apreciación del profesor y éste continuó:

—Esta gráfica continua nos puede ser útil para obtener datos aproximados del experimento, sin efectuar una medición directa.

Ejercicio 5. Complete las siguientes afirmaciones.

a) La temperatura de la naftalina a los 3.1 minutos fue de ___ . a los 7.5 minutos fue de ___ a los .8 segundos fue de ___ . a los 4.9 segundos fue de ___ y a 2.6 segundos fue de ___ .

b) La naftalina alcanzó una temperatura de 73° a los ___ minutos, una temperatura de 58° a los ___ minutos, de 54° a los ___ minutos y de 53° a los ___ minutos.

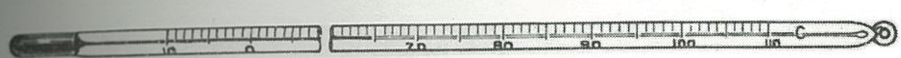
—¿Hemos obtenido nuevamente una función? —preguntó Pedro.

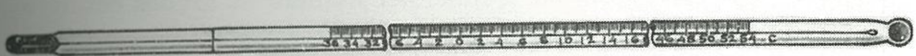
—Nuevamente obtuvimos una función —contestó el maestro—.

Esta vez la tenemos determinada por medio de una gráfica.

¿Podría usted, amigo lector, construir una tabla (como las que hasta aquí hemos usado) para describir esta función? ¿Por qué?

LA MEDICION DE LA TEMPERATURA



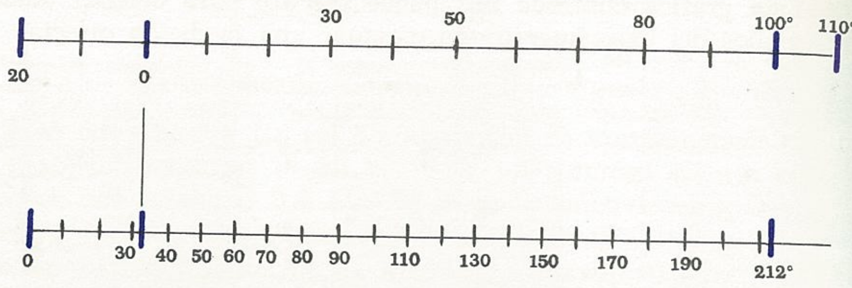


—He observado que al realizar su experimento con la naftalina usaron ustedes un termómetro con una escala centígrada y que no usaron el otro termómetro, el que tiene una escala Fahrenheit —indicó el maestro.

—Es que en nuestro país —contestó Carolina— se acostumbra medir la temperatura en grados centígrados, aunque yo sé que en otras partes se usan también en grados Fahrenheit.

—Exactamente, Carolina. En algunas partes del mundo es usual apreciar la temperatura en grados Fahrenheit. Por otro lado, es muy fácil convertir grados centígrados a grados Fahrenheit. Para ello se pueden usar las dos escalas que se ven en la Pág. 92.

Aquí observamos que 0° centígrados son equivalentes a 32° Fahrenheit. Para obtener cualquier equivalencia simplemente trazamos



rectas perpendiculares a las escalas. Realicen ahora el siguiente ejercicio.

Ejercicio 6. Convierta a grados Fahrenheit los siguientes grados centígrados, usando las dos escalas de arriba.

a) 100°	b) −20°	c) 20°	d) 40°
e) 60°	f) 70°	g) 80°	h) −10°
i) 25°	j) 45°	k) 95°	l) 5°

—Con estas dos escalas podemos encontrar el número de grados Fahrenheit que corresponden a cualquier número de grados centígrados comprendido entre −20 y 110 —dijo el maestro.

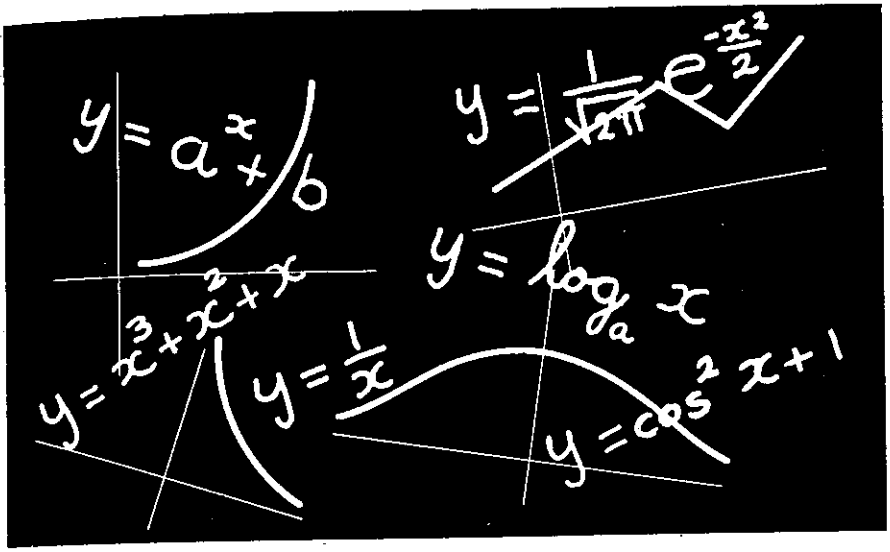
—Y, por lo tanto —exclamó zumbona Emma—, hemos determinado una función. ¿Verdad?

—Es cierto, también aquí tenemos una función —respondió divertido el maestro—. Creo que ya es tiempo de saber lo que es una función.

2. FUNCIONES

Hemos visto ya varios ejemplos de funciones descritas por medio de gráficas y tablas y creo que ya estamos en posibilidad de ver lo que es una función —dijo el maestro a sus alumnos—. Observen qué es lo que tienen en común las gráficas y tablas con que hemos estado trabajando y anótenlo por escrito.

Amigo lector: Intente usted realizar el trabajo que señala el maestro.



Los alumnos se pusieron a trabajar y al poco rato entregaron los siguientes escritos:

Carolina: En todos los ejemplos hay dos conjuntos de números.

Emma: En todos los casos se relacionan dos conjuntos de datos.

Julián: En esos ejemplos se relacionan todos los elementos de un conjunto de números en todos los elementos de otro conjunto de números.

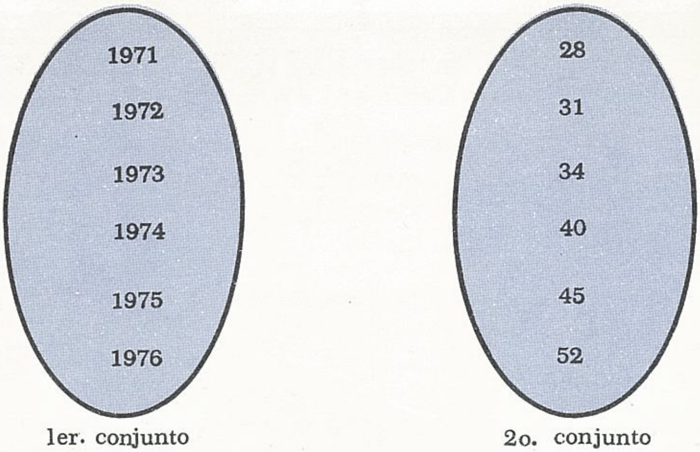
Pedro: Hay dos conjuntos de números. A cada elemento de un conjunto se le asocia un elemento del otro.

José Luis: Me gusta la idea de Pedro: Pero yo le agregaría que los conjuntos se consideran en cierto orden.

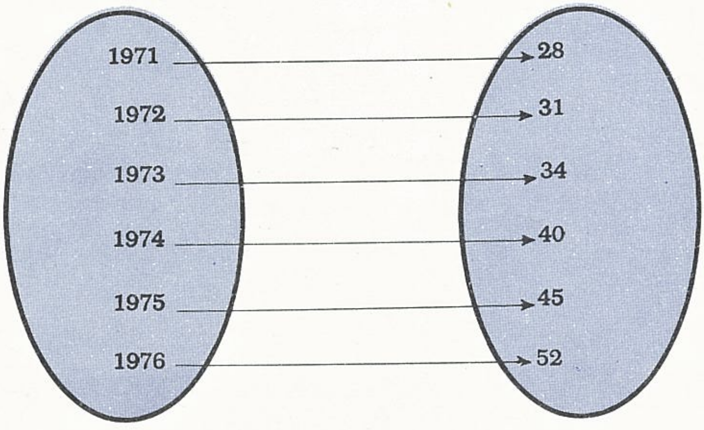
El maestro leyó cuidadosamente cada uno de los escritos y continuó:

Lo que han anotado ustedes está bien. Con eso podemos caracterizar una función:

1. Efectivamente, en una función tenemos *dos conjuntos* que consideramos *en cierto orden*. Por ejemplo, en el caso de la producción eléctrica, el primer conjunto es el de fechas y el segundo es el de los datos de producción.



2. También es cierto que los elementos del primer conjunto se relacionan con los elementos del segundo conjunto.



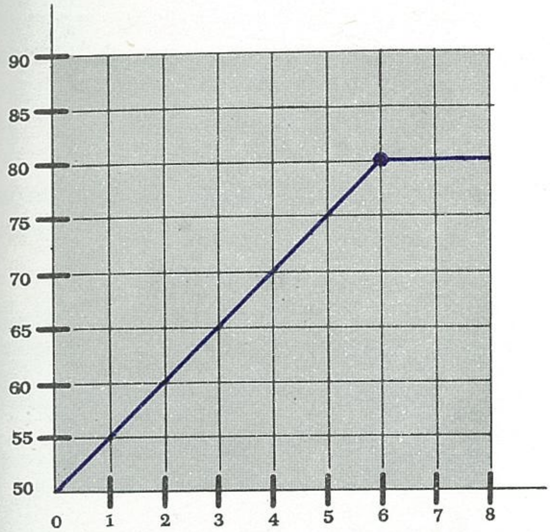
3. Pero esta relación es muy especial. Observen ustedes que cada elemento del primer conjunto se relaciona con uno y sólo uno (no con dos, ni con tres) del segundo conjunto.

Estas características que observamos en este ejemplo son las propiedades esenciales de cualquier función.

"En una función —prosiguió el maestro— se acostumbra llamar *dominio* al primer conjunto y *codominio* al segundo. En nuestro ejemplo, el dominio es el conjunto de fechas dadas y el codominio es el conjunto de datos de producción elértrica. Y también se acostumbra usar la palabra *imagen* para nombrar a cada elemento del codominio que se asocia a un elemento dado del dominio. Por ejemplo, la imagen del número 1971 es 28, la imagen del número 1972 es 31, etc. ¿Entendieron todos? Bien, entonces resolvamos el siguiente ejercicio."

Ejercicio 7. En cada una de las funciones dadas anteriormente señale usted el dominio y el codominio y observe además si se cumplen las propiedades enunciadas.

Ejercicio 8. Considere la función obtenida en el experimento con la naftalina y complete las expresiones.

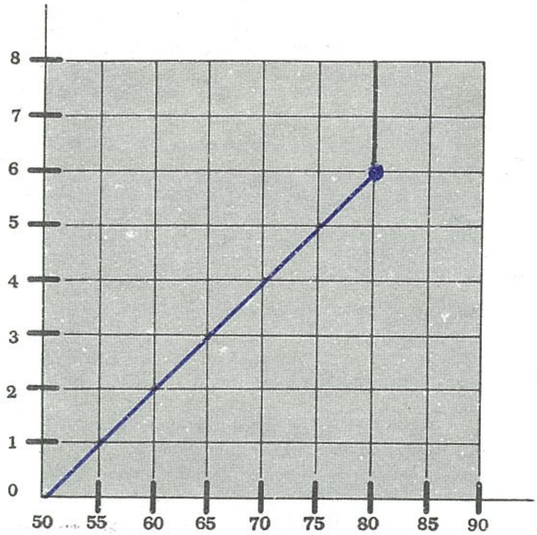


1. El dominio de la función es el conjunto de números ____.

2. El codominio es el conjunto de números ____.

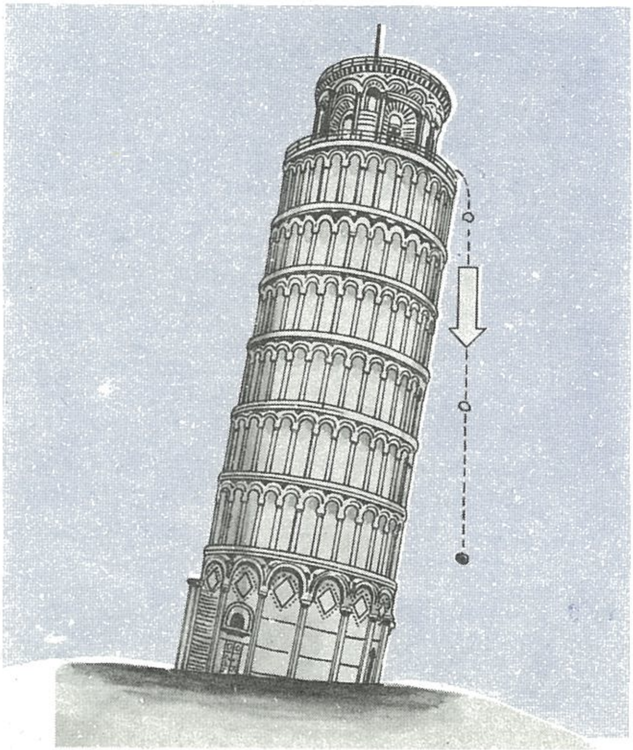
3. Todos los elementos del dominio que sean mayores o iguales a 5 y menores o iguales a 8, tienen una imagen igual a ____________________. (¿Cree usted que por esto ya no tenemos una función?

Ejercicio 9. Supongamos ahora que se toma como primer conjunto el de las temperaturas y como segundo conjunto el de minutos. La gráfica que obtenemos así es la siguiente:



¿Tenemos una función? (Discuta con sus compañeros.)

3. FORMULAS



—Profesor, ya platiqué con el maestro de Ciencias Naturales sobre lo que usted me encargó —José Luis se mostró satifecho—. Hablamos sobre la caída de los cuerpos y aprendí muchas cosas interesantes. Ahora puedo decirles cómo se calcula la distancia que recorre cualquier cuerpo al caer libremente hacia la superficie de La Tierra. La fórmula fue descubierta por Galileo Galilei hace 4 siglos.

—Muy bien, José Luis —le agradeció el maestro—; dinos la ley que descubrió Galileo.

—"La distancia que recorre un cuerpo, al caer libremente en la superficie de la Tierra, es aproximadamente igual a 5 veces el cuadrado del tiempo transcurrido desde que se inicia su caída".

—Si usamos letras para expresar esta ley —dijo el maestro—, obtendremos una fórmula que nos permitirá calcular la distancia si nos dan el tiempo, o viceversa, calcular el tiempo cuando nos dan la distancia. Emma, ¿cuál podría ser esa fórmula?

La niña contestó así:

—Si llamo d a la distancia recorrida por el cuerpo y t al tiempo transcurrido desde que inició su caída, entonces la fórmula será

$$d = 5 \cdot t^2$$

Y con ella se puede resolver el problema que usted nos presentó en la cascada. Por ejemplo, en el segundo 4 ($t = 4$) la piedra recorrió 80 metros porque

$$d = 5 \cdot (4)^2 = 5 \cdot 16 = 80$$

—¡Excelente, Emma! —exclamó el maestro—. Ahora estoy seguro que todos podrán resolver el siguiente ejercicio.

Ejercicio 10. Calcule la distancia que recorre una piedra al caer libremente durante los siguientes lapsos:

a) $\frac{1}{2}$ segundo b) 1 segundo c) 1.5 segundos

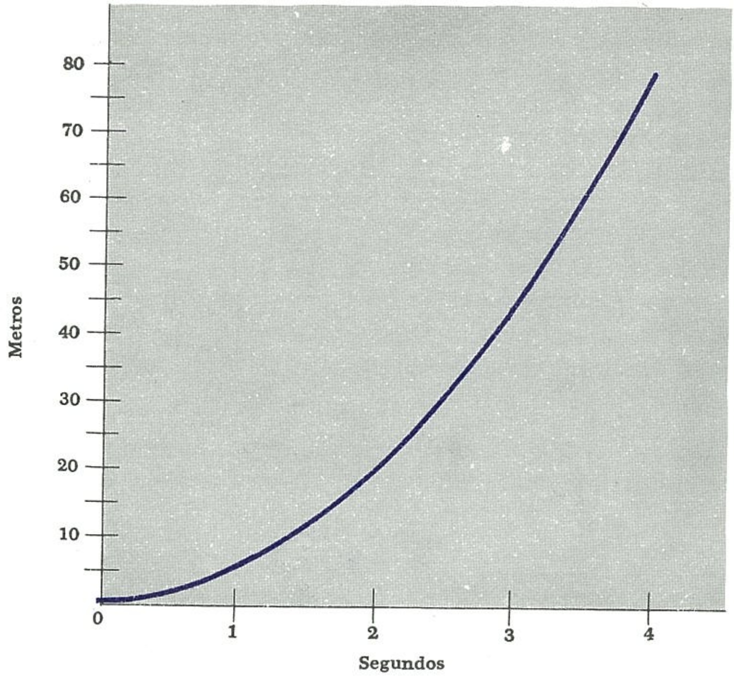
d) 2 segundos e) 2.3 segundos f) 2.7 segundos

g) 3 segundos h) 3.3 segundos i) 3.8 segundos

j) 4 segundos

Ejercicio 11. Haga una gráfica con los datos del ejercicio anterior.

Ejercicio 12. Si pudieran calcularse todos los recorridos durante los tiempos desde 0 hasta 4 segundos, obtendríamos la siguiente gráfica.



a) ¿Esta es la gráfica de una función? (Explique por qué.)

b) ¿Cuál es el domnio? ¿Cuál es el codominio?

c) Un objeto se deja caer desde una altura de 50 metros. ¿Cuánto tiempo tarda en llegar al piso? (Resuelva el problema usando la gráfica.)

d) En la gráfica encuentre los valores de t para $d = 10$, $d = 20$, $d = 30$, $d = 40$ y $d = 60$.

e) Si en la gráfica anterior consideramos como primer conjunto el de las distancias recorridas y como segundo conjunto el de los tiempos, ¿tendríamos entonces una función?

El maestro continuó con su charla:

"Observen que ahora no hemos determinado una función por medio de tablas o de gráficas, sino por medio de fórmulas. Este procedimiento para determinar una función tiene muchas aplicaciones en las ciencias; sobre todo porque nos permite hacer muchos desarrollos teóricos. Por ejemplo, la fórmula que hemos usado para estudiar la caída de la piedra ayudará mucho al ingeniero López cuando la aplique a sus cálculos con la caída del agua y sus generadores eléctricos.

"Ya antes hemos visto un procedimiento gráfico para convertir grados centígrados a grados Fahrenheit. Ahora, si llamamos C a los grados centígrados y F a los grados Fahrenheit, podemos dar la siguiente fórmula para calcular los grados Fahrenheit que corresponden a determinados grados centígrados:

$$F = \frac{9}{5}C + 32$$

(Al alumno: Investigue usted cómo se obtiene esta fórmula.)

Así, por ejemplo, para saber cuántos grados Fahrenheit (F) corresponden a 15° centígrados ($C = 15$), hacemos las siguientes sustituciones:

$$F = \frac{9}{5}(15) + 32 = 27 + 32 = 59$$

Por lo tanto, 15° centígrados equivalen a 59° Fahrenheit."

Ejercicio 13. Resuelva el ejercicio 6 de la Pág. 90 usando la fórmula dada.

Ejercicio 14. Haga la gráfica de la función que estamos tratando para valores de C desde 0° hasta 30°, inclusive. (Vea Pág. 96)

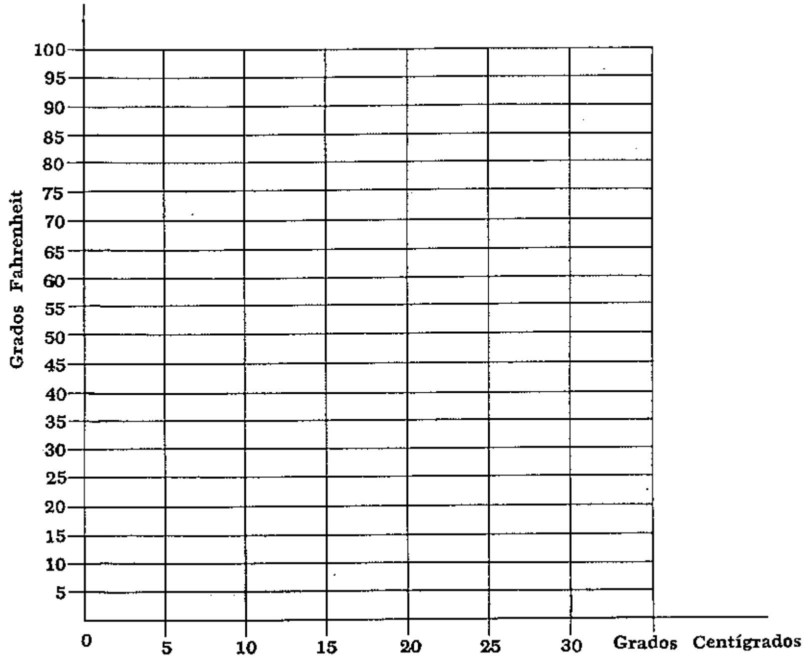
¿Cuál es el dominio de la función ilustrada? ¿Cuál es el codominio?

Ejercicio 15. Use la gráfica del ejercicio anterior para contestar las siguientes preguntas:

¿Cuántos grados centígrados equivalen a 50 grados Fahrenheit? ¿Y a 70° Fahrenheit? ¿Y a 80° Fahrenheit?

Ejercicio 16. Usando la misma gráfica encuentre la solución a las siguientes ecuaciones:

$$\frac{9}{5}C + 32 = 59; \; C = \underline{\qquad\qquad}$$



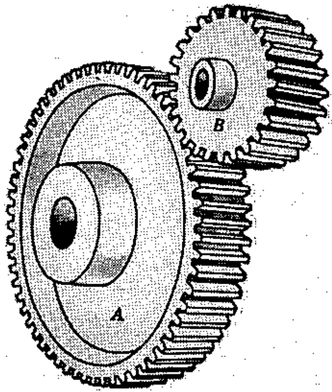
$$\frac{9}{5}C + 32 = 77; \ C =$$

$$\frac{9}{5}C + 32 = 68; \ C =$$

—Ahora, muchachos —dijo el maestro—, ustedes conocen 3 procedimientos para determinar funciones: el uso de tablas, el uso de gráficas y el uso de fórmulas. El estudio de las funciones es de gran importancia en la matemática, pues muchos de los fenómenos que se estudian en la ciencia y en la técnica se describen en forma natural con esta idea. Para construir una presa, un pueblo, una nave cósmica, o para elaborar un medicamento, o para estudiar la gravedad, necesitamos usar funciones. ¿Qué les parece si resolvemos algunos problemas relativos a funciones?

Y el maestro anotó los siguientes problemas:

Problema 1. Los engranes son de gran utilidad en todo género de máquinas.



Al girar el engrane A hace girar al engrane B. Si el engrane A tiene 80 dientes y el engrane B tiene 20 dientes, entonces cuando A da una vuelta, B da ________ vueltas; si A da dos vueltas, entonces B da ________ vueltas; si A da 3 vueltas, entonces B da ________ vueltas.

Si llamamos V al número de vueltas que da el engrane mayor y n al número de vueltas que da el engrane menor, entonces:

$$n = \boxed{}$$

Con esta fórmula calculamos fácilmente el número de vueltas que da B cuando conocemos el número de vueltas que da A.

Por ejemplo:

Si $V = \frac{1}{2}$ entonces $n = \boxed{}$

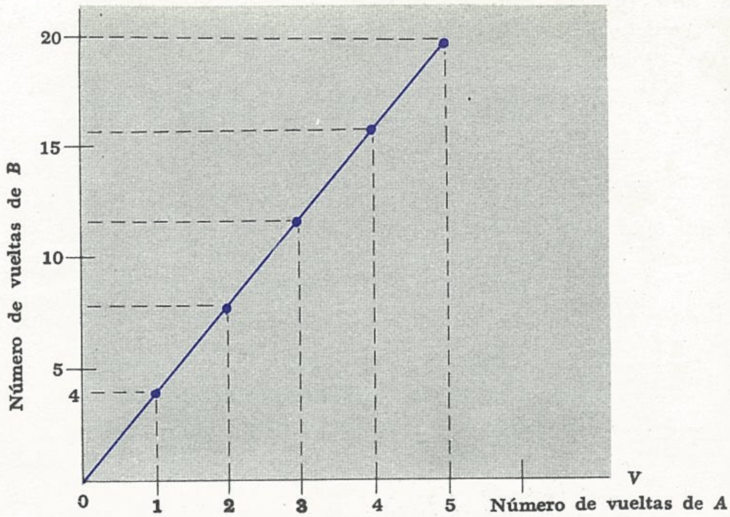
Si $V = 1$ entonces $n = \boxed{}$

Si $V = 1.7$ entonces $n = \boxed{}$

Si $V = 2.3$ entonces $n = \boxed{}$

Si $V = 3.7$ entonces $n = \boxed{}$

En la siguiente gráfica se muestran la svueltas o fracciones de vuelta que da B cuando A da un número de vueltas desde 0 vueltas hasta 5.

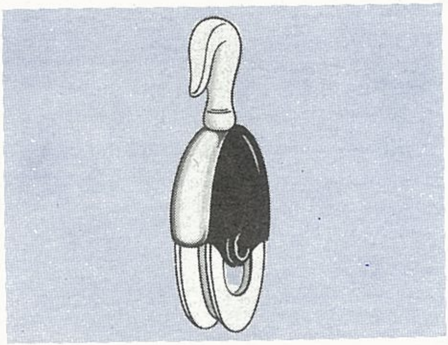


Esta es la gráfica de una *función* (¿por qué?) cuyo dominio es ______________________ y cuyo codominio es ______________________.

Con la gráfica podemos calcular (aproximadamente) el número de vueltas que da A si sabemos el número de vueltas que da B. Así, si B dio 7.5 vueltas sabemos que A ha dado __________ vueltas; si B dio 18.3 vueltas; entonces sabemos que A dio __________ vueltas, etc.

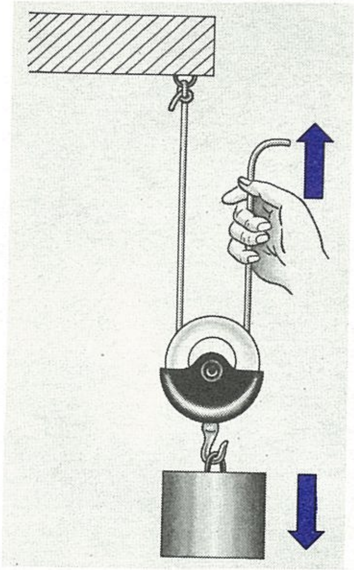
La gráfica de esta función es un __________ de recta.

Problema 2.



a) La polea consiste en un disco de madera o metal, acanalado en la periferia (a fin de poder adaptar a ella una cuerda) y que se usa para levantar objetos pesados.

En el dibujo siguiente se muestra una polea móvil.



Si no consideramos el peso de la polea, la fuerza necesaria para evitar que el objeto Q caiga, es la mitad del peso de tal objeto (que se mide en kilogramos), pues este peso se distribuye por igual en las dos ramas de la cuerda.

Esto es, si el peso del objeto Q es de f kilogramos, podemos usar una fórmula para calcular la fuerza F que es necesario aplicar a fin de que ese objeto no caiga. Tal fórmula es

$$F = \_\_\_\_$$

Por ejemplo, si el objeto pesa 37 kilogramos, entonces la fuerza F que hay que aplicar es de ________ kilogramos.

De manera semejante,

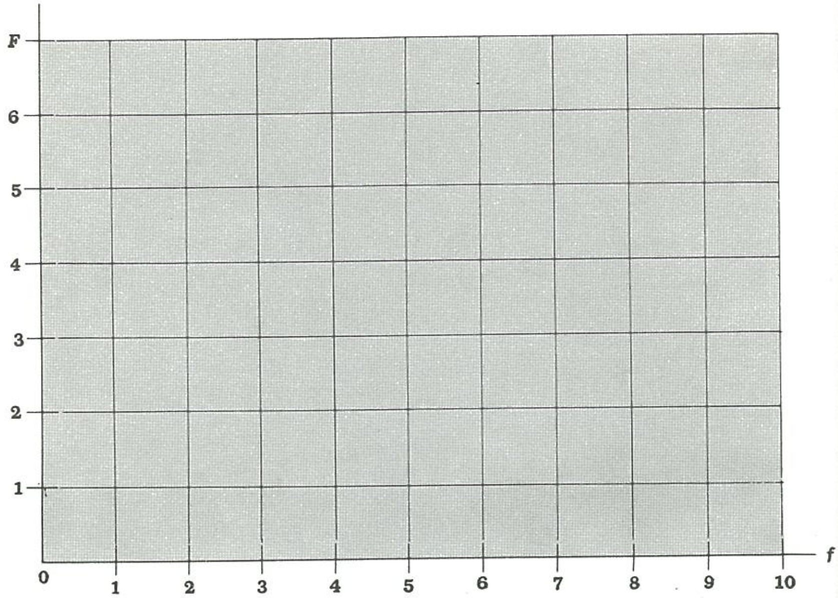
Si $f = 30.5$ kg, entonces $F = \_\_\_\_$

Si $f = 46.2$ kg, entonces $F = \_\_\_\_$

Si $f = 1$ kg, entonces $F = \_\_\_\_$

Si $f = .750$ kg, entonces $F = \_\_\_\_$

b) Suponga que calculamos la fuerza F necesaria para equilibrar todos los objetos que pesan desde 0 kg hasta 10 kg y graficamos esos datos. La gráfica que obtendremos será la siguiente:



Si consideramos como primer conjunto el de los pesos de los objetos y como segundo conjunto los kilogramos de las fuerzas que hay que aplicar para equilibrar el peso, ¿tendremos entonces una función? ¿Por qué?

c) Con ayuda de la gráfica podemos también encontrar la solución (en forma aproximada) de las siguientes ecuaciones:

$$\frac{1}{2}\ f = 4.5;\ f = \boxed{}$$

$$\frac{1}{2}\ f = 2.3;\ f = \boxed{}$$

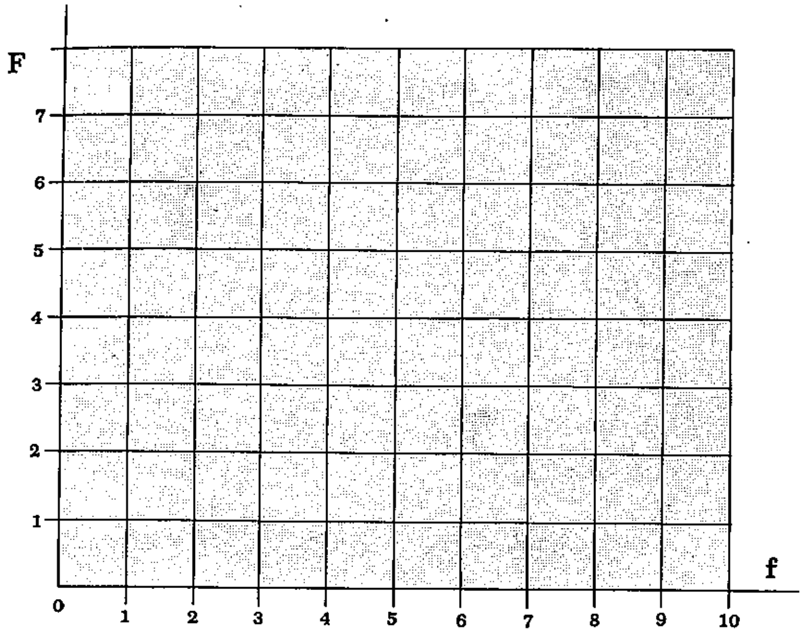
$$\frac{1}{2}\ f = 3.6;\ f = \boxed{}$$

d) Si consideramos ahora el peso de la polea, nuestra fórmula será diferente. Por ejemplo, si el peso de la polea es de .8 kilogramos, tendremos que aplicar una fuerza de _________ para equilibrar únicamente la polea.

La fuerza que se aplica para equilibrar un objeto y una polea que pese .8 kilogramos se calcula con la siguiente fórmula:

$$F = \boxed{} + \boxed{}.$$

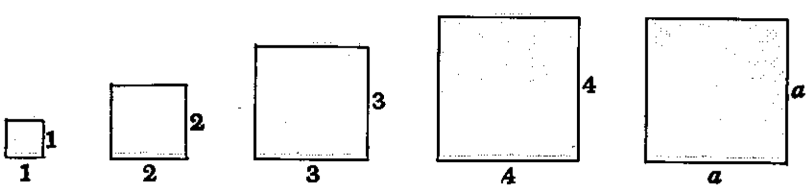
e) Con los mismos datos de b), pero considerando ahora el peso de la polea, la gráfica que se obtiene es ésta:



f) Si observamos las gráficas de b) y e), observamos que son líneas ____________________ y que éstas son paralelas.

Problema 3.

Calcular el área de un cuadrado es muy fácil. Por ejemplo, si llamamos y al área de cada uno de los siguientes cuadrados, tendremos entonces que:



$y = \boxed{}$ $y = \boxed{}$ $y = \boxed{}$ $y = \boxed{}$ $y = \boxed{}$

Por lo tanto, si llamamos x a la medida de uno de los lados de un cuadrado, la fórmula que representa su área y es:

$$y = \boxed{}^2$$

Con esta fórmula podemos calcular el área de cualquier cuadrado cuando conocemos la medida de uno de sus lados:

Así:

Si $x = 0$, entonces $y =$

Si $x = .5$, entonces $y =$

Si $x = .7$, entonces $y =$

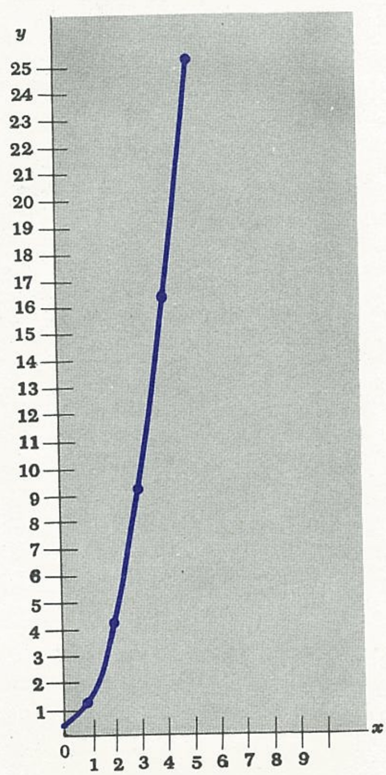
Si $x = 1.3$, entonces $y =$

Si $x = 2.8$, entonces $y =$

Si $x = 3.2$, entonces $y =$

Si $x = 4.5$, entonces $y =$

Si pudiéramos calcular el área de todos los cuadrados cuyos lados midieron desde 0 unidades hasta 5 unidades y graficáramos esos datos, obtendríamos el siguiente dibujo:



Por medio de la gráfica nos damos cuenta que estamos estudiando una ______________________. (¿Por qué?), cuyo domino es ______________________ y cuyo codominio es ______________________.

Con la gráfica también podemos encontrar soluciones aproximadas de las siguientes ecuaciones:

$$x^2 = 4.6;\ x = \boxed{}$$

$$x^2 = 6.8;\ x = \boxed{}$$

$$x^2 = 10.9;\ x = \boxed{}$$

$$x^2 = 12.8;\ x = \boxed{}$$

$$x^2 = 17.5;\ x = \boxed{}$$

Se llama *raíz cuadrada* de un número n al número que elevado al cuadrado es igual a n. Por ejemplo, como $2^2 = 4$, entonces 2 es la raíz cuadrada de 4; como $5^2 = 25$, entonces la raíz cuadrada de 25 es 5; etc. La raíz cuadrada de un número n se denota con el símbolo $\sqrt{n}$. De manera que $\sqrt{4}$ es otro nombre para el número 2 ($\sqrt{4} = 2$), $\sqrt{25}$ es otro nombre para el número 5 ($\sqrt{25} = 5$).

Observando las ecuaciones anteriores podemos completar las siguientes igualdades:

$$\sqrt{4.6} = \underline{\qquad\qquad};\quad \sqrt{6.8} = \underline{\qquad\qquad};\quad \sqrt{10.9} = \underline{\qquad\qquad}$$

$$\sqrt{12.8} = \underline{\qquad\qquad};\quad \sqrt{17.5} = \underline{\qquad\qquad}.$$

Con ayuda de la gráfica es fácil completar las siguientes igualdades:

$$\sqrt{11.9} = \underline{\qquad\qquad};\quad \sqrt{22.8} = \underline{\qquad\qquad}$$

$$\sqrt{.7} = \underline{\qquad\qquad};\quad \sqrt{6.7} = \underline{\qquad\qquad}$$

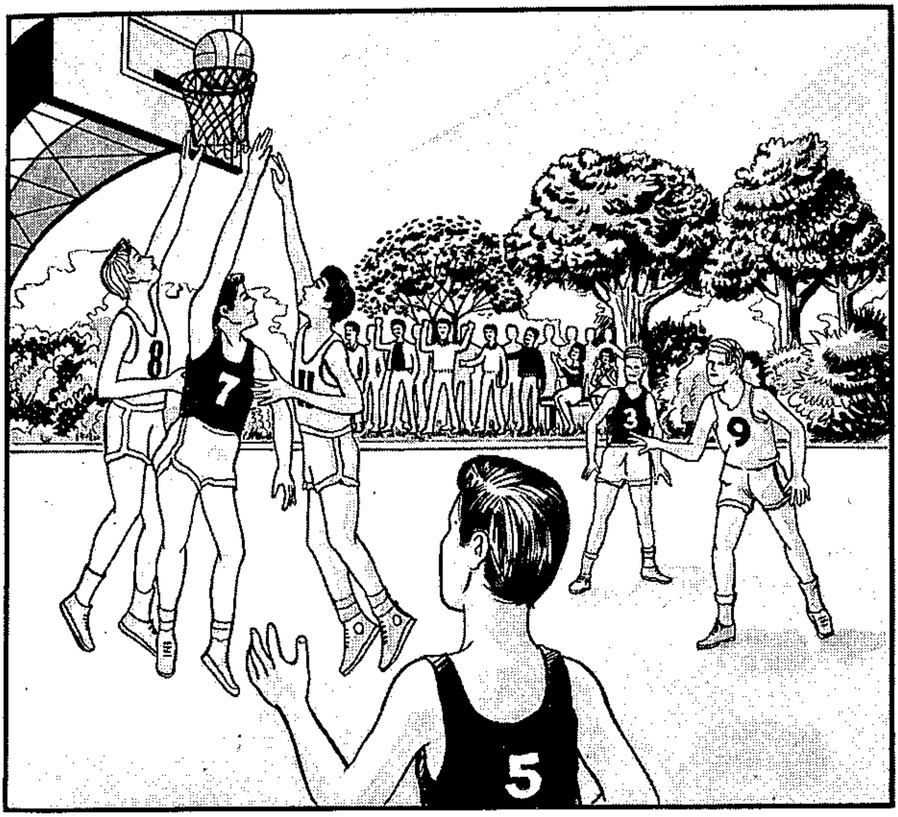
$$\sqrt{9.6} = \underline{\qquad\qquad};\quad \sqrt{7\frac{1}{2}} = \underline{\qquad\qquad}$$

$$\sqrt{\frac{3}{2}} = \underline{\qquad\qquad};\quad \sqrt{10.9} = \underline{\qquad\qquad}$$

Por supuesto, todos estos resultados son aproximados.

CAPITULO CUARTO

GEOMETRIA



—¡Bravo! ¡Bravo! —aplaudía entusiasmada Carolina cada vez que el equipo de su escuela lograba un tanto.

En esto llegó el maestro Ruiz y, viendo la sana alegría que reinaba en el ambiente, comentó: "No cabe duda que sigue teniendo vigencia aquel apotegma latino que dice *mens sana in corpore sano*".

—¿Qué quiere decir eso, maestro?

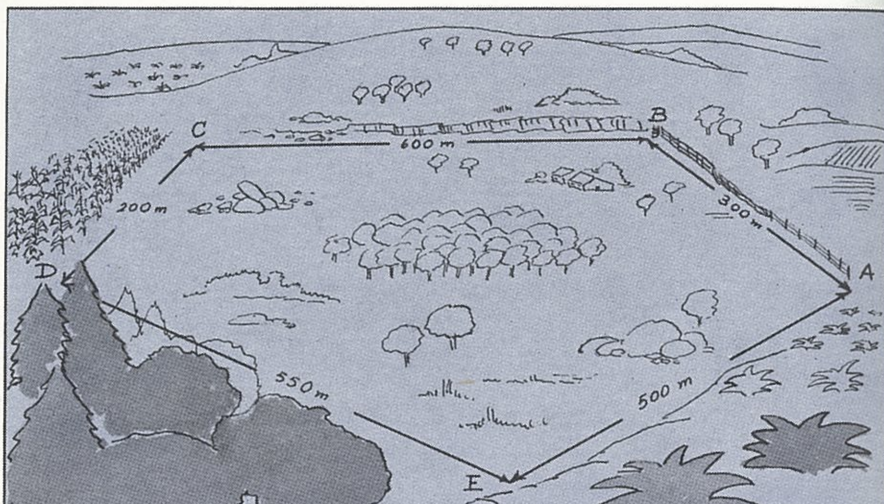
—Estas palabras, Julián, quieren decir: "mente sana en cuerpo sano" y eran empleadas por los romanos para señalar la importancia del ejercicio físico y el deporte en la formación de una personalidad equilibrada.

—A propósito, maestro —intervino José Luis—, ¿ya decidieron dónde se va a construir la zona deportiva de la nueva ciudad?

—Ya, José Luis; precisamente les traía la buena noticia de que el parque y zona deportiva se van a levantar muy cerca de la nueva escuela, en el terreno que ustedes visitaron en días pasados.

—¿En ese terreno que tiene la forma de un papalote?

—Exactamente. Miren, aquí traigo un croquis con las medidas.



$AB = 300$ m	$CD = 200$ m
$BC = 600$ m	$DE = 550$ m
$CA = 700$ m	$EA = 500$ m

—¿Y por qué tiene usted el croquis, maestro?

—Porque nos ha tocado en suerte que nosotros hagamos el plano de este terreno para poder hacer la mejor distribución posible de los campos deportivos, el parque y las demás instalaciones. Así que, ¿quién desea hacerse cargo de esto?

—¡Yo, yo! —respondió de inmediato José Luis.

—¡Y yo! —se ofreció Carolina.

—Muy bien, serán ustedes dos los que harán el plano. Tomen el croquis, observen bien las medidas y ojalá que terminen pronto.

—Sí, maestro. Pero... ¿podemos ver el final del partido?

—¡Claro, claro!

1. TRAZO DE PLANOS. SEGMENTOS Y TRIANGULOS CONGRUENTES

Después de discutir y pensar un poco, Carolina y José Luis deciden que, en el plano que van a hacer, 1 centímetro represente 100 metros del terreno.

Una vez decidida la razón de proporcionalidad que van a usar deciden empezar a dibujar el triángulo *ABC*, pues piensan que es muy fácil trazar, con una regla graduada, tres segmentos que midan 3, 6 y 7 cm respectivamente.

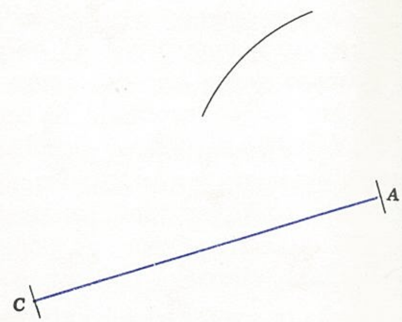
¿Podrá usted, estimado lector, trazar un triángulo con estas medidas? Inténtelo en su cuaderno.

Nuestros dos amigos encuentran algunas dificultades en hacer el dibujo y recurren al maestro para pedirle ayuda. Este, con su amabilidad característica, les muestra con dibujos cómo trazaría él un triángulo con dichas medidas:

1

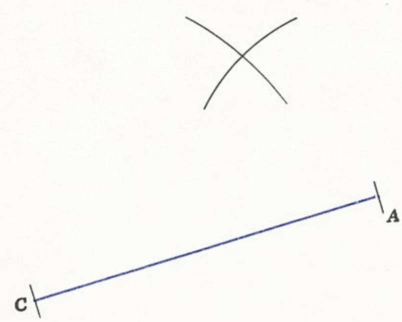
Trazaría un segmento $\overline{AC}$ de 7 cm de longitud.

2



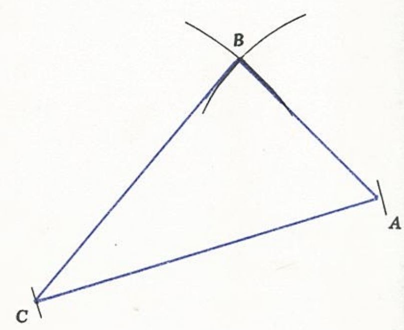
Con un compás abierto 3 cm trazaría un arco apoyando la punta en *A*.

3



Con el compás abierto 6 cm trazaría un arco, apoyando la punta en *C*, y que corte al otro arco.

4



Con una regla trazaría los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$.

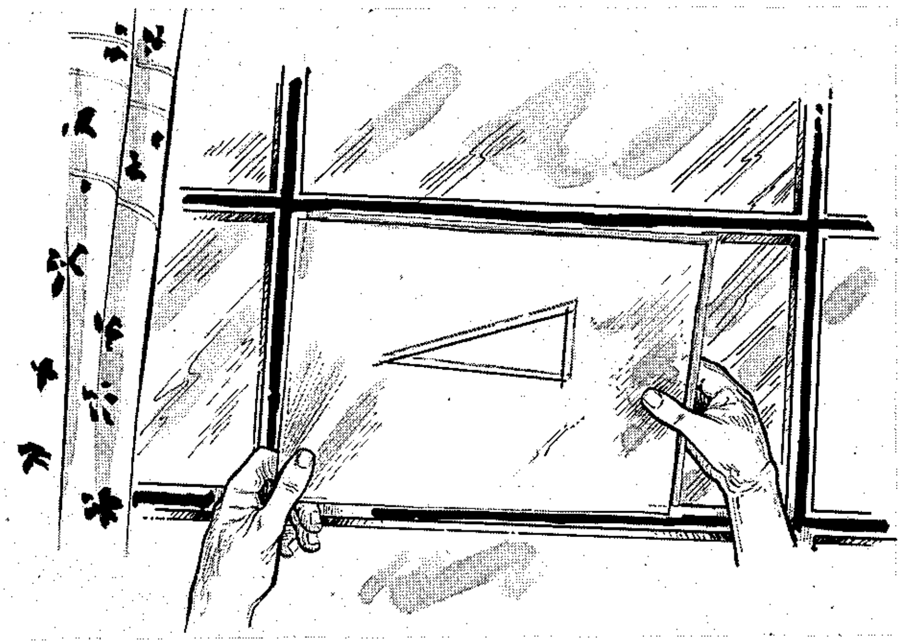
Ejercicio 1. Use regla y compás para trazar triángulos con las medidas que se indican.

a) 3 cm, 4 cm, 5 cm b) 5 cm, 7 cm, 9 cm

c) 8 cm, 6 cm, 6 cm d) 7 cm, 7 cm, 7 cm

¿Podría usted dibujar un triángulo cuyos lados midieran 9 cm, 3 cm y 4 cm respectivamente? Inténtelo y trate de explicar lo que ocurre. Después vea la nota* de pie de página.

Carolina y José Luis fueron a sus casas y cada quien dibujó un plano de la región triangular del terreno con la que habían decidido empezar. Por la tarde fueron a mostrarle al maestro los planos que habían dibujado. Este los superpuso y observándolos a trasluz vio que coincidían.



—Los felicito —les dijo—, los dos triángulos que han trazado son *congruentes.*

—¿Qué quiere decir eso, maestro?

Cualquier persona, al comparar esos triángulos diría "son igua- o quizá diría "tienen la misma forma y tamaño"; pero como estas expresiones se usan sin mucha precisión, en matemáticas se prefiere decir "son congruentes".

—O sea —dijo Carolina—, que dos triángulos son congruentes cuando los tres lados de uno de ellos son respectivamente iguales a los tres lados del otro.

—Sí, pero mejor dí así:

---

* Efectivamente, no es posible dibujar un triángulo con esas medidas. Y esto se debe a que *en todo triángulo, cada lado mide menos que la suma de las medidas de los otros dos lados.*

Dos triángulos son congruentes cuando los tres lados de uno de ellos son respectivamente congruentes a los tres lados del otro.

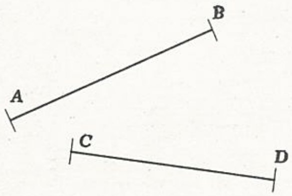
—¡Ah sí! Porque los lados que miden lo mismo —observó José Luis— son lados congruentes.

Es decir —nuevamente intervino Carolina—, en general,

Dos segmentos se llaman congruentes si tienen la misma longitud.

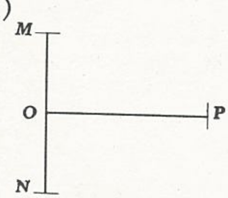
Ejercicio 2. Utilice un compás para decidir si los segmentos o triángulos, en cada inciso, son congruentes o no.

a)



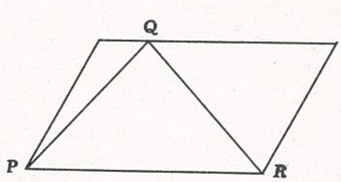
$\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ ________________ congruentes.
son, / no son

b)



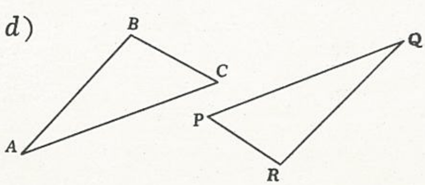
$\overline{MN}$ y $\overline{OP}$ ________________ congruentes.
son, / no son

c)



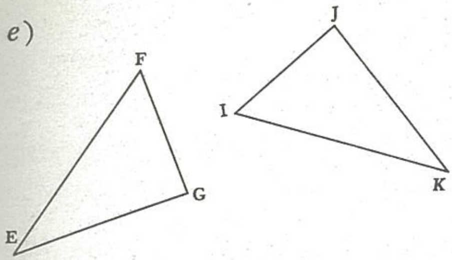
$\overline{PQ}$ y $\overline{QR}$ ________________ congruentes.
son, / no son

d)



$\triangle$ ABC y $\triangle$ PQR ________________ congruentes.
son, / no son

e)

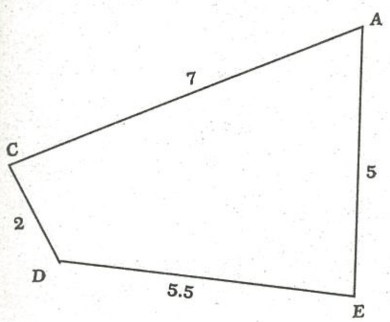


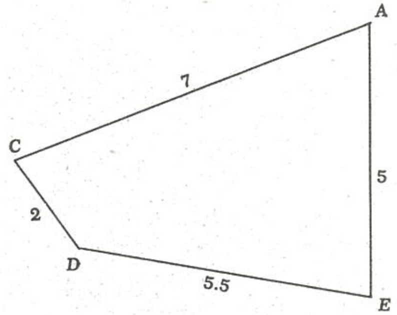
△ EFG y △ IJK ______ congruentes.
son, / no son

2. TRAZO DE PLANOS. POLIGONOS CONGRUENTES

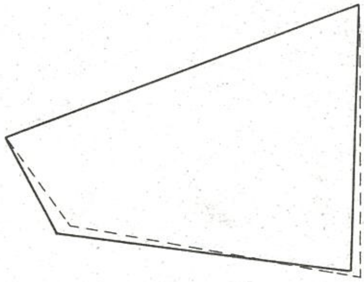
Una vez que hubieron trazado el triángulo *ABC*, que era sólo una parte del plano que se les encomendó, Carolina y José Luis se dedicaron con entusiasmo a dibujar el resto del plano. Creyeron que ya sabían bastante sobre el asunto y se pusieron a dibujar, cada quien por su cuenta, el cuadrilátero *CDEA*.

He aquí los dibujos que obtuvieron:





Al compararlos, como había hecho el maestro con los triángulos, vieron que sus figuras no tenían la misma forma pues al superponerlos no coincidían. *No eran congruentes.*

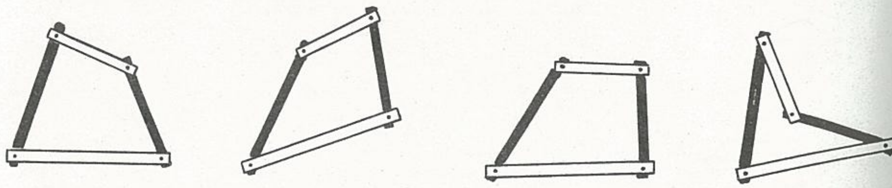


—Mira, Carolina —José Luis estaba desconcertado—, a pesar de que los lados respectivos tienen la misma longitud, los cuadriláteros no son congruentes. ¿A qué se debe eso?

—No sé. Vamos a preguntárselo al maestro.

Cuando consultaron al maestro, éste les dijo que su resultado no tenía nada de sorprendente y les hizo observar un mecanismo que ahí mismo armó:

—Observen que este aparato puede adoptar muy distintas formas sin variar la longitud de las varillas:



Trabajo práctico. Construya usted, con trozos de cartón y tachuelas, un aparato como el que mostró el maestro y observe las distintas formas que puede adoptar.

—Como ven —prosiguió el maestro—, hay muchos cuadriláteros que podemos representar y que no son congruentes a pesar de que sus lados no cambian de longitud. ¿Qué les sugiere esto?

—A mí me parece —dijo Carolina— que nos equivocamos al creer que lo que se había dicho sobre la congruencia de triángulos era válido también para cuadriláteros y otros polígonos.

—Ahora veo que dos cuadriláteros (o polígonos en general) pueden tener sus lados respectivamente congruentes, sin ser ellos congruentes.

—Así es, José Luis. Si deseamos trazar *polígonos congruentes, de más de tres lados, no basta con que sus lados sean congruentes; es necesario que, además, los ángulos respectivos sean congruentes; es decir, que tengan la misma medida.*

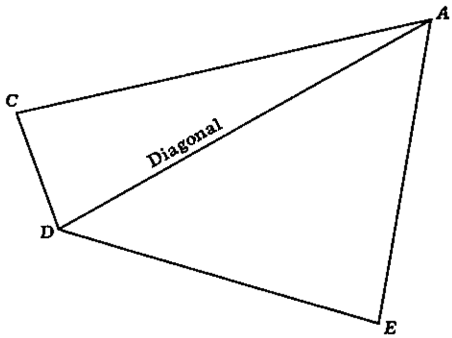
—Pero entonces, los triángulos son una excepción.

—Sí, así es; *si dos triángulos tienen sus lados respectivos congruentes entonces los ángulos respectivos también son congruentes* (es decir, tienen la misma medida).

—Todo esto está muy bien, maestro —interrumpe José Luis—. Pero entonces, ¿cómo podemos hacer el plano de la región cuadrangular *C D E A*?

—Sí —afirmó Carolina—. Es muy difícil medir los ángulos en el terreno con suficiente precisión.

—¿Por qué no usan lo que saben de triángulos para resolver su problema? Observen que el cuadrilátero puede verse como dos triángulos si trazan una diagonal. Por ejemplo, la diagonal $\overline{AD}$:



—Tiene usted razón, maestro; pero entonces necesitamos saber cuánto mide $\overline{AD}$.

—Me parece que aquí tengo este dato... Sí, aquí está: $AD =$ 700 metros.

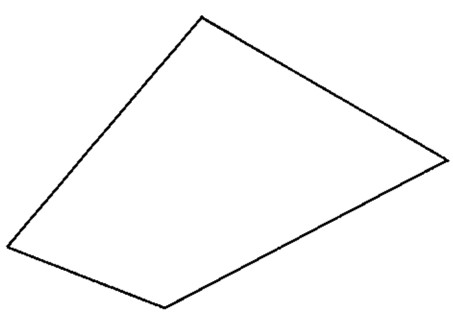
—Con esto nos basta, maestro. En la tarde le traeremos los planos.

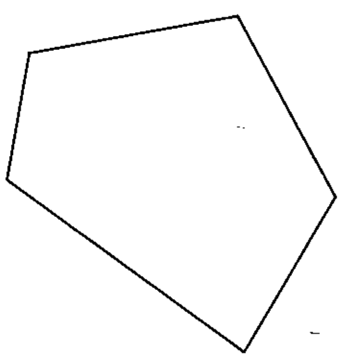
Y así fue; con el dato adicional, los jóvenes estudiantes trazaron su plano fácilmente.

Y ahora, amigo lector, ¿quiere usted hacer los siguientes ejercicios?

Ejercicio 3. Complete usted el plano del terreno *ABCDE* tomando en cuenta los datos que se han proporcionado.

Ejercicio 4. Dibuje un cuadrilátero y un pentágono congruentes con los que se dan a continuación.





Ejercicio 5. Construya un cuadrilátero $ABCD$ con las siguientes medidas:

$$AB = 5 \text{ cm} \qquad BC = 8 \text{ cm} \qquad CD = 4 \text{ cm}$$

$$DA = 6 \text{ cm} \qquad BD = 8.5 \text{ cm}$$

Tal como habían prometido, Carolina y José Luis entregaron los planos esa tarde. El maestro Ruiz los felicitó y, para ver si estaban bien, los comparó y vio que sus alumnos habían entendido bien los temas discutidos.

—Fíjense, además, en algo importante —siguió comentando el maestro—. Una de las ventajas de tener ya el plano es que ustedes, trabajando en él, y sin tener que ir a tomar medidas en el terreno, pueden obtener muchos datos.

Y les lanzó las siguientes preguntas:

a) ¿Cuánto mide el segmento $\overline{BE}$ en el terreno?

b) ¿Qué distancia es mayor, CE o BE?

c) ¿Cuál es la distancia del punto medio M del segmento $\overline{BC}$ al al punto medio N del segmento $\overline{DE}$?

d) ¿Cuál es la distancia de E al camino $\overline{CA}$?

Los dos estudiantes deliberaron un rato y se pusieron de acuerdo en que "esto es fácil".

—Pero no olvides —advirtió Carolina— que *la distancia de un punto a una recta* (en este caso del punto E al camino $\overline{AC}$) es la longitud del segmento que va del punto a la recta y que es perpendicular a ella.

Ejercicio 6. Use el plano que usted trazó y encuentre los datos a), b), c) y d) que pidió el maestro.

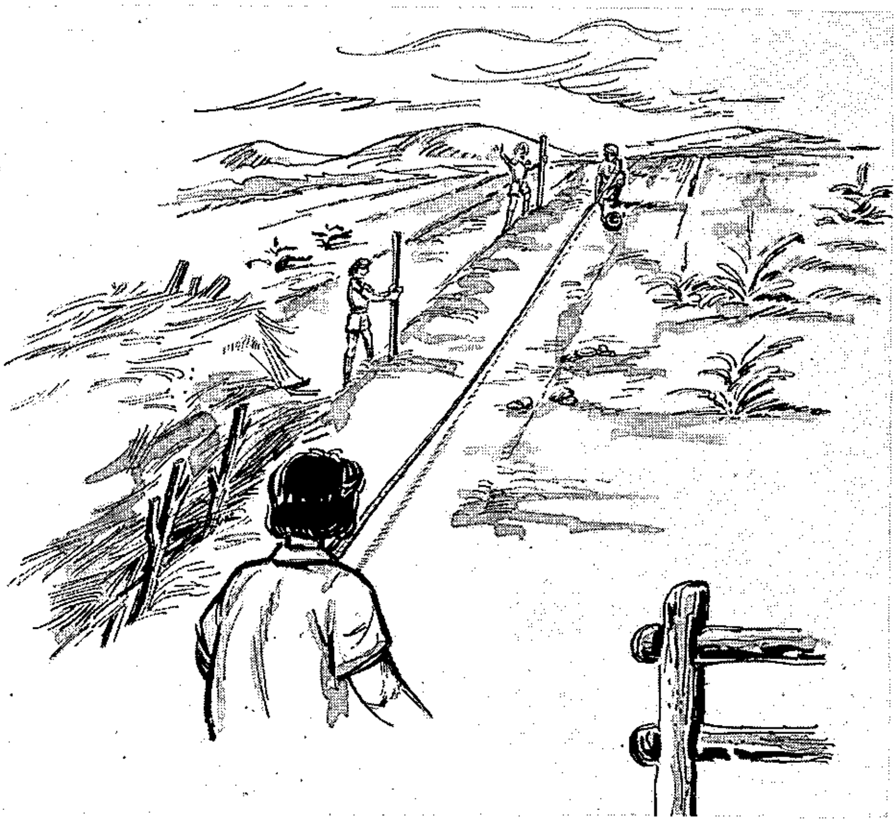
3. MEDIDA DE SEGMENTOS

Cuando el maestro Ruiz y sus alumnos llevaron el plano al presidente de la comisión encargada de la zona recreativa y de deportes, éste les dijo:

—Muchas gracias por su colaboración. Ahora nos gustaría que nos ayudaran a verificar las medidas en el terreno para que no haya ninguna duda y puedan iniciarse los trabajos de planeación.

—¡Sí! ¡Sí! ¡Vamos a medir! —parloteó alborozado Pedro.

—Aquí tienen. Les presto esta cinta de 50 metros.



Y se fueron todos al terreno, mientras el maestro Ruiz y el presidente de la comisión se quedaron hablando de otros proyectos.

Pedro llegó al terreno antes que los demás y, como él llevaba la cinta métrica, empezó a medir el lado $\overline{BC}$. Al llegar sus compañeros les anunció pomposamente:

—He descubierto que nos dieron equivocada la medida BC.

—¿Cómo lo sabes? —le preguntó José Luis.

—Porque ya tomé medidas y ese lado tiene más de los 600 metros que nos habían dicho.

—¿Cómo mediste?

—¡Nada más fácil! Solamente fui poniendo la cinta una y otra vez, colocando marcas cada 50 metros.

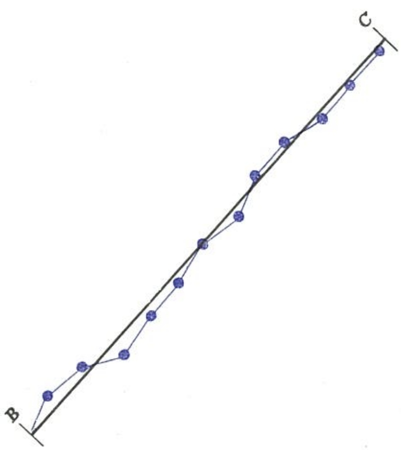
—Bueno —dijo Emma—, sigue midiendo con la cinta métrica mientras nosotros clavamos unas estacas que trajimos. Por esto tardamos algo en llegar aquí.

Y empezaron a colocar estacas para medir $\overline{BC}$ de tal suerte que al mirar desde la estaca clavada en C a la estaca clavada en el otro extremo B, todas las demás estacas se vieran alineadas, como si fuera una sola. Después midieron la distancia entre estaca y estaca y sumaron las medidas obtenidas.

Confirmaron que la medida que les habían dado originalmente estaba correcta. Después hicieron lo mismo con los demás lados.

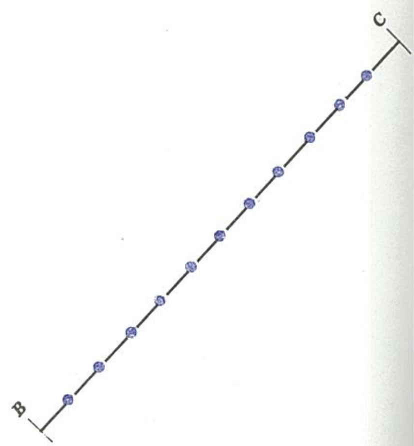
Por otra parte, Pedro encontró que algunos lados medían más de lo que decían sus compañeros. ¿En dónde estaba el error? ¿Qué método de tomar medidas es más confiable, el de Pedro o el de sus compañeros?

Pedro midió así:



(Colocando la cinta una y otra vez sobre el terreno)

Sus compañeros midieron así:

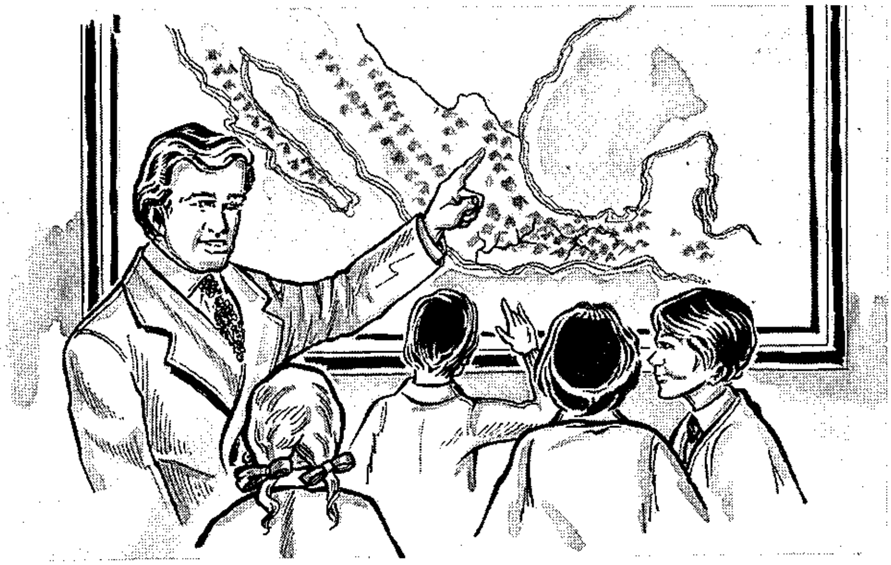


(Primero clavando estacas alineadas)

Trabajos prácticos. Efectúe con sus compañeros algunas medidas sobre el terreno. Cuide bien que los puntos auxiliares estén bien alineados, esto es, como se acostumbra decir en matemáticas, que sean *puntos colineales* (que estén en una misma recta).

4. ESCALA

Aquella tarde que, muy satisfechos, José Luis y Carolina fueron a entregar los planos que habían dibujado, el maestro les dijo:



—Muy bien, muchachos. Sus planos están bien hechos; pero se les olvidó algo importante para el que quiera hacer uso de ellos: no indicaron *la escala.*

—Bueno —contestó Carolina—, pero ya dijimos que 1 centímetro representa 100 metros.

—Sí, claro; pero esto nada más lo sabemos ustedes y yo. Para que los demás se enteren es necesario anotarlo aquí en los planos.

El maestro tomó los planos y en cada uno escribió:

ESCALA 1 : 10 000

—¿Por qué 1 entre 10 000, maestro?

—Porque, según la razón de medidas que ustedes usaron, 1 centímetro del plano representa 100 metros, o sea, 10 000 centímetros en el terreno real.

—Entonces, ¿un centímetro representa 10 000 centímetros?

—¡Exactamente! Por eso se escribe 1 : 10 000, o bien, $\frac{1}{10\,000}$, o también $1 \div 10\,000$ y se acostumbra decir que ésa es la razón de proporcionalidad o de semejanza entre las medidas del plano y las medidas del terreno.

Conociendo este dato podemos interpretar muy fácilmente los planos. Por ejemplo, en nuestro caso, ¿cuánto medirá en el terreno un segmento que en el plano mide 1 milímetro?

—Pues 10 000 milímetros —contesta Carolina.

—O sea, ¿cuántos metros?

—Diez metros, maestro —interviene José Luis.

—Correcto. Ahora díganme: si en el plano considero una longitud de 1 decímetro, ¿qué longitud le corresponde en el terreno?

Carolina hace sus cálculos mentalmente y luego contesta muy ufana: "En el terreno serán 10 000 decímetros, o sea, 1 000 metros, o bien, 1 kilómetro".

—Bien, ¿qué les parece si resuelven unos ejercicios?

Ejercicio 7. Si la escala es 1 : 10 000 del plano al terreno ¿qué medidas representan en el terreno las siguientes longitudes en el plano?

a) 3 cm	b) 7 mm	c) 1.5 dm
d) .5 mm	e) 2.25 cm	f) 8.3 cm

Ejercicio 8. Con la misma escala, ¿qué longitud tendrán en el plano los segmentos que en el terreno tienen las siguientes medidas?

a) 500 m	b) 1 km	c) 850 m
d) 1.2 km	e) 4 300 dm	f) 7 hm

Cuando el maestro revisó sus respuestas encontró que todas eran correctas.

—Muy bien —les dijo—; se ve que ustedes entendieron plenamente lo que es escala. ¿Se dieron cuenta que en estos ejercicios ustedes, de hecho, están estableciendo proporciones?

—Sí, maestro —contestó Carolina—. Por ejemplo, en el inciso a) del primer ejercicio se puede pensar así:

$$\frac{3}{x} = \frac{1}{10\,000}$$

Y podemos encontrar la x resolviendo la ecuación.

—Así es —agregó José Luis—. Esto ya lo aprendimos antes. Multiplicamos los dos miembros de la ecuación por x y por 10 000 y obtenemos

$$3 \times 10\,000 = x,$$

o sea, x es 30 000 cm, o sea, 300 m.

—Ahora, en el inciso a) del segundo ejercicio, ¿cómo pueden proceder?

—Así:

$$\frac{x}{500} = \frac{1}{10\,000},$$

por lo que, multiplicando ambos miembros de la ecuación por 500, obtenemos

$$x = \frac{500}{10\,000} = \frac{5}{100} \text{ de metro.}$$

o sea, 5 cm.

—A ver, Carolina, —pregunta José Luis—, ¿por qué al multiplicar el primer miembro por 500 te da sólo x? Yo siempre lo hago así, pero a veces se me olvida por qué.

—Mira, es fácil. Si tomas un número x y lo divides entre 500 y lo vuelves a multiplicar por 500 ¡claro que te da x!

—¡Ah!, sí. Igual que antes. Teníamos $\frac{3}{x}$ y al multiplicarlo por x, desde luego que se obtiene 3.

—Bien, muchachos. Está bien que discutan así las cosas; pero, a ver, aquí está un plano de la República Mexicana. ¿Cuál es la escala?

Carolina, que tiene vista de lince, ve una anotación en letras pequeñitas.

Escala 1 : 1 000 000

—La escala es 1 a un millón, maestro.

—A ver, José Luis, toma esta regla y mide la distancia que hay de Durango a Zacatecas en el mapa.

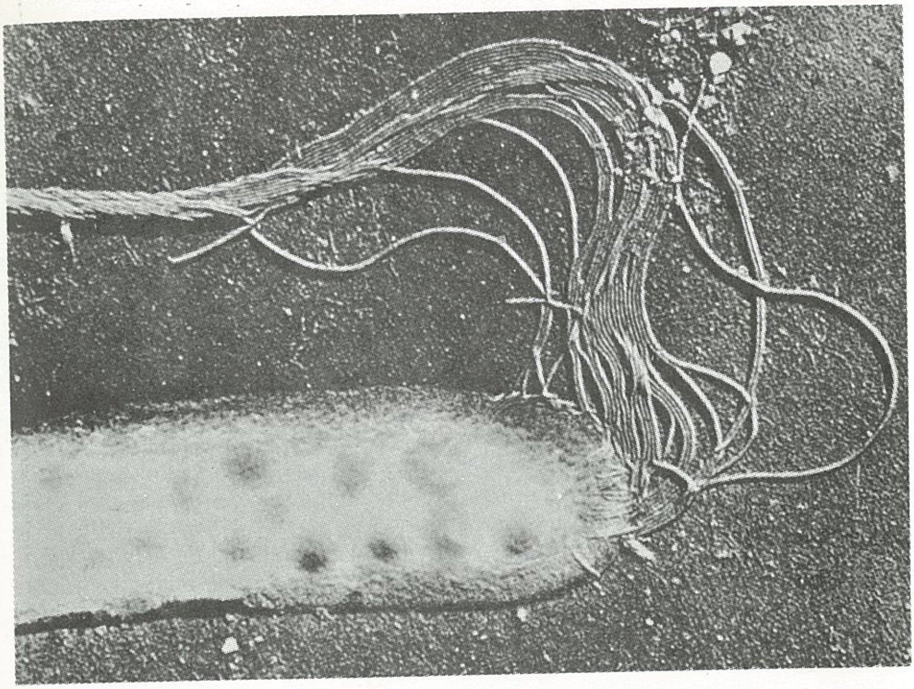
—Aproximadamente son 22.5 centímetros, o sea 255 milímetros, maestro.

—Entonces, ¿cuál es, aproximadamente, la distancia en línea recta que separa las ciudades de Durango y Zacatecas?

—255 millones de milímetros —contesta rápidamente Carolina y, pensando un poco, agrega—; es decir, 255 kilómetros.

José Luis siguió midiendo algunas distancias entre ciudades (todas en línea recta y, claro está, con cierta aproximación) e hizo las siguientes anotaciones:

Bacterias con endosporas observadas al microscopio. Escala 2 550 : 1.



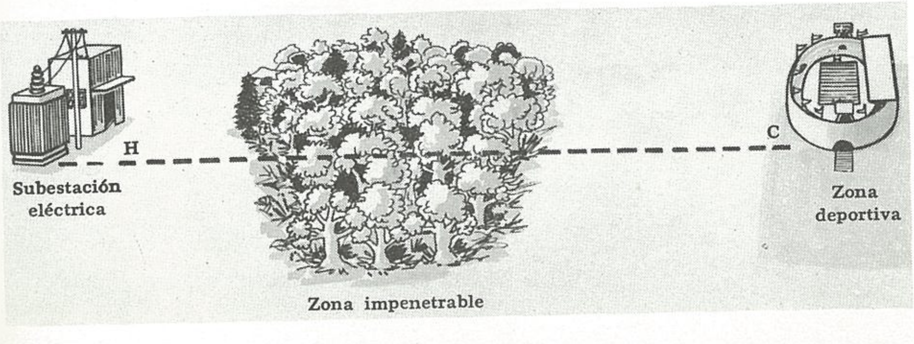
Un penacho de flagelos al extremo de un bacilo. Micrografía electrónica a escala 47 500 : 1.

Ejercicio 10.

a) Encuentre el grueso y el largo de algunas bacterias en la primera ilustración. Dé la respuesta en fracciones de mm y en micras.

b) Encuentre el grueso aproximado del bacilo de la segunda ilustración.

5. MEDICION INDIRECTA



Querétaro-Pachuca: 18 cm

Saltillo-Monterrey: 7.5 cm

Toluca-Villahermosa:

Tijuana-Mérida:

La Paz-Culiacán: 3 dm

Guadalajara-Tampico:

Ejercicio 9. Con los datos anteriores, y sin olvidar que la escala es 1 : 1 000 000, diga usted cuál es aproximadamente, en kilómetros, la distancia en línea recta entre las ciudades mencionadas.

Querétaro-Pachuca:

Saltillo-Monterrey:

Toluca-Villahermosa:

Tijuana-Mérida:

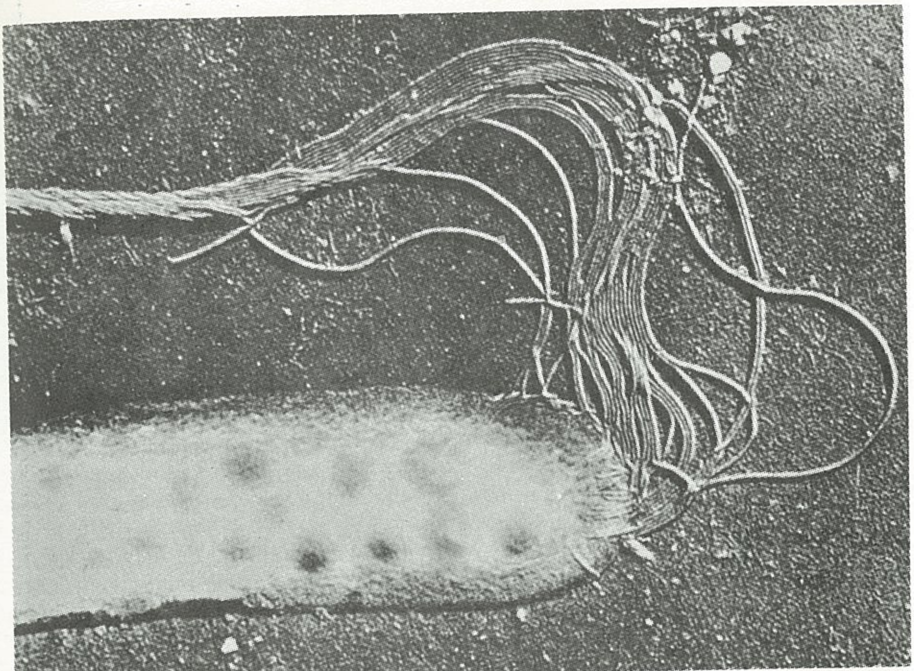
La Paz-Culiacán:

Guadalajara-Tampico:

En un momento dado, José Luis, que todavía andaba con la cinta métrica midiendo y divirtiéndose con aquel mapa tan bonito que ocupaba toda una pared, bromeó: "Mire, maestro: de las Islas Marías a la costa hay 10.5 cm, o sea, 105 km. ¡Sería muy duro nadarlos! ¿No cree?". Los tres rieron de buena gana, festejando la broma.

—Bueno, ya deja ese mapa y ven a ver este libro de biología.

Bacterias con endosporas observadas al microscopio. Escala 2 550 : 1.



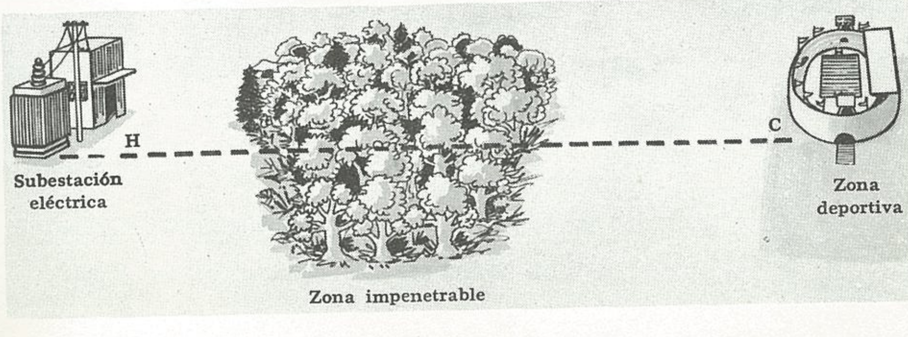
Un penacho de flagelos al extremo de un bacilo. Micrografía electrónica a escala 47 500 : 1.

Ejercicio 10.

a) Encuentre el grueso y el largo de algunas bacterias en la primera ilustración. Dé la respuesta en fracciones de mm y en micras.

b) Encuentre el grueso aproximado del bacilo de la segunda ilustración.

5. MEDICION INDIRECTA



La comisión encargada de las instalaciones eléctricas llamó a Carolina y José Luis.

—Ya nos han dicho que ustedes —les dijo el presidente de la comisión— se han convertido en unos expertos en medir terrenos y dibujar planos. Por esto los hemos llamado. Miren, necesitamos conocer la distancia entre la subestación eléctrica H y el extremo C de la zona deportiva porque vamos a tender un cable. ¿Podrían ustedes medirla? Les advierto que entre H y C hay una espesa zona de arbustos, prácticamente impenetrable. Después la quitarán las máquinas de Recursos Hidráulicos; pero quisiéramos tener el dato desde ahora para elaborar los presupuestos de las instalaciones eléctricas. A ver qué pueden hacer.

—Es lo malo de "volverse un experto" —comentó Carolina al salir—. Ahora, ¿cómo le haremos? No podemos proceder como antes: clavar postes colineales y medir por tramos. ¿Qué sugieres?

—Vamos a ver al maestro. Aunque esté muy ocupado, nos ayudará con mucho gusto.

—Sí, le gusta que aprendamos cosas útiles.

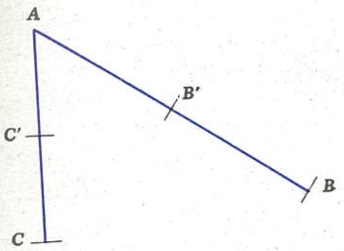
—Miren muchachos —dijo el maestro—, este problema se puede resolver de muchas maneras. Ya con lo que saben de escalas y polígonos lo podrían resolver. A ver si después piensan en esto. Pero ahora aprovecharé este problema para explicarles un teorema de geometría. Este es muy antiguo; se atribuye a Tales de Mileto, uno de los siete sabios de la antigua Grecia.

—A ver —continuó el maestro— tracen dos segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ con el extremo común A. No importa su longitud ni qué ángulo formen. Después mídanlos. ¿Ya? Bien.

—Ahora tú, Carolina, marca los puntos medios de esos segmentos —prosiguió el maestro—. Llámalos B′ y C′. Tú, José Luis, marca también puntos B' y C' en los segmentos que dibujaste, pero de tal manera que

$$AB' = \frac{1}{3} AB \qquad \text{y} \qquad AC' = \frac{1}{3} AC$$

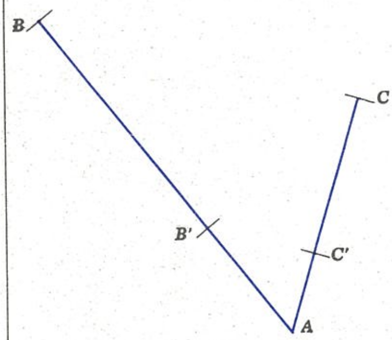
Carolina



$AB = 6,\; AB' = 3,\; AB' = \frac{1}{2}AB$

$AC = 4,\; AC' = 2,\; AC' = \frac{1}{2}AC$

José Luis

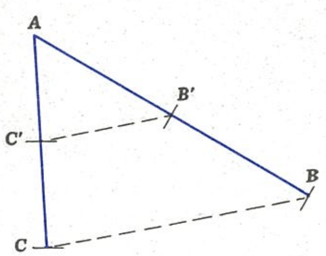


$AB = 4.5,\; AB' = 1.5,\; AB' = \frac{1}{3}AB$

$AC = 7.5,\; AC' = 2.5,\; AC' = \frac{1}{3}AC$

—Ahora tracen los segmentos $\overline{BC}$ *y* $\overline{B'C'}$. Mídanlos y a ver qué me dicen

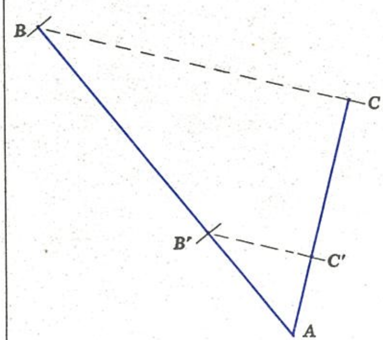
Carolina



$BC = 5,\; B'C' = 2.5$

$B'C' = \frac{1}{2}BC$

José Luis



$BC = 6,\; B'C' = 2$

$B'C' = \frac{1}{3}BC$

—A mí me salió que $B'C'$ es la mitad de BC.

—Y a mí $B'C'$ me resultó un tercio de BC.

—Muy bien; en otras palabras, Carolina pintó los puntos B' y C' de tal manera que

$$\frac{AB'}{AB} = \frac{1}{2} \text{ y } \frac{AC'}{AC} = \frac{1}{2}$$

y observó que también

$$\frac{B'C'}{BC} = \frac{1}{2}$$

—En cambio yo —interrumpió oportunamente José Luis— pinté B' y C' de tal manera que

$$\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = \frac{1}{3}$$

y obtuve que también

$$\frac{B'C'}{BC} = \frac{1}{3}$$

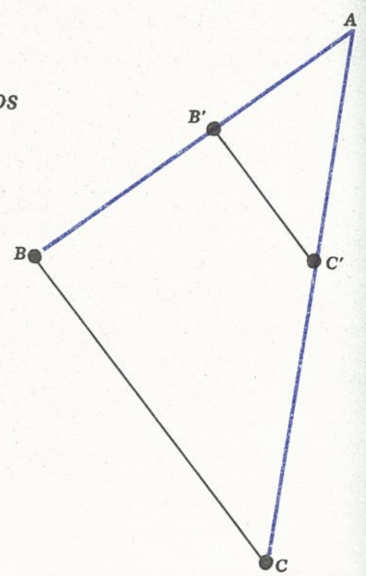
—Esto es, los dos observaron la misma propiedad. Enunciémosla como Teorema 1:

TEOREMA 1. *Si B' y C' son puntos en los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ tales que*

$$\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = k,$$

entonces también

$$\frac{B'C'}{BC} = k.$$



—¿Y no importa qué ángulo formen AB y AC?

—¿Y tampoco importa que elijamos $\frac{1}{2}$, bien, $\frac{1}{3}$ o cualquier otra k, maestro? —preguntan los muchachos.

—No —responde el maestro—; no importa cómo coloquen los segmentos ni la razón k que elijan. De todos modos la razón $\frac{B'C'}{BC}$ es la misma que la razón común de $\frac{AB'}{AB}$ y $\frac{AC'}{AC}$.

—¿Y cómo sabemos que este teorema es cierto?

—Por ahora tendrán que creerlo. Ustedes simplemente lo han comprobado en dos casos especiales, para los dibujos que hicieron. Pero ya otras personas han demostrado que este resultado es cierto. Cuando estudien más geometría ustedes también lo demostrarán. Ahora simplemente úsenlo cuando lo necesiten.

—¿Y cómo podemos utilizarlo para medir la distancia entre la subestación eléctrica y la zona deportiva?

—Esa es la cuestión. Piénsenlo.

Y usted, estimado lector, ¿cómo lo utilizaría para resolver el problema? Quizá sea conveniente que antes resolviera el siguiente ejercicio.

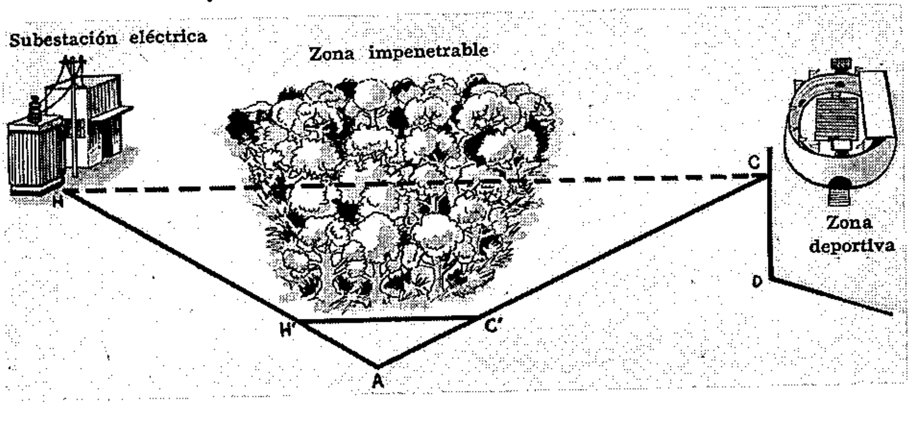
Ejercicio 11. Supongamos que, como en el teorema **1**, **B′** es un punto del segmento $\overline{AB}$ y C' un punto del segmento $\overline{AC}$.

a) Si $AB' = 18$ km, $AB = 24$ km, $AC' = 21$ km, $AC = 28$ km y $B'C' = 15$ km, entonces $BC =$

b) Si $AB' = 12$ m, $AB = 144$ m, $AC' = 15$ m, $AC = 180$ m y $BC = 276$ m, entonces $B'C' =$

c) Si $AB' = 10$ cm, $AB = 40$ cm, $AC' = 15$ cm, $AC = 55$ cm y $B'C' = 8$ cm, ¿puede usted afirmar que $BC = 24$ cm?

Ahora sí, probablemente usted pueda resolver el problema planteado. En caso contrario, o después de haberlo resuelto, vea usted cómo Carolina y José Luis lo resolvieron.



$$AH = 680 \text{ m} \qquad AH' = 170 \text{ m}$$

$$AC = 840 \text{ m} \qquad AC' = 210 \text{ m}$$

$$H'C' = 340 \text{ m}$$

Como H' y C' los trazaron de tal manera que

$$\frac{AH'}{AH} = \frac{170}{680} = \frac{1}{4} \quad \text{y} \quad \frac{AC'}{AC} = \frac{210}{840} = \frac{1}{4}$$

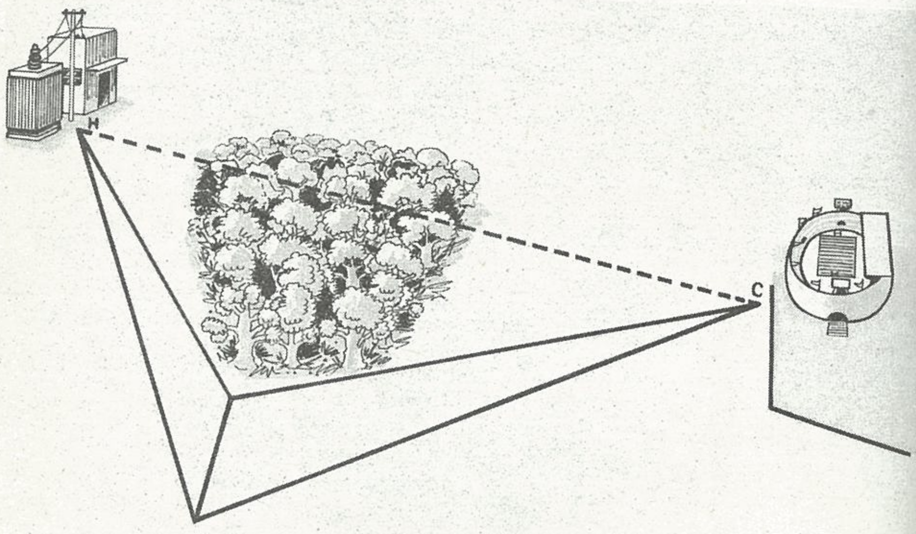
entonces, según el Teorema 1, sabemos que también

$$\frac{H'C'}{HC} = \frac{340}{EC} = \frac{1}{4}.$$

Por lo tanto, $HC = 4 \times 340 = 1\,360$ m.

Trabajos prácticos. Utilice este método para medir indirectamente algunas distancias. Por ejemplo, la diagonal de un patio en el cual haya una fuente que no permita efectuar una medición directa. Busque varios problemas de este tipo.

Problema y trabajos prácticos. ¿Cómo podría resolver el problema de encontrar la distancia entre H y C usando, no el Teorema 1, sino lo que ya aprendió acerca del trazado de planos de triángulos y polígonos a escala? Vea la siguiente ilustración. Después practique este método en alguna situación real.



(Márquense, en terreno accesible, dos triángulos con un lado común parecidos a los de la figura. Mídanse y trácese un plano de ellos a cierta escala. En el plano podrán determinar lo longitud HC y, por lo tanto, la distancia real entre los puntos H y C.)

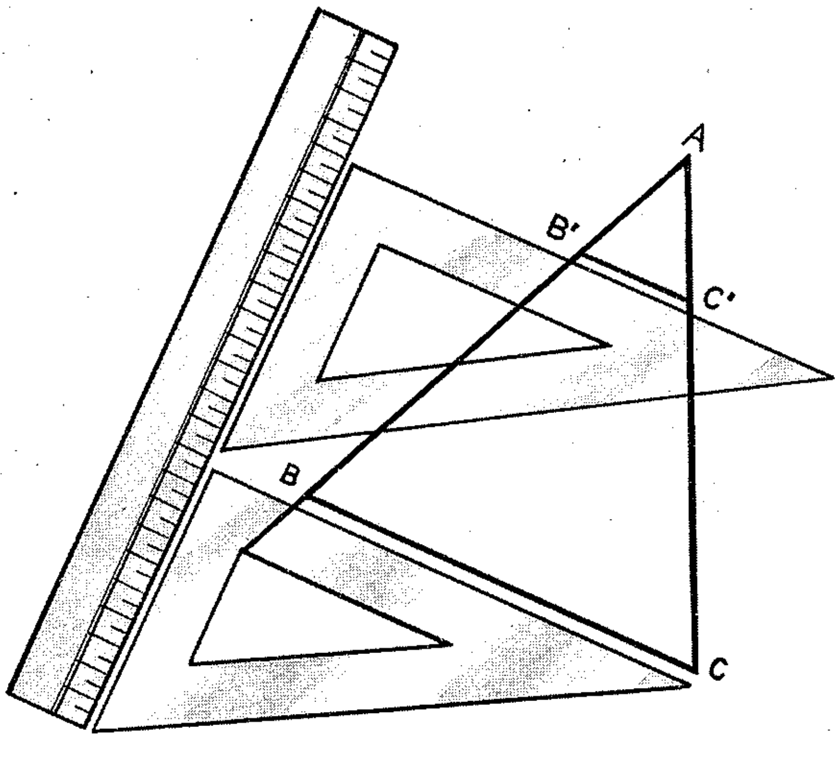
6. PARALELAS

Carolina y José Luis enseñaron el trabajo al maestro. Este los felicitó y les dijo:

—¿No han observado alguna propiedad de la posición relativa de los segmentos $\overline{BC}$ y $\overline{B'C'}$ en el Teorema 1?

—Sí, maestro —respondió Carolina—. Parece que siempre resultan paralelos.

Y con una regla y una escuadra vieron que así era en todos sus dibujos.



Ejercicio 12. Dibuje dos ejemplos en los que

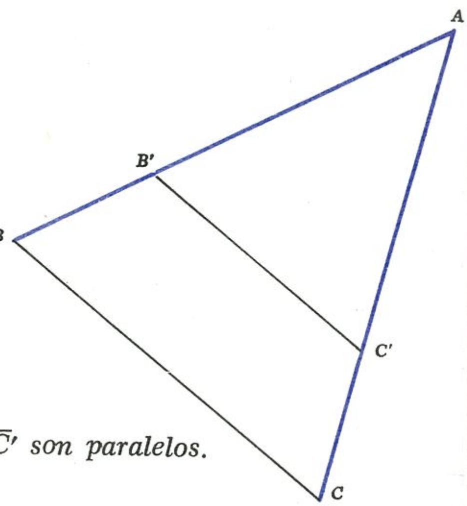
a) $\dfrac{AB'}{AB} = \dfrac{AC'}{AC} = \dfrac{1}{5}$ b) $\dfrac{AB'}{AB} = \dfrac{AC'}{AC} = \dfrac{3}{4}$

y compruebe que, en ambos casos, $\overline{B'C'}$ es paralelo a $\overline{BC}$.

El maestro les dijo que esta propiedad es cierta en cualquier situación y la enunció como el Teorema 2:

TEOREMA 2. Si

$$\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC},$$

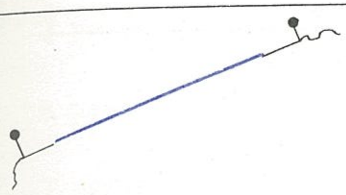


entonces los segmentos $\overline{BC}$ *y* $\overline{B'C'}$ *son paralelos.*

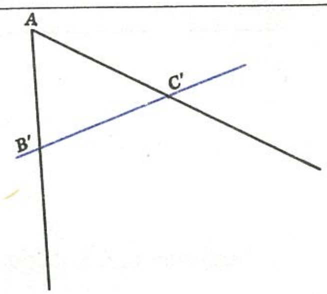
—¿Cómo podrían utilizar este teorema para trazar rectas paralelas? —preguntó el maestro—. En un papel no vale la pena utilizarlo, pues es más fácil usar una regla y una escuadra, como antes lo hizo Carolina, para ver que ciertos segmentos son paralelos. Pero en un terreno no es muy práctico que digamos el uso de escuadras. Son muy chicas. Piensen esto.

Trabajo práctico. Marque en un terreno una recta (con un hilo tenso) y utilice el Teorema 2 para trazar una paralela a la recta trazada.

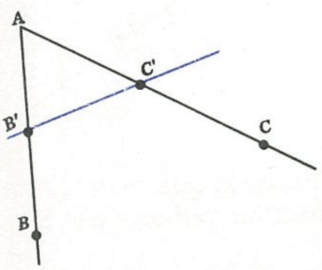
Si tiene dificultades, vea cómo lo resolvieron Carolina y José Luis.



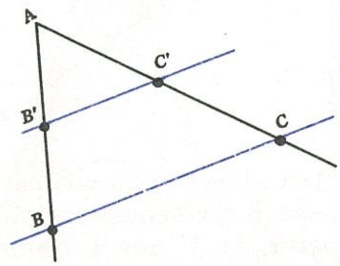
Pintaron una recta.



Pintaron dos rectas que se corten en un punto A y que corten a la primera recta en puntos B' y C'.



En estas rectas marcaron puntos B y C de tal manera que
$AB' = B'B$ y $AC' = C'C$

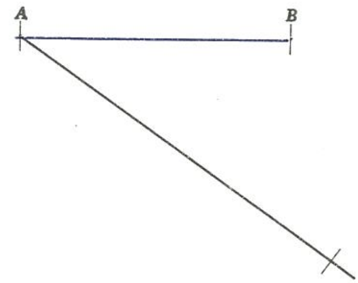
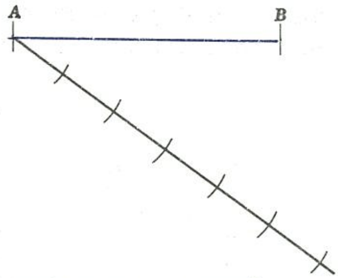
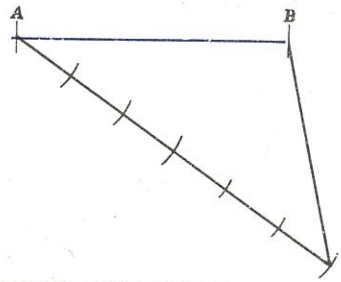
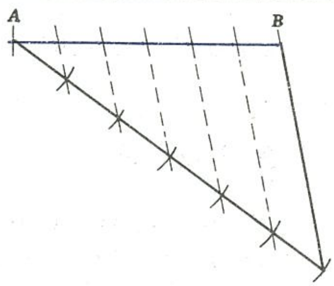


Trazaron la recta BC.

Y afirmaron que $\overline{BC}$ es paralelo a $\overline{B'C'}$. ¿Por qué?

Problema. Suponga ahora que se nos da una recta l y un punto B en cierto terreno. ¿Cómo podría usted alterar ligeramente el procedimiento anterior para trazar una recta paralela a l y que, además, *pase por el punto* B?

Usted, lector, ya conoce seguramente el siguiente método para subidividir un segmento "en partes iguales".

Subdivisión de un segmento en 6 segmentos congruentes.	
 Segmento $\overline{AB}$ dado.	 Trazamos una recta que pase por A.
 Marcamos con un compás en esa recta 6 segmentos congruentes a partir de A, uno a continuación del otro.	 Trazamos una recta que pase por el último punto y por B.
 Trazamos rectas paralelas.	Los puntos obtenidos en el segmento AB determinan 6 segmentos congruentes.

Problema. ¿Cree usted que este método de subdividir segmentos es una consecuencia del Teorema 2? ¿Por qué?

Ejercicio 13. Copie los siguientes segmentos y subdivídalos en el número de partes congruentes que se indica.

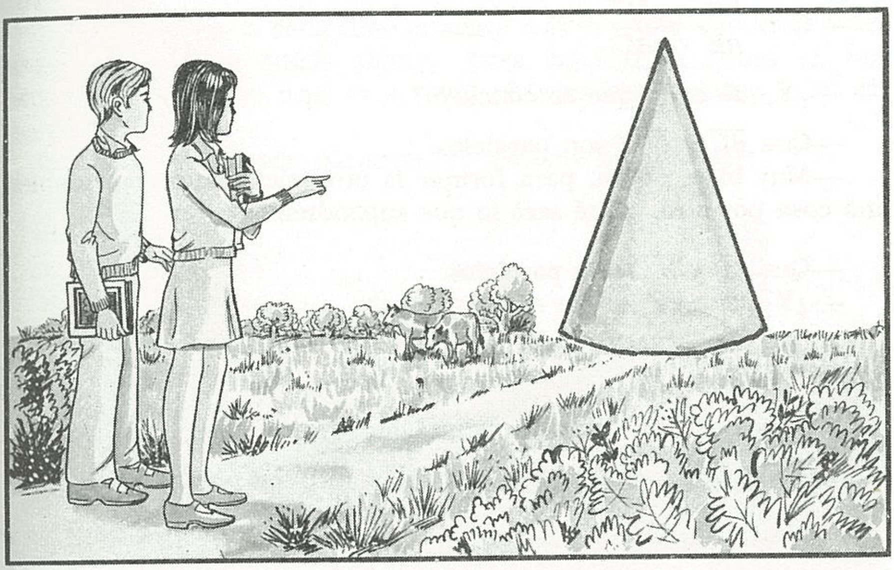
a) 2 partes

b) 3 partes

c) 5 partes

d) 7 partes

7. MEDIDA DE INACCESIBLES



—¡Maestro! ¡Maestro! Fíjese que nos pidieron que encontráramos el volumen del silo que acaban de construir. Sabemos que el radio del círculo de la base mide 3 metros. También sabemos que el volumen de un cono es

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 a;$$

por lo menos esto es lo que dice el libro de sexto de primaria. Pero, ¿cómo encontramos la altura a?

—Es un poco difícil subirse y, aunque lográramos hacerlo, ¿cómo encontraríamos a?

—Apliquen la proposición inversa del Teorema 2 que ya conocen y que también es cierta.

—¿Qué quiere decir "la proposición inversa", maestro?

—A ver, ¿qué dice la proposición del Teorema 2?

—Que *si*

$$\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC}$$

entonces

los segmentos $\overline{BC}$ y $\overline{B'C'}$ son paralelos.

—¿Qué es lo que se supone en esta proposición?

—Que $\dfrac{AB'}{AB} = \dfrac{AC'}{AC}$.

—¿Y qué es lo que se concluye?

—Que $\overline{BC}$ y $\overline{B'C'}$ son paralelos.

—Muy bien, ahora, para formar la proposición inversa cambien una cosa por otra. ¿Qué será lo que supondremos?

—Que $\overline{BC}$ y $\overline{B'C'}$ son paralelos.

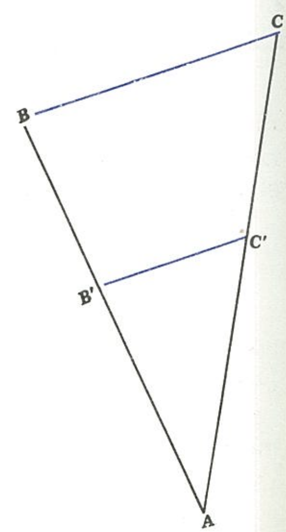
—¿Y qué será lo que concluyamos?

—Que $\dfrac{AB'}{AB} = \dfrac{AC'}{AC}$.

—Muy bien, entonces la proposición inversa es:

TEOREMA 3. *Si los segmentos $\overline{BC}$ y $\overline{B'C'}$ son paralelos, entonces*

$$\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC}.$$



Y, *además, por el Teorema 1, también*

$$\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}:$$

—¿Y es cierto este teorema? —preguntó Emma.

—Sí, sí lo es. Y tienes razón en hacer esta pregunta, pues no siempre que una proposición es cierta, su inversa también lo es. A ver, un ejemplo.

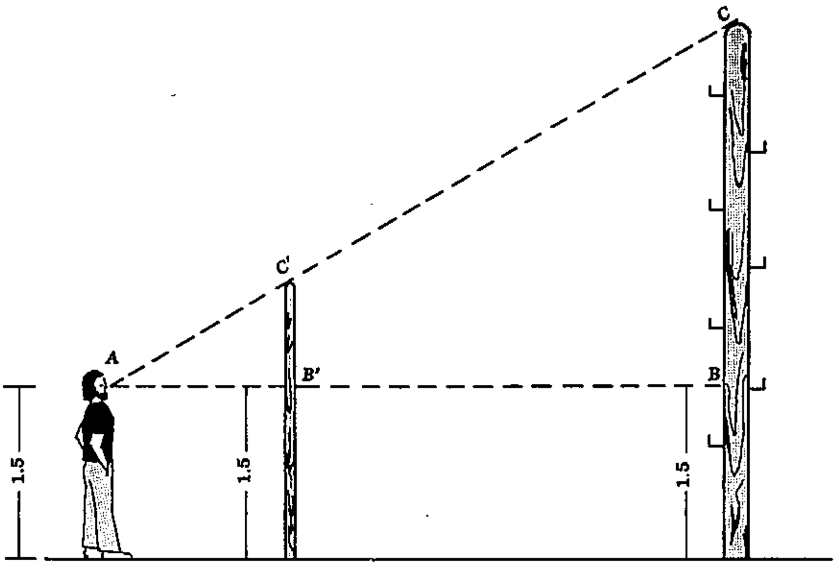
—"Si camino, entonces me muevo" es una proposición cierta —dice Julián. ¿Cuál es la inversa?

—"Si me muevo, entonces camino" —responde Emma. Y esta proposición no es cierta, pues puedo moverme sin caminar. Por ejemplo, cuando nado.

—Bueno, maestro, ya aprendimos lo que dice el Teorema 3. Ahora, ¿cómo resolvemos nuestro problema de encontrar la altura del silo?

—No se los voy a decir directamente. Les voy sólo a mostrar este dibujo del libro en donde alguien, para calcular la altura de un poste eléctrico, clavó una vara, hizo algunas mediciones y usó el Teorema 3.

Como los postes son paralelos, el teorema asegura que



$$\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$$

Pueden medir, fácilmente

AB', AB y $B'C'$.

Encuentren BC y después la altura del poste.

Ejercicio 14. Encuentre la altura de un poste como el de la figura con los siguientes datos (en metros):

a) $AB' = 4$ $AB = 28$ $B'C' = 1.5$
b) $AB' = 9$ $B'B = 11$ Altura de la vara $= 2.5$

Trabajos prácticos. Utilizando este método encuentre la altura de algunos postes, árboles o edificios.

He aquí la solución que Emma y Julián dieron al problema de calcular el volumen del silo.

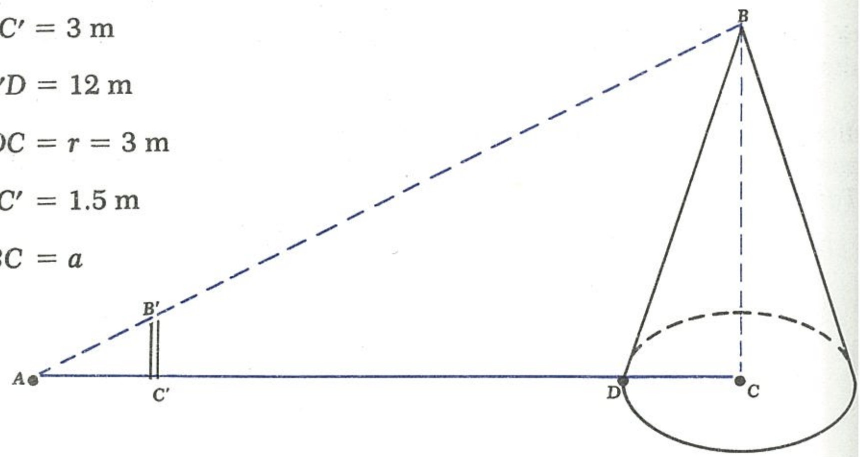
$AC' = 3$ m

$C'D = 12$ m

$DC = r = 3$ m

$B'C' = 1.5$ m

$BC = a$



$$AC = 3 + 12 + 3 = 18 \text{ m}$$

Como BC y $B'C'$ son paralelos, según el Teorema 3 se tiene:

$$\frac{AC'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}, \text{ o sea, } \qquad \frac{3}{18} = \frac{1.5}{a},$$

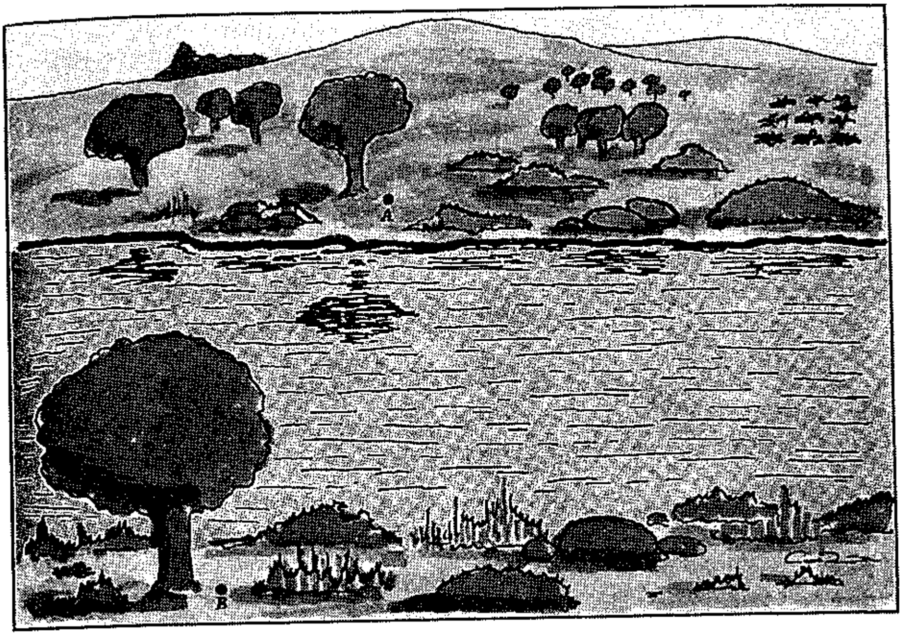
de donde, $a = \dfrac{18 \times 1.5}{3} = 9$ m. Luego el volumen es

$$V = \frac{1}{2}\pi r^2 a = \frac{1}{2} \times 3.14 \times 9 \times 9 = 84.78 \text{ m}^2.$$

Problema 1.

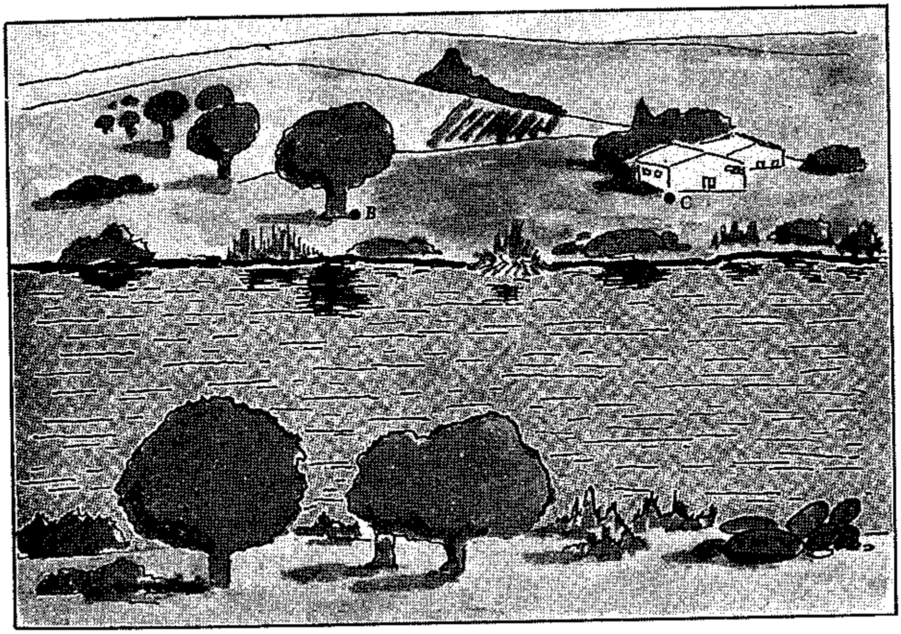
Se quiere encontrar la distancia entre el punto A en el otro lado del río y un punto B en nuestra orilla.

Encuentre un método práctico que se base en el Teorema 3 y en el trazado de paralelas.



Problema 2.

Se quiere encontrar la distancia entre dos puntos *B* y *C* que están en la otra orilla del río.



Encuentre un método en el que se utilice el Problema 1 y el Teorema 1.

Discuta estos problemas con sus compañeros y su maestro. Si no tiene esta oportunidad y no encuentra soluciones, vea algunas sugerencias en la página 154.

Trabajo práctico. Ensaye en alguna situación real los Problemas 1 y 2.

8. PERIMETRO Y AREA

En un momento dado se necesitó calcular el costo de una barda que delimitara la zona deportiva. Inmediatamente Carolina y José Luis, quienes conservaban sendas copias de los planos, se avocaron al trabajo.

José Luis recordó:

El perímetro de un polígono es la suma de las medidas de sus lados.

Así pues, el perímetro nos dará el número de metros de barda que se necesitarán. Después, conociendo el costo por metro, ya no habrá problema alguno en calcular el costo total.

Procedió así:

$3 \times 10\,000 = 30\,000$ cm $= 300$ m	longitud de	*AB*	*en el terreno*
$6 \times 10\,000 = 60\,000$ cm $= 600$ m	—,,—	*BC*	—,,—
$2 \times 10\,000 = 20\,000$ cm $= 200$ m	—,,—	*CD*	—,,—
$5.5 \times 10\,000 = 55\,000$ cm $= 550$ m	—,,—	*DE*	—,,—
$5 = 10\,000 = 50\,000$ cm $= 500$ m	—,,—	*DA*	—,,—
Perímetro: 2 150 m			

Carolina procedió así:

Perímetro del polígono del plano $= 3 + 6 + 2 + 5.5 + 5 =$ 21.5 cm.

Como la escala es 1 : 10 000, entonces el perímetro del polígono en el terreno será

$$21.5 \text{ c } 10\,000 = 215\,000 \text{ cm} = 2\,150 \text{ m.}$$

Al comparar los resultados vieron, con agrado, que coincidían.

—Sin embargo, no lo hemos hecho de la misma manera —observó José Luis.

—En efecto —agrega Carolina. Tú lo hiciste así:

$P = 3 \times 10\,000 + 6 \times 10\,000 + 2 \times 10\,000 + 5.5. \times 10\,000 + 5 \times 10\,000,$

y yo lo hice así:

$$P = (3 + 6 + 2 + 5.5. + 5) \times 10\,000.$$

—¡Ah! Claro que sale lo mismo. Acuérdate de que en la escuela primaria aprendimos la *propiedad distributiva* de la multiplicación con respecto a la suma.

—Sí, para dos sumandos se escribe

$$a\,(b + c) = ab + ac.$$

—Muy bien, aquí vemos esta propiedad en acción: podemos calcular el perímetro de las dos maneras.

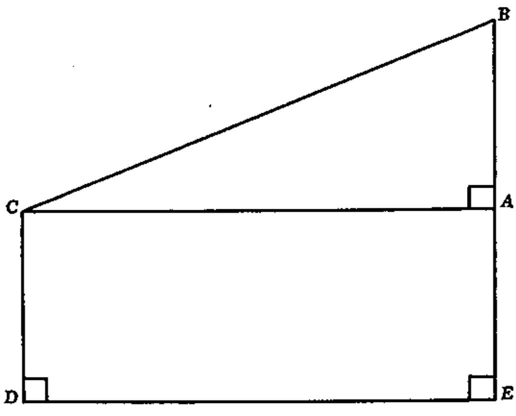
—¡Pero yo tuve que hacer menos multiplicaciones! —comentó Carolina—. En este caso no importa mucho porque es muy fácil multiplicar por 10 000; pero ¿qué tal si la escala hubiera sido 1 : 97 879?

—Buena observación —dice José Luis—. La próxima vez lo haré como tú lo hiciste.

Más tarde fueron a ver al maestro y le enseñaron lo que habían hecho y la discusión que habían tenido. Los felicitó y les dijo:

—Como después con toda seguridad les pedirán que calculen el área de la zona deportiva, más vale que se vayan preparando. A ver, aquí tengo un plano del patio de una casa. Calculen el área del patio.

Y les dio un plano:



$DE = 5$ cm
$AB = 2$ cm
$AE = 2$ cm

(ángulos rectos)

Escala 1 : 200

Tomaron los datos y se fueron a hacer los cálculos. José Luis pensó: "Ahora trataré de ahorrarme multiplicaciones. Lo haré como Carolina lo hizo para el perímetro". Y procedió así:

$$\begin{array}{lcr} \text{Area del triángulo } ABC & = \frac{1}{2} \times 5 \times 2 = & 5\text{ cm}^2 \\ \text{Area del rectángulo } ACDE & = & 5 \times 2 = 10\text{ cm}^2 \\ \hline \text{Area total} & = & 15\text{ cm}^2 \end{array}$$

—Como la escala es 1 : 200 —pensó José Luis—, el área del patio será

$$15 \times 200 = 3\,000\text{ cm}^2$$

—Aquí hay algo raro —siguió pensando—. Se me hace muy pequeña el área.

Carolina lo hizo así:

Base del triángulo (y del rectángulo) en el terreno:

$$5 \times 200 = 1\,000\text{ cm}$$

Altura del triángulo (y del rectángulo) en el terreno:

$$2 \times 200 = 400\text{ cm}$$

Area real del triángulo $= \frac{1}{2}\, 1\,000 \times 400 = 200\,000\text{ cm}^2$

Area real del rectángulo $= 1\,000 \times 400 = 400\,000\text{ cm}^2$

Se reunieron para llevarle la respuesta al maestro y vieron, con horror, que habían obtenido resultados muy diferentes.

—A ver —dijo el maestro—; para que vean lo que les sucedió hagamos un cálculo en general. Supongan que tienen un rectángulo cuya base mide a y cuya altura mide b *en el plano* y que la escala es $1 : k$. ¿Cuánto miden la base y la altura del rectángulo en el terreno?

—Pues ka y kb, maestro —contestó José Luis.

—Luego, el área del terreno o patio, o lo que sea, ¿cuánto es?

Pues $ka \cdot kb = k^2\, ab$.

—¿Y el área del cuadrilátero del plano?

—Simplemente ab.

—Entonces, ¿por cuánto tienen que multiplicar el área del cuadrángulo del plano para obtener el área real?

—¡Por k^2! —exclamó sorprendido José Luis.

—¡Sí! —reafirmó Carolina—. En el caso de perímetros simplemente multiplicamos por k, pero para áreas de rectángulos hay que multiplicar por k^2 cuando la escala es $1 : k$.

—Así es —confirmó el maestro.

—¿Y para figuras que no sean rectángulos?

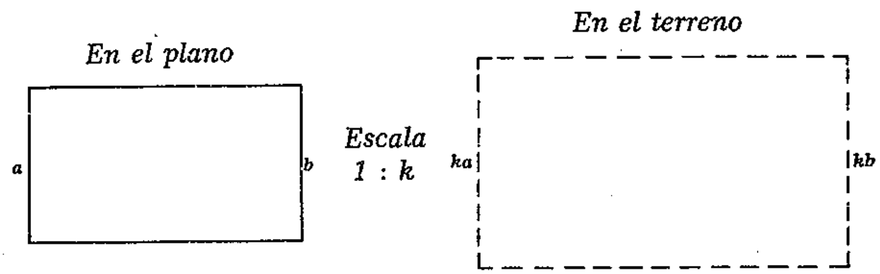
—Vean ustedes —responde el maestro—. Ustedes ya han visto que los polígonos se pueden triangular. Demuestren entonces esta propiedad para triángulos y después pasen a polígonos en general. Piénsenlo.

Carolina y José Luis se fueron preocupados, a la vez que contentos, por lo que estaban aprendiendo.

—Pues yo me equivoqué en mi cálculo —confesó José Luis—, porque calculé el área A' en el plano y después pensé que el área real A era $A = kA'$. ¡Y resulta que (por lo menos para rectángulos) es $A = k^2A'$!

—A ver —propuso Carolina—, repasemos lo que nos dijo el maestro y hagamos después el cálculo para polígonos en general. Empecemos con los rectángulos.

Y escribieron:



$A' = ab =$ *área en el plano* $\quad A = ka \cdot kb =$ *área en el terreno*

$$A = ka \cdot kb = k^2\, ab = k^2\, A'$$

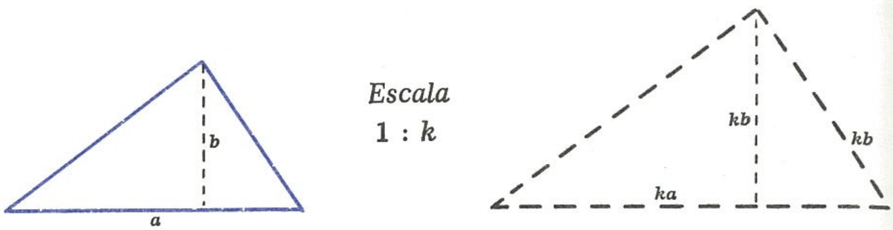
$$A = k^2\, A'$$

—Esto es lo que nos explicó el maestro para rectángulos —dijo José Luis.

—Hagámoslo para triángulos.

En el plano *En el terreno*

Escala
1 : *k*



$A' = \frac{1}{2}ab =$ área en el plano $A = \frac{1}{2}ka \cdot kb =$ área en el terreno

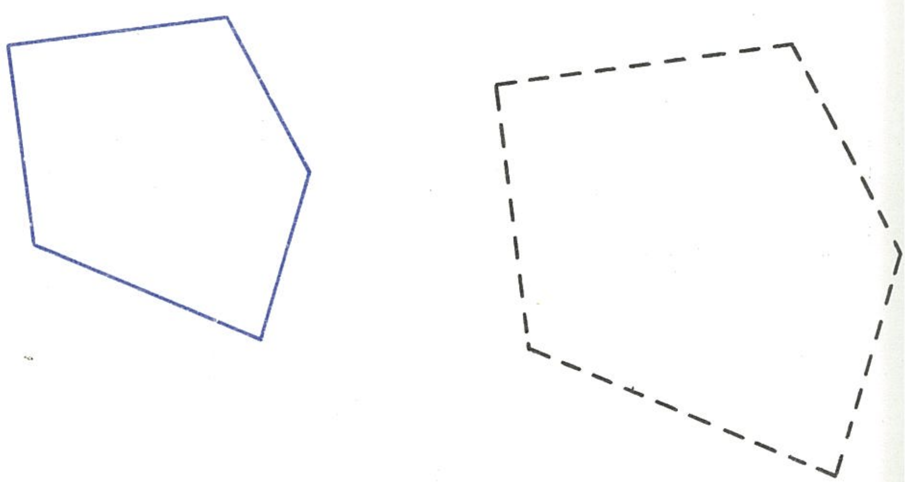
$$A = \frac{1}{2}kakb = k^2 \times \frac{1}{2}ab = k^2 A'$$

$$A = k^2 A'$$

—O sea que para triángulos, también hay que multiplicar por k^2 y no por k.

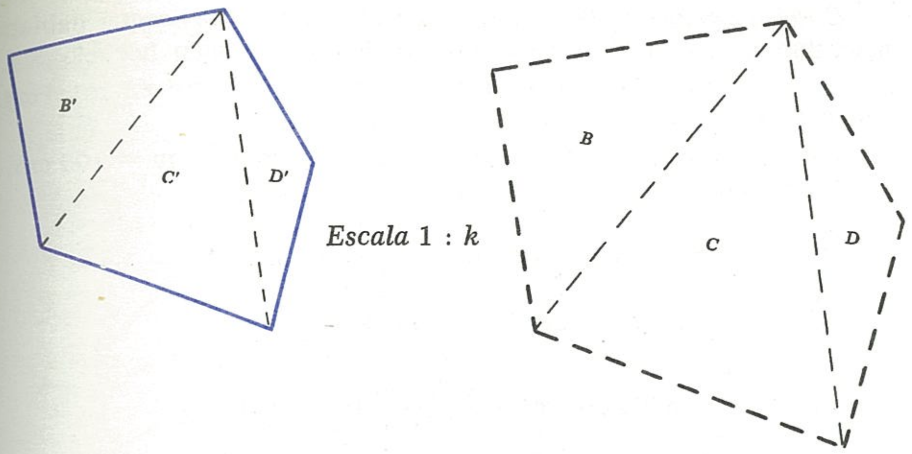
—¿Y para polígonos? Por ejemplo, un pentágono.

En el plano *En el terreno*



—¿Cómo le haremos aquí?

—El maestro nos sugirió que tringulásemos. Por ejemplo, así:



—Que sean B, C y D las áreas de los triángulos en el terreno.
—Y B', C' y D' las áreas de los triángulos respectivos en el plano.
—Como estas regiones son triángulos, ya sabemos que

$$B = k^2 B', \qquad C = k^2 C', \qquad D = k^2 D'$$

—¿Qué tal si sumamos? El área A total en el terreno es

$$A = B + C + D = k^2 B' + k^2 C' + k^2 D'$$

—Y ahora aplicamos la propiedad distributiva

$$A = k^2 (B' + C' + D')$$

—Pero como $A' = B' + C' + D'$ es el área del pentágono del plano podemos escribir

$$A = k^2 A'$$

—¡Bravo! Es lo que queríamos demostrar.
—Y en general se debe tener que

Si el área de un polígono en un plano a escala 1 : k es A′ y el área del polígono real es A, entonces

$$A = k^2 A'$$

Carolina y José Luis fueron a exponer al maestro lo que habían discutido. Los felicitó por sus razonamientos tan bien hechos.

—Ahora, mejor escriban el resultado, 600 000 cm² en m². Hay muchos ceros —advirtió el maestro.

—Esto es muy fácil —dijo Carolina—; como 1 m = 100 cm, 1 m² será igual a 100² cm², o sea,

$$1\ \text{m}^2 = 100^2\ \text{cm}^2 = 10\,000\ \text{cm}^2$$

—Sí, y entonces —agregó José Luis—

$$600\,000\ \text{cm}^2 = \frac{600\,000}{10\,000}\ \text{m}^2 = 60\ \text{m}^2$$

—O sea, el patio mide 60 m².

Ejercicio 15.

$1\ \text{m} = \square\ \text{dm}$	$1\ \text{m}^2 = \square\ \text{dm}^2$
$1\ \text{km} = \square\ \text{m}$	$1\ \text{km}^2 = \square\ \text{m}^2$
$1\ \text{m} = \square\ \text{mm}$	$1\ \text{m}^2 = \square\ \text{mm}^2$
$1\ \text{cm} = \square\ \text{mm}$	$1\ \text{cm}^2 = \square\ \text{mm}^2$

Ejercicio 16. En agricultura se acostumbra tomar como medida de área a la *hectárea*. Se define

$$1\ \text{hectárea} = 10\,000\ \text{m}^2$$

(o sea, el área de un cuadrado de 100 m por lado.)

$$1\ \text{hectárea} = \square\ \text{cm}^2$$

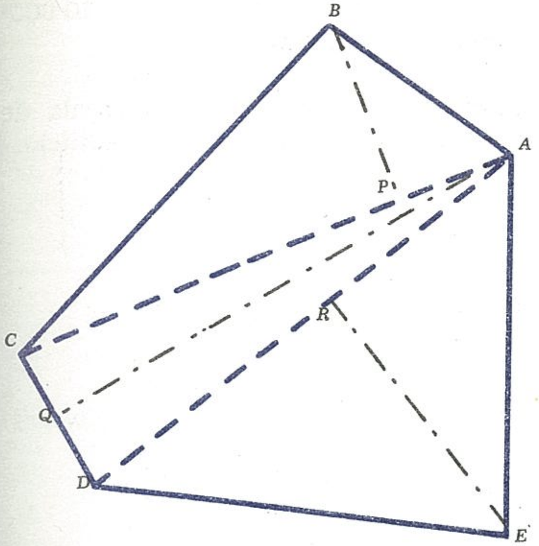
$$1\ \text{hectárea} = \square\ \text{dm}^2$$

$$1\ \text{hectárea} = \square\ \text{km}^2$$

$$1\ \text{km}^2 = \square\ \text{hectáreas}$$

$$100\ \text{m}^2 = \square\ \text{hectáreas}$$

9. CALCULO DE AREA DE TERRENOS



Escala 1 : 10 000

En efecto, como predijo el maestro, a los pocos días pidieron a Carolina y José Luis que calcularan el área de la zona recreativa y de deportes.

—Bueno —comentó José Luis—, con lo que hemos aprendido se supone que ya podemos calcular el área de cualquier parcela.

—Sí —añadió Carolina—; primero levantamos un plano a escala y luego en él calculamos el área. Con eso encontraremos fácilmente el área del terreno.

—Pues ¡manos a la obra!

Primero triangularon, después trazaron las alturas necesarias en los triángulos, midieron los segmentos convenientes y calcularon el área en cm², en el plano. (Vea el plano que encabeza esta sección.)

He aquí sus cálculos:

$\triangle ABC$: $AC = 7$ $BP = 2.6$ Area $= \frac{1}{2} \times 7 \times 2.6 = 9.1$

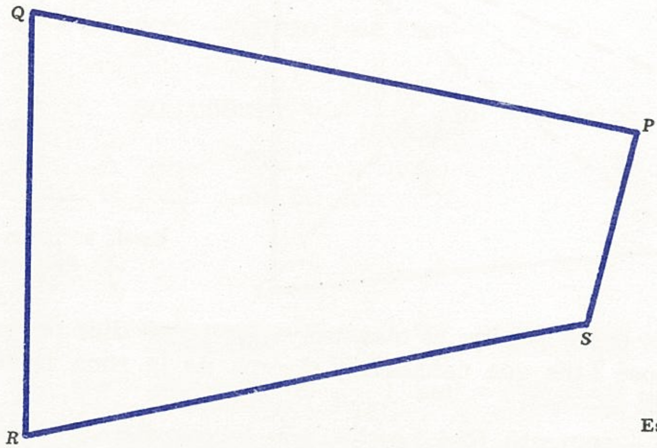
$\triangle ACD$: $CD = 2$ $AQ = 6.9$ Area $= \frac{1}{2} \times 2 \times 6.9 = 6.9$

$\triangle ADE$: $AD = 7$ $ER = 4$ Area $= \frac{1}{2} \times 7 \times 4 = 14$

Area del polígono $ABCDE$ $= 30.0 \text{ cm}^2$

$$\text{Area de la zona deportiva} = 30 \times 10\,000^2 \text{ cm}^2 = \frac{30 \times 10\,000^2}{10\,000^2} \text{ hectáreas} = 30 \text{ hectáreas}$$

Ejercicio 17. El siguiente dibujo es un plano a escala de la planta de un edificio. Encuentre el área que ocupa el edificio. Exprese el resultado en m².



Escala 1 : 500

Trabajos prácticos. Siguiendo este método calcule el área de alguna parcela, lote, parque o patio. (Primero levante un plano a escala, triangulando convenientemente.)

Carolina y José Luis mostraron al maestro sus cálculos.

—Muy bien —dijo el maestro—. Pero ¿cómo trazaron las alturas en los triángulos?

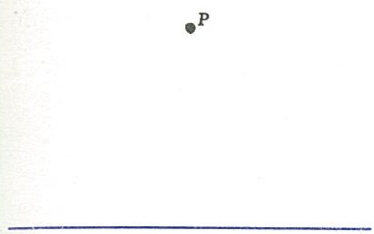
—Con una escuadra —respondió Carolina.

—Bien, pero fíjense que como después tienen que multiplicar por k^2, en este caso $10\,000^2 = 100\,000\,000$, los errores de dibujo y de medición que hacen en un plano se vuelven después muy significativos. Por esto conviene hacer los dibujos muy precisos y, si es posible, a una escala menor. Por ejemplo, en su caso, podían haber hecho un dibujo tomando la escala 1 : 2 500.

—Así lo haremos, maestro.

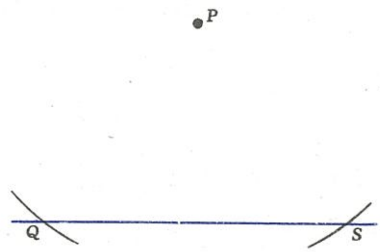
—Además les voy a mostrar un método para trazar perpendiculares en el que se utiliza el compás en vez de la escuadra, y que es algo más preciso. Vean esta serie de dibujos:

1



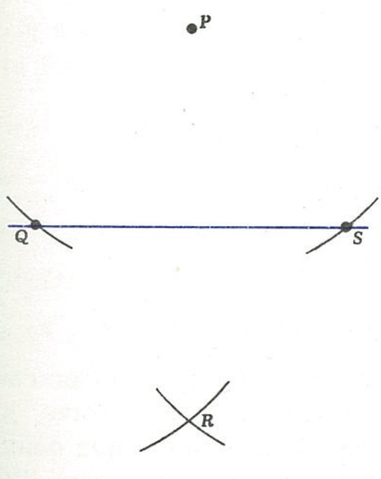
Punto y recta dados.

2



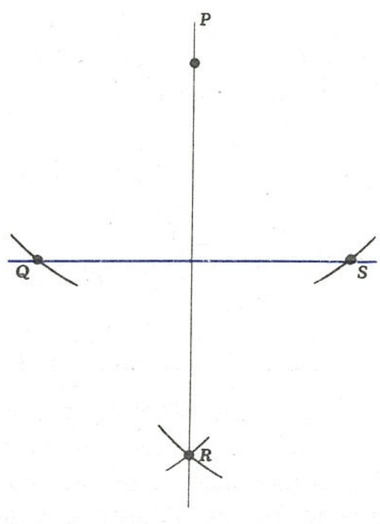
Con el compás apoyado en *P* y con una misma abertura trazamos dos arcos que corten a la recta. Obtenemos dos puntos Q y S.

3



Apoyando el compás primero en Q y después en S y con una misma abertura trazamos dos arcos que se corten. Obtenemos un punto *R*.

4



Trazamos la recta *PQ*, la cual *resulta perpendicular a la recta dada.*

Ejercicio 18. Practique el método anterior para trazar una perpendicular, desde un punto dado, a una recta dada.

Carolina y José Luis lo hicieron así y al calcular nuevamente el área encontraron que ésta es

29.63 hectáreas.

El maestro los felicitó y agregó:

—Pues bien, ya que estamos en esto de medir áreas les voy a dar una fórmula para calcular el área de un triángulo, del que conocemos las medidas de sus lados, y sin tener que calcular la longitud de ninguna altura. Esta fórmula la encontraron ya hace muchos siglos. Algún día ustedes la demostrarán también. Ahora simplemente la pueden aplicar (si tienen fe en lo que hizo algún matemático de la antigüedad).

—Y ¿cuál es esta fórmula?

—Dice así:

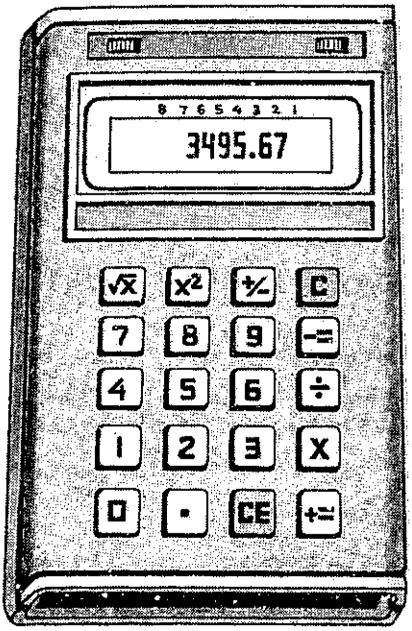
Si las longitudes de los lados de un triángulo son a, b, y c, entonces su área es

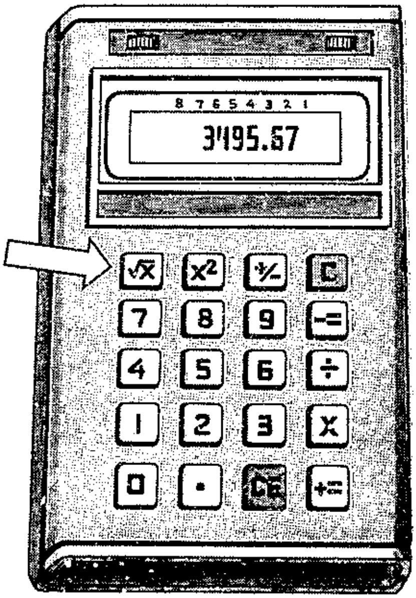
$$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

en donde $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$.

—Pero aquí hay una raíz cuadrada —alega José Luis.

—No es tan difícil encontrar la raíz cuadrada. Si no saben cómo se hace, aquí hay unas tablas. Si no pueden manejar ni éstas, aquí está una calculadora de bolsillo. Marcan el número del que quieren encontrar la raíz cuadrada y al apretar este botón, aparece dicha raíz cuadrada.





—Que fácil, maestro —comentó entusiaεmada Carolina.

Y calcularon nuevamente el área de la zona deportiva utilizando esta fórmula. He aquí sus cálculos:

$\triangle ABC$: $s = \frac{1}{2}(3 + 6 + 7) = 8$

$e(s - a)\,(s = b)\,(s - c) = 8\,(8 - 3)\,(8 - 6)\,(8 - 7) = 8 \times 5 \times 2 \times 1 = 80$ Area $\triangle ABC = \sqrt{80} = 8.94$

$\triangle ACD$: $s = \frac{1}{2}(7 + 7 + 2) = 8$

$s(\ - a)\cdot(s - b)\,(s = c) = 8\,(8 - 7)\,(8 - 7)\,(8 - 2) = 8 \times 1 \times 1 \times 6 = 48$ Area $\triangle ACD = \sqrt{48} = 6.93$

$\triangle ADE$: $s = \frac{1}{2}(7 + 5.5 + 5) = 8.75$

$s\,(s - a)\,(s - b)\,(s - c) = 8.75 \times 1.75 \times 3.25 \times 3.75 = 186.62$ Area $\triangle ADE = \sqrt{186.62} = 13.66$

Area total $= 29.53$ cm², en el plano.

Area del terreno $= 29.53$ hectáreas.

Ejercicio 19. Aplique la fórmula anterior para calcular el área de un triángulo cuyos lados miden

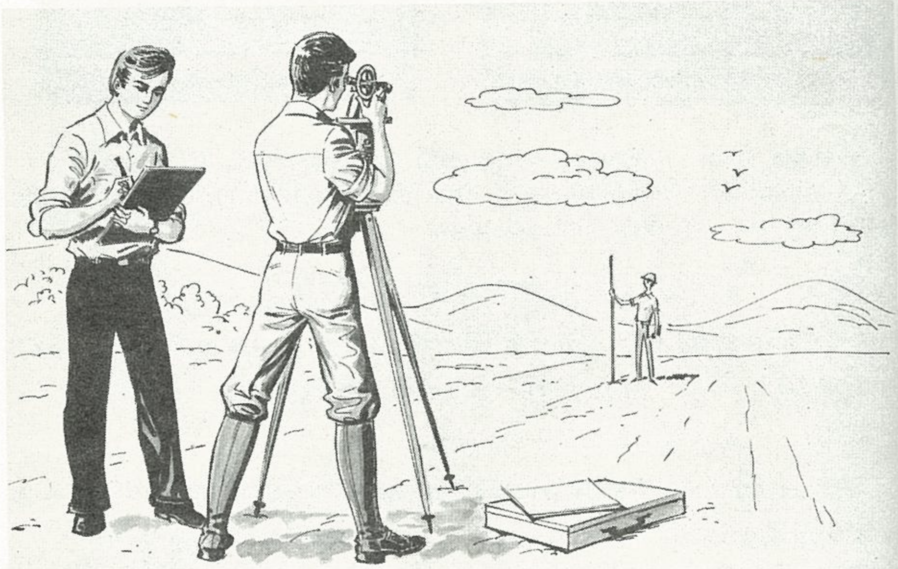
a) 3, 4 y 5 cm

b) 7, 8 y 9 m

Trabajo práctico. Mida los lados de un terreno, región u objeto triangular y, aplicando la fórmula, encuentre su área.

Carolina y José Luis mostraron al maestro el nuevo cálculo del área.

—Bien. Seguramente este resultado es una mejor aproximación. No crean ustedes que solamente se puede calcular el área con los métodos que ustedes conocen. Hay métodos más precisos, en los que se utilizan instrumentos especiales. Por ejemplo los niveles y los



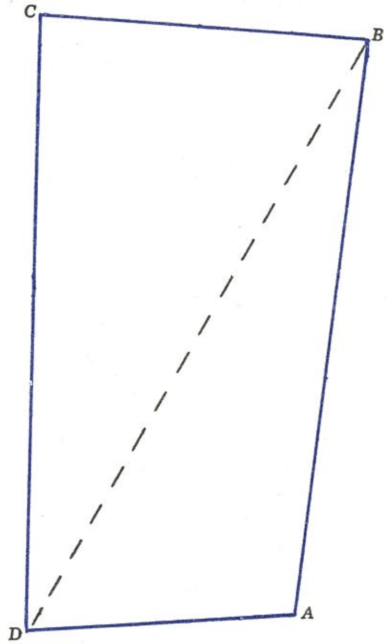
tránsitos. Hay personas que hacen estudios especiales para levantar planos con mucha precisión. No sólo de superficies planas sino también de terrenos ondulados. Son los topógrafos. Estudian generalmente en escuelas de ingeniería.

—Sí maestro, pero supongo que estos señores utilizan cosas de matemáticas como los teoremas y las fórmulas que nosotros hemos usado. ¿Y quiénes descubren y demuestran la validez de estos resultados?

—Estos son los matemáticos. Estudian en las facultades de matemáticas. Muchos se dedican a hacer más matemáticas. Se les llama investigadores. Los grandes adelantos de las demás ciencias y de la tecnología son posibles, en buena parte, por las matemáticas que se han ido haciendo en los últimos años.

Problemas.

1. Este es el plano de una parcela.



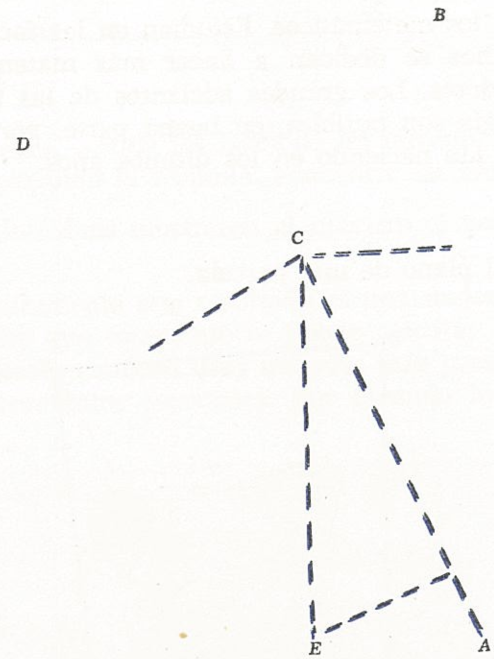
Escala 1 : 11 000

a) ¿Cuántas toneladas de trigo producirá si la producción por hectárea es de 3.5 toneladas?

b) ¿Cuántas toneladas de semilla serán necesarias para la siembra si se requieren 90 kg por hectárea?

c) Si la tonelada de semilla cuesta y la tonelada de trigo se paga a 1 750.00 pesos, ¿cuál será la ganancia?

2. Este es el plano de un terreno dedicado a la caña de azúcar.



Escala 1 : 12 000

¿Qué cantidad de azúcar se producirá de la cosecha de este terreno si cada hectárea produce 80 toneladas de caña y de cada tonelada se extrae el 10.5% de azúcar

3. En buenas condiciones una hectárea produce 6 toneladas de trigo. En malas condiciones produce solamente 1.8 toneladas. ¿Cuál sería la diferencia en las ganancias de una cosecha en una parcela triangular cuyos lados miden 1 800, 1 900 y 1 100 m, suponiendo buenas o malas condiciones?

Sugerencias para la solución de los Problemas 1 y 2 de la pág. 137.

Al Problema 1.

a) Trace un punto B' de tal manera que B, B' y A estén alineados.

b) Marque un punto C y el segmento BC. (Vea la figura.)

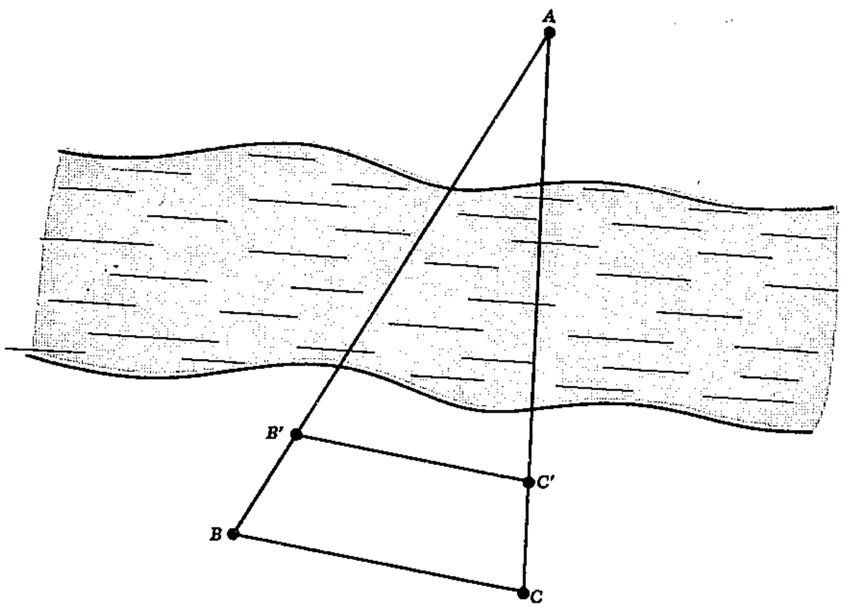
c) Trace una paralela a $\overline{BC}$ que pase por B'.

d) Mida $\overline{B'B}$, $\overline{BC}$ y $\overline{B'C'}$.

e) Sea $x = AB$, la distancia que se quiere encontrar. Entonces, por el Teorema 3,

$$\frac{x - B'B}{x} = \frac{B'C'}{BC}$$

f) Resuelva la ecuación y encontrará AB.



Al Problema 2.

a) Marque un punto A en nuestra orilla. Con el método del Problema 1 encuentre AB y AC.

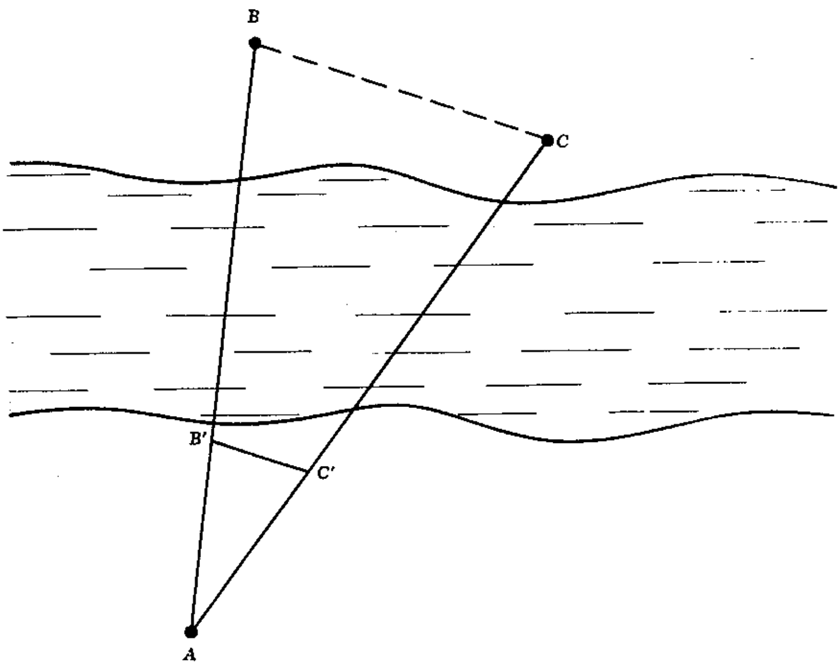
b) En la misma orilla marque un punto B' alineado con A y B y encuentre.

$$\frac{AB'}{AB} = k$$

c) Encuentre otro punto C' alineado con A y C y de tal manera que

$$\frac{AC'}{AC} = k \text{ [la misma de (b)]}$$

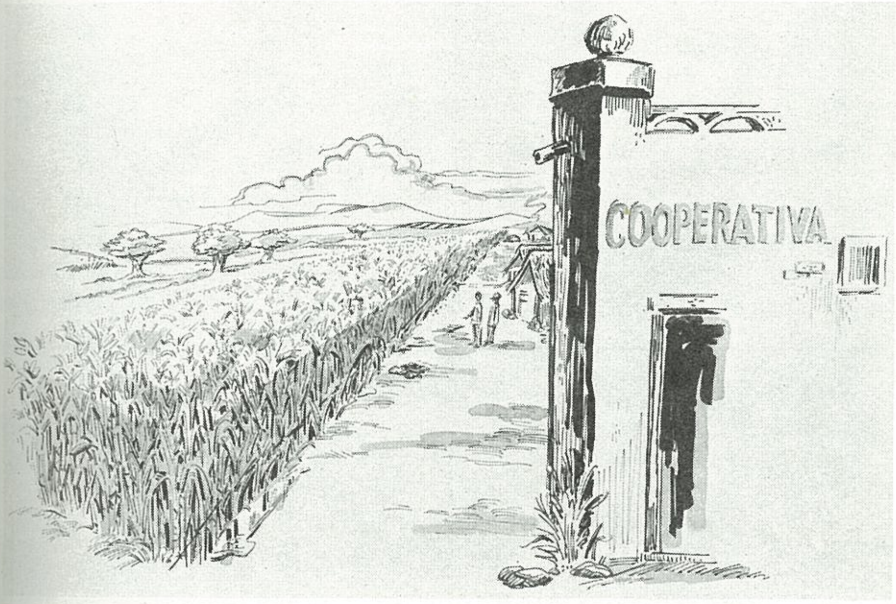
d) Mida $B'C'$ y aplique el Teorema 1.



CAPITULO QUINTO

PROBABILIDAD Y ESTADISTICA

1. MEDIA ARITMETICA



En Capultitlán se habían formado, con carácter experimental, 4 cooperativas agrícolas con el objeto de buscar una mejor organización y administración que permitieran incrementar la producción.

A fin de facilitar un estudio posterior, el director del Programa de Asesoramiento Técnico para Cooperativas, pidió, de manera muy especial al profesor Ruiz y a sus alumnos que elaboraran algunas gráficas para poder hacer comparaciones entre las cooperativas.

El profesor Ruiz creyó conveniente solicitar al representante de cada una de las 4 cooperativas un informe acerca del presupuesto, el número de campesinos asociados, los sueldos, etcétera.

Una vez que el maestro tuvo los 4 informes que había pedido, se dispuso a elaborar las gráficas solicitadas. Para entonces, Yolanda y Alejandro se habían ofrecido voluntariamente a ayudarlo.

—¿Con qué dato iniciarían ustedes el trabajo? —preguntó el maestro.

—A mí me gustaría —opinó Yolanda— que primero compararamos los sueldos en las 4 cooperativas.

—Muy bien —accedió el maestro—. Aquí tengo una lista de los sueldos diarios que perciben los campesinos en cada una de las 4 cooperativas:

Cooperativa A				Cooperativa B			
30	25	24	25	47	50	25	25
25	35	28	25	48	50	30	30
26	37	27	25	49	40	30	31
29	40	30		50	25	52	25
25	32	25		40	25	53	25

Cooperativa C			Cooperativa D		
65	70	70	60	57	48
66	70	50	50	46	50
67	70	73	46	61	
70	70	74	67	55	
70	70	75	60	49	

—¿Y cómo se pueden comparar esos sueldos, maestro?, —preguntó Alejandro.

—Podemos sumar los sueldos en cada una de las 4 cooperativas —dijo Yolanda— y luego comparamos los resultados.

Estimado lector: ¿Cree usted que este sería un buen método de comparar los sueldos por persona en las cuatro cooperativas?

—Un momento —habló el profesor—. No pueden comparar así los sueldos porque en estas cooperativas el número de campesinos es diferente.

—Entonces —exclamó Alejandro—, conviene obtener el promedio de sueldos en cada cooperativa.

—Exacto —contestó el maestro, y se dispuso a obtener el promedio de sueldos en la cooperativa A.

Primero sumó los sueldos de los 18 campesinos.

$$30 + 25 + 26 + 29 + 25 + 25 + 35 + 37 + 40 + 32 + 24 + 28 + 27 + 30 + 25 + 25 + 25 + 25 = \square.$$

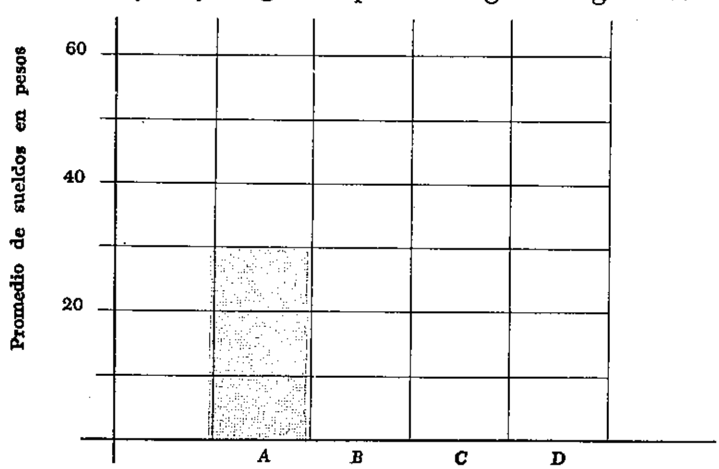
Y después dividió esa suma entre 18, el número de campesinos en la cooperativa A.

$$\frac{\square}{18} = \square$$

—De manera que —observó Alejandro— el promedio de sueldos en la cooperativa A es de $\$\square$.

—Así es, en efecto —asintió el maestro—. Ahora, ¿qué te parece si tú y Yolanda obtienen el promedio de sueldos en las cooperativas B, C y D, y luego elaboran una gráfica de barras con esos datos?

Ejercicio 1. Obtenga usted los promedios de sueldos en las cooperativas B, C y D y luego complete la siguiente gráfica.



Una vez terminado el trabajo, Alejandro comentó: "Realmente al observar esta gráfica se tiene una mejor idea sobre los promedios de sueldos, y se pueden establecer comparaciones entre ellos con más facilidad".

Yolanda preguntó: "¿Maestro, el *promedio* es lo que también se llama *media aritmética*?"

—En efecto, así es —contestó lacónicamente el maestro.

Los dos alumnos y el profesor continuaron hablando sobre las cooperativas, su organización, las cosechas, etcétera. En determinado momento hablaron sobre la lluvia y estuvieron de acuerdo en que ésta es un factor decisivo para una buena cosecha. Y surgió una pequeña discusión porque Alejandro afirmaba que en Capultitlán llovía más que en Tunatitlán, y Yolanda decía que tal afirmación era falsa pues ocurría todo lo contrario.

—No discutan más, por favor —pidió el maestro—. Hay una forma objetiva de decidir quién de ustedes tiene razón: Con un pluviómetro podemos medir la cantidad de lluvia que cae en los dos pueblos.

—Pero ese ha de ser un aparato muy complicado y muy caro —objetó Alejandro.

—Nada de eso —negó el maestro—. Tú puedes improvisar un pluviómetro.

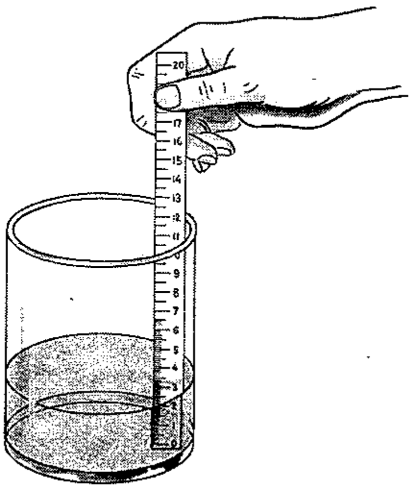
—¿Yo?, —preguntó Alejandro muy sorprendido—. ¿Y cómo le hago?

—Toma un recipiente de forma cilíndrica y colócalo en el patio de tu casa. Después de 30 días mide, en milímetros la altura que ha alcanzado el agua dentro del recipiente. De esa manera habrás medido la cantidad de lluvia que cayó ese mes en Capultitán.

—¿Y si tomo un recipiente cilíndrico de mayor tamaño no se afecta el resultado?

—Si tapas el recipiente cuando no llueve (para impedir la evaporación), obtendrás el mismo resultado. ¿Por qué?

Ejercicio 2. En un día lluvioso, coloque en el patio dos recipientes cilíndricos de diferente diámetro. Al terminar la lluvia mida en ambos recipientes el nivel alcanzado por el agua. Discuta el resultado con su maestro.



—Si efectúas la medición de la lluvia todos los meses y sumas los doce resultados —prosiguió el maestro—, obtendrás la cantidad de lluvia que cayó en Capultitlán durante el año.

—Y si procedemos en igual forma en Tunatitlán —agregó Yolanda— podemos comparar las medidas obtenidas en ambos pueblos, para saber dónde llovió más.

—Así es —confirmó el profesor.

Sin embargo, si se desea proporcionar al agricultor los datos que le son útiles, se le debe informar sobre la precipitación pluvial media en un mes. Esta es la media aritmética de la precipitación pluvial en un mes determinado durante un cierto número de años.

Por ejemplo, para calcular la precipitación pluvial media en el mes de julio en Mezcaltitlán, a partir de la siguiente tabla, se procede así:

Año	1968	1969	1970	1971	1972	1973	1974
Precipitación en julio	103.5	89.0	107.6	121.8	98.3	102.3	117.5

$$\frac{103.5 + 89.0 + 107.6 + 121.8 + 98.3 + 102.3 + 117.5}{7} = \frac{\qquad}{7} =$$

O sea, la precipitación pluvial media en Mezcaltitlán en el mes de julio es de   mm.

Observe ahora la siguiente tabla con datos correspondientes a dos distintas zonas de riego: Cihuatlán, del Estado de Colima y Río Yaqui, del Estado de Sonora.

	Periodo 6 años	Periodo 27 años
	Cihuatlán Precipitación en mm	Río Yaqui Precipitación en mm
Enero	22.4	15.5
Febrero	0.1	6.1
Marzo	0.1	3.6
Abril	1.3	1.5
Mayo	0.0	0.0
Junio	122.2	5.8
Julio	161.9	61.1
Agosto	177.3	72.2
Septiembre	208.2	47.4
Octubre	81.7	26.4
Noviembre	8.8	8.3
Diciembre	32.4	19.1
Anual	816.4	267.0

Discuta con sus compañeros y su maestro cómo, conociendo estos datos, los campesinos pueden planear y programar las diferentes faenas que han de realizar: la limpieza de terreno, la siembra, el abono, la cosecha, etc.

Ejercicio 3.

a) Los últimos doce años en Capultitlán, en el mes de junio, las precipitaciones pluviales han sido de: 36.2, 15.3, 28.5, 40, 38, 37.2, 25.8, 29.3, 35.4, 29.2, 18.3, 31.6. Obtenga usted la precipitación pluvial en el mes de junio en Capultitlán.

b) En Tunatitlán en los últimos 8 años, en el mes de junio, las precipitaciones pluviales han sido de: 72.1, 68.3, 65.0, 59.3, 73.4, 81.0, 56.2, 61.4. Obtenga usted la precipitación pluvial en el mes de junio en Tunatitlán.

c) En el mes de junio, ¿dónde llueve más, en Capultitlán o en Tunatitlán?

d) Si se hiciera una tabla de precipitaciones medias mensuales en Cihuatlán con datos tomados durante 15 años, ¿los datos serían iguales a los de la tabla mostrada?, ¿cuál tabla sería más confiable para predecir precipitación?

e) Si hiciéramos una tabla con los datos de un solo año, ¿habrá diferencia entre los datos de esta tabla y los de las dos anteriores? ¿Cuál de las tres tablas sería más confiable para hacer predicciones?

2. GRAFICAS CIRCULARES

En el informe presentado por los representantes de las cooperativas, además de indicar los gastos para sueldos de los campesinos, se indicaron también los gastos de administración, de compra de semillas, de compra de fertilizantes y de compra de insecticidas y fungicidas.

El profesor Ruiz concentró los datos de los informes en la siguiente tabla, en la cual se anotan los gastos correspondientes a 10 días.

Ejercicio 4. Complete la tabla de la siguiente página considerando que en esos 10 días, cada cooperativa gastó $15 000.00.

Yolanda, que era una entusiasta partidaria de la estadística, comentó: "Si con los datos de la tabla elaboramos una gráfica circular para cada cooperativa, será más fácil hacer algunas comparaciones."

—Muy bien —aprobó el maestro—. ¿Quieres encargarte de hacer esas gráficas?

Para la cooperativa A, Yolanda procedió de la siguiente manera: Primero sumó los datos anotados en la tabla,

	Cooperativa A	Cooperativa B	Cooperativa C	Cooperativa D
Sueldos a campesinos	5 130	7 500	10 500	
Administración	7 870		2 000	3 000
Semillas y riego	1 000	1 000		1 000
Fertilizantes	550	3 000	800	4 000
Insecticidas y fungicidas		2 000	700	510

(Los datos están dados en pesos.)

$$5\,130 + 7\,870 + 1\,000 + 550 = 14\,550$$

y luego restó esta suma de 15 000, a fin de determinar el gasto de insecticidas y fungicidas.

$$15\,000 - 14\,550 = 450.$$

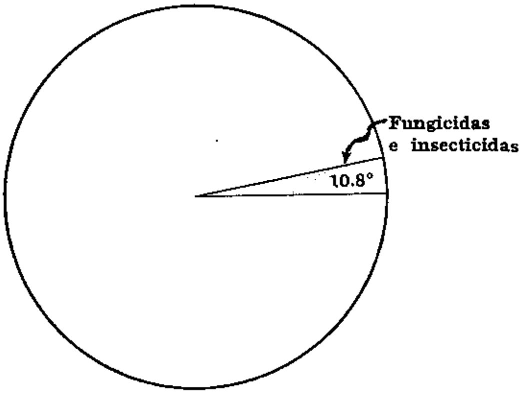
Después, para obtener el número de grados que en la gráfica corresponderá al gasto de insecticidas y fungicidas, resolvió la siguiente proporción.

$$\frac{450}{15\,000} = \frac{x}{360}.$$

(Esto se hace así porque en la circunferencia hay 360°.)

$$x = \frac{450 \times 360}{15\,000} = 10.8$$

Con ese dato empezó a construir su gráfica circular:

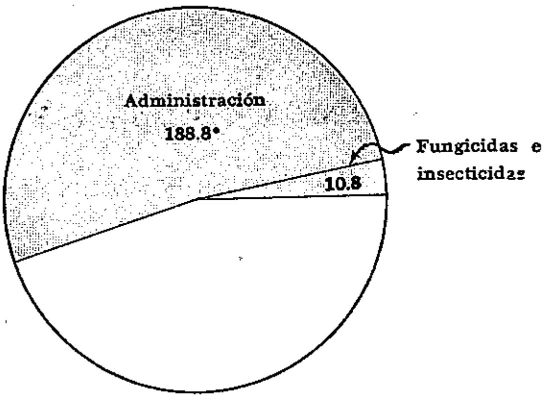


Para obtener el número de grados correspondiente a gastos de administración procedió así:

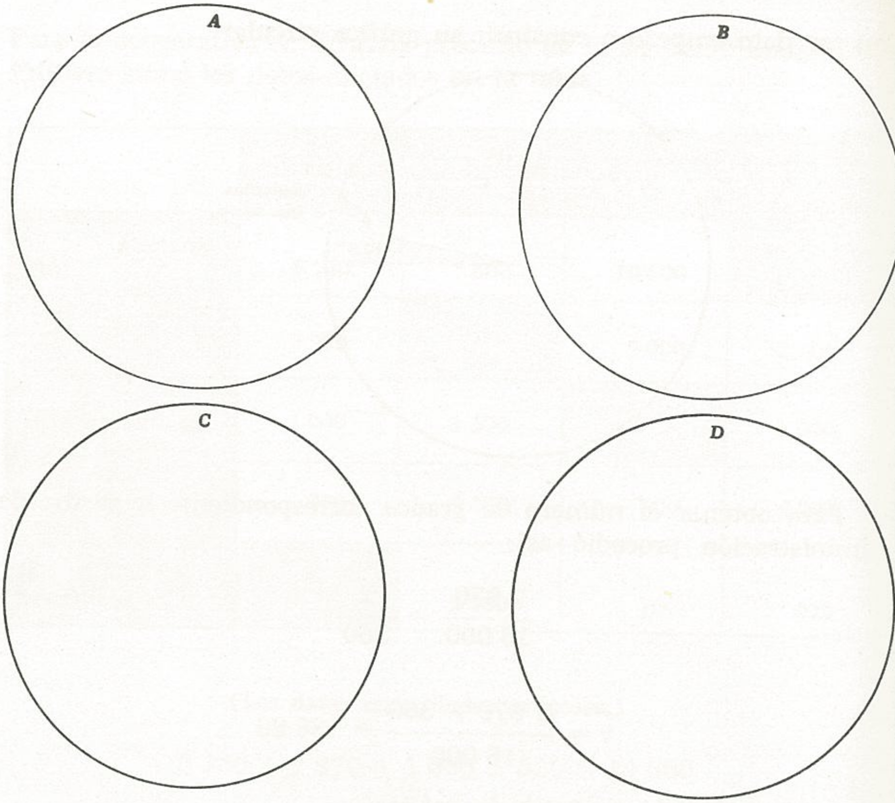
$$\frac{7\,870}{15\,000} = \frac{x}{360}$$

$$x = \frac{7\,870 \times 360}{15\,000} = 188.88$$

y continuó la elaboración de la gráfica:



Ejercicio 5. Complete la gráfica circular correspondiente a los gastos de la cooperativa *A* y en forma análoga elabore gráficas para las cooperativas *B*, *C* y *D*.



Ejercicio 6. De acuerdo con las gráficas anteriores establezca algunas comparaciones y haga algunos comentarios en clase.

3. INFERENCIA ESTADISTICA

—A mí me gustaría —comentó Yolanda— comparar la cantidad de dinero que obtendrá cada cooperativa al vender su cosecha; pero de momento no es posible, tendremos que esperar algún tiempo.

—Pero podemos —le aclaró Alejandro— calcular aproximadamente, cuál será la producción y la ganancia en cada una de las cooperativas.

—En efecto, así es —afirmó el profesor Ruiz—. Sugiero que en cada sembradío se tome una muestra de 10 m^2 de la milpa y se pese el maíz producido en ese pedazo de terreno. Para simplificar el trabajo, yo tomaré la muestra en los sembradíos de las cooperativas *A* y *B* mientras ustedes hacen lo mismo con las cooperativas *C* y *D*.

Procedieron tal como el maestro había indicado y al reunirse nuevamente éste dijo: "Por lo que se refiere a la cooperativa *A*, el peso del maíz contenido en 10 m² resultó ser de 4 kg. Así que para saber aproximadamente la cantidad de maíz que hay en las 5 hectáreas, multiplico 4 por 5 000, y encuentro que su producción aproximada será de 20 000 kg de maíz, o sea, 20 toneladas".

—Maestro —preguntó Yolanda—, ¿por qué multiplicó usted por 5 000?

—Recuerda que una hectárea son 10 000 m². Esto es, en una hectárea hay 1 000 pedazos de 10 m² y, por consiguiente, en 5 hectáreas habrá 5 000 pedazos de 10 m².

—¡Ah sí!, ya recuerdo —exclamó Yolanda.

—Y finalmente —intervino Alejandro—, tendrá usted que multiplicar 20 toneladas por $1 750 que es el precio de una tonelada de maíz.

—Exactamente —confirmó el maestro—. Ahora, ¿qué les parece si realizan los cálculos necesarios para determinar aproximadamente la cantidad de dinero que obtendrá cada cooperativa al vender su cosecha?

Y todos se dispusieron a trabajar.

Ejercicio 7. Complete usted las tablas siguientes.

Cooperativa *A*		Cooperativa *B*	
Peso del maíz contenido en 10 m²	4 kg	Peso del maíz contenido en 10 m²	8 kg
Peso aproximado del maíz contenido en 5 hectáreas		Peso aproximado del maíz contenido en 5 hectáreas	
Valor aproximado de la cosecha		Valor aproximado de la cosecha	
Cooperativa *C*		**Cooperativa *D***	
Peso del maíz contenido en 10 m²	4.8 kg	Peso del maíz contenido en 10 m²	6 kg
Peso aproximado del maíz contenido en 5 hectáreas		Peso aproximado del maíz contenido en 5 hectáreas	
Valor aproximado de la cosecha		Valor aproximado de la cosecha	

Yolanda sugirió que sería conveniente determinar en cada muestra el porcentaje de maíz dañado, ya que esto influiría en los precios de las cosechas.

La sugerencia de Yolanda fue aceptada. En cada muestra se pesó el maíz dañado por los insectos y por los hongos. Se obtuvieron los siguientes resultados:

El profesor calculó el porcentaje del maíz dañado en la muestra de la cooperativa *A*, dividiendo 0.60 entre 4, así que en esa muestra el porcentaje de maíz dañado es el 15%.

Kilos de maíz		Kilos de maíz dañado
Cooperativa A:	4	0.60
Cooperativa B:	8	0.08
Cooperativa C:	4.8	0.48
Cooperativa D:	6	0.30

Ejercicio 8.

El profesor calculó el porcentaje del maíz dañado en la muestra de la cooperativa A, dividiendo 0.60 entre 4, así que en esa muestra el porcentaje de maíz dañado es el 15%.

a) Encuentre usted el porcentaje de maíz dañado en las muestras de las cooperativas B, C y D.

b) ¿Piensa usted que estos porcentajes serán aproximadamente iguales a los porcentajes de maíz dañado en las cosechas? ¿Por qué?

Dirigéndose a sus alumnos el maestro comentó:

—Aunque generalmente el resultado que se infiere a partir de la muestra y la situación real en el conjunto no son iguales, es probable que se obtengan resultados sensiblemente iguales.

—Maestro. ¿Nos puede proporcionar otro ejemplo sobre esto? —preguntó Yolanda.

—¡Cómo no!, —respondió el maestro:

Ejemplo. "En una universidad de 9 000 alumnos, se tomó una muestra al azar de 300 alumnos y se encontró que, de ellos, 100 hablan inglés. ¿Aproximadamente cuántos alumnos de la universidad hablan inglés?

Para encontrar la respuesta a esta cuestión podemos establecer la siguiente proporción:

$$\frac{100}{300} = \frac{x}{9\,000} \qquad\qquad x = \frac{9\,000 \times 100}{300} = 3\,000$$

Es decir, probablemente 3 000 alumnos de esa universidad hablan inglés.

Ejercicio 9. Tal como procedió el maestro en el ejemplo anterior, use proporciones para resolver los siguientes problemas.

a) De una urna con 500 canicas, se extraen 50 al azar y se encuentra que 15 son negras y 35 blancas. ¿Aproximadamente cuántas canicas blancas hay en la urna? ¿Y cuántas negras?

b) En una escuela secundaria de 700 alumnos se eligen 100 de ellos al azar, se les practica un examen coproparasitológico y se ecuentra que todos ellos tienen parásitos intestinales. ¿Aproximadamente cuántos alumnos en esa escuela secundaria están parasitados?

c) En una población de 3 000 habitantes, se eligen 200 personas al azar y se encuentra que, de ellas, solamente 150 saben leer. ¿Aproximadamente cuántas personas saben leer en esa población?

d) De 7 500 lavadoras se toma una muestra al azar de 150. Se encuentra que en la muestra hay 80 defectuosas. ¿Aproximadamente cuántas de las 7 500 lavadoras son defectuosas?

e) De 100 000 accidentes automovilísticos, se considera una muestra de 800 al azar. Se encuentra que, de esa muestra, 750 ocasionan pérdidas de menos de $500.00. ¿Aproxima damente cuántos de los 100 000 accidentes ocasionan pérdidas de menos de $500.00?

El maestro continuó: "Observen que en los problemas anteriores los elementos de la muestra se toman al azar. Esto es de vital importancia, pues el procedimiento que seguimos para inferir un resultado sólo es válido en esas condiciones.

"Analicemos las siguientes situaciones para aclarar un poco eso de elegir la muestra al azar.

"1. Tunatitlán tiene 5 000 habitantes y se sabe que hay más de 1 000 personas menores de 20 años. Se desea saber con una mayor aproximación cuál es el número de habitantes que tienen menos de 20 años.

"Elegimos una muestra de 100 habitantes entre los transeúntes de una calle en la mañana de cierto día. Como resultado encontramos que de esos 100 habitantes hay 7 que son menores de 20 años. Por lo tanto, establecemos la proporción

$$\frac{7}{100} = \frac{x}{5\,000}$$

en la que x es igual a 350, porque

$$x = \frac{7 \times 5\,000}{100} = 350,$$

e inferimos que 350 habitantes de Tunatitlán son menores de 20 años".

—¿Cómo está eso?, —preguntó Yolanda— Sabemos que en Tunatitlán hay más de 1 000 personas que son menores de 20 años, ¿por qué llegamos a este resultado incorrecto?

El maestro contestó: "En una primera presentación del caso, podemos pensar que las 100 personas fueron elegidas al azar, pero, desde luego, esto no fue así, pues hay que considerar que la gente que transitaba por una calle a determinada hora es un grupo con características específicas. En este caso también hay que ver que a la hora en que se realizó el interrogatorio, la mayoría de los estudiantes (muchos de los cuales son menores de 20 años) estaban en sus escuelas y no tuvieron ninguna oportunidad de ser elegidos. Como vemos, la muestra no fue tomada al azar y ello dio lugar a inferencia incorrecta.

"Es muy frecuente, sobre todo en la radio y en la televisión, oír expresiones como: "8 de cada 10 personas fuman cigarros de tal marca" o "3 de cada 5 dentistas recomiendan tal dentífrico", etc. Pero en esos anuncios comericales nunca mencionan cómo fueron elegidas las 10 personas o los 5 dentistas.

"En este tipo de propaganda, a los publicistas no les interesa presentar datos correctos, sino servir a los intereses de sus patrones".

Ejercicio 10. Diga en cada caso si el dato que se infiere es correcto o equivocado.

a) Al interrogar a 50 dentistas de una clínica se encuentra que 40 de ellos usan el dentífrico Z. Se infiere que 4 de cada 5 dentistas en el país usan el dentífrico Z.

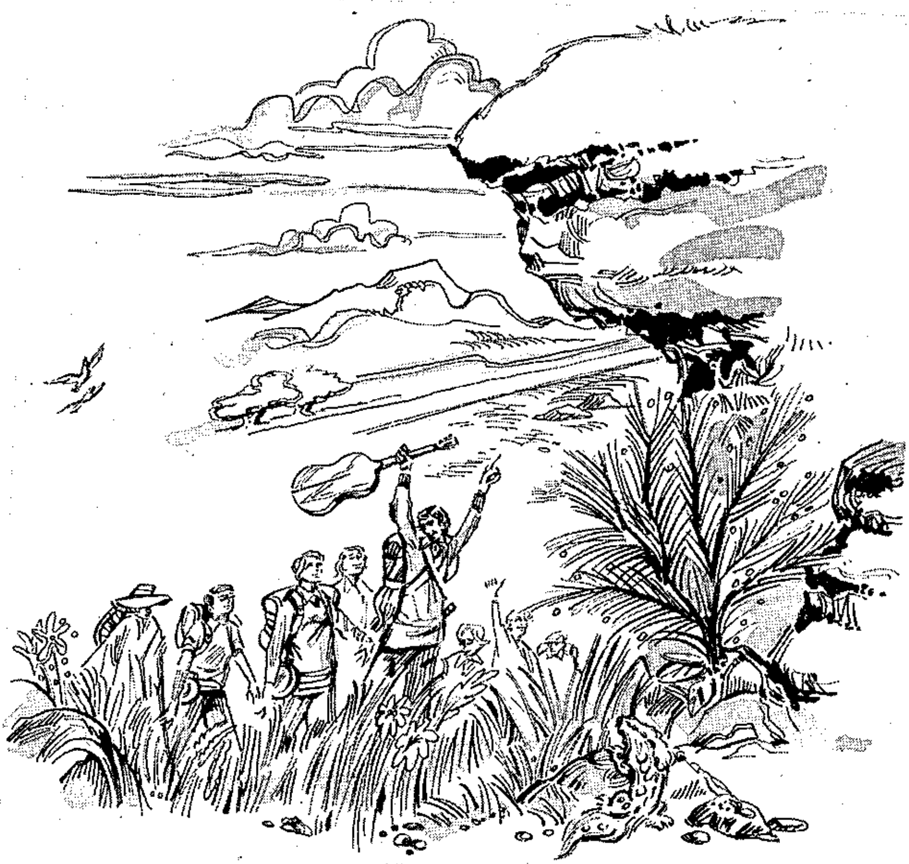
b) Un trabajador falta dos lunes consecutivos. El patrón dice que tal trabajador falta todos los lunes.

c) Durante cierto concurso de popularidad, de 100 cartas que llegan a un canal de T.V., hay 75 que favorecen al locutor Pérez. Se declara que el 75% de los televidentes, en el país, votan por el locutor Pérez.

d) De 20 empleados de una oficina, hay 14 que usan camisas "w". Se infiere que en el país 7 de cada 10 empleados usan camisas "w".

e) En cierta colonia, se visitan 250 hogares y resulta que en 125 de esos hogares se escucha la estación radiodifusora "k". Se infiere que en la mitad de los hogares del Distrito Federal se escucha la estación "*k*".

4. AZAR



El profesor Ruiz organizó una excursión a "Río Revuelto".

Durante la excursión el profesor anunció que rifaría una guitarra.

A cada uno de los 30 alumnos que asistieron se le entregó un boleto numerado. Después se depositaron en un sombrero 30 papeles doblados y también numerados. Se mezclaron perfectamente y el maestro extrajo el papel con el número 17. A la persona con el número 17 en su boleto se le entregó la guitarra.

Uno de los alumnos, acercándose al profesor, comentó:

—Yo estaba seguro que mi número sería el premiado.

—No —replicó el profesor—. Tú deseabas obtener el premio, pero no podías estar seguro que tu número sería el premiado, Recuerda que una rifa es un experimento de azar y que en los experimentos de azar no se puede predecir el resultado.

Yolanda intervino diciendo: "Si no podemos predecir el resultado en los experimentos de azar, ¿para qué estudiamos esas cosas?"

—Mira, Yolanda: si un experimento al azar se realiza sólo una vez, el estudio de tal experimento carece de importancia como tú dices. Pero si realizamos muchas veces su estudio adquiere sentido y significado.

—No comprendo eso muy bien profesor.

—Te pondré un ejemplo, —prosiguió el maestro—. En una urna hay 50 canicas de diversos colores. Sin ver extraemos una canica, anotamos su color y la regresamos a la urna.

Y el maestro continuó exponiendo:

"Hemos efectuado el experimento al azar una sola vez; pero no vemos cómo esto pueda ser objeto de estudio.

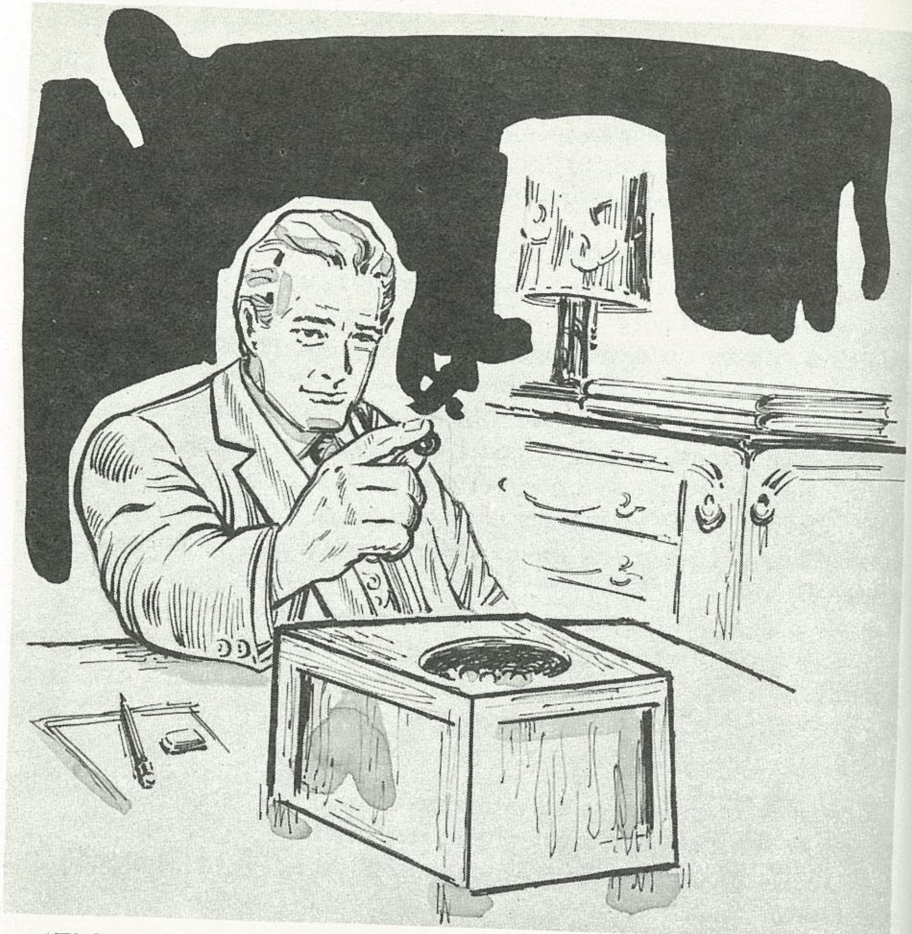
"Ahora efectúa el experimento 100 veces y ve anotando tus resultados.

"Si observas tus anotaciones te darás cuenta que puedes decir mucho sobre el color de las canicas en la urna. Es decir, puedes hacer ciertas predicciones, lo cual ya es razonable considerarlo como materia de estudio".

—Todo eso está muy bien —dijo Alejandro—. Pero, ¿cuál es el objeto de estudiar experimentos de azar, si éstos sólo tienen que ver con juegos de dados, rifas, naipes, urnas, ruletas, etc.?

—Estás en un error —contestó el profesor—. Si reflexionas un poco, verás que gran parte de las cosas que nos ocurren diariamente tienen que ver con el azar —y agregó:

"Por ejemplo, después que un campesino siembra, el hecho de obtener una buena cosecha queda sujeto al azar, pues no se pueden prever las heladas, las plagas, las lluvias fuera de tiempo, etc.



"El hecho de que tú adquieras una enfermedad el próximo mes, queda sujeto al azar, pues no es posible prever los cambios en la temperatura, el trato que tendrás con personas enfermas, etc.

"Recuerda también que cuando tomamos en los sembradíos una muestra de 10 m², la elección se hizo al azar.

"Creo que ahora ya comprendes por qué es importante el que toda persona estudie, aunque sea un poco, sobre el azar".

—Sí, maestro, ya me convenció.

Ejercicio 11. Describa cinco situaciones en donde intervenga el azar.

Ejercicio 12. En relación a la situación señalada en cada inciso, indique si el resultado es al azar o no.

a) En un laboratorio de química se mezclan dos sustancias conocidas.
b) Se revuelven las 52 cartas de una baraja y se extrae una.
c) Para ver si cura una determinada enfermedad, se aplica una droga desconocida a una rata.
d) Mete usted la mano en un recipiente con agua para ver si se moja.
e) Cuenta usted las llamadas telefónicas que recibe durante el día.
f) Usted multiplica la medida de la base de un rectángulo por la medida de su altura, para ver si obtiene el área del rectángulo.
g) Se lanzan tres monedas y se observa cuántos "soles" cayeron.
h) Durante un partido de fútbol, usted espera que determinado jugador anote un gol.

5. PROBABILIDAD DE UN EVENTO

—Cómprame boletos para la rifa —le pedía Guadalupe a Alejandro en la kermesse—. Son a $3.00 y sólo se hicieron 35 boletos.

—Mejor compra de los míos —interrumpió Yolanda—. Los doy a $2.00 y el premio es el mismo.

—Sí, pero. . . ¿cuántos boletos son en total en tu rifa

—Cincuenta —contestó Yolanda.

Alejandro tenía dispuestos $18 para participar en alguna difa; pero no se decidía a comprar los boletos, pues no sabía con quién tenía mayores posibilidades de ganar.

Casualmente pasaba por ahí el profesor Ruiz y Alejandro aprovechó para consultarle su problema.

Usted, estimado lector, ¿a quién le compraría los boletos?

El profesor Ruiz le dijo a Alejandro: "En primer lugar, toma en cuenta que una rifa es un experimento de azar en el cual podemos señalar los resultados posibles. Así, por ejemplo, en el experimento de lanzar un dado, el conjunto de resultados posibles es 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Al conjunto de resultados posibles en un experimento al azar lo llamamos *espacio muestra*.

"Si se trata del experimento de extraer una carta de un mazo de 52, entonces el espacio muestra son las 52 cartas, ya que cada carta es un resultado posible.

"Con respecto al experimento de lanzar una moneda, resulta claro que el espacio muestra es {águila, sol}".

Ejercicio 13. En cada uno de los siguientes experimentos indique cuál es el espacio muestra.

a) Se le pregunta a una persona distinta cada vez, en qué mes del año nació.
b) Se extrae una carta de una baraja española (40 cartas).

c) Se rifa un radio entre 25 personas.
d) Se anota la primera letra de 100 palabras.
e) Se juega a la lotería. El premio es de $5 000 000 y la emisión es de 40 000 billetes.
f) Se le pregunta en el D. F., a una persona diferente cada vez, qué estación de radio escucha.
g) Se lanzan dos monedas, una de $1.00 y la otra de $0.50, para ver si caen en águila o sol, una o ambas.
h) De 14 fichas de dominó usted extrae una.
i) Se extrae una carta de una baraja inglesa (52 cartas).
j) Se hace girar una perinola de 6 caras laterales.

"Recuerda también —continuó el maestro— que en la teoría de la probabilidad, cuando hablamos de un experimento al azar, idealizamos un poco las cosas.

"Por ejemplo, en el caso de lanzar una moneda al aire excluimos como resultado posible el que la moneda caiga de canto, ya que esto es «casi imposible» que suceda; pero, como sabemos, llega a darse el caso.

"En el caso de lanzar un dado de seis caras suponemos que no está "cargado"; de manera que cada uno de los 6 números tiene exactamente la misma oportunidad de quedar en la parte superior. Suponemos también que la persona que lanza el dado no tiene ninguna habilidad que diera a algún número más oportunidad que a otros.

"Ahora bien, si consideramos un experimento al azar y su correspondiente espacio muestra, entonces un evento es un subconjunto del espacio muestra. (Y no olvides que un subconjunto puede no tener elementos o tener uno, dos o más.)"

¿Podría aclararme esto —pidió Alejandro— con algunos ejemplos?

—¡Cómo no! —contestó el maestro—. Mira, en el experimento al azar de extraer una carta de una baraja inglesa, un evento es "sacar un rey". Fíjate que este evento tiene únicamente 4 elementos, pues en la baraja hay 4 reyes. Otro evento es "sacar un trébol". Observa que este evento tiene 13 elementos, pues hay 13 cartas en la baraja que son de tréboles.

—Veo en tu cara que aún tienes algunas dudas —dijo el maestro—. Te daré otro ejemplo:

"En el experimento de lanzar un dado de seis caras, un evento es "sacar un número impar". Toma en cuenta que este evento tiene

3 elementos que son los números 1, 3 y 5. Otro evento es "tirar un seis". Observa que este evento tiene un sólo elemento, pues en las caras del dado sólo hay un seis.

"Para que no quede ninguna duda te pondré un último ejemplo: Al sacar una carta al azar de una baraja española, el evento "sacar un nueve" no tiene elementos, pues en la baraja española no hay nueves.

"Si un evento no tiene elementos, lo llamaremos evento imposible".

Ejercicio 14. De acuerdo con el experimento en cada inciso indique cuántos elementos tiene el evento.

1. Se tira un dado de seis caras.

   a) "Sacar un número par".
   b) "Sacar un número mayor que 5".
   c) "Sacar un número menor que 3".
   d) "Sacar un número mayor que 6".
   e) "Sacar un 4".

2. En una bolsa hay 20 canicas azules, 10 amarillas y 5 rojas. Sin ver, se saca una canica de la bolsa.

   f) "Sacar una canica amarilla".
   g) "Sacar una canica azul".
   h) "Sacar una canica que no sea roja".
   i) "Sacar una canica que no sea azul".
   j) "Sacar una canica verde".

3. De una baraja inglesa se extrae al azar una carta.

   k) "Sacar un corazón".
   l) "Sacar una carta roja".
   m) "Sacar una carta que no sea as".
   n) "Sacar un diamante".
   o) "No sacar un diamante".

4. Se lanzan dos monedas, una de $1.00 y otra de $0.50.

   p) "Sacar dos águilas".
   q) "Sacar dos soles".
   r) "Sacar un águila y un sol".
   s) "Sacar al menos un águila".
   t) "Sacar al menos un sol".

—Te daré ahora la siguiente definición —dijo el maestro.

Con respecto a un experimento al azar, la probabilidad de un evento es el cociente del número de elementos del evento entre el número de elementos del espacio muestra.

—Maestro —interrumpió Yolanda, que estaba muy interesada en la plática—, sí consideramos a los elementos de un evento como resultados favorables, entonces la definición anterior ¿podría expresarse así?

Con respecto a un experimento al azar, la probabilidad de un evento es el cociente del número de resultados favorables entre el número de resultados posibles.

—Claro que sí, Yolanda —asintió el maestro, mirando con admiración a su alumna.

Ejercicio 15. En cada caso indique la probabilidad del evento.

a) Se extrae una carta al azar de una baraja inglesa. ¿Cuál es la probabilidad de sacar una reina?
b) De una urna con 10 canicas blancas y 5 negras se extrae una. ¿Cuál es la probabilidad de sacar una canica blanca?
c) Se lanza un dado de seis caras. ¿Cuál es la probabilidad de no sacar un 5?
d) ¿Cuál es la probabilidad de ganar en la rifa de un reloj, si hay 30 números y se compran 3 números?
e) ¿Cuál es la probabilidad de sacarse la lotería con un billete, en un sorteo cuya emisión es de 100 000 billetes?
f) De una urna con 15 canicas verdes y 10 amarillas se extrae una. ¿Cuál es la probabilidad de no sacar una canica amarilla?
g) ¿Cuál es la probabilidad de sacar "copas" al extraer una carta de una baraja española?
h) Se lanza un dado de 6 caras. ¿Cuál es la probabilidad de sacar un número mayor o igual a 3?
i) De las 28 fichas de dominó se extrae una. ¿Cuál es la probabilidad de obtener la doble de seises?
j) En un cuestionario una pregunta de opción tiene 3 posibles respuestas. ¿Cuál es la probabilidad de que se acierte casualmente a la pregunta?

¿Puede ahora usted, lector, resolver el problema de Alejandro?
—Creo que ya puedes —continuó el profesor dirigiéndose a

Alejandro— determinar en cuál de las rifas tienes mayor probabilidad de ganar.

Alejandro contestó: "Con los \$18.00 puedo comprar 6 boletos a Guadalupe. Así que en esta rifa la probabilidad de que yo obtenga el premio es de $\frac{6}{35}$. O bien, con los mismos 18.00, puedo comprar 9 boletos a Yolanda. De modo que, con ella, la probabilidad de ganar es de $\frac{9}{\square}$. Como $\frac{\square}{\square} < \frac{\square}{\square}$, si quiero tener mayor probabilidad de obtener el premio, debo comprarle los boletos a ________________".

6. DISTRIBUCION DE FRECUENCIA

Nuevamente, Yolanda, Alejandro y el profesor Ruiz charlaban alegremente.

—Maestro —dijo Alejandro—, en una ocasión cuando calculamos aproximadamente el valor de una cosecha, usted dijo que al tomar una muestra de 10 m² interviene el azar. ¿No quisiera usted hablarnos un poco más sobre esto?

—Cómo no —contestó el maestro y añadió:

"Supongamos que en un sembradío de 100 m² tenemos 100 muestras, cada una de 1 m². Supongamos también que pesamos el maíz contenido en cada uno de estos pedazos de terreno y obtenemos los siguientes datos:

161, 180, 186, 190, 194, 202, 210, 214, 220, 220 230, 232, 232,

234, 236, 236, 236, 238, 238, 240, 242, 246, 246, 250, 254, 254,

258, 258, 260, 262, 264, 266, 268, 268, 270, 274, 276, 278, 280,

284, 286, 286, 286, 288, 288, 290, 292, 292, 298, 300, 302, 304,

306, 308, 308, 308, 310, 310, 312, 312, 314, 314, 316, 318, 322,

322, 322, 326, 330, 332, 332, 332, 334, 334, 334, 338, 340, 344,

344, 346, 352, 358, 362, 362, 366, 372, 380, 382, 388, 388, 392,

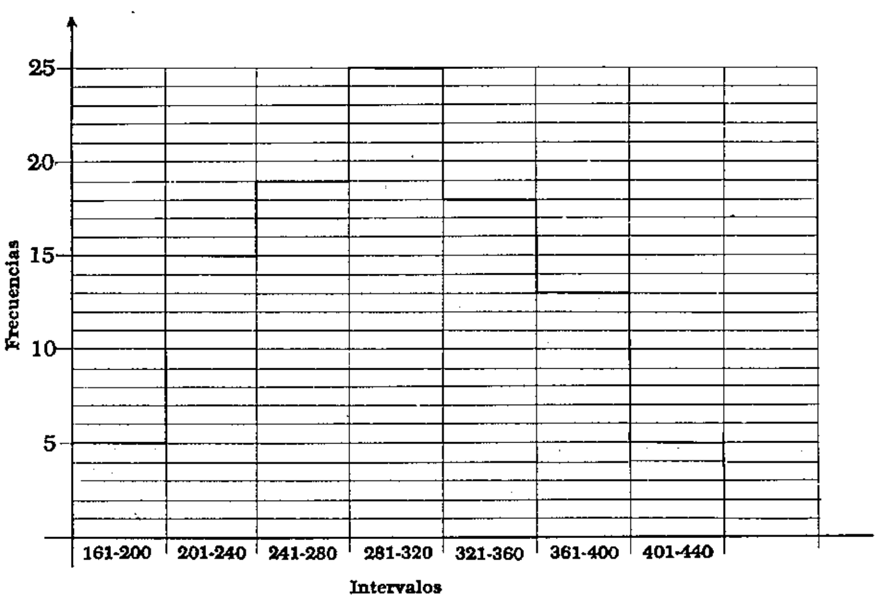
392, 394, 394, 398, 402, 420, 436, 437, 440.

"Manejar estos 100 datos resultará bastante incómodo. Así que nos conviene agruparlos. Para ello podríamos formar un grupo con los datos comprendidos entre 161 y 200 g, otro grupo con los datos comprendidos entre 201 g y 240 g, otro con los datos comprendidos entre 241 y 280, etcétera. Así ya podemos elaborar la siguiente *tabla de frecuencias.*

"El primer renglón de la tabla nos indica que hay 5 muestras con un peso de maíz entre 161 g y 200 g. El segundo renglón nos indica que hay 15 muestras con un peso de maíz entre 201 g y 240 g, etcétera.

Intervalo (pesos en gramos)	Frecuencia
161 —— 200	5
201 —— 240	15
241 —— 280	20
281 —— 320	25
321 —— 360	18
361 —— 400	13
401 —— 440	5

"Con los datos de esta tabla podemos construir un *diagrama de frecuencias* disponiendo en un eje horizontal los intervalos y en un eje vertical las frecuencias.



"Observen ahora el diagrama —continuó el maestro— y supongan que elegimos al azar una muestra en nuestro conjunto de 100 y que nos resulta una de las 5 muestras con menor peso, es decir, una muestra con un peso entre 161 g y 200 g. Si con este dato calculamos el maíz producido en el sembradío de 100 m², nuestra aproximación no será muy buena".

—Maestro —interrumpió Alejandro—, pero al tomar una muestra al azar la probalidad que nos resulte una de las 5 muestras con menos cantidad de maíz es $\frac{5}{100}$ o sea, de un 5%. En cambio, como hay 63 muestras con un peso entre 241 g y 360 g, la probabilidad de elegir una de estas muestras es $\frac{63}{100}$ o sea, de un 63%.

Yolanda agregó: "Y si con algunas de estas muestras calculamos el maíz producido en el sembradío de 100 m², nuestra aproximación, desde luego, será mejor".

De manera —continuó Alejandro— que en este caso, al tomar una muestra y calcular el maíz producido en el sembradío, la posibilidad de que nuestro cálculo sea una buena aproximación al valor real de la producción son mayores que las posibilidades de que el valor calculado se aparte mucho del valor real.

—¿Y siempre que se toma una muestra sucede esto? —Preguntó Yolanda?

—No —contestó el maestro—. Esto únicamente sucede cuando los datos de la población tienen una distribución de frecuencia parecida a la de nuestro ejemplo.

Ejercicio 16. En relación al anterior diagrama de frecuencias, ¿cuál es la probabilidad de que al tomar una muestra al azar...

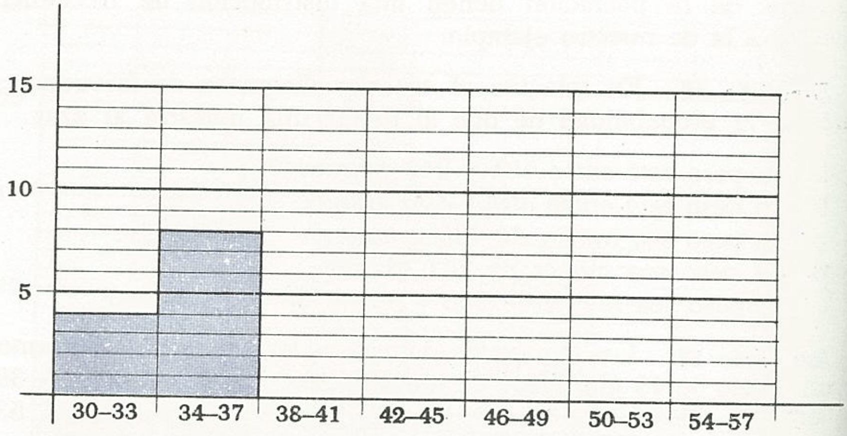
a) su peso esté entre 201 y 240 gramos;
b) su peso esté entre 361 y 400 gramos;
c) su peso sea mayor de 400 gramos;
d) su peso sea menor de 241 gramos;
e) su peso sea mayor de 280 y menor de 401 gramos?

Ejercicio 17. Los siguientes datos son los pesos en kilogramos de un grupo de 43 alumnos: 43, 45, 32, 36, 37, 44, 46, 42, 43, 39, 42, 45, 43, 42, 45, 45, 47, 45, 50, 49, 36, 36, 49, 40, 30, 57, 53, 34, 55, 36, 57, 37, 32, 40, 55, 40, 38, 45, 32, 57, 41, 52, 36.

Ordene los datos anteriores y complete la siguiente tabla de frecuencias.

Intervalo	Frecuencia
30–33	4
34–37	8
38–41	
42–45	
46–49	
50–53	
54–57	

De acuerdo con los datos de la tabla complete el siguiente diagrama de frecuencias



Al elegir al azar un alumno en este grupo; ¿cuál es la probabilidad de que su peso:

a) sea menor de 34 kg;

b) sea mayor de 53 kg;

c) esté entre 38 y 49 kg;

d) esté entre 34 y 53 kg;

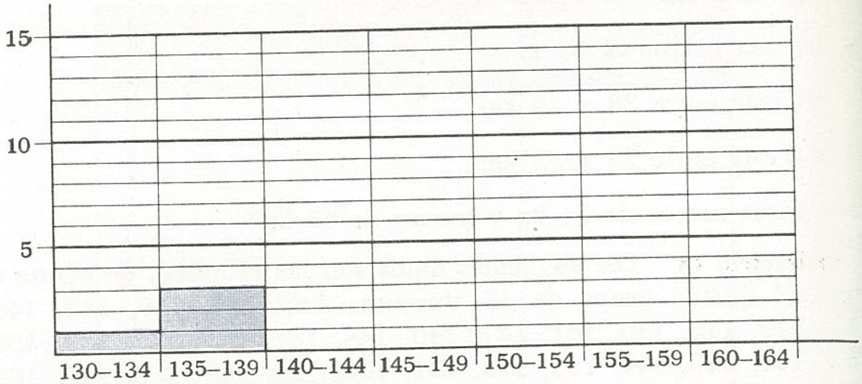
e) sea mayor de 34 kg y menor de 45 kg?

Ejercicio 18. Los siguientes datos son las estaturas en centímetros del mismo grupo de 43 alumnos: 146, 157, 139, 140, 148, 154, 149, 145, 150, 151, 147, 140, 144, 154, 153, 147, 149, 152, 155, 160, 140, 144, 153, 143, 131, 160, 155, 143, 158, 140, 160, 145, 135, 145, 160, 141, 141, 154, 137, 160, 145, 158, 142.

Ordene los datos anteriores y complete la siguiente tabla de frecuencias:

Intervalo	Frecuencia
130–134	1
135–139	3
140–144	
145–149	
150–154	
155–159	
160–164	

De acuerdo con los datos de esta tabla complete el siguiente diagrama de frecuencias.



Al elegir al azar un alumno en este grupo: ¿Cuál es la probabilidad de que su estatura:

a) sea mayor de 149 cm;

b) sea menor de 150 cm;

c) esté entre 140 y 154 cm;

d) esté entre 145 y 159 cm;

e) sea menor de 145 cm y mayor de 139 cm?

Ejercicio 19. Forme cuatro conjuntos de datos interrogando a sus compañeros sobre

a) su edad en años cumplidos;

b) su número de hermanos;

c) su peso en kilogramos;

d) su estatura en centímetros.

Para cada conjunto elabore los correspondientes diagramas de frecuencias y compárelos entre sí, a fin de establecer algunas semejanzas o diferencias.

7. PROBABILIDAD EMPIRICA

—Tengo entendido que las compañías de seguros no aseguran el valor de la cosecha —comentaba Yolanda con el maestro—, sino únicamente la inversión hecha durante la siembra.

—Así es, en efecto.

—¿Ya sabe usted que las cooperativas decidieron no tomar el seguro que les ofrecían contra posibles heladas? ¿Qué piensa usted de eso?

—Yo creo que están muy en su derecho. Pero también pienso que antes de tomar una decisión como ésa, se debe conocer más a fondo cómo funciona un seguro. ¿Crees tú que cuando una compañía asegura algo tiene una pequeña probabilidad de perder?

—Pienso que sí, maestro.

—¿Crees que las compañías de seguros deben fijar las primas tomando en cuenta el valor de lo que aseguran y la probabilidad que tienen de perder?

—Sí, creo que eso sería lo justo. Pero, ¿cómo se puede determinar la probabilidad de que una compañía pierda cuando asegura algo?

—En casos como éste de las cosechas no hay más alternativa que recurrir a la experiencia. Por ejemplo, si en los últimos 15 inviernos ha helado 2 veces en Capultitlán, decimos que la *probabilidad empírica* de que el próximo invierno caiga una helada es de $\frac{2}{15}$

—Ya entiendo —dijo Yolanda—, y si en algún otro lugar en los últimos 20 inviernos ha helado 7 veces, diremos que la probabilidad emprírica de que caiga una helada en ese lugar es de $\frac{7}{20}$.

—¡Exacto! —confirmó el maestro—. Ahora supongamos que en ese lugar que tú mencionaste, un campesino asegura una inversión de $1 000. ¿Cuánto crees tú que debiera ser la prima fijada por la compañía? (Si usted, amable lector, fuera el empleado de una compañía de seguros, ¿qué prima fijaría?)

—Creo —dijo Yolanda— que $\frac{7}{20}$ de $1 000, o sea, es una prima justa, ya que está de acuerdo con el riesgo que corre la compañía.

—Tienes razón —aceptó el maestro—; pero no has tomado en cuenta que las compañías de seguros tienen que cubrir ciertos gastos y además obtener alguna ganancia.

—Es verdad —musitó pensativa Yolanda—. Convendría agregar a esos $350.00 una pequeña cantidad, digamos un 10%, para los gastos que usted señala.

—¿Por qué el 10%?

—Porque la aseguradora, al tener muchos clientes, juntará miles con una pequeña cantidad que le cobre a cada uno.

—Es cierto... Ya veo que si alguna vez tomas un seguro, primero analizarás el valor de lo que estás asegurando, luego tratarás de cuantificar el riesgo que corre la compañía; es decir, obtendrás la probabilidad de que la compañía pierda, y finalmente comprobarás si estos datos están más o menos de acuerdo con las primas que te quiera cobrar la aseguradora. ¿O no es así?

—Así es, maestro.

—¿Qué te parece ahora sí te pongo unos problemas sobre eso?

—Me parece bien, maestro.

—Aquí los tienes.

PROBLEMAS

1. En cierto lugar el "río Caudaloso" se ha desbordado 5 veces en los últimos 18 años. Y en otro lugar el río Verde se ha desbordado 6 veces en los últimos 19 años. ¿En qué lugar hay mayor riesgo de que se desborde el río?

2. En una región *A* en los últimos 15 años ha nevado 3 veces; en una región *B* en los últimos 18 años ha nevado 4 veces. ¿En qué región hay mayor probabilidad de que nieve el próximo año?

3. En el pueblo Fantasma ha nevado 3 veces en los últimos 14 años. Un campesino de ese lugar toma un seguro contra nevadas. Si su inversión es de $5 000.00, ¿qué prima considera usted que debe pagar el campesino?

NOTAS

ESTA EDICION DE 5,000 EJEMPLARES ESTUVO A CARGO DE: EDUARDO PEREZ MUÑOZ LEDO, JEFE DE TALLERES; GUADALUPE RODRIGUEZ RODRIGUEZ, PRESENTACION; CARLOS PEREZ MAGAÑA, FOTOGRAFIA; DANIEL BUSTOS GARCIA, TRANSPORTE; RAMON NAVARRETE ZAMUDIO Y ARMANDO MENDOZA BRIZUELA, OFFSET. Y SE TERMINO DE IMPRIMIR EN OCTUBRE DE 1975, EN LOS TALLERES DE LA COMPAÑIA EDITORIAL CONTINENTAL, S. A., MEXICO 22, D. F.