Publicaciones Electrónicas
Instituto Mexicano de
Ciencias y Humanidades

Álgebra

I El Anillo de los Números Enteros
II El Campo de los Números Racionales
III El Campo de los Números Reales

Humberto Cárdenas
Emilio Lluis Riera
Francisco Raggi
Francisco Tomás

www.imch.org.mx

INSTITUTO MEXICANO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES
CIENCIA Y CULTURA PARA MÉXICO

Vol. 2 (2016)

Prólogo

Es un enorme gusto para el Instituto Mexicano de Ciencias y Humanidades el incluir dentro de nuestras Publicaciones Electrónicas los tres libros bajo los títulos Álgebra I, II y III publicados originalmente en papel en el año 1971 por la UNAM Textos Programados los cuales son actualmente inaccesibles.

Consideramos que pueden ser muy útiles a los alumnos de las carreras universitarias que estudian por primera vez estos temas utilizando la instrucción programada.

En estos libros, reunidos en uno solo, los autores nos exponen en el formato de instrucción programada los conceptos básicos acerca del anillo de los números enteros, del campo de los números racionales y de los números reales.

Invitamos a los lectores a disfrutar de este bello texto.

Instituto Mexicano de Ciencias y Humanidades.

álgebra I

EL ANILLO DE LOS NUMEROS ENTEROS

Humberto Cárdenas
Emilio Lluis
Francisco Raggi
Francisco Tomás

UNAM TEXTOS PROGRAMADOS

COMISIÓN DE NUEVOS MÉTODOS DE ENSEÑANZA

TEXTOS PROGRAMADOS

I. álgebra

EL ANILLO DE LOS NÚMEROS ENTEROS

HUMBERTO CÁRDENAS
EMILIO LLUIS
FRANCISCO F. RAGGI
FRANCISCO TOMÁS

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
DIRECCIÓN GENERAL DE PUBLICACIONES
MÉXICO, 1971

Primera edición: 1971

DIRECCIÓN GENERAL DE PUBLICACIONES

Impreso y hecho en México

CONTENIDO

RECONOCIMIENTO

Este texto se elaboró en la Comisión de Nuevos Métodos de Enseñanza. En su realización participaron, además de los autores' las siguientes personas:

ENRIQUE GARCÍA G.
Instituto de Ingeniería — Coordinador Técnico

GUADALUPE LUCIO
Ayudante

JORGE DE LEÓN
Corrección de Estilo

PRESENTACIÓN

Una de las técnicas modernas de la enseñanza es la instrucción programada. Dentro de esta técnica el contenido de los textos se ordena de modo sistemático y se adapta al ritmo de asimilación de cada estudiante; existe la participación activa a lo largo del curso y se controla constantemente el aprendizaje mediante el planteamiento de preguntas y la inmediata verificación o corrección de las respuestas.

El material de un texto programado se organiza empleando ideas simples, las cuales se presentan en un orden que facilite la comprensión del estudiante. Las ideas o segmentos de información se ofrecen en cuadros lógicamente coordinados, con lo cual se evita que, en alguna de sus fases, la enseñanza llegue a ser demasiado fácil o muy difícil, a la vez que se logra mantener abierto el camino para que todos puedan adelantar según su propio ritmo de trabajo y comprensión.

Conforme van apareciendo los nuevos segmentos de información, se plantean al estudiante cuestiones específicas que, por obligarlo a intervenir activamente, le reafirman los conocimientos aprendidos, le estimulan y le mantienen atento. Para ello, cada pregunta va seguida inmediatamente de la respuesta correcta. Así el estudiante se siente alentado por sus aciertos y corrige de inmediato sus errores.

Debido a tales características el texto programado se adapta a la velocidad particular de cada estudiante, lo que no puede hacer el maestro encargado de un grupo numeroso.

Con la enseñanza programada no se pretende sustituir al profesor. Se utiliza sólo como un instrumento auxiliar, útil para iniciar estudios, subsanar lagunas, desarrollar habilidades o complementar el aprendizaje y de llevar a un punto óptimo su eficiencia y aprovechamiento.

Este libro pertenece a la primera serie de textos programados que prepara la Universidad Nacional Autónoma de México para ofrecerlos, a sus estudiantes y

profesores, como parte de un programa general de modernización de los métodos docentes y de superación académica.

COMISIÓN DE NUEVOS MÉTODOS DE ENSEÑANZA

INTRODUCCIÓN

Este texto de álgebra consta de tres fascículos.

El primero está dedicado al estudio de los números enteros. En la parte preliminar de este capítulo se discuten, en primer lugar, las nociones intuitivas de conjunto y de función, y, en seguida, el concepto de operación y algunas propiedades de las operaciones.

Más adelante se trata el tema principal, que es el de precisar cuáles son las propiedades básicas de las operaciones con los enteros. Éstas se mencionan como los axiomas de los enteros. Después se demuestran, a partir de los axiomas, otras propiedades de los enteros que el estudiante conoce y, finalmente, se discute el orden en los enteros y se observa que las propiedades del orden, junto con las propiedades básicas de las operaciones, caracterizan a éstos.

Se subraya que no importa la naturaleza de los elementos del conjunto de los enteros, sino las propiedades de las operaciones y del orden.

El segundo está dedicado al estudio de los números racionales. Se presentan como una extensión natural de los números enteros, en donde los elementos distintos de cero tienen inverso multiplicativo.

Como propiedad característica adicional se pide que todo racional sea cociente de dos enteros. De esta manera se pueden interpretar los números racionales como cocientes de enteros y deducir las reglas usuales para las operaciones con fracciones.

Como en el caso de los enteros, se destaca una lista de proposiciones básicas de las cuales se derivan las restantes. Asimismo se le da una importancia especial al orden.

Finalmente, para preparar la introducción de los números reales, en este capítulo se analiza la expresión decimal de los números racionales. Se demuestra que éstas son periódicas y que cualquier decimal periódica corresponde a un número racional. Esto último permite identificar el conjunto de los racionales con el de las decimales periódicas.

En el tercero se estudian los números reales. Se muestra primero la existencia de números que no son racionales, y a continuación, basándose en

la interpretación de los racionales como decimales periódicas, se definen los reales como el conjunto de todas las decimales (periódicas o no). Se aceptan varias propiedades básicas acerca de la existencia de las operaciones y del orden.

Más adelante se identifican los números reales con los puntos de la recta numérica y se discuten las desigualdades y los intervalos.

Finalmente, se introducen los conceptos de cota y frontera, los cuales permiten enunciar una lista de proposiciones básicas de los números reales que los caracterizan completamente.

Daremos a continuación algunas instrucciones para el uso de este libro.

En este libro usted se encontrará con una serie de segmentos de información o cuadros, en cada uno de los cuales tendrá que elaborar una o más respuestas.

Ejemplo:

Con frecuencia usaremos letras mayúsculas para denotar conjuntos. Por ejemplo, si A es el conjunto de los números naturales menores que 6, entonces

$$A = \{1, \_\_, \_\_, \_\_, \_\_\}.$$

2, 3, 4, 5

Como puede usted observar, en este segmento de información se da primero una explicación y a continuación aparecen ciertos espacios en blanco que usted deberá llenar teniendo en cuenta la explicación anterior y la información general adquirida en los cuadros precedentes.

El segmento de información termina con una línea delgada, y en la parte inferior de ella aparecen las respuestas correctas.

Éste es un texto programado en forma lineal. Para su aprovechamiento es indispensable estudiar un cuadro tras otro, en el orden en que figuran, sin omitir ninguno y sin pasar al siguiente hasta no haber llenado correctamente los espacios en blanco del segmento de información. Si la respuesta que usted elabore no es la correcta, deberá leer nuevamente con toda atención el segmento de información, analizar sus errores y elaborar nuevamente la respuesta.

Desde luego, durante la lectura de cada segmento de información deberá usted cubrir con el cobertor anexo el espacio inferior correspondiente, con el objeto de no ver las respuestas antes de haber llenado los espacios en blanco.

Con el fin de que pueda conservar la ilación lógica de las demostraciones que abarquen más de un segmento de información, se utiliza, al margen, el símbolo $\downarrow$ el cual indica que la demostración continúa en el cuadro siguiente. Para indicar el último cuadro de la demostración se anota al margen el símbolo $\underset{\square}{\downarrow}$.

I

El anillo de los números enteros

Entre los sistemas numéricos más conocidos para los estudiantes están el de los *números naturales:*

$$1, 2, 3, 4, 5, \ldots$$

y el de los *números enteros:*

$$\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$$

En este capítulo estudiaremos estos sistemas. Supondremos que el lector está ya familiarizado con ellos, con sus operaciones y su orden.

El punto de vista que adoptaremos será el de analizar las propiedades básicas y ver cómo de éstas se pueden deducir las demás.

Para lo anterior es conveniente discutir primero los conceptos de conjunto, función y operación.

1

CONJUNTOS

Uno de los conceptos que se usan con mucha frecuencia en matemáticas es el de *conjunto*. No se da una definición precisa de él; se considera como un concepto primitivo que intuitivamente es bien claro. Hay otras muchas palabras que, según el contexto, significan lo mismo: colección, clase, familia, manada, jauría, etc. En matemáticas usaremos con más frecuencia la palabra conjunto, y los elementos de que conste se llamarán *elementos* del conjunto.

Los elementos del conjunto de vocales del alfabeto son __, __, __, __, __.

---

a, e, i, o, u

2

Una forma de denotar un conjunto es escribir una lista de todos sus elementos entre llaves. Por ejemplo, el conjunto de los planetas del sistema solar es

{Mercurio, Venus, La Tierra, Marte, Júpiter, Saturno, Urano, Neptuno, Plutón}

El conjunto de las letras que aparecen en la palabra "número" es
{__, __, __, __, __, __}.

$\{n, u, m, e, r, o\}$.

3

Al escribir un conjunto con la anotación anterior se acostumbra no repetir los elementos distintos. Por ejemplo el conjunto de las cifras que figuran en el número 123,251 es $\{1, 2, 3, 5\}$.

El conjunto de letras que figuran en la palabra "matemáticas" es

{__, __, __, __, __, __, __}.

$\{m, a, t, e, i, c, s\}$

4

Dos conjuntos son iguales si constan de los mismos elementos. Entonces, al describir un conjunto con la anotación anterior, no importa el orden en que se escriben los elementos; por ejemplo, el conjunto $\{2, 3, 1\}$ también se puede escribir como $\{1, 2, 3\}$, $\{3, 1, 2\}$,
$\{\_, \_, \_\}$, $\{\_, \_, \_\}$ y $\{\_, \_, \_\}$.

$\{1, 3, 2\}$, $\{2, 1, 3\}$, $\{3, 2, 1\}$

5

Se puede describir también un conjunto mencionando algunas propiedades que cumplen todos los elementos del conjunto y solamente ellos.

Por ejemplo, el conjunto de los números naturales impares menores que 12 es

$\{\_, \_, \_, \_, \_, \_\}$.

1, 3, 5, 7, 9, 11

6

Con frecuencia usaremos letras mayúsculas para denotar conjuntos. Por ejemplo, si A es el conjunto de los números naturales menores que 6, entonces

$A = \{1, \_, \_, \_, \_\}$.

2, 3, 4, 5

7

Indique cuáles de las siguientes propiedades describen el conjunto

$A = \{3, 6, 9, 12\}$. A es (diga sí o no)

____ 1) El conjunto de los números naturales divisibles entre 3.
____ 2) El conjunto de los números naturales divisibles entre 3 y menores que 14.
____ 3) El conjunto de los números naturales pares menores que 13.

---

no
sí
no

8

Otra notación usada para describir un conjunto es la siguiente. Si, por ejemplo, A es el conjunto de los números naturales pares, se escribe

$A = \{n \mid n \text{ es un número natural par}\}$,

lo cual se lee: "A es el conjunto de los números n tales que n es un número natural par.

El conjunto de los números naturales múltiplos de 3 es:

$A = \{n \mid \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\}$.

---

n es un número natural múltiplo de 3

9

Indique qué conjunto de los descritos en 1) 2) 3) es el conjunto

$\{1, 4, 9, 16, 25\}$

1) $\{n \mid n$ es el cuadrado de un número natural$\}$
2) $\{n \mid n$ es el cuadrado de un número natural y $n \leqslant 25\}$
3) $\{n \mid n$ es el cuadrado de un número natural menor o igual que $5\}$

	SI	NO
1)	—	—
2)	—	—
3)	—	—

---

1)		X
2)	X	
3)	X	

10

Sean A y B dos conjuntos. Se dice que B *es un subconjunto de* A si todo elemento de B es también un elemento de A.

Si A es el conjunto

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

indique cuáles de los siguientes conjuntos son subconjuntos de A:

$\{2, 3, 5, 7\}$
$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
$\{1\}$

$\{2, 3, 5, 7\}$ $\{1\}$

11

Si el conjunto B es un subconjunto del conjunto A se escribe
$A \supset B$ que se lee "A contiene a B" o también
$B \subset A$ que se lee "B está contenido en A"

Si $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $B = \{1, 2, 3, 5, 7\}$ y $C = \{2, 3, 5\}$, llene los espacios libres con los signos de contención adecuados.

A ___ B	C ___ A	A ___ C
B ___ C	C ___ B	B ___ A

$\supset$	$\subset$	$\supset$
$\supset$	$\subset$	$\subset$

12

Si un conjunto A no está contenido en un conjunto B se escribe

$$A \not\subset B$$

que se lee "A no está contenido en B" o también

$$B \not\supset A$$

que se lee "B no contiene a A".

Si $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{a, c, e, f\}$, $C = \{a, d, e\}$, $D = \{a, e, f\}$ diga cuáles de las siguientes relaciones son correctas.

1) $A \not\subset B$,	2) $A \not\subset C$,	3) $A \not\subset D$
4) $B \not\subset C$,	5) $B \not\subset D$,	6) $C \not\subset D$
7) $D \not\subset C$,	8) $D \not\subset B$,	9) $D \not\subset A$
10) $C \not\supset B$,	11) $C \not\supset A$,	12) $B \not\supset A$

---

1) Correcta	2) Correcta	3) Correcta
4) Correcta	5) Correcta	6) Correcta
7) Correcta	8) Incorrecta	9) Correcta
10) Correcta	11) Correcta	12) Correcta

13

Para indicar que un elemento x pertenece a un conjunto A se escribe

$$x \in A.$$

y para indicar que un elemento x no pertenece a un conjunto A se escribe

$$x \notin A.$$

Si $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ entonces 3 __ A, 2 __ A

$\in$ $\notin$

14

Sea P el conjunto de los números primos; indique cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas:

1) $3 \notin P$, 2) $3 \in P$, 3) $12 \in P$

4) $12 \notin P$, 5) $100 \in P$, 6) $107 \notin P$

________________.

2, 4

15

Si $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{2, 3, 4, 5\}$ entonces $A \neq B$ porque

____ $\notin B$ y ____ $\in A$

Además $B \neq A$ porque

____ $\in$ ____ y ____ $\notin$ ____

1, 1, 5, B, 5, A

16

Si $A = \{a, b, c, h, j\}$ y $B = \{h, j\}$ entonces $A \neq B$ porque

____ $\in$ A y ____ $\notin$ ____

pero $B \subset A$ porque todo elemento de ____ es un elemento de ____.

---

a o b o c, a o b o c, B, B, A

17

Para denotar al conjunto que no tiene elementos se utiliza el símbolo $\varnothing$. Diga cuáles de las siguientes igualdades son correctas:

1) $\varnothing$ = {días de la semana cuyo nombre castellano comienza con la letra h}
2) $\varnothing$ = {números primos pares}
3) $\varnothing = \{x \mid x$ es entero, $x < 7$ y $x > 12\}$.

---

1) correcta, 2) incorrecta, 3) correcta

18

En la descripción de algunos conjuntos se acostumbra usar la notación

$$\{a, b, \ldots\}$$

en donde los puntos suspensivos indican elementos que, según el contexto, quedan bien determinados.

Por ejemplo, cuando escribimos

$$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \ldots\},$$

ndicamos con esto que $\mathbf{N}$ es el conjunto de todos los naturales.

El conjunto

$$\{2, 4, 6, \ldots\}$$

indica el conjunto de los números naturales _____.

---

pares

19

Otro de los conceptos más utilizados en matemáticas es el de *funciones*. Lo consideraremos también como concepto primitivo.

Una función es esencialmente una regla que asocia a cada elemento de cierto conjunto A un elemento de un conjunto B. A varios elementos de A se les puede asociar el mismo elemento de B.

Consideremos la regla que a cada persona asocia su país natal. Ésta es una función en donde el conjunto A es ____________________ y el conjunto B es ____________________.

el conjunto de las personas

el conjunto de los países

20

Una función de un conjunto A en un conjunto B asocia a cada elemento de A un elemento de B. Si se asocia a algún elemento de A dos o más elementos de B a esta regla no se la considera una función de A en B.

Si A es el conjunto de jugadores de beisbol de la Liga Mexicana y B es el conjunto de los 10 equipos de dicha liga, indique cuáles de las siguientes reglas son funciones de A en B:

a) la que asocia a cada jugador los equipos en que ha jugado;
b) la que asocia a cada jugador el equipo en que juega;
c) la que asocia a cada equipo un pitcher.

b)

21

Se acostumbra denotar a las funciones con una sola letra, como por ejemplo, $f, g, \ldots, F, G, \ldots, \varphi, \psi, \ldots$

Si f es una función de un conjunto A en un conjunto B, cuando se quieren destacar los conjuntos que intervienen se acostumbra escribir

$$f : A \longrightarrow B$$

o también

$$A \xrightarrow{f} B$$

Si f es la función que asocia a cada número entero n el número $n^2 + 1$, y si denotamos con **Z** al conjunto de números enteros y con **N** al conjunto de los números naturales, entonces f es una función de **Z** en **N** y se puede escribir

$$f : \_\_\_ \longrightarrow \_\_\_.$$

Z **N**

22

Si $f : A \longrightarrow B$ es una función del conjunto A en el conjunto B, el elemento asociado a un elemento x en A se denota con $f(x)$. Por ejemplo si $A = B = \mathbf{Z}$ es el conjunto de los números enteros y f es la función que a cada número entero n asocia el entero $2n$, entonces

$f(3) =$ ___ $f(-1) =$ ___ $f(o) =$ ___

$f(-10) =$ ___ $f(n) =$ ___ $f(2n) =$ ___.

6	−2	0
−20	$2n$	$4n$

23

Otra manera usual de indicar el elemento $y \in B$ asociado a un elemento $x \in A$ según una función $A \longrightarrow B$ es escribir

$$x \longrightarrow y$$

Si $\mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{Z}$ es la función que asocia a cada número entero x su cuadrado, x^2, entonces

$3 \longrightarrow$ ____, 2 ____ 4, $-1 \longrightarrow$ ____

y, en general,

$x \longrightarrow$ ____.

9, $\longrightarrow$, 1, x^2

24

Si f: $\mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{Z}$ es la función dada por $f(n) = n - 5$, entonces el asociado a 7 es ____; el asociado a -5 es ____; el asociado a 5 es ______ y el asociado a $3n$ es ______.

---

2   -10 0

$3n-5$

25

Sea f: $A \longrightarrow B$ una función del conjunto A en el conjunto B. Al conjunto A se le acostumbra llamar el *dominio* de la función y al conjunto B el *codominio* de la función. En la función *del conjunto de números naturales* en *el conjunto de números naturales pares* que asocia a cada natural n el número par $4n$,

el dominio es ______________________________

y el codominio es ______________________________

---

el conjunto $\mathbf{N}$ de los números naturales

el conjunto de los números pares

26

Una función queda descrita completamente cuando se especifica el codominio y la regla de correspondencia. Así pues:

Dos funciones $f{:}A \longrightarrow B$ y $g{:}C \longrightarrow D$ *son iguales si se cumplen las condiciones*

a) $A = C$ (es decir, los dominios de f y g son iguales).

b) $B = D$ (es decir, los codominios de f y g son iguales).

c) $f(x) = g(x)$ para toda x en $A = C$.

La función $f{:}\mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$ que asocia a cada natural n el natural $f(n) = (n+1)(n+2)$ y la función $g{:}\mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$ que asocia a cada natural n el natural $g(n) = n^2 + 3n + 2$ son iguales, pues

a) f y g tienen el mismo ______________

b) f y g tienen el mismo ______________

c) __________________.

---

a) dominio

b) codominio

c) $f(n) = g(n)$ (pues $(n+1)(n+2) = n^2 + 3n + 2$)

27

Las funciones $f{:}\mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$ y $g{:}\mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$ dadas por

$$f(n) = (n+1)(n+2)$$
$$g(n) = n^2 + 3n + 1$$

no son iguales, pues no se cumple una de las tres condiciones para la igualdad de funciones.

La condición que no se cumple es ____.

---

c)

28

En ocasiones, dos funciones están dadas por una misma regla pero no son iguales por tener distintos dominios o codominios. Por ejemplo, las funciones

$$f{:}\mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{Z}, \qquad g{:}\mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{Z}$$

dadas por la misma regla

$$f(n) = -n, \qquad g(n) = -n$$

son distintas pues ______________________________.

---

el dominio de f es distinto del dominio de g

29

Las funciones $f{:}\mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{Z}$ y $g{:}\mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{N}$ dadas por

$$f(n) = n^2 \qquad g(n) = n^2$$

tienen la misma regla pero son ____________ pues el ____________ de f es ____________ del ______________ de g.

---

distintas, codominio, distinto, codominio

30

En una función $f{:}A \longrightarrow B$, el subconjunto de B formado por todos los elementos $f(x)$ que se obtienen al tomar todos los elementos x de A se le llama la imagen de la función f y se denota Im f.

Es decir,

$$\operatorname{Im} f = \{ f(x) \mid x \in A \}.$$

Sea $f{:}\mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$ la función dada por $f(n) = 2n$. La imagen Im f es el subconjunto de $\mathbf{N}$ formado por ______________________________.

---

todos los números naturales pares

31

Otro concepto que utilizaremos es el de *pareja ordenada*. A pesar de que este concepto puede definirse con precisión utilizando los conceptos primitivos de conjunto y función, adoptaremos aquí el punto de vista intuitivo.

Empecemos con un ejemplo; con tres elementos a, b, c se pueden formar las siguientes parejas ordenadas:

(a,a), (a,b), (a,c), (b,a), $(b, \_\_)$, $(b, \_\_)$
$(c, \_\_)$, $(\_\_, \_\_)$, $(\_\_, \_\_)$.

(b,b), (b,c), (c,a), (c,b), (c,c)

32

Se habla de parejas ordenadas porque se distingue el "orden" de los elementos de la pareja.

Por ejemplo, la pareja ordenada (1,4) es distinta de la pareja ordenada (4,1).

De esa manera se puede hablar del primer elemento y del segundo elemento de una pareja.

El primer elemento de la pareja (1,4) es ____ y el segundo elemento de la pareja (1,4) es ____.

1, 4

33

Si $A = \{ a,b,c,d,e \}$, escriba todas las parejas cuyo primer elemento sea a y cuyo segundo elemento sea un elemento de A.

(a,a), $(a, \_\_)$, $(\_\_, \_\_)$, $(\_\_, \_\_)$, $(\_\_, \_\_)$,

Las parejas ordenadas cuyo segundo elemento es a son

(a,a), $(\_\_, a)$, $(\_\_, \_\_)$, $(\_\_, \_\_)$, $(\_\_, \_\_)$.

(a,a), (a,b), (a,c), (a,d), (a,e)
(a,a), (b,a), (c,a), (d,a), (e,a)

34

El primer elemento y el segundo elemento de una pareja pueden ser iguales. Por ejemplo, la pareja (3,3).

Las parejas ordenadas cuyo primer elemento esté en $A = \{1,2,3\}$ y cuyo segundo elemento esté en $B = \{2,3,4\}$ y que tengan iguales sus dos elementos son

(_, _) (_, _).

(2,2) (3,3)

35

Como se puede observar, se ha utilizado la notación (a,b) para representar a la pareja ordenada cuyo primer elemento es a y cuyo segundo elemento es b, y la notación $\{a,b\}$ para indicar el conjunto que consta de los elementos a y b.

Si $A = \{1,2,3\}$, las parejas ordenadas cuyos elementos están en A son nueve:

(1,1)	(_, _)	(_, _)
(2, _)	(_, _)	(_, _)
(_, _)	(_, _)	(_, _)

y los subconjuntos de A que tienen dos elementos son tres:

$\{1,2\}$, $\{\_, \_\}$, $\{\_, \_\}$.

(1,1)	(1,2)	(1,3)
(2,1)	(2,2)	(2,3)
(3,1)	(3,2)	(3,3)
$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$

36

PRODUCTO CARTESIANO

Si A y B son dos conjuntos, el producto cartesiano de A y B, denotado $A \times B$ es el conjunto que conste de todas las parejas ordenadas (a,b) tales que el primer elemento pertenezca a A y el segundo a B, es decir

$$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

El producto cartesiano de $A = \{1,2\}$ y $B = \{a,b,c\}$ es

$A \times B = \{(1,a), (1,b), (\_, \_) (\_, \_) (\_, \_) (\_, \_)\}$.

$(1,a), (1,b), (1,c), (2,a),(2,b), (2,c)$

37

Con mucha frecuencia se utiliza el producto cartesiano de un conjunto A por sí mismo que se denota $A \times A = A^2$.

El producto cartesiano del conjunto $A = \{-1,0,1\}$ por sí mismo es

$A^2 = \{(-1,-1), (-1,0), (\_, \_), (\_,\_), (\_,\_), (\_,\_), (\_,\_)$ $(\_,\_), (\_,\_)\}$.

$(-1,-1), (-1,0), (-1,1), (0,-1), (0,0), (0,1), (1,-1), (1,0), (1,1)$

38

En los ejemplos anteriores hemos considerado productos cartesianos de conjuntos finitos. Sin embargo se usarán con más frecuencia productos cartesianos de conjuntos infinitos, como por ejemplo, $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$, $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ y más adelante $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ (en donde $\mathbf{R}$ será el campo de los números reales).

Por ejemplo,

$$\mathbf{N} \times \mathbf{N} = \mathbf{N}^2 = \{(m,n) \mid m,n \in \mathbf{N}\};$$
$$\mathbf{Z} \times \mathbf{Z} = \mathbf{Z}^2 = \{\_\_\_\_\_\_\_\_\}.$$

$\{(m,n) \mid m,n \in \mathbf{Z}\}$

39

OPERACIONES BINARIAS

Si A es un conjunto arbitrario, una operación binaria en A es una función $: A \times A \longrightarrow A$, es decir, una función que a cada pareja ordenada de elementos de A asocia un elemento de A.

Si $A = \mathbf{N}$ es el conjunto de los números naturales, la función $\varphi : \mathbf{N} \times \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$ dado por la regla

$$\varphi\ (m,n) = m + n$$

es una operación binaria en el conjunto de los números naturales.

Este ejemplo muestra que la operación de suma entre números naturales es un caso especial de operación binaria.

En este ejemplo, $\varphi\ (2,4) =$ ____, $\varphi\ (4,2) =$ ____, $\varphi\ (1,5) =$ ____.

6, 6, 6

40

El producto entre números enteros es una operación binaria en **Z**, es decir, una función de

__ __ __ $\longrightarrow$ __.

$\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ $\quad$ $\mathbf{Z}$

41

La diferencia entre números naturales no es una operación binaria en **N** ya que $a - b$ no siempre está en **N**, es decir, la función φ dada por $\varphi\,(a,b) = a - b$ no tiene por codominio a **N**.

"Indique cuáles de las siguientes reglas son operaciones binarias en **N**."

a) $(a,b) \longrightarrow ab$
b) $(a,b) \longrightarrow b - a$
c) $(a,b) \longrightarrow a + 3b$
d) $(a,b) \longrightarrow \dfrac{a}{b}$

---

a, c

42

Eligiendo arbitrariamente un signo, por ejemplo el signo $\circ$, podemos escribir $a \circ b$ en lugar de $\varphi\ (a,b)$, y diremos entonces que la operación está denotada por $\circ$. Si la operación se denota, como por ejemplo en el caso de la suma de enteros, por $+$, en lugar de $\varphi\ (a,b)$ escribiremos $a + b$ y procederemos en forma análoga con cualquier símbolo que usemos para la operación.

En la operación binaria * dada por φ: $A \times A \longrightarrow A$ escribiremos en lugar de $\varphi\ (a,b)$, ______________.

$a * b$

43

Si en **Z** definimos una operación binaria mediante $(a,b) \rightarrow a^2 + b^2$ y denotamos la operación con $\triangle$, es decir, $a \triangle b = a^2 + b^2$, entonces

$1 \triangle 1 =$ ___
$3 \triangle 4 =$ ___
$0 \triangle 5 =$ ___
$2 \triangle 2 =$ ___

2, 25, 25, 8

44

Si en **N** definimos una operación binaria mediante la regla $(a,b) \rightarrow a + 2b$ y denotamos esta operación con $\square$, entonces

$a \square b =$ ___
$b \square a =$ ___
$2 \square 3 =$ ___
$a \square 3 =$ ___
$1 \square 1 =$ ___
$a \square a =$ ___

$a + 2b$, $b + 2a$, 8, $a + 6$, 3, $3a$

45

Sea $\triangle$ la operación binaria en **Z** dada por

$$a \triangle b = ab^2$$

Entonces

$$2 \triangle 3 = \_\_\_$$
$$(2 \triangle 3) \triangle 2 = \_\_\_$$
$$3 \triangle 2 = \_\_\_$$
$$2 \triangle (3 \triangle 2) = \_\_\_$$
$$a \triangle a = \_\_\_$$

18, 72, 12, 288, a^3

46

Para mayor fluidez del lenguaje, cuando no se preste a confusiones, en lugar de decir "una operación binaria en un conjunto A" diremos simplemente "una operación en A", o simplemente "una operación".

47

Una operación binaria $\circ$ en un conjunto A se dice que es *conmutativa* si

$$a \circ b = b \circ a$$

para todos los elementos a, b en A.

¿Cuáles de las siguientes operaciones en **Z** son conmutativas?

a) $(a,b) \rightarrow a + b$
b) $(a,b) \rightarrow a - b$
c) $(a,b) \rightarrow a + 2b$
d) $(a,b) \rightarrow 2a + 2b$
e) $(a,b) \rightarrow 2ab$
f) $(a,b) \rightarrow a^2\, b$

---

a) *b*) *c*)

48

Una de las propiedades que tienen muchas de las operaciones, que se considerarán más adelante, es la *asociativa*. Una operación * en A es asociativa si

$$(a * b) * c = a * (b * c)$$

para todos los elementos a, b, c en A.

Por ejemplo, en los números naturales, la suma y el producto son operaciones asociativas. En este caso, se tiene

$$(a + b) + c = \_\_\_\_\_\_$$
$$(ab)\ c = \_\_\_\_$$

para todos los elementos a, b, c en **N**.

$$a + (b + c)$$
$$a\ (bc)$$

49

Desde luego, hay operaciones no asociativas. Por ejemplo las operaciones * en **Z** dada por $a * b = a - b$ no es asociativa pues

$$(3 * 5) * 2 = \_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_ = \_\_\_\_$$

y

$$3 * (5 * 2) = \_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_ = \_\_\_\_$$

que no son iguales.

$$(3 - 5) -2 = -2 -2 = -4$$
$$3 - (5 - 2) = 3 - 3 = 0$$

50

A menudo usted habrá notado que se usan expresiones como $3 + 5 + 9$. ¿Cuál es su significado? La podemos interpretar como $3 + (5 + 9)$ o bien como $(3 + 5) + 9$.

Pero como la suma es asociativa

$(3 + 5) + 9 = 3 + (5 + 9)$ y $3 + 5 + 9$ es éste, valor común.

¿Cuál es el significado de $4 \cdot 8 \cdot 5$ en **N**?

$$\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_.$$

$$4 \cdot 8 \cdot 5 = 4 \cdot (8 \cdot 5) = (4 \cdot 8) \cdot 5$$

51

En el conjunto **Z** de los números enteros hay un elemento, el 0, que tiene las propiedades

$$n + 0 = n \text{ y } 0 + n = n$$

para todo número entero n.

Si * es una operación en un conjunto A y A tiene un elemento, digamos e, con la propiedad

$$e * a = a \text{ y } a * e = a$$

para todo elemento a de A entonces se dice que e es un elemento neutro con respecto a dicha operación.

En el conjunto de los enteros, un elemento neutro con respecto a la suma es el número ____.

0

52

En los números naturales, $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$, por lo cual 1 es un elemento __________ con respecto a la multiplicación.

---

neutro

53

Si $\triangle$ es la operación en **Z** dada por la regla

$$m \triangle n = 2m + n,$$

se tiene que

$$a \triangle 0 = \_\_\_\_\_\_\_\_ \neq a \text{ (en general)}$$

y

$$0 \triangle a = \_\_\_\_\_\_\_\_$$

Por lo tanto 0 no es elemento __________ de **Z** con respecto a la operación $\triangle$.

$2a$ a

neutro

54

Hay operaciones que no tienen elemento neutro. Por ejemplo la operación en **Z**, dada por la regla

$$m * n = m - n$$

no tiene elemento neutro.

En efecto, si e fuera un elemento neutro con respecto a esta operación,

1) $1 * e =$ ____ por ser e neutro

y demás

2) $1 * e = 1 - e$ por la definición de *.

De 1) y 2) se obtiene que

$$1 = 1 - e$$

de donde $e = 0$

Pero

3) $e * 1 =$ ____ por ser e neutro

y

4) $e * 1 = 0 * 1 = 0 - 1 = -1$

por la definición de * y el hecho ya comprobado de que $e = 0$.

Las afirmaciones 3) y 4) son contradictorias, puesto que $1 \neq$ ______.

Por lo tanto no existe ningún elemento neutro.

1, 1, −1

55

Si un conjunto A tiene un elemento neutro e con respecto a cierta operación, éste es único; es decir, hay un solo elemento neutro. En otras palabras una operación en A no puede tener más de un solo elemento neutro.

En efecto, supongamos que e y e' son dos elementos neutros con respecto a la operación *. Entonces, ya que e es elemento neutro,

$$e * a = \_\_\_\_ \text{ para toda } a \text{ en } A$$

y, en particular

$$e * e' = \_\_\_.$$

Además, siendo e' también elemento neutro,

1) $a * e' = \_\_\_$ para toda a en A

y así,

2) $e * e' = \_\_\_.$

De 1) y 2) se sigue que

$$e \_\_\_ e',$$

lo cual demuestra lo afirmado.

---

a, e', a, e, $=$

56

En los números enteros **Z** las ecuaciones de la forma

$$m + x = n$$

(o, equivalentemente, $x + m = n$) tienen siempre solución.

Por ejemplo en las ecuaciones

$3 + x = 2$	la solución es ______
$2 + x = -3$	la solución es ______
$-3 + x = 0$	la solución es ______
$x + (-7) = -2$	la solución es ______
$x + 3 = 0$	la solución es ______.

-1, -5, 3, 5, -3

57

Si * es una operación en un conjunto A se dice que la ecuación

$$a * x = b$$

con a, b en A tiene solución si existe un elemento c en A tal que $a * c = b$.

Análogamente la ecuación

$$x * a = b$$

con a, b en A tiene solución si ______ ______ ______ d en A tal que __________.

---

existe un elemento

$d * a = b$

58

Hay operaciones para las cuales las ecuaciones

$$a * x = b$$

no siempre tienen solución

Por ejemplo, al considerar la operación $+$ en los números naturales **N** la ecuación

$$2 + x = 1$$

no tiene solución (en **N**), pues la solución es $x = -1 \notin \mathbf{N}$.

Indique cuáles de las siguientes ecuaciones tienen solución en **N** y cuáles no tienen solución en **N**.

a) $3 + x = 2$
b) $2 + x = 3$
c) $5 + x = 7$
d) $7 + x = 5$
e) $8 + x = 10$

---

a) no tiene
b) sí tiene
c) sí tiene
d) no tiene
e) sí tiene

59

Si en los números enteros **Z** consideramos la operación $\triangle$ dada por

$$m \triangle n = m - n, \qquad (m, n \in \mathbf{Z})$$

en las ecuaciones

$3 \triangle x = 2$ la solución es ______
$2 \triangle x = 3$ la solución es ______
$x \triangle 2 = 3$ la solución es ______
$x \triangle 3 = 2$ la solución es ______
$(-3) \triangle x = (-2)$ la solución es ______

1, –1, 5, 5, –1

60

Para la operación de multiplicación en **Z** las ecuaciones

$$m\,x = n$$

no tiene solución para toda m, n en **Z**. De hecho hay solución solamente cuando m divide a n, o bien, cuando $n = 0$ (en este caso todo entero es solución).

¿Cuáles de las siguientes ecuaciones tienen solución?

a) $2\,x = 4$
b) $3\,x = 4$
c) $(-1)\,x = 7$
d) $0\,x = 5$
e) $(-2)\,x = 0$.

---

a) c) e)

61

Consideremos una operación asociativa * en un conjunto A con respecto a lo cual A tenga un elemento neutro e. Si las ecuaciones

$$a * x = e, \qquad x * a = e$$

tiene una solución común, ésta es única, En otras palabras; si

$$a * b = e \qquad b * a = e$$
$$a * c = e \qquad c * a = e$$

entonces $b = c$.

Demostración

Las hipótesis son que b y c son soluciones, es decir:

$$a * b = e \qquad b * a = e \qquad (1) \quad (1')$$
$$a * c = e \qquad c * a = e \qquad (2) \quad (2')$$

Se tiene entonces

$$\underset{a)}{c = e} * \underset{b)}{c =} (b * a) * \underset{c)}{c =} b * (a * c) \underset{d)}{=} b * \underset{e)}{e =} b$$

Indique por qué son ciertas las igualadas

a) por ser e el elemento ______ con respecto a *,
b) por la hipótesis (_____),
c) por la propiedad ___ de la *,
d) por la hipótesis (_____),
e) por ser e el elemento ______ con respecto a *.

---

neutro, 1', asociativa, 2, neutro

62

Consideremos la operación de + en **Z**. Como ya sabemos en **Z** hay un elemento neutro con respecto a esta operación, que es el 0. La solución de la ecuación

$$a + x = 0$$

se denota por $-a$ y se llama el *inverso (aditivo o con respecto a la suma)* de a.

El inverso aditivo de 3 es la solución de la ecuación

____

y se denota por_____.

$$3 + x = 0$$
$$-3$$

63

La solución de la ecuación

$$-5 + x = 0$$

es ________ = ______ y se llama el ________ aditivo de -5.

$-(-5) = 5$ inverso

64

Como se vio antes, si se tiene una operación asociativa * en un conjunto A y A tiene elemento neutro con respecto a *, cuando las ecuaciones

$$a * x = e \qquad x * a = e$$

tienen solución común, ésta es única. En este caso se dice que a tiene *inverso* y a este único elemento de A que es solución se le llama el *inverso* de a (con respecto a *).

Si $\square$ es una operación asociativa en A y e es el elemento neutro de A con respecto a $\square$, el inverso de $a \in A$ existe si las ecuaciones

________ ________

tienen solución común.

$a \square x = e \qquad x \square a = e$

65

DISTRIBUTIVIDAD

Si, como en el caso de los números naturales **N** se tienen dos operaciones, la de suma y producto, podemos considerar propiedades en las que figuren ambas.

Por ejemplo

$$3 \cdot (4 + 5) = 3 \cdot 4 + 3 \cdot 5,$$

y, en general, si $a,b,c \in \mathbf{N}$,

$$a(b + c) = \_\_\_\_\_\_,$$

propiedad que se conoce con el nombre de *distributiva* (del producto con respecto a la suma).

$ab + ac$

66

Supongamos ahora que $\oplus$ y $\cdot$ son dos operaciones en un conjunto A. Diremos que $\cdot$ distribuye por la izquierda a $\oplus$ si

$$a \cdot (b \oplus c) = (a \cdot b) \oplus (a \cdot c)$$

para cualquiera $a, b, c \in A$. Análogamente se dirá que $\cdot$ distribuye por la derecha a $\oplus$ si

$$(a \oplus b) \cdot c = (a \cdot c) \oplus (b \cdot c).$$

La propiedad distributiva por la izquierda de $\oplus$ con respecto a $\cdot$ es

$$a \oplus (b \cdot c) = \_\_\_\_\_\_\_\_$$

y la propiedad distributiva por la derecha de $\oplus$ con respecto a $\cdot$ es

$$(a \cdot b) \oplus c = \_\_\_\_\_\_\_\_$$

$(a \oplus b) \cdot (a \oplus c)$

$(a \oplus c) \cdot (b \oplus c)$

67

LOS NÚMEROS ENTEROS

En la sección anterior se analizaron propiedades relativas a operaciones binarias. Ahora destacaremos cuáles de estas propiedades satisfacen las operaciones de suma y producto de números enteros.

PROPIEDADES DE LA SUMA

AXIOMA 1. *La suma de números enteros es conmutativa;* es decir, si $a, b \in \mathbf{Z}$, entonces

$$a + b = \_\_\_\_.$$

$b + a$

68

AXIOMA 2. *La suma de números enteros es asociativa; es decir, si* a, b, c **Z**, *entonces*

$$(a + b) + c = \_\_\_\_\_\_\_\_.$$

$a + (b + c)$

69

AXIOMA 3. *Existe en* **Z** *un elemento neutro para la suma,* el 0. Es decir, si $a \in$ **Z**, entonces

$$a + 0 = 0 + a = \_\_\_\_\_\_.$$

a

70

AXIOMA 4. *Para cada entero* a*, existe en* **Z** *su inverso aditivo que se denota por* $-a$. Este elemento tiene las propiedades

$$a + (-a) = \_\_\_\_\_$$
$$(-a) + a = \_\_\_\_\_.$$

0
0

71

PROPIEDADES DEL PRODUCTO

AXIOMA 5. *El producto de números enteros es conmutativo;* es decir, si $a, b \in$ **Z**, entonces

$$ab = \_\_\_\_.$$

ba

72

AXIOMA 6. *El producto de números es asociativo;* es decir, si $a, b, c \in$ **Z**, entonces

$$(ab)c = \_\_\_\_\_.$$

$a(bc)$

73

AXIOMA 7. *Existe en* **Z** *un elemento neutro para el producto, el* 1. A este número se llama también el elemento idéntico (respecto al producto) y, si $a \in$ **Z**, entonces

$$a\,1 = 1\,a = \_\_.$$

a

74

PROPIEDAD DISTRIBUTIVA

AXIOMA 8. *En* **Z** *el producto distribuye a la suma;* es decir, si $a, b, c \in$ **Z**, entonces

$$a(b + c) = \_\_\_\_\_\_\_$$
$$(a + b)c = \_\_\_\_\_\_\_\_.$$

$ab + ac$
$ac + bc$

AXIOMAS DE ANILLO

Si, como en el caso de los números enteros, se tiene un conjunto con dos operaciones (que por comodidad llamaremos suma y producto) las cuales cumplen los axiomas 1–8 que acabamos de discutir, es decir:

a) la suma es *conmutativa, asociativa,* tiene elemento *neutro* y cada elemento tiene *inverso* aditivo,

b) el producto es *conmutativo, asociativo* y tiene elemento *neutro multiplicativo* (llamado también *idéntico),*

c) el producto *distribuye* a la suma,

entonces se dice que dicho conjunto, con las dos operaciones es un *anillo conmutativo y con elemento idéntico.*

De acuerdo con esto se puede decir que **Z** con las operaciones $+$ *y* $\bullet$ es ______________________________.

---

un anillo conmutativo y con elemento idéntico

Los números naturales *no* son un anillo conmutativo con elemento idéntico porque la suma no cumple los axiomas ________ y 4.

3

Además de los números enteros existen otros muchos anillos. Daremos a continuación un ejemplo.

Sea A un conjunto con dos elementos

$$A = \{a, b\};$$

Definamos en A una suma con la tabla:

$+$	a	b
a	a	b
b	b	a

Esta tabla nos indica que

$$a + a = a$$
$$a + b = b$$
$$b + a = b$$
$$b + b = a$$

El producto lo definimos con la tabla

$\bullet$	a	b
a	a	a
b	a	b,

la cual nos indica que

$$a \bullet a = a$$
$$a \bullet b = \_\_\_$$
$$b \bullet a = \_\_\_$$
$$b \bullet b = \_\_\_$$

↓

---

a, a, b

78

La suma definida por la tabla es conmutativa; en efecto, las parejas posibles x, y de elementos de A son

$$x = a, \quad y = a$$
$$x = a, \quad y = b$$
$$x = b, \quad y = a$$
$$x = b, \quad y = b$$

Ahora bien, observando la tabla en cada uno de estos casos verificamos que

$$x + y = \_\_\_\_\_\_$$

para toda pareja x, y de elementos de A. ↓

$$y + x$$

79

La suma definida por la tabla es asociativa. Para demostrar esto tendremos que verificar que para toda terna x, y, z en A se tiene que $x + (y + z) = (x + y) + z$.

Consideremos pues todas las ternas posibles que son

a, a, a	b, __, __
a, a, b	b, __, __
a, b, a	b, __, __
a, b, b	b, __, __

↓

---

a, a
a, b
b, a
b, b

80

Por comodidad repetimos la tabla

+	a	b
a	a	b
b	b	a

Calculamos ahora $x + (y + z)$ y $(x + y) + z$ para todas las ternas posibles que tenemos escritas, y, efectivamente se tiene que la suma es asociativa, ya que

$$a + (a + a) = a + a = (a + a) + a$$
$$a + (a + b) = a + b = (a + a) + b$$
$$a + (b + a) = a + b = \_\_\_\_\_\_$$
$$a + (b + b) = \_\_\_ = \_\_\_\_\_\_$$
$$b + (a + a) = \_\_\_ = \_\_\_\_\_\_$$
$$\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_ = \_\_\_\_\_\_$$
$$\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_ = \_\_\_\_\_\_$$
$$\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_ = \_\_\_\_\_\_$$

↓

$$(a + b) + a$$
$$a + a = (a + b) + b$$
$$b + a = (b + a) + a$$
$$b + (a + b) = b + b = (b + a) + b$$
$$b + (b + a) = b + b = (b + b) + a$$
$$b + (b + b) = b + a = (b + b) + b$$

81

La suma definida por la tabla satisface también las propiedades restantes características de la suma en un anillo; éstas son: La existencia del elemento ______ para la suma y la existencia, para cada $x \in A$, de su ______ aditivo.

No verificaremos que estas propiedades se satisfacen. ↓

---

neutro
inverso

82

Repetimos ahora la tabla del producto

$\bullet$	a	b
a	a	a
b	a	b

El elemento idéntico es b, pues para toda x se tiene $bx = xb = x$; en efecto, de la tabla se deduce que

$$ab = \_\_\_\_\_\_$$
$$ba = \_\_\_\_\_\_$$
$$bb = \_\_\_\_\_\_.$$

↓

a, a, b

83

Las propiedades del producto que restan por demostrar para ver que éste es el producto en un anillo conmutativo son:

a) ______________
b) ______________.

Éstas se cumplen pero no lo demostraremos. ↓

Asociatividad
Conmutatividad

84

Finalmente, para comprobar que $A = \{a, b\}$ con la suma y el producto dados por las tablas es un anillo, falta demostrar la distributividad. Como en el caso de la asociatividad esto se prueba directamente (utilizando las tablas) comprobando ocho igualdades, algunas de las cuales son:

$$a\,(b + b) = a = ab + ab$$
$$a\,(a + b) = \_\_\_\_\_\_ = aa + ab$$
$$b\,(b + b) = \_\_\_\_\_\_ = bb + bb.$$

↓ □

a
b

85

PROPIEDADES DE ANILLO DE Z

Hemos observado con anterioridad que en los enteros la suma y el producto satisfacen los axiomas de anillo conmutativo; veremos ahora cómo, a partir de éstos, se pueden deducir algunas de las propiedades de los enteros.

LEY DE CANCELACIÓN (IZQUIERDA) PARA Z

TEOREMA. *Si a, b y c son enteros y $a + b = a + c$ entonces $b = c$.*
Demostración.
Dividiremos la demostración en varios pasos. Por hipótesis,
1) $a + b = a + c$;
ahora, existe $-a$ tal que
2) $(-a) + a = 0$,
por lo que
3) $(-a) + (a + b) = (-a) + (a + c)$
implica
4) $((-a) + a) + b = ((-a) + a) + c$,
de donde por 2)
5) $0 + b = 0 + c$
y entonces
6) $b = c$
lo cual termina la demostración.
La igualdad 2) es una consecuencia de la propiedad del ______________
______________. ↓

inverso aditivo

86

3) implica 4) por la propiedad ____________ es decir

$$(-a) + (a + b) = \_\_\_\_\_\_$$
$$(-a) + (a + c) = \_\_\_\_\_\_.$$

↓

asociativa
$((-a) + a) + b$
$((-a) + a) + c$

87

5) implica 6) pues

$$0 + b = \_\_\_\_\_\_\_\_$$
$$0 + c = \_\_\_\_\_\_\_\_$$

b, c

88

No todas las propiedades se demuestran utilizando únicamente los axiomas sino que en ocasiones utilizaremos propiedades ya demostradas; como por ejemplo, la ley de cancelación por la derecha se puede deducir de la ley de cancelación por la izquierda y la propiedad conmutativa.

LEY DE CANCELACIÓN (DERECHA)

Si a,b,c son números enteros y $a + c = b + c$ entonces $a = b$. En efecto, por la propiedad conmutativa y la hipótesis tenemos $c + a = c + b$ y por la ley de cancelación (izquierda) se tiene que __ = __.

a,b

89

COROLARIO. Si a y b son enteros y

$$a + b = a$$

entonces $b = 0$.

Demostración. Por hipótesis

$$a + b = a = a + 0$$

y por la ley de cancelación se tiene ___ = ___.

b, 0

90

Como se recuerda en los enteros al multiplicar 0 por cualquier entero se obtiene 0.

Veremos ahora que a partir de los axiomas podemos demostrar esta propiedad.

TEOREMA. *Para toda $a \in \mathbf{Z}$ se tiene*

$$0a = 0.$$

Demostración

$$1) \quad 0a \underset{(1')}{=} (0 + 0)\, a \underset{(2')}{=} 0a + 0a$$

y por el corolario anterior

$$2) \quad 0a = 0$$

lo cual completa la demostración.

Ya que 0 es elemento neutro la igualdad (1') es cierta pues __ = _____.

$0 = 0 + 0$

91

La igualdad (2) es válida por la propiedad ____________ del producto respecto a la suma.

distributiva

92

Otra consecuencia de la ley de cancelación es el

COROLARIO. *El inverso aditivo del inverso aditivo de un número entero a es a.* Es decir.

$$-(-a) = \_\_.$$

a

93

Demostración. Por la definición del inverso aditivo de un entero, se tiene que

$$(-a) + a = \_\_ = (-a) + (-(-a)).$$

De aquí se obtiene

$$a = -(-a)$$

por la ley de ________________.

0, cancelación

94

Demostraremos ahora las llamadas "reglas de los signos". La regla que dice $(-)(+) = (-)$ debe interpretarse como sigue:

TEOREMA. *El producto del inverso aditivo de un entero a por un entero b es igual al inverso aditivo del producto ab.*

Es decir,

$$(-a)\,b = \_\_\_\_.$$

$-(ab)$

95

Demostración. Por la ley distributiva

$$(-a)\,b + ab = \_\_\_\_\_\_\_\_$$

Pero $(-a) + a = 0$ por ser $-a$ el ________________ de a. De lo anterior

$$(-a)\,b + ab = ((-a) + a)\,b = 0b = 0$$

Por lo tanto ab es el inverso aditivo de $(-a)\,b$, es decir

$$(-a)\,b = -(ab).$$

$((-a) + a)\,b$
inverso aditivo

96

Como caso particular del teorema anterior, cuando $a = 1$, tenemos que

$$(-1)\,b = \_\_\_\_.$$

$-b$

97

La regla tradicional de que $(-)(-) = +$ debe interpretarse como sigue:

TEOREMA. *El producto de los inversos aditivos de dos enteros a y b es igual al producto de los enteros a y b.* Es decir,

$$(-a)(-b) = \_\_\_\_.$$

---

ab

98

Demostración. En la demostración del teorema anterior vimos que

$$(-a)\,b + ab = 0.$$

Por otro lado, en forma semejante tenemos:

$$(-a)\,b + (-a)(-b) = (-a)(b + (-b)) = (-a)\,0 = 0.$$

Por lo tanto,

$$(-a)\,b + ab = 0 = (-a)\,b + (-a)(-b).$$

Por la ley de ______________, $ab = (-a)(-b)$.

---

cancelación

99

Como caso particular del teorema anterior, cuando $a = b = 1$ tenemos que

$$(-1)(-1) = \_\_.$$

1

100

RESTA O DIFERENCIA

En lugar de considerar la resta de números enteros como una nueva operación es más conveniente definir ésta utilizando la operación de suma y los inversos aditivos.

DEFINICIÓN. *Si a b,* $\in$ **Z** *la diferencia a — b es el entero*

$$a - b = a + (-b).$$

Por ejemplo,

$$7 - 8 = 7 + (-8)$$
$$(-3) - (-4) = (-3) + 4 \quad \text{ya que} \quad -(-4) = \_\_.$$
$$a - (-b) = a + b \quad \text{ya que} \quad -(-b) = \_\_.$$
$$-a - b = -a + (-b)$$

4
b

101

Con esta definición de resta es claro entonces que

$$a\,(b - c) = a\,b - a\,c$$

pues el primer miembro de la igualdad es

$$a\,(b + (-c)) = a\,b + a\,(-c)$$

por la propiedad ________________ y el segundo miembro es

$$a\,b + (-(a\,c));$$

estos dos enteros son iguales, ya que

$$a\,(-c) = -(a\,c).$$

distributiva

102

Justificaremos ahora algunas de las reglas "mecánicas" utilizadas desde la enseñanza secundaria. Por ejemplo, se recuerda que $-(a + b) = -a - b$, o, como se decía, "para quitar paréntesis precedidos de un signo menos, se les cambia el signo a todos los términos incluidos en él".

Observemos que esta fórmula puede escribirse:

$$-(a + b) = -a - b = (-a) + (-b)$$

Ahora, en forma precisa lo anterior se diría: el inverso aditivo de la suma de dos números enteros es igual a la suma de sus ________ __________. ↓

inversos aditivos

103

Una manera de probar la fórmula anterior es la siguiente:

Por un teorema anterior,

$$-(a + b) = (-1)\,(a + b)$$

y por la propiedad distributiva (axioma 8)

$$(-1)\,(a + b) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_;$$

nuevamente por el mismo teorema,

$$(-1)\,a + (-1)\,b = (-a) + (-b).$$

Aplicando ahora la definición de diferencia tenemos

$$(-a) + (-b) = \_\_\_\_\_\_.$$

Combinando todas las igualdades anteriores se obtiene el resultado. ↓

■

$(-1)\,a + (-1)\,b$
$-a - b$

104

Justificaremos ahora la regla conocida como "en una igualdad puede pasarse un término de un miembro a otro cambiando su signo".

Por ejemplo si

$$a + b = c$$

entonces

$$a = c - b$$

En efecto, ya que b es un entero, b tiene inverso aditivo $-b$. Ya que

$$a + b = c$$

se tiene

$$(a + b) + (-b) = c + (-b)$$

por la asociatividad de la suma podemos escribir

$$a + (b + \_\_\_) = c + (-b);$$

puesto que $b + (-b) = \_\_\_$ y $a + 0 = \_\_\_$ se tiene

$$a = c + (-b);$$

finalmente por la definición de resta

$$a = c - b$$

$(-b)$, 0, a

105

Análogamente, si

$$a - b = c$$

entonces

$$a = c + b.$$

En efecto, por la definición de resta,

$$a - b = a + (-b).$$

De la igualdad

$$a + (-b) = c$$

obtenemos

$$(a + (-b)) + b = c + b$$

y por la asociatividad de la suma

$$a + ((-b) + b) = c + b.$$

Como $-b$ es el inverso aditivo de b, se tiene $(-b) + b = \_\_\_$ y por otro lado, $a + \_\_\_ = a$, de donde, $a = c + b$.

---

0 0

106

No todas las propiedades de las operaciones en los enteros son consecuencia de los axiomas de anillo.

Por ejemplo, el producto en $\mathbf{Z}$ tiene la propiedad siguiente:

AXIOMA 9. *Si a, b son números enteros diferentes de cero, entonces ab es diferente de cero.*

Esta propiedad se menciona diciendo que en $\mathbf{Z}$ *no hay divisores de cero.*

Otra manera de expresar lo anterior es:

Si $a, b \in \mathbf{Z}$ y $ab = 0$ entonces $a = 0$ o bien $b = \_\_$.

0

107

La forma de comprobar que esta propiedad no es consecuencia de los axiomas de anillo, es exhibir un anillo conmutativo en donde *sí* haya divisores de cero, es decir, que existan dos elementos $a,b \neq 0$ tales que $ab = \_\_$.

0

108

Construyamos a continuación un anillo conmutativo en el cual haya divisores de cero.

Sea $A = \{a, b, c, d\}$ y consideremos la operación de suma dada por la tabla

$+$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

Según esta tabla,

$$a + c = \_\_\_\_$$
$$(b + a) + c = \_\_\_$$
$$c + d = \_\_\_$$
$$d + d = \_\_\_.$$

↓

c, d, b, c

109

Definamos en A un producto mediante la tabla

	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	b	c	d
c	a	c	a	c
d	a	d	c	b

Según ésta,

$$ac = \_\_\_\_$$
$$(ba)\,c = \_\_\_\_$$
$$d^2 = dd = \_\_\_\_$$
$$bc = \_\_\_\_$$
$$bd = \_\_\_\_.$$

↓

a, a, b, c, d

110

La suma definida por la tabla es asociativa. Para demostrar esto tendremos que verificar que $(x + y) + z = x + (y + z)$ para toda terna $x, y, z \in A$. Verificaremos esto únicamente para algunas ternas:

$$\begin{cases} (a + c) + d = \_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_ \\ a + (c + d) = \_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_ \end{cases}$$

$$\begin{cases} (d + c) + b = \_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_ \\ d + (c + b) = \_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_ \end{cases}$$

$$\begin{cases} (b + b) + c = \_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_ \\ b + (b + c) = \_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_. \end{cases}$$

↓

$c + d$, b, $a + b$, b, $b + b$, c, $d + d$, c, $c + c$, a, $b + d$, a

111

La suma en A es conmutativa. Para probar esto se deben verificar doce igualdades, algunas de las cuales son:

$$a + b = \_\_\_\_ = b + a$$
$$c + d = \_\_\_\_ = d + \_$$
$$d + b = \_\_\_\_ = \_\_\_\_$$
$$a + c = \_\_\_\_ = \_\_\_\_$$

Omitiremos la comprobación de los casos restantes ↓

b, b, c, a, $b + d$, $a + c = c = c + a$

112

Con respecto a esta suma el elemento neutro es a, puesto que:

$$a + a = \_$$
$$a + b = \_$$
$$a + \_ = \_$$
$$a + \_ = \_$$

↓

a, b, c, c, d, d

113

También con respecto a esta operación todo elemento de A tiene inverso aditivo. En efecto:

$a + a = a$, de donde $-a = a$
$b + d = a$, de donde $-b = d$
$c + \_ = a$, de donde $-c = \_$
$d + \_ = a$, de donde $-d = \_$. ↓

c, c, b, b

114

Es también fácil comprobar que el producto en A es conmutativo y asociativo. Omitiremos esta comprobación para abreviar.

Con respecto al producto el elemento idéntico es b. En efecto:

$$ba = a$$
$$bb = $$
$$bc = $$
$$bd = \_$$

↓

b, c, d

115

Es también directa la comprobación de que este producto distribuye a la suma. Omitimos esta comprobación.

Con todo lo anterior se ha demostrado que el conjunto A con las dos operaciones definidas es un *anillo conmutativo*.

Sin embargo en este anillo sí hay divisores de cero, es decir, existen elementos x, $y \in A$, $x \neq 0$, $y \neq 0$ tales que $xy = \_$.

Por ejemplo: $c \neq 0$ y $cc = \_\_$ que es el ____ ____. ↓

☐

0, a, elemento neutro

116

DOMINIOS ENTEROS

DEFINICIÓN. *Si A es un anillo conmutativo en el cual se cumple el axioma* 9 *se dirá que A es un* dominio entero.

Según esta definición podemos afirmar que **Z** es un ____ ____.

dominio entero

117

Sea A un dominio entero y $a, b \in A$ tales que $ab = 0$ y $a \neq 0$; entonces $b =$ __.

0

118

En los dominios enteros, en particular en $\mathbf{Z}$, vale la ley de cancelación para la multiplicación.

TEOREMA. *Si $a \neq 0$ y $ab = ac$ entonces $b = c$.*

Demostración. Supongamos $ab = ac$. Entonces $ab - ac = 0$, de donde $a(b - c) = 0$.

Y como $a \neq 0$ y en $\mathbf{Z}$ no hay divisores de cero, se tiene que

$$b - c = \_\_,$$
$$b = \_\_.$$

0, c

119

ORDEN

Otras propiedades que conviene destacar en el anillo de los números enteros son las de orden. Dados dos números enteros sabemos cuál de ellos es el mayor.

Como de costumbre emplearemos la notación $a > b$ para indicar que el entero a es mayor que el entero b; esto mismo también puede indicarse escribiendo $b < a$.

Por ejemplo, ya que 3 es mayor que 2, escribiremos __ > __ o bien __ < __.

3, 2, 2, 3

120

ENTEROS POSITIVOS

Examinemos primero los enteros positivos, es decir, los enteros mayores que cero, que podemos caracterizar como los $a \in \mathbf{Z}$ tales que $a >$ ___.

0

121

Destacaremos primero ciertas propiedades de los enteros positivos.

Los enteros positivos tienen la siguiente propiedad:

AXIOMA 10. *La suma de dos enteros positivos es un entero positivo, es decir, si $a, b \in \mathbf{Z}$ y $a > 0$, $b > 0$ entonces* _______ > 0

$a + b$

122

AXIOMA 11. *El producto de dos enteros positivos es un entero positivo, es decir, si $a, b \in \mathbf{Z}$ y $a > 0$, $b > 0$ entonces* ________ > ______.

a, b, 0

123

Analicemos ahora otra propiedad básica de los enteros positivos. Veamos primero un ejemplo. En el conjunto de enteros

$$\{2, -1, 0, 5, -3\}$$

observemos que:

2 es positivo
-1 no es positivo pero $-(-1) = 1$ sí lo es,
0 no es positivo ni $-0 = 0$ lo es,
5 es positivo y
-3 no es positivo pero $-(-3) = 3$ sí lo es.

En el ejemplo anterior los números distintos de cero o son positivos o bien sus inversos aditivos son ____________.

positivos

124

La propiedad observada antes es una propiedad general de los números enteros y se conoce con el nombre de *ley de tricotomía:*

AXIOMA 12. *Para todo entero $a \neq 0$ se cumple una y sólo una de las dos propiedades siguientes:*

i) *a es positivo*
ii) *$-a$ es positivo.*

Dicho de otro modo, para toda $a \in \mathbf{Z}$ se cumple una y sólo una de las tres condiciones siguientes:

i) $a >$ ___
ii) $-a >$ ___
iii) $a = 0$.

0, 0

125

Para la siguiente lista de enteros -7, 16, 5, 24, 14, -9, 8, 1001 tenemos que

$a > 0$ cuando $a =$ ___, ___, ___, ___, ___, ___.
$-a > 0$ cuando $a =$ ___, ___.

16, 5, 24, 14, 8, 1001, -7, -9

126

La razón por la que se ha tratado primero los enteros positivos es la siguiente:

Si en un anillo conmutativo A se considera un subconjunto P tal que

1) si $a, b \in P$ entonces $a + b$ y ab pertenecen a P, y
2) vale la ley de tricotomía,

entonces es posible definir un orden en A como sigue:

$$a > b \quad \text{si y sólo si} \quad a - b \in P.$$

Este orden tiene las propiedades usuales y además los elementos P son los elementos > 0.

Así, pues, si en los enteros conocemos el subconjunto de los positivos podemos definir el orden como sigue:

DEFINICIÓN. *Si a y b son enteros, decimos que a es mayor que b, y lo denotamos $a > b$ o $b < a$, sí $a - b$ es un entero* ________.

Equivalentemente, decimos que $a > b$ si existe un entero positivo c tal que $a = b + c$.

---

positivo

127

Por ejemplo:

$7 > 5$	porque	$7 = 5 +$ __;
$6 > 0$	porque	$6 = 0 +$ __;
$1 > -1$	porque	__ $= -1 + 2$;
$-2 > -3$	porque	$-2 =$ ___.

2, 6, 1, -3 +1

128

Usando la definición equivalente se verifica que:

6 es mayor que 2 ya que $6 - 2$ es _______.
-1 es mayor que -1000 ya que $-1 - (-1000) =$ _______ es _______.

positivo, 999, positivo

129

Verificaremos ahora que el orden entre los enteros satisface la propiedad transitiva, es decir,

TEOREMA. *Si $a, b, c \in \mathbf{Z}$ y $a > b$ y $b > c$ entonces $a > c$.*

Este teorema se puede enunciar, sin emplear símbolos, como sigue:

Si a, b, y c son enteros tales que ____.

a es mayor que b, y b es mayor que c, entonces a es mayor que c

130

Demostraremos ahora el teorema anterior;

$a > b$ significa que $a - b$ es __________ y
$b > c$ significa que $b - c$ es __________;

ahora, la suma de positivos es __________ por el axioma 10; por lo tanto,

$a - c = (a - b) + (b - c)$ es ______________,

de donde se obtiene la conclusión del teorema ya que $a - c$ positivo significa _______ > _______.

positivo, positivo, positivo, positivo a c

131

Otra propiedad básica del orden es:

TEOREMA. *Si a, b y c son enteros y a es mayor que b entonces $a + c$ es mayor que $b + c$.*

Empleando símbolos esto se puede escribir como sigue:

Si $a, b, c \in \mathbf{Z}$ y $a > b$ entonces __________________.

$a + c > b + c$

132

La demostración del teorema precedente es como sigue:

Ya que $a > b$ se tiene que $a - b$ es _______, y como

$$(a + c) - (b + c) = a - b$$

entonces $a + c$ _ $b + c$ lo cual prueba el teorema.

positivo, >

133

Un resultado interesante que es consecuencia de los axiomas 11 y 12 es el

TEOREMA. *El cuadrado de cualquier entero distinto de cero es un entero positivo*, es decir:

Si $a \in \mathbf{Z}$ y $a \neq 0$ entonces ____ > ____.

a^2, 0

134

DEMOSTRACIÓN. Por el axioma 12, como $a \neq 0$ se tiene que $a >$ __ o $-a >$ __. Si sucede lo primero entonces, por un teorema anterior, $a^2 > 0$; si sucede lo segundo entonces, ya que

$$a^2 = (-a)^2 = (-a)(-a),$$

a^2 es el producto de dos positivos y, por el mismo teorema, $a^2 > 0$. En cualquiera de los dos casos se tiene lo afirmado por el teorema.

0, 0

135

De los resultados anteriores podemos afirmar que expresiones como $a^2 + b^2$ son siempre positivas o cero para toda pareja de enteros a y b.

1er. caso: Si $a = 0$ y $b = 0$ entonces $a^2 + b^2 =$ ____.

0

136

2o. caso: Si $a = 0$ y $b \neq 0$, entonces, por el teorema anterior,
$a^2 + b^2 = b^2 >$ ____.
Si $a \neq 0$ y $b = 0$, entonces $a^2 + b^2 =$ ____ $>$ ____ por el mismo teorema.

0, a^2, 0

137

3er caso. Si $a \neq 0$ y $b \neq 0$, por el teorema mencionado a^2 y b^2 son ________ y la suma $a^2 + b^2$ es positiva por el axioma ________.

positivos, 10

138

Consideremos ahora la propiedad de que "si a los miembros de una desigualdad se les cambia el signo, entonces cambia el sentido de la desigualdad". Con precisión, si $a, b \in \mathbf{Z}$ y $a > b$ entonces $-a$ __ $-b$.

$<$

139

Para probar que $-a < -b$ hay que probar que ____________ ______, lo cual es una consecuencia de $a > b$ porque esto significa que $a - b$ es ____.

$-b - (-a)$ es positivo
positivo

140

La propiedad de que "si se multiplican los dos miembros de una desigualdad por un número positivo entonces la desigualdad no se altera", es importante.

Enunciando ésta con precisión tenemos el

TEOREMA. *Si $a, b, c \in \mathbf{Z}$ con $a > b$ y c positivo, entonces ac* __ ____.

$>bc$

141

La demostración del resultado anterior es la siguiente:

Ya que $a > b$ la diferencia ________, es positiva; pero c también lo es por hipótesis. Ahora, por el axioma 11, el producto $(a - b)\, c = ac - bc$ es ________, y por definición de orden se obtiene que ____ $>$ ____ lo cual demuestra el teorema.

$a - b$
positivo
ac bc

142

La ley de tricotomía anterior se expresa en términos del orden en la forma siguiente:

TEOREMA. *Si a y b son dos enteros distintos entonces $a > b$ o $b > a$.*

Otra manera de expresar lo anterior es que para cada pareja de enteros a,b una y sólo una de las tres condiciones siguientes se cumple

i) $a = b$
ii) a __ b
iii) a __ b

$>$, $<$

143

DEMOSTRACIÓN: Sean a y b dos enteros, por lo tanto $a - b$ es un entero. Por la ley de tricotomía

$a - b =$ ____ o bien
$a - b >$ ____ o bien
$a - b$ ____ 0.

Si $a - b = 0$ entonces $a = b$; si $a - b > 0$ entonces a __ b y si finalmente_______ < 0 se tiene que ________, lo cual termina la demostración.

0, 0, $<$, $>$, $a - b$, $a < b$

144

Veremos ahora una aplicación de la ley de tricotomía.

Si a y b son dos enteros tales que a es positivo y el producto ab es también positivo, entonces b es positivo.

Usando símbolos lo anterior queda como sigue:

Si $a, b \in \mathbf{Z}$ y $a >$ ___ y $ab >$ ___ entonces ___ $>$ ___.

0, 0, b, 0

145

Para demostrar lo anterior observemos primero que por la ley de tricotomía se satisface una y sólo una de las siguientes condiciones

1) ____ > 0
2) ____ $= 0$
3) $-b > 0$.

Si se prueba que ni 2) ni 3) se cumplen tendrá que cumplirse que $b >$ __.

b, b, 0

146

Veremos que efectivamente no se cumple 2), es decir que no vale __ $=$ __.
Si $b = 0$ se tendrá $ab =$ __ y por lo tanto ab no puede ser mayor que cero.

b, 0, 0

147

Ahora veremos que 3) no se cumple; es decir, que no vale __ > 0.
Si $-b > 0$ como $a > 0$ se obtiene

$$a(-b) = -(ab) > \_\_.$$

Pero sabemos que $ab > 0$, lo cual contradice lo anterior por la
_________________________.
Con esto se termina la demostración. □

$-b$, 0, ley de tricotomía

148

En ocasiones, para demostrar que $a > b$ se demuestra que $a^2 > b^2$, pero hay que tener cuidado porque en general la desigualdad $a^2 > b^2$ no implica que $a >$ b, como se ve en los siguientes ejemplos:

$(-2)^2 > (-1)^2$ pero -2 no es mayor que -1.
$(-3)^2 > 2^2$ pero -3 ________________ 2.

---

no es mayor que

149

Sin embargo, si a y b son positivos y $a^2 > b^2$ entonces $a > b$.
Para probar esto utilizaremos la proposición anterior.
Observemos primero que

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

y que por hipótesis $a^2 - b^2$ es _______, como $a + b$ es ____________ por el axioma 10 y las hipótesis de que a y b son ________, la proposición anterior implica que _______ ___ _______.

---

positivo, positivo, positivos, $a - b$ es positivo

150

Hasta ahora hemos visto que **Z** es un dominio entero ordenado. Sin embargo **Z** no es el único dominio entero ordenado. Por ejemplo, el campo ordenado de los números racionales que estudiaremos en el capítulo II es también un dominio entero ordenado.

A continuación daremos una propiedad adicional de **Z**, llamada el principio del buen orden, que junto con los axiomas de dominio entero ordenado caracterizan a A, es decir:

El único dominio entero ordenado que satisface el principio del buen orden es **Z**.

PRINCIPIO DEL BUEN ORDEN. *Todo conjunto no vacío de positivos tiene un elemento mínimo.*

Si $S \neq \varnothing$ es un subconjunto de **Z**, un elemento mínimo de S es un elemento $s_0 \in S$ tal que $s_0 \leq s$ para todo elemento $s \in S$. Claramente sólo hay uno.

Por ejemplo el elemento mínimo del conjunto de los enteros pares mayores que cero es _________.

2

En la Imprenta Universitaria, bajo la dirección de Jorge Gurría Lacroix, se terminó la impresión de *Álgebra I. El anillo de los números enteros,* el día 9 de agosto de 1971. La composición se paró de tipo Times 10:11. Se tiraron 10,000 ejemplares.

Bajo el tema genérico de **Algebra** los profesores Humberto Cárdenas Trigos, Emilio Lluis Riera, Francisco Raggi Cárdenas y Francisco Tomás Pons, prepararon I. **El anillo de los números enteros**, II. **El campo de los números racionales**, III. **El campo de los números reales**, folletos que ahora, cada uno por separado, ofrece a los lectores la colección de Textos Programados de la UNAM.

Los autores, ampliamente destacados en el campo de los números como los podrán demostrar estos trabajos, son investigadores de tiempo completo, titulares de sus respectivas materias en la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional Autónoma de México.

Con estos textos pretenden, además de que se conozcan –en la aparente aridez del álgebra– las riquezas que esta disciplina ejerce dentro de las ciencias, establecer un nivel intermedio a fin de que sirvan al mayor número de estudiosos.

Por tanto se puede afirmar, sin lugar a titubeos, que serán útiles a los estudiantes de nivel preparatorio, a los del primer año de las carreras profesionales –como complemento de sus cursos de matemáticas–, así como a cualquier persona interesada en temas de esta naturaleza.

TEXTOS PROGRAMADOS

Publicados

Química orgánica, José Luis Mateos Gómez (2ª edición)
Introducción a la estadística descriptiva I y II, Octavio A. Rascón Ch.
Introducción a la administración, José Antonio Fernández Arena (2ª edición)
Introducción a la lógica deductiva y teoría de los conjuntos I, Javier Salazar Resines
Introducción a la fisiología, Carlos Alcocer
Algebra I, II, III, Emilio Lluis, Humberto Cárdenas, Francisco Raggi y Francisco Tomás
Introducción a la lógica deductiva y teoría de los conjuntos II, Javier Salazar Resines

De próxima aparición

Geometría analítica, Guillermo Torres, Alejandro Odgers
Física general, Francisco Medina Nicolau
Introducción a la teoría de las probabilidades, Octavio A. Rascón Ch.

En preparación

Introducción a la psicología, Enrique García
Contabilidad de costos, Miguel Tanjián
El átomo y la molécula, Raúl Cetina
La célula, Antonio Villasana y Armando Gómez Poyou
Introducción al estudio del derecho, Fernando Flores García
Sistemas económicos, Guillermo Ramírez

Departamento de Distribución de Libros Universitarios
Insurgentes Sur 299
México 11, D. F.
Teléfonos 533-45-16 y 533-42-19

álgebra II

EL CAMPO DE LOS NUMEROS RACIONALES

Humberto Cárdenas
Emilio Lluis
Francisco Raggi
Francisco Tomás

UNAM TEXTOS PROGRAMADOS

COMISIÓN DE NUEVOS MÉTODOS DE ENSEÑANZA

TEXTOS
PROGRAMADOS

II. álgebra

EL CAMPO DE LOS NÚMEROS RACIONALES

HUMBERTO CÁRDENAS
EMILIO LLUIS
FRANCISCO F. RAGGI
FRANCISCO TOMÁS

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
DIRECCIÓN GENERAL DE PUBLICACIONES
MÉXICO, 1971

Primera edición: 1971

DIRECCIÓN GENERAL DE PUBLICACIONES

Impreso y hecho en México

CONTENIDO

R E C O N O C I M I E N T O

Este texto se elaboró en la Comisión de Nuevos Métodos de Enseñanza. En su realización participaron, además de los autores' las siguientes personas:

ENRIQUE GARCÍA G.
Instituto de Ingeniería — Coordinador Técnico

GUADALUPE LUCIO
Ayudante

JORGE DE LEÓN
Corrección de Estilo

PRESENTACIÓN

Una de las técnicas modernas de la enseñanza es la instrucción programada. Dentro de esta técnica el contenido de los textos se ordena de modo sistemático y se adapta al ritmo de asimilación de cada estudiante; existe la participación activa a lo largo del curso y se controla constantemente el aprendizaje mediante el planteamiento de preguntas y la inmediata verificación o corrección de las respuestas.

El material de un texto programado se organiza empleando ideas simples, las cuales se presentan en un orden que facilite la comprensión del estudiante. Las ideas o segmentos de información se ofrecen en cuadros lógicamente coordinados, con lo cual se evita que, en alguna de sus fases, la enseñanza llegue a ser demasiado fácil o muy difícil, a la vez que se logra mantener abierto el camino para que todos puedan adelantar según su propio ritmo de trabajo y comprensión.

Conforme van apareciendo los nuevos segmentos de información, se plantean al estudiante cuestiones específicas que, por obligarlo a intervenir activamente, le reafirman los conocimientos aprendidos, le estimulan y le mantienen atento. Para ello, cada pregunta va seguida inmediatamente de la respuesta correcta. Así el estudiante se siente alentado por sus aciertos y corrige de inmediato sus errores.

Debido a tales características el texto programado se adapta a la velocidad particular de cada estudiante, lo que no puede hacer el maestro encargado de un grupo numeroso.

Con la enseñanza programada no se pretende sustituir al profesor. Se utiliza sólo como un instrumento auxiliar, útil para iniciar estudios, subsanar lagunas, desarrollar habilidades o complementar el aprendizaje y de llevar a un punto óptimo su eficiencia y aprovechamiento.

Este libro pertenece a la primera serie de textos programados que prepara la Universidad Nacional Autónoma de México para ofrecerlos, a sus estudiantes y

profesores, como parte de un programa general de modernización de los métodos aocentes y de superación académica.

COMISIÓN DE NUEVOS MÉTODOS DE ENSEÑANZA

INTRODUCCIÓN

Este texto de álgebra consta de tres fascículos.

El primero está dedicado al estudio de los números enteros. En la parte preliminar de este capítulo se discuten, en primer lugar, las nociones intuitivas de conjunto y de función, y, en seguida, el concepto de operación y algunas propiedades de las operaciones.

Más adelante se trata el tema principal, que es el de precisar cuáles son las propiedades básicas de las operaciones con los enteros. Éstas se mencionan como los axiomas de los enteros. Después se demuestran, a partir de los axiomas, otras propiedades de los enteros que el estudiante conoce y, finalmente, se discute el orden en los enteros y se observa que las propiedades del orden, junto con las propiedades básicas de las operaciones, caracterizan a éstos.

Se subraya que no importa la naturaleza de los elementos del conjunto de los enteros, sino las propiedades de las operaciones y del orden.

El segundo está dedicado al estudio de los números racionales. Se presentan como una extensión natural de los números enteros, en donde los elementos distintos de cero tienen inverso multiplicativo.

Como propiedad característica adicional se pide que todo racional sea cociente de dos enteros. De esta manera se pueden interpretar los números racionales como cocientes de enteros y deducir las reglas usuales para las operaciones con fracciones.

Como en el caso de los enteros, se destaca una lista de proposiciones básicas de las cuales se derivan las restantes. Asimismo se le da una importancia especial al orden.

Finalmente, para preparar la introducción de los números reales, en este capítulo se analiza la expresión decimal de los números racionales. Se demuestra que éstas son periódicas y que cualquier decimal periódica corresponde a un número racional. Esto último permite identificar el conjunto de los racionales con el de las decimales periódicas.

En el tercero se estudian los números reales. Se muestra primero la existencia de números que no son racionales, y a continuación, basándose en

la interpretación de los racionales como decimales periódicas, se definen los reales como el conjunto de todas las decimales (periódicas o no). Se aceptan varias propiedades básicas acerca de la existencia de las operaciones y del orden.

Más adelante se identifican los números reales con los puntos de la recta numérica y se discuten las desigualdades y los intervalos.

Finalmente, se introducen los conceptos de cota y frontera, los cuales permiten enunciar una lista de proposiciones básicas de los números reales que los caracterizan completamente.

Daremos a continuación algunas instrucciones para el uso de este libro.

En este libro usted se encontrará con una serie de segmentos de información o cuadros, en cada uno de los cuales tendrá que elaborar una o más respuestas.

Ejemplo:

Con frecuencia usaremos letras mayúsculas para denotar conjuntos. Por ejemplo, si A es el conjunto de los números naturales menores que 6, entonces

$$A = \{1, \_, \_, \_, \_\}.$$

2, 3, 4, 5

Como puede usted observar, en este segmento de información se da primero una explicación y a continuación aparecen ciertos espacios en blanco que usted deberá llenar teniendo en cuenta la explicación anterior y la información general adquirida en los cuadros precedentes.

El segmento de información termina con una línea delgada, y en la parte inferior de ella aparecen las respuestas correctas.

Éste es un texto programado en forma lineal. Para su aprovechamiento es indispensable estudiar un cuadro tras otro, en el orden en que figuran, sin omitir ninguno y sin pasar al siguiente hasta no haber llenado correctamente los espacios en blanco del segmento de información. Si la respuesta que usted elabore no es la correcta, deberá leer nuevamente con toda atención el segmento de información, analizar sus errores y elaborar nuevamente la respuesta.

Desde luego, durante la lectura de cada segmento de información deberá usted cubrir con el cobertor anexo el espacio inferior correspondiente, con el objeto de no ver las respuestas antes de haber llenado los espacios en blanco.

Con el fin de que pueda conservar la ilación lógica de las demostraciones que abarquen más de un segmento de información, se utiliza, al margen, el símbolo $\downarrow$ el cual indica que la demostración continúa en el cuadro siguiente. Para indicar el último cuadro de la demostración se anota al margen el símbolo $\underset{\square}{\downarrow}$.

II

El campo de los números racionales

En el fascículo I se estudiaron los números enteros, caracterizándolos como un dominio entero ordenado en el que se cumple el axioma del buen orden. Se observó que, exceptuando el 1 y el −1, los números enteros no tienen inverso multiplicativo.

Los números racionales, que estudiaremos en este fascículo, constituyen un anillo que contiene a los enteros, y en donde todo número distinto de cero tiene inverso multiplicativo.

Definiremos primero el concepto de campo y describiremos los números racionales como el campo mínimo que contiene al anillo de los números enteros.

Se estudiará el orden en el campo de los racionales como extensión del orden en los enteros.

En la parte final se estudia la expresión decimal de los números racionales.

1

AXIOMAS DE CAMPO

Un campo es un anillo conmutativo A en donde el producto tiene la siguiente propiedad adicional:

Axioma 9'. *Si* $a \in A$ *y* $a \neq 0$ *entonces existe un elemento* $a' \in A$ *tal que*

$$aa' = 1.$$

El elemento a' recibe el nombre de *inverso multiplicativo de a.*

Ya que el producto es conmutativo y que $aa' = 1$ se tiene también que $a'a =$ __.

1

2

Por lo tanto si a' es un inverso multiplicativo de un elemento $a \neq 0$, entonces a' es solución de las ecuaciones

$$ax = 1 \quad \text{y} \quad \_\_ = 1$$

xa

3

Al estudiar las operaciones binarias se demostró que si la operación es asociativa y hay elemento neutro, en caso de existir solución de las ecuaciones

$$ax = 1 \quad \text{y} \quad xa = 1,$$

ésta es *única*.

Por lo tanto, en un campo, el inverso multiplicativo de cada elemento a, $(a \neq 0)$ es _____.

único

4

Si a es un elemento distinto de cero en un campo A, al inverso multiplicativo de a, que según vimos es único, lo denotaremos con a^{-1}.

Así, por ejemplo, ya que

$$1 \cdot 1 = 1 \text{ se tiene } 1^{-1} = \_\_\_$$

y ya que

$$(-1)(-1) = \_\_\_ \text{ se tiene } (-1)^{-1} = \_\_\_$$

1, 1, -1

5

Recordemos que un dominio entero A es un anillo conmutativo en el cual se cumple el axioma 9, el cual afirma que no hay divisores de cero en A; es decir que si $a, b \in A$, $a \neq 0$, $b \neq 0$ entonces

$$a\ b\ \_\ 0.$$

$\neq$

6

Si en un anillo conmutativo A se cumple el axioma 9', entonces se cumple también el axioma 9.

En efecto, supongamos que $ab = 0$ con $a \neq 0$; por el axioma 9' existe $a^{-1} \in A$ tal que

$$a^{-1}\, a = \_\_\_.$$

Ya que $ab = 0$ se tiene

(*) $$a^{-1}(ab) = a^{-1} \cdot 0 = 0$$

y por otra parte

(**) $$a^{-1}(ab) = (a^{-1}\, a)\, b = 1 \cdot b = b.$$

De (*) y (**) se obtiene

$$b = \_\_\_.$$

1, 0

7

La siguiente igualdad se usará con mucha frecuencia.

Si a es un número racional distinto de cero entonces

$$-(a^{-1}) = (-a)^{-1}$$

Esto permite omitir los paréntesis y escribir simplemente

$$-a^{-1}$$

Como el inverso de un número racional $x \neq 0$ es el número y tal que $x\, y = 1$; para demostrar la fórmula enunciada basta comprobar que

$$(-(a^{-1}))\,(-a) = \_\_\_\_.$$

1

8

Lo anterior es consecuencia de la propiedad

$$(-x)\,(-y) = xy,$$

cuando se toma

$$x = \_\_\_$$
$$y = \_\_\_.$$

a^{-1}
a

9

DIVISIÓN

En lugar de considerar la división en un campo como una nueva operación, podemos proceder en forma análoga al caso de la resta; así pues, la división se puede definir utilizando el producto y los inversos multiplicativos.

Definición. Si a, b son elementos de un campo y $b \neq 0$, se define

$$\frac{a}{b} = a\, b^{-1}$$

En otras palabras, el cociente $\frac{a}{b}$ es el producto de a por el ________ __________ de b.

inverso multiplicativo

10

Al elemento que resulta de dividir a entre b ($b \neq 0$) se le llama el cociente de a entre b.

Por ejemplo:

$$\frac{1}{1} = 1 \cdot \_\_\_ = 1 \cdot 1 = \_\_\_\_$$

y recordando que $(-1)^{-1} =$ ____ se obtiene

$$\frac{-1}{-1} = \_\_\_ \; \_\_\_ = \_\_\_.$$

1^{-1}, 1, -1, (-1) (-1), 1

11

Observemos que en la definición del cociente $\frac{a}{b}$ con a, b en un campo A, hemos considerado únicamente el caso en que b sea distinto de cero, pues por definición $\frac{a}{b} = a\ b^{-1}$ y b^{-1} existe sólo cuando b ____ 0.

$\neq$

12

De la definición de cociente se obtiene que si $a \neq 0$ entonces

$$\frac{1}{a} = a^{-1}$$

ya que

$$\frac{1}{a} = \_\_\_ \; \_\_\_ = \_\_\_.$$

(1) $(a)^{-1}$, a^{-1}

13

Así como en el caso de la suma, en donde sucedía que el inverso aditivo del inverso aditivo de un elemento a es a, también vale esta propiedad para los inversos multiplicativos.

Proposición. *El inverso multiplicativo del inverso multiplicativo de un elemento $a \neq 0$ es a. Es decir,*

$$(a^{-1})^{-1} = \_\_\_$$

o bien

$$\frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)} = \_\_\_.$$

a, a

14

NÚMEROS RACIONALES

Uno de los ejemplos más importantes de campo es el de los números racionales. Este campo que denotaremos con $\mathbf{Q}$ tiene la propiedad adicional siguiente:

Axioma 12. *El campo* $\mathbf{Q}$ *de los números racionales contiene al anillo* $\mathbf{Z}$ *de los números enteros y además todo racional r se puede expresar como cociente de dos enteros, es decir,*

$$r = \frac{a}{b} \ ; \ a, b \in \mathbf{Z}, b \neq 0.$$

Ya que $\mathbf{Q}$ contiene a $\mathbf{Z}$ y $\mathbf{Z}$ es infinito, $\mathbf{Q}$ lo es también. Por lo tanto el campo $\mathbf{Z}_2$ no puede ser $\mathbf{Q}$ pues $\mathbf{Z}_2$ tiene solamente ________ elementos.

2

15

ALGUNAS PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS RACIONALES

Verifiquemos ahora algunas propiedades de los números racionales que se obtienen como consecuencia de los axiomas de campo y de la definición de $\frac{a}{b}$ como el producto ab^{-1}:

$$\frac{a}{b} = ab^{-1}. \qquad (b \neq 0)$$

1. Ya que $1^{-1} = 1$, para todo número racional a se obtiene

$$\frac{a}{1} = \_\_\_\_\_\_\_\_ = a$$

y, en particular

$$\frac{1}{1} = \_\_\_\_\_\_.$$

$a \cdot 1$
1

16

2. Si a es un número racional distinto de cero,

$$\frac{1}{a^{-1}} = a$$

pues, por definición de cociente,

$$\frac{1}{a^{-1}} = \_\_\_\_ \_\_\_\_$$

y lo que se quiere probar resulta de que

$$(a^{-1})^{-1} = \_\_\_\_\_$$

$1 \quad (a^{-1})^{-1}$
a

17

3. Probaremos ahora que si a y b son números racionales y $a \neq 0$, entonces

$$\frac{-b}{-a} = \frac{b}{a}$$

En primer lugar, por definición,

$$\frac{-b}{-a} = \_\_\_\_ \_\_\_\_.$$

$(-b) \ (-a)^{-1}$

18

Además, como $(-a)^{-1} = -(a^{-1})$, se obtiene que

$$\frac{-b}{-a} = (-b)\,(-a)^{-1} = \_\_\_\_ \_\_\_\_.$$

$(-b) \quad (-(a^{-1}))$

19

y finalmente lo que se quería probar resulta de

$$(-b)\ (-(a^{-1})) = b\, a^{-1} = \_\_\_\_.$$

$\frac{b}{a}$

20

4. Demostraremos ahora la fórmula usual para sumar dos fracciones cuyos denominadores son iguales.

Consideremos $a, b, c \in \mathbf{Q}$ y $c \neq 0$. Entonces, por definición,

$$\frac{a}{c} = \_\_\_ \_\_\_ \quad \text{y} \quad \frac{b}{c} = \_\_\_ \_\_\_,$$

de donde,

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \_\_\_\_\_ + \_\_\_\_\_.$$

$ac^{-1}, \quad bc^{-1} \qquad\qquad ac^{-1}, \quad bc^{-1}$

21

Ahora bien, por la ley distributiva

$$ac^{-1} + bc^{-1} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ .$$

$$(a + b)\, c^{-1}$$

22

Finalmente, se obtiene la fórmula

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

pues, por definición,

$$(a + b)\, c^{-1} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ .$$

$$\frac{a+b}{c}$$

23

5. Probaremos ahora que si a, b y c son números racionales y $a, c \neq 0$, entonces

$$\frac{ab}{ac} = \frac{b}{c}.$$

En efecto, por definición.

$$\frac{ab}{ac} = \_\_\_\_\_\_\_\ \_\_\_\_\_\_\_\_ .$$

$$(ab)\ (ac)^{-1}$$

24

Ahora bien,

$$(ac)^{-1} = a^{-1}\, c^{-1},$$

de donde, el resultado enunciado se sigue de que

$$\frac{ab}{ac} = aba^{-1}\, c^{-1} = bc^{-1} = \_\_\_ .$$

$$\frac{b}{c}$$

25

6. La fórmula para encontrar la suma de fracciones con denominadores arbitrarios se obtiene ahora como una consecuencia del caso

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c,}{b} \qquad (b \neq 0).$$

Si a, b, c, d son números racionales con $c \neq 0$ y $d \neq 0$, entonces

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{d} = \frac{ad+bc}{cd}.$$

Para comprobar esto usamos primero el hecho de que

$$\frac{a}{c} = \frac{ad}{cd} \quad \text{y} \quad \frac{b}{d} = \frac{bc}{cd},$$

por lo que

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{d} = \frac{ad}{cd} + \frac{bc}{cd};$$

finalmente, la fórmula que se quiere probar es consecuencia del caso anterior, pues

$$\frac{ad}{cd} + \frac{bc}{cd} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ .$$

$$\frac{ad+bc}{cd}$$

26

La fórmula para el producto de fracciones se puede verificar fácilmente aplicando las leyes conmutativas y asociativa. Ésta se expresa como sigue:

Si a, b, c, d son números racionales con $b, d \neq 0$, entonces

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

En efecto, la fórmula es consecuencia de

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = (ab^{-1})\ (cd^{-1}) = a\,(b^{-1}\, c)\, d^{-1}$$

$$= a\, c\, b^{-1}\, d^{-1} = (ac)\ (b^{-1}\, d^{-1}) = (ac)\ (bd)^{-1}$$

$$= \_\_\_\_\_\_\_\ \_\_\_\_\_\_\_\_\_ .$$

$$\frac{ac}{bd}$$

27

POTENCIAS

Para cada racional a y cada natural n definimos inductivamente la enésima potencia de a, a^n, como sigue:

$$a^1 = a,$$
$$a^n = a^{n-1}\,a \text{ si } n > 1.$$

Así por ejemplo,

$a^n = aa$, $a^3 = a^2 a$, $a^7 =$ ______, $a^{87} =$ ______.

$a^6 a$, $a^{86} a$

28

La definición anterior podría expresarse también como sigue:

$a^n = a \cdot a \ldots a$ (n factores).

conviniendo en que $a^1 = a$.

Así, por ejemplo, 2^{17} es el producto de ______ factores todos iguales a 2, es decir,

$$2^{17} = \underbrace{2 \cdot 2 \ldots 2}_{17 \text{ factores}}$$

17

29

Se tienen las siguientes propiedades, llamadas a veces "leyes de los exponentes":

Si a, b son números racionales distintos de cero y n, m naturales arbitrarios, entonces

$$a^n\, b^n = (ab)^n$$
$$a^n\, a^m = a^{n+m}$$
$$(a^n)^m = a^{nm}.$$

Para la demostración de estas propiedades se utilizan los axiomas de asociatividad y conmutatividad.

La fórmula

$$a^n\, b^n = (ab)^n$$

se sigue de las igualdades

$$a^n\, b^n = \underbrace{(aa \ldots a)}_{n \text{ factores}}\ \underbrace{(b \cdot b \ldots b)}_{n \text{ factores}} = \underbrace{(ab)\,(ab) \ldots (ab)}_{n \text{ factores}} = \text{\_\_\_\_\_\_}.$$

$(ab)^n$

30

La fórmula

$$a^n\, a^m = a^{n+m}$$

es consecuencia de las igualdades

$$a^n\, a^m = \underbrace{(aa \ldots a)}_{n \text{ factores}}\ \underbrace{(aa \ldots a)}_{m \text{ factores}} = \underbrace{aa \ldots a}_{\text{\_\_\_ factores}} = \text{\_\_\_\_\_\_}.$$

$n + m$ a^{n+m}

31

La fórmula

$$(a^n)^m = a^{nm}$$

se deduce de las igualdades

$$(a^n)^m = \underbrace{a^n a^n \ldots a^n}_{m \text{ factores}} = \underbrace{a \cdot a \ldots a}_{\text{\_\_\_ factores}} = \text{\_\_\_\_\_\_}.$$

nm a^{nm}

32

Observe que, en general,

$$a^{n^m} \neq (a^n)^m$$

Por ejemplo,

$$2^{2^3} = \underbrace{2 \cdot 2 \ldots 2}_{2^3 \text{ factores}} \qquad = \underbrace{2 \cdot 2 \ldots 2}_{\_\_\_ \text{ factores}}$$

y, por otro lado,

$$(2^2)^3 = 2^2\ 2^2\ 2^2 = \underbrace{2 \cdot 2 \ldots 2}_{\_\_\_ \text{ factores}}$$

8

6

33

Podemos extender la definición anterior para exponentes enteros.

Si a es un número racional distinto de cero, se define:

$$a^0 = 1,$$

$$a^{-1} = (a^{-1})^1 = \frac{1}{a},$$

$$a^{-2} = (a^{-1})^2 = \frac{1}{a^2}$$

y, en general

$$a^{-n} = (a^{-1})^n = \frac{1}{a^n}, (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Así, por ejemplo,

$$a^{-5} = \_\_\_\_\_\_. \qquad (\neq 0)$$

$$3^{-7} = \_\_\_\_\_\_.$$

$$(1/2)^{-2} = \_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_.$$

$\frac{1}{a^5}$ $\frac{1}{3^7}$ $\frac{1}{(1/2)^2}$ $= 4$

34

Las "leyes de los exponentes" que se enunciaron para exponentes naturales siguen siendo válidas cuando n y m son enteros arbitrarios.

Así, pues, si $a \in \mathbf{Q}$, $a \neq 0$ y $n, m \in \mathbf{Z}$, entonces

$$a^n\ b^n = \_\_\_\_\_\_,$$

$$a^n\ a^m = \_\_\_\_\_\_,$$

$$(a^n)^m = \_\_\_\_\_\_.$$

$(ab)^n$

a^{n+m}

a^{nm}

35

Estas fórmulas pueden demostrarse observando que si n es un entero negativo, $n' = -n > 0$ y

$$a^n = (a^{-1})^{n'}$$

Por ejemplo, para la primera fórmula se tiene que

$$a^n\ b^n = (a^{-1})^{n'}\ (b^{-1})^{n'}$$

y como n' es un número natural, podemos aplicar la ley correspondiente y obtener

$$(a^{-1})^{n'}\ (b^{-1})^{n'} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_,$$

lo que permite escribir las igualdades siguientes:

$$a^n\ b^n = (a^{-1}\ b^{-1})^{n'} = ((ab)^{-1})^{n'} = (ab)^n.$$

Basándose en esta idea se recomienda al lector elaborar demostraciones de las demás fórmulas.

$(a^{-1}\ b^{-1})^{n'}$

36

Otra propiedad, de frecuente uso, que conviene mencionar es:
Si a es un número racional distinto de cero y n un entero, entonces

$$(-a)^n = a^n \quad \text{si } n \text{ es par}$$
$$(-a)^n = -a^n \quad \text{si } n \text{ es impar.}$$

Por ejemplo,

$$(-2)^{30} = 2^{30}$$
$$(-2)^{27} = \_\_\_\_\_\_$$
$$(-7)^3 = \_\_\_\_\_\_$$
$$(101)^{100} = \_\_\_\_\_\_$$
$$(-a)^{15} = \_\_\_\_\_\_$$
$$(-2)^{20} = \_\_\_\_\_\_.$$

-2^{27} -7^3 101^{100} $-a^{15}$ 2^{20}

37

La demostración del caso par es como sigue:
Sea $n = 2m$ con $m \in \mathbf{Z}$. Entonces

$$(-a)^n = (-a)^{2m} = ((-a)^2)^m = ((-a)\ (-a))^m = (a^2)^m = a^{2m} = a^n.$$

El caso impar puede obtenerse del caso par pues, si $n = 2m + 1$ ($m \in \mathbf{Z}$), entonces

$$(-a)^n = (-a)^{2m+1} = (-a)^{2m}\,(-a) = \_\_\_\_\_\ (-a) = -a^{2m+1} = -a^n.$$

a^{2m}

38

Como caso particular se tiene que

$$(-1)^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es par} \\ -1 & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

En efecto,

$$(-1)^n = 1^n = 1 \quad \text{si } n \text{ es par}$$

y

$$(-1)^n = -1^n = -1 \quad \text{si } n \text{ es impar.}$$

Por ejemplo,

$$(-1)^{77} = \_\_\_\_\_\_$$
$$(-1)^{60} = \_\_\_\_\_\_$$

y si $n \in \mathbf{Z}$,

$$(-1)^{2n} = \_\_\_\_\_\_, \quad \text{pues } 2n \text{ es } \_\_\_\_\_\_$$
$$(-1)^{2n+1} = \_\_\_\_\_\_, \quad \text{pues } 2n+1 \text{ es } \_\_\_\_\_\_.$$

-1 1 1 -1 par impar

39

Resolvamos ahora algunos ejercicios en los que se utilicen las llamadas "leyes de los exponentes".
Ejercicio 1. La expresión $3^5 \cdot 3^{-7}$ como potencia de 3 es _____.

3^{-2}

40

Ejercicio 2. El producto $5^{-10}\ 5^4\ 5^6$ es 1 pues

$$5^{-10}\ 5^4\ 5^6 = 5^{-10+4+6} = \_\_\_\_\_\_$$

y

$$5^0 = \_\_\_\_\_\_.$$

5^0 1

41

Ejercicio 3. Si $a, b, c \in$ **Q** y $abc = 2$ entonces $a^5\, b^5\, c^5 = 32$, pues

$$a^5\, b^5\, c^5 = \underline{\qquad\qquad} = 2^5.$$

$$(abc)^5$$

42

Ejercicio 4. Si a es un número racional tal que $a^{13} = 4$, entonces

$$(a^{-7})^7\, (a^{-6})^{-6} = {}^1/_4$$

Esto es consecuencia de que

$$(a^{-7})^7 = \underline{\qquad\qquad}$$

y

$$(a^{-6})^{-6} = \underline{\qquad\qquad}$$

y el producto de $a^{-49}\, a^{36} =$ _______. Pero como $a^{13} = 4$, $a^{-13} =$ _______.

a^{-49}
a^{36}
a^{-13}
${}^1/_4$

43

Usando las leyes de los exponentes pruebe que

$$((a^{-1})^{-1})^{-1}\, (a^{-1})^{-1} = 1.$$

________________________________.

$$((a^{-1})^{-1})^{-1}\, (a^{-1})^{-1} = a^{-1}\, a = 1$$

44

Ejercicio 6. Si a, b, c son números racionales tales que

$$a^{-1}\, b^{-1}\, c^{-1} = 2$$

demuestre que

$$(a^2)^{-2}\left(\frac{1}{b}\right)^4\left(\frac{c^3}{c^2}\right)^{-4} = 16.$$

$$a^{-4}\, b^{-4}\, c^{-4} = (a\,b\,c)^{-4} = ((a\,b\,c)^{-1})^4 = (a^{-1}\, b^{-1}\, c^{-1})^4 = 2^4 = 16$$

45

Al operar con números racionales aparecen con cierta frecuencia algunas relaciones conocidas en la enseñanza elemental con el nombre de "productos notables".

Algunas de éstas son:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a + b)\,(a - b) = a^2 - b^2$$
$$(a + b)\,(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$
$$(a - b)\,(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3.$$

El lector puede comprobar que éstas se deducen fácilmente de los axiomas de campo como se verá a continuación.

46

Ejemplo.

$(a + b)^2$	$= (a + b)\,(a + b)$	(por la definición de potencia)
	$= a\,(a + b) + b\,(a + b)$	(por la ley distributiva)
	$= a^2 + ab + ba + b^2$	(por la ley distributiva y la definición de potencia)
	$= a^2 + ab + ab + b^2$	(por la ley conmutativa del producto)
	$= a^2 + 2ab + b^2.$	

(Aquí se ha usado la ley asociativa sin hacer mención explícita de ella).

47

Ejercicio
En forma semejante al ejemplo anterior demuestre que

$$(a + b)\ (a - b) = a^2 - b^2$$

explicando las propiedades que se utilicen en cada paso.

$$\begin{aligned}(a + b)\ (a - b) &= a\,(a-b) + b\,(a - b) && \text{(ley distributiva)}\\ &= a^2 - ab + ba - b^2 && \text{(ley distributiva y definición de potencias)}\\ &= a^2 - ab + ab - b^2 && \text{(ley conmutativa)}\\ &= a^2 - b^2.\end{aligned}$$

48

Ejercicio
Demuestre que

$$(a + b)\ (a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$

explicando las propiedades que se usen en cada paso.

$$\begin{aligned}(a + b)\ (a^2 - ab + b^2) &= a\,(a^2 - ab + b^2) + b\,(a^2 - ab + b^2)\\ &\quad \text{(ley distributiva).}\\ &= a^3 - a^2b + ab^2 + ba^2 - bab + b^3\\ &\quad \text{(ley distributiva y definición de potencias).}\\ &= a^3 - a^2b + a^2b + ab^2 - ab^2 + b^3\\ &\quad \text{(leyes conmutativas de la suma y del producto y definición de potencias).}\\ &= a^3 + b^3\end{aligned}$$

49

Ejercicio
Demuestre que

$$(a - b)\ (a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$

explicando las propiedades que se usen en cada paso.

$$\begin{aligned}(a - b)\ (a^2 + ab + b^2) &= a\,(a^2 + ab + b^2) - b\,(a^2 + ab + b^2)\\ &\quad \text{(por distributividad)}\\ &= a^3 + a^2b + ab^2 - ba^2 - bab - b^3\\ &\quad \text{(por distributividad y definición de potencias).}\\ &= a^3 + a^2b - a^2b + ab^2 - ab^2 - b^3\\ &\quad \text{(por conmutatividad de la suma y el producto y por definición de potencias)}\\ &= a^3 - b^3\end{aligned}$$

50

Un caso particular del ejercicio anterior es cuando $a = 1$. Es este caso,

$$(1 - b)\ (1 + b + b^2) = \underline{\qquad\qquad}.$$

$$1 - b^3$$

51

Esta relación se puede generalizar a cualquier exponente natural n como sigue:

$$(1 - b)\,(1 + b + b^2 + \ldots + b^{n-1}) = 1 - b^n.$$

Por ejemplo,

$$(1 - b)\,(1 + b + b^2 + b^3) = \underline{\qquad\qquad},$$
$$(1 - b)\,(1 + b + b^2 + b^3 + b^4) = \underline{\qquad\qquad},$$
$$(1 - b)\,(1 + b + b^2 + \ldots + b^{10}) = \underline{\qquad\qquad}.$$

$1 - b^4$
$1 - b^5$
$1 - b^{11}$

52

Para demostrar la relación anterior apliquemos primero la ley distributiva:

$$(1 - b)\,(1 + b + \ldots + b^{n-1}) =$$
$$= (1 + b + \ldots + b^{n-1}) - b\,(\underline{\qquad\qquad}).$$

↓

$(1 + b + \ldots + b^{n-1})$

53

Aplicando nuevamente la ley distributiva tenemos

$$b\,(1 + b + \ldots + b^{n-1}) = \underline{\qquad\qquad}.$$

↓

$b + b^2 + \ldots + b^n$

54

Finalmente observamos que la diferencia

$$(1 + b + \ldots + b^{n-1}) - (b + b^2 + \ldots + b^n)$$

es precisamente el resultado deseado; es decir,

$$\underline{\qquad\qquad}.$$

↓

$1 - b^n$

55

Si $1 - b \neq 0$ podemos multiplicar la relación

$$(1 - b)\,(1 + b + \ldots + b^{n-1}) = 1 - b^n$$

por $\dfrac{1}{1 - b}$ y obtenemos la igualdad

$$\frac{1 - b^n}{1 - b} = \underline{\qquad\qquad\qquad}.$$

$1 + b + \ldots + b^{n-1}$

56

Las sucesiones de la forma

$$a,\ ab,\ ab^2,\ ab^3,\ \ldots$$

se llaman progresiones geométricas (de primer término a y de razón b). La fórmula anterior indica que si una progresión geométrica tiene como primer término 1, la suma de los n primeros términos de dicha progresión geométrica es (si $b \neq 1$)

$$1 + b + b^2 + \ldots + b^{n-1} = \frac{1 - b^n}{1 - b}$$

Por ejemplo

$$1 + 3 + 3^2 + \ldots + 3^6 = \underline{\qquad\qquad};$$
$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^6}\ \underline{\qquad\qquad}.$$

$$\frac{1 - 3^7}{1 - 3}$$

$$\frac{1 - \dfrac{1}{2^7}}{1 - \dfrac{1}{2}}$$

57

Ejercicio. La suma

$$s = 1 + 1 + 2 + \frac{1}{3} + 4 + \frac{1}{9} + \dots + 2^8 + \frac{1}{3^8}$$

es la suma de dos progresiones geométricas:

$$s = (1 + 2 + 4 + \dots + 2^8) + (\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_).$$

Aplicando la fórmula para la suma de progresiones geométricas se obtiene

$$s = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ + \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.$$

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{3^8}$$

$$\frac{1 - 2^9}{1 - 2} \qquad \frac{1 - \frac{1}{3^9}}{1 - \frac{1}{3}}$$

58

Ejercicio. Pruebe que

$$1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \dots + \frac{1}{10^9} = \frac{111111111}{100000000}$$

aplicando la fórmula para la suma de una progresión geométrica.

Por la fórmula,

$$1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \dots + \frac{1}{10^9} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ =$$

$$\frac{1 - \frac{1}{10^{10}}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{10^{10} - 1}{10^{10} - 10^9} = \frac{999999999}{900000000} = \frac{111111111}{100000000}$$

59

EL ORDEN EN EL CAMPO DE LOS NÚMEROS RACIONALES

Para definir el orden en el campo de los números racionales procederemos como en el caso de los números enteros; es decir, primero diremos cuáles son los números racionales positivos y después daremos la relación de orden.

Consideremos el subconjunto de **Q** formado por los números naturales que, como de costumbre, denotaremos con **N**. Recordemos que **N** es el subconjunto del anillo de los enteros que consta de los enteros positivos.

Definición. Un número racional a *es positivo si existe un número* n $\in$ **N** *tal que* na $\in$ **N**.

Por ejemplo, $\frac{2}{3}$ es positivo, pues podemos encontrar un natural, digamos 3, tal que

$$3 \cdot \frac{2}{3} = 2 \in \_\_\_\_.$$

N

60

También podemos usar otros números naturales para ver que $\frac{2}{3}$ es positivo.

Por ejemplo $6 \in$ **N** y

$$6 \cdot \frac{2}{3} = 4 \in \_\_\_\_\_\_$$

lo cual demuestra también que $\frac{2}{3}$ es _____ .

N

positivo

61

El número racional $\frac{-3}{-7}$ es positivo, pues, por ejemplo, podemos tomar $7 \in$ **N** y

$$7 \cdot \frac{-3}{-7} = 3 \in \_\_\_\_\_\_.$$

N

62

Con esta definición resulta que si un número racional a es entero positivo, es decir, si $a \in \mathbf{N}$, a es también positivo considerado como número *racional*, ya que $1 \cdot a = a \in \mathbf{N}$ y $1 \in \mathbf{N}$.

Por lo tanto, al hablar de un número entero positivo no es necesario aclarar si es positivo como entero o como racional.

Al conjunto de los números racionales positivos lo denotaremos con $\mathbf{Q}^+$.

Lo dicho anteriormente puede expresarse con la relación de inclusión

$$\mathbf{N} \_\_\_ \mathbf{Q}^+$$

$\subset$

63

Los números racionales $\frac{3}{10}$, $\frac{27}{5}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{-1}{-5}$, 7 son positivos

porque

$10 \cdot \frac{3}{10} = 3 \in \mathbf{N}$ (con $10 \in \mathbf{N}$)

$\_ \cdot \frac{27}{5} = \_ \in \mathbf{N}$ (con $\_ \in \mathbf{N}$)

__________ (________)

__________ (________)

__________ (________).

---

5 27 5

$100 \cdot \frac{1}{100} = 1 \in \mathbf{N}$ (con $100 \in \mathbf{N}$)

$5 \cdot \frac{-1}{-5} = 1 \in \mathbf{N}$ (con $5 \in \mathbf{N}$)

$1 \cdot 7 = 7 \in \mathbf{N}$ (con $1 \in \mathbf{N}$)

64

Repitiendo la definición de racional positivo, podemos escribir que

$$r \in \mathbf{Q}^+$$

si y solamente si existe $n \in$ ____ tal que

$$\_\_\_\_ \in \mathbf{N}.$$

N

nr

65

Una vez establecido cuál es el conjunto de números racionales positivos podemos proceder en forma completamente análoga al caso de los números enteros, y definir una relación de orden como sigue:

Definición. Si r *y* s *son números racionales se dice que* r *es mayor que* s *(o bien que* s *es menor que* r*) si la diferencia* r–s *es un número positivo.*

En este caso escribiremos $r > s$ o también $s < r$.

Por ejemplo,

$\frac{2}{3} > \frac{1}{2}$ ya que $\frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$ es __________

$-\frac{31}{9}$ ____ $-\frac{33}{10}$ ya que ______________ es__________.

---

positivo, $>$, $-\frac{31}{9} - \left(-\frac{33}{10}\right) = 1$

66

Podemos repetir la definición anterior escribiendo:

Si $r, s \in \mathbf{Q}$ entonces

$r > s$ si y sólo si ______ es positivo.

$r - s$

67

De la definición anterior resulta que los números racionales positivos son aquellos números a tales que $a > 0$, pues, según la definición $a > 0$ si y sólo si $a - 0$ es ________, es decir, si y sólo si a es positivo.

positivo

68

O bien, en forma más breve,

$a > 0$ si y sólo si a es ________.

positivo

69

Recordemos que las propiedades del orden en los números enteros se demostraron a partir de tres propiedades básicas de los *enteros positivos*. Éstas son:

a) La suma de dos números positivos es ________.
b) El producto de dos números positivos es ________.
c) Vale la ley de tricotomía.

positivo
positivo

70

Demostraremos ahora que los *racionales positivos* cumplen también estas tres condiciones básicas.

a) Si $a, b \in \mathbf{Q}^+$ entonces $a + b \in \mathbf{Q}^+$.

Demostración. En primer lugar, ya que $a, b \in \mathbf{Q}^+$, por la definición de racional positivo, existen $m, n \in \mathbf{N}$ tales que

$ma \in$ _____ y _____ $\in \mathbf{N}$. ↓

$\mathbf{N}$ $\quad nb$

71

Como $m, n \in \mathbf{N}$, su producto $mn \in \mathbf{N}$. Ahora,

$$mn\,(a + b) = n\,(ma) + m\,(nb)$$

el cual pertenece a $\mathbf{N}$ pues es una suma de productos de elementos de $\mathbf{N}$. Lo cual nos indica, según la definición de $\mathbf{Q}^+$, que ↓

$$a + b \in \text{\_\_\_\_\_}.$$

$\mathbf{Q}^+$

72

b) Si $a, b \in \mathbf{Q}^+$, entonces $ab \in \mathbf{Q}^+$.

Demostración. Como antes, ya que $a, b \in \mathbf{Q}^+$, existen $m, n \in \mathbf{N}$ tales que

$$ma \in \mathbf{N} \text{ y } nb \in \mathbf{N},$$

y $mn \in \mathbf{N}$.

Ahora, $(mn)\,(ab) = (ma)\,(nb)$ que pertenecen a $\mathbf{Q}$, pues $ma \in \mathbf{Q}^+$ y _____ $\in \mathbf{Q}^+$, lo cual prueba que $ab \in$ ____.

nb

$\mathbf{Q}^+$

73

c) Ley de tricotomía. Si $a \in \mathbf{Q}$, entonces vale una y solamente una de las tres condiciones siguientes:

i) $a \in \mathbf{Q}^+$
ii) $a = 0$
iii) $-a \in \mathbf{Q}^+$.

En otras palabras, si a es un racional diferente de cero, entonces

a es positivo

o bien

____ es positivo.

$-a$

74

Para demostrar esta propiedad utilizaremos la ley de tricotomía para los números enteros.

Demostración. Observemos primero que si $a \in \mathbf{Q}$, entonces existe $n \in \mathbf{N}$ tal que $na \in \mathbf{Z}$, es decir, tal que na es un número entero.

Ahora bien, según la ley de tricotomía para los números enteros vale una y solamente una de las tres condiciones siguientes:

i') $na \in \mathbf{N}$

ii') $na = 0$

iii') ________. ↓

$-(na) \in \mathbf{N}$

75

Continuando la demostración vemos ahora que la primera condición es equivalente a que $a \in \mathbf{Q}^+$. La segunda equivale a que $a = 0$ y la tercera, escrita en la forma $n(-a) \in \mathbf{N}$, equivale a decir que $-a \in$ ____. ↓

Con esto queda demostrada la ley de tricotomía. ■

$\mathbf{Q}^+$

76

Habiendo comprobado ya que los racionales positivos cumplen las propiedades básicas a), b), y c), es posible, como en el caso de los enteros, probar a partir de éstas las demás propiedades de orden. Por esto no mencionaremos ahora ya explícitamente dichas propiedades del orden en los racionales, pero haremos uso de ellas.

Siguiendo la costumbre llamaremos *negativos* a los racionales distintos de cero que no son positivos.

De esta definición se sigue que el conjunto de los números racionales quede partido en tres subconjuntos:

el de los racionales positivos,

el que consta únicamente de 0 y

el de los racionales ________.

---

negativos

77

Usando esta terminología, la ley de tricotomía puede enunciarse diciendo que si a es un número racional, entonces se cumple una y solamente una de las siguientes condiciones.

i) a es positivo

ii) $a = 0$

iii) a es ________.

---

negativo

78

Así como un número racional a es positivo si y sólo si $a > 0$, es claro que igual que en el caso de los enteros.

Un número racional a *es negativo si y solamente si* a < 0.

79

Observación. En ocasiones se dice equivocadamente que $-a$ es negativo por el simple hecho de que figura el signo —.

Debemos recordar que el símbolo $-a$ indica únicamente el inverso aditivo de a y este símbolo, $-a$, no nos da absolutamente ninguna información relativa al orden.

En el caso de que el orden cumpla la ley de tricotomía (como en el caso de los enteros y los racionales), si a es positivo podemos efectivamente afirmar que $-a$ es negativo. Pero, desde luego, si a es negativo, $-a$ es positivo.

Por ejemplo,

si $a = \frac{2}{3}$, $-a$ es negativo,

si $a = -\frac{1}{2}$, $-a$ es ________.

---

positivo

80

Una propiedad del orden que no se consideró al hablar de los enteros es la siguiente:

Si a es un número racional y $a > 0$ entonces $\frac{1}{a} > 0$.

Ya que $a \neq 0, \frac{1}{a} \neq 0$, Si $\frac{1}{a} < 0$, $-\frac{1}{a} > 0$ y entonces

$\left(-\frac{1}{a}\right) a$ __ 0. Pero

$$\left(-\frac{1}{a}\right) a = -1,$$

lo cual es una contradicción. Luego, por la ley de tricotomía

$$\frac{1}{a} \_\_ 0.$$

$>$

$>$

81

El lector atento habrá observado que para definir el orden en el campo $\mathbf{Q}$ de los números racionales se necesita únicamente tener el subconjunto $\mathbf{Q}^+$ de $\mathbf{Q}$ para el que se cumplen las tres propiedades básicas.

En general, si K es un campo y K contiene un subconjunto P tal que

i) Si $a, b \in P$, entonces $a + b \in P$

ii) Si $a, b \in P$, entonces $ab \in P$

iii) Vale la ley de tricotomía; es decir, si $a \in K$ se cumple una y solamente una de las condiciones siguientes:

a) $a \in P$

b) $a = 0$

c) $-a \in P$,

entonces se dice que K es un campo ordenado y que los elementos de P son los elementos positivos de K.

Igual que en el caso de $\mathbf{Q}$, si K es un campo ordenado se define la relación de orden:

$$a > b \text{ si y solamente si } a - b \in \_\_\_\_.$$

P

82

EL POSTULADO DE ARQUÍMEDES

A continuación demostraremos una propiedad muy importante del campo de los números racionales conocida con el nombre de postulado de Arquímedes:

TEOREMA. *Si a y b son dos números racionales positivos, existe un entero positivo n tal que*

$$na > b.$$

En este enunciado los números a y b se supone que son racionales ________ y el número n es un ________ ________.

---

positivos

entero positivo

83

Primero demostraremos este teorema para el caso particular de que a y b sean *enteros* positivos.

Se pueden presentar dos casos:

Primer caso: $a > b$. Entonces se puede tomar $n = 1$ y resulta que $1 \cdot a > b$.

Segundo caso: Supongamos ahora que $a \leqslant b$. Consideremos el conjunto

$$M = \{b - ka \mid k \in \mathbf{N} \text{ y } b - ka \geqslant 0\}$$

que consta de enteros no negativos.

El conjunto M no es vacío, pues el elemento

$$b - 1 \cdot a = b - a \in M$$

ya que, según la hipótesis $b - a$ ____ 0.

$>$

84

Observemos ahora que para toda $k \in \mathbf{N}$,

$$b - ka > b - (k + 1)\, a.$$

En efecto,

$$(b - ka) - (b - (k + 1)\, a) =$$
$$b - ka - b + ka + a = a > \_\_\_\_\_\_$$

según la hipótesis.

0

85

Por el axioma del buen orden en los enteros, el conjunto M tiene un elemento mínimo, digamos

$$b - ma$$

y como

$$b - (m + 1)\, a \_\_\_\_\_ b - ma$$

$b - (m + 1)\, a \notin M$ pues b-ma es el elemento mínimo de M.

<

86

Por consiguiente

$$b - (m + 1)\, a < 0$$

y tomando $n = m + 1$ obtenemos $b - na < 0$, de donde na __ b, con lo que queda probado el teorema cuando a y b son enteros.

>

87

La demostración del teorema se sigue ahora fácilmente del caso particular probado.

Sean ahora a, b racionales positivos. Por la definición de racional positivo, existen $m, n \in \mathbf{N}$ tales que

$$ma \in \mathbf{N}$$
$$nb \in \mathbf{N}$$

y también, desde luego,

$$a' = mna \in \mathbf{N}$$
$$b' = mnb \in \mathbf{N}.$$

Aplicando a los enteros positivos a' y b' lo antes demostrado, existe $q \in \mathbf{N}$ tal que

$$qa' > b',$$

de donde,

$$qmna > mnb$$

y multiplicando por $\frac{1}{mn}$, que es positivo, se obtiene que

$$qa \_\_\_\_ b.$$

>

88

Al aplicar el postulado de Arquímedes al caso particular en que $b = 1$ obtenemos el siguiente corolario que será de gran utilidad en el estudio de la estructura de los números racionales y reales.

Corolario. Si a es un número racional positivo, existe un entero positivo n tal que

$$0 < \frac{1}{n} < a.$$

En efecto, tomando $b = 1$ el postulado de Arquímedes asegura la existencia de un número entero positivo n tal que

$$na > 1 > 0$$

Multiplicando la desigualdad anterior por $\frac{1}{n}$, que es positivo, obtenemos el resultado deseado:

____________________.

$$0 < \frac{1}{n} < a$$

89

Otra consecuencia del postulado de Arquímedes es el siguiente:

Corolario 2. Si a es un número racional positivo, existe un entero positivo m tal que

$$0 < \frac{1}{10^m} < a.$$

El resultado anterior es claro, pues por el corolario 1 existe un número natural n tal que

$$0 < \_\_\_\_\_\_ < a.$$

Basta entonces tomar m de tal manera que $n < 10^m$ lo cual implica

$$\frac{1}{10^m} \_\_\_\_\_\_ \frac{1}{n},$$

de donde,

$$0 < \frac{1}{10^m} < \frac{1}{n} < a$$

con lo que queda probado el corolario 2.

$$\frac{1}{n} \qquad <$$

90

NOTACIÓN DECIMAL DE LOS NÚMEROS RACIONALES

En esta sección recordaremos cómo se extiende la notación decimal de los números enteros a los números racionales.

Si A es un número entero no negativo (en notación decimal) y a un entero entre 0 y 9, más precisamente, $0 \leqslant a \leqslant 9$, la notación

$A.a$ simboliza al número racional $A + \frac{a}{10}$. O sea,

Por ejemplo

$$A \cdot a = A + \frac{a}{10}$$

$$3.7 = \_\_\_\_\_ + \_\_\_\_\_\_$$
$$101.1 = \_\_\_\_\_ + \_\_\_\_\_\_$$
$$10.0 = \_\_\_\_\_ + \_\_\_\_\_\_.$$

$$3 + \frac{7}{10}$$

$$101 + \frac{1}{10}$$

$$10 + \frac{0}{10} = 10$$

91

Cuando el entero A es 0, se acostumbra abreviar la notación escribiendo simplemente $.a$ en lugar de $0.a$. Por ejemplo

$$\frac{2}{10} = 0.2 = .2$$

$$\frac{9}{10} = \_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_$$

$$.1 = 0 + \frac{1}{10} = \frac{1}{10}$$

$$.5 = \_\_\_\_\_ + \_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_$$

$$0.9 \qquad .9$$

$$0 + \frac{5}{10} \quad \frac{5}{10}$$

92

Siguiendo la costumbre, para abreviar el lenguaje, a los enteros a tales que $0 \leqslant a \leqslant 9$ les llamaremos *cifras.*

Recordemos ahora que si A es un entero no negativo y $b_1, b_2, \ldots, b_t$ son cifras, el símbolo $A.b_1\ b_2 \ldots b_t$ denota al número racional

$$A + \frac{b_1}{10} + \frac{b_2}{10^2} + \ldots + \frac{b_t}{10^t}. \quad \text{O sea,}$$

$$A.\ b_1\ b_2 \ldots b_t = A + \frac{b_1}{10} + \frac{b_2}{10^2} + \ldots + \frac{b_t}{10^t};$$

por ejemplo

$$12.161 = 10 + \frac{1}{10} + \frac{6}{10^2} + \frac{1}{10^3},$$

$$7.2945 = \_\_\_\_\_ + \_\_\_\_\_ + \_\_\_\_\_ + \_\_\_\_\_ + \_\_\_\_\_.$$

$$7 + \frac{2}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{4}{10^3} + \frac{5}{10^4}$$

93

Así, pues, agregando a la notación decimal de los enteros no negativos un punto, llamado punto decimal, podemos expresar además de los enteros no negativos, algunos racionales no enteros.

Al símbolo

$$A.\ a_1\ a_2 \ldots a_n$$

se les llama la *expresión decimal finita* del número racional

$$A + \frac{a}{10} + \ldots + \frac{a_n}{10^n}.$$

Por ejemplo, la expresión decimal de

$$12 + \frac{1}{10} + \frac{5}{100} + \frac{9}{1000}$$

es ________________.

12.159

94

Los algoritmos (procesos) para calcular la suma y el producto de decimales finitos son bien conocidos. Basta agregar a los algoritmos de suma y producto de enteros, en notación decimal, las reglas para el punto decimal.

Por ejemplo

$2.5 + 2.3 =$ __________;

$.3 \times .2 =$ __________.

4.8
.06

95

Podemos verificar, en los ejemplos anteriores, la validez de los algoritmos. En efecto,

$$2.5 = 2 + \frac{5}{10} \text{ y } 2.3 = \_\_\_\_ + \_\_\_\_,$$

por lo que

$$2.5 + 2.3 = 2 + \frac{5}{10} + 2 + \_\_\_\_ = 4 + \_\_\_\_ = 4.\_\_\_\_.$$

$2 + \frac{3}{10}$

$\frac{3}{10}$ $\frac{8}{10}$ 4.8

96

Que $.3 \times .2 = .06$ es igualmente fácil de verificar:

$$.3 = \frac{3}{10} \quad \text{y} \quad .2 = \_\_\_\_$$

de donde

$$.3 \times .2 = \frac{3}{10} \times \_\_\_\_ = \_\_\_\_ = .\_\_\_\_$$

Estos ejemplos dan una idea clara de cómo pueden demostrarse las "reglas para el punto decimal" en la suma y producto de expresiones decimales.

$\frac{2}{10}$

$\frac{2}{10}$ $\frac{6}{100}$ = .06

97

Es importante observar que dos decimales finitas distintas denotan números racionales distintos y recíprocamente.

Por ejemplo las decimales finitas distintas

2.137 y 2.127

denotan respectivamente a los racionales

$2 + \_\_\_\_ + \_\_\_\_ + \_\_\_\_$ y $2 + \_\_\_ + \_\_\_ + \_\_\_$

que son ________.

$\frac{1}{10}$ $\frac{3}{100}$ $\frac{7}{1000}$ $\frac{1}{10}$ $\frac{2}{100}$ $\frac{7}{1000}$

distintos

98

Otro hecho que conviene destacar es que *no todo número racional positivo tiene una expresión decimal finita,* como puede verse en el siguiente

TEOREMA. *Sea* $r = \frac{p}{q}$ *un número racional con* p y q *enteros positivos primos entre sí. Entonces si* r *tiene una expresión decimal finita,* q *es de la forma* $2^r\,5^s$ *(*r*,* s *enteros no negativos).*

Es decir los únicos posibles factores primos del denominador son 2 y 5.

Demostración. Sea $r = A.\,a_1\,a_2 \ldots a_n$. Entonces

$$r = A + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \ldots + \frac{a_n}{10^n} = \frac{10^n A + 10^{n-1} a_1 + \ldots + a_n}{10^n}$$

Aquí, los únicos factores primos del denominador son 2 y 5, y al cancelar los factores primos del numerador y denominador para expresar r como cociente de dos enteros primos entre sí, es claro que los únicos factores primos posibles del denominador son ______ y ________.

---

2 5

99

Utilicemos el teorema anterior. De los siguientes números racionales

$$\frac{2}{5},\ \frac{3}{7},\ \frac{3}{10},\ \frac{1}{14},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{2}$$

no se pueden expresar como decimales finitos los siguientes:

____, ____, ____.

$\frac{3}{7}$, $\frac{1}{14}$, $\frac{1}{3}$.

100

El recíproco del teorema anterior es válido. Para ver esto, demostraremos primero un resultado auxiliar.

Lema. Todo número racional r *de la forma* $\frac{c}{10^t}$ *donde* c *es un entero positivo tiene expresión decimal finita.*

Demostración. Sea

$$c = c_n\,10^n + c_{n-1}\,10^{n-1} + \ldots + c_1\,10 + c_0$$

donde cada c_i es una cifra. Entonces

$$r = c_n\,10^{n-t} + c_{n-1}\,10^{n-t-1} + \ldots + c_1\,10^{1-t} + c_0\,10^{-t}$$

Ahora, si $n \leq t$, obtenemos

$$r = \underbrace{0.00\ldots0}_{n\text{-}t \text{ ceros}}\,c_n\,c_{n-1}\ldots c_1\,c_0$$

la cual es una expresión __________ __________ del número racional r. ↓

---

decimal finita

101

Finalmente si $n > t$, entonces

$$r = A.c_{r-1}\, c_{r-2} \ldots c_1\, c_0,$$

de donde, $A = c_n 10^{n-t} + \ldots + c_t$ es un entero no negativo.

En esta forma hemos probado que r puede expresarse como decimal finita y el lema queda demostrado.

Como ejemplos del lema tenemos:

$$\frac{2750}{10^3} = 2.75$$

$$\frac{45301}{10^5} = \_\_\_\_\_\_$$

$$\frac{37}{10^4} = \_\_\_\_\_\_.$$

.45301
.0037

102

Podemos ahora enunciar y demostrar el teorema recíproco del anterior:

Teorema. Si un número racional r es de la forma

$$r = \frac{c}{2^m\ 5^n} \qquad (c, m, n \text{ enteros no negativos})$$

entonces r tiene expresión decimal finita.

Demostración. Podemos escribir

$$r = \frac{c'}{10^p}$$

multiplicando convenientemente numerador y denominador por una potencia de 2 o de 5, y entonces el teorema es consecuencia del lema anterior.

Ejemplos.

$$\frac{2743}{2^2 \times 5} = \frac{2743 \times 5}{2^2 \times 5^2} = \frac{13715}{10^2} = 137.15$$

$$\frac{314521}{2^2 \times 5^3} = \_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_$$

$$\frac{12}{5^2} = \_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_.$$

$$\frac{314521 \times 2}{2^3 \times 5^3} = \frac{629042}{10^3} = 629.042$$

$$\frac{12 \times 2^2}{2^2 \times 5^2} = \frac{48}{10^2} = .48$$

103

Como hemos observado, existen racionales que no se pueden expresar como decimales finitas. A estos números les asociaremos una expresión que llamaremos *decimal infinita*.

Consideremos, por ejemplo, el racional $\frac{1}{3}$. Como sabemos, éste no tiene expresión decimal finita

Para asociar a este número una decimal infinita procederemos como sigue: Multiplicamos el numerador por 10 y el producto lo dividimos entre 3. El cociente es ______ y el residuo es ______.

3 1

104

Multiplicamos ahora este residuo por 10 y dividimos el producto entre 3. El cociente es ____ y el residuo es ______.

3 1

105

Continuando este proceso obtenemos la sucesión de cocientes

3, 3, 3, ____, ____, ...

y entonces al número racional $\frac{1}{3}$ le asociamos la decimal infinita

.3333...

3 3

106

Apliquemos el mismo algoritmo al número racional $\frac{1}{6}$.

Multiplicamos el numerador por 10 y el producto lo dividimos entre 6. El cociente es ______ y el residuo es ______.

1 4

107

Multiplicamos ahora este residuo por 10 y dividimos el producto entre 6. El cociente ahora es _______ y el residuo es _________.

6 4

108

Continuamos el proceso, como en el ejemplo anterior, y obtenemos un cociente ______ y un residuo _________.

6 4

109

Ahora se ve fácilmente que la sucesión de los cocientes es:

1, 6, 6, _______, ______, ______, . . .

y la decimal infinita asociada a $\frac{1}{6}$ es: ____________________.

6 6 6

.1666. . .

110

El proceso anterior es el de la "división sin residuo". Consideremos el número racional $\frac{2}{7}$.

Escribamos como usualmente

$$7 \overline{)2}$$

Como 2 es menor que siete multiplicamos 2 por 10, es decir, "agregamos un ceio al 2" y dividimos el resultado entre 7 obteniendo un cociente y un residuo, escribiendo el cociente precedido por un punto decimal.

↙cociente

$$\begin{array}{r} .\_\_ \\ 7 \overline{)20} \\ \_ \end{array}$$

↖residuo

2
6

111

Al residuo obtenido le agregamos un cero y dividimos el número así obtenido entre 7, colocando el nuevo cociente a la derecha del anterior y el nuevo residuo debajo del cero que sigue al residuo anterior

$$\begin{array}{r} .2\_ \\ 7 \overline{)20} \\ 60 \\ \_ \end{array}$$

8
4

112

Repitiendo el proceso obtenemos lo siguiente:

$$
\begin{array}{r|l}
 & .28\ \_\_ \\ \hline
7 & 20 \\
 & \ \ 60 \\
 & \ \ \ \ 40 \\
 & \ \ \ \ \ \ \_\_
\end{array}
$$

5
5

113

Repitiendo el proceso varias veces:

$$
\begin{array}{r|l}
 & .2857\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_ \\ \hline
7 & 20 \\
 & \ \ 60 \\
 & \ \ \ \ 40 \\
 & \ \ \ \ \ \ 50 \\
 & \ \ \ \ \ \ \ \ 10 \\
 & \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \_\_0 \\
 & \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \_\_0 \\
 & \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \_\_0 \\
 & \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \_\_0 \\
 & \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \_\_
\end{array}
$$

---

1 4 2 8 5
3
2
6
4
5

114

De esta manera obtenemos la expresión decimal del racional $\frac{2}{7}$

$$\frac{2}{7} = .285714285\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \ldots$$

7, 1, 4

115

En el ejemplo anterior, los puntos suspensivos (. . .) indican que el "periodo" 285714 se repite una y otra vez. Para indicar esto se usa la notación

$$\overline{.285714} = .285714285714285714\ldots$$

Otros ejemplos de esta notación son los siguientes

$$.3 = .33\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \ldots$$
$$.8 = .\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \ldots$$
$$2.15 = 2.\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \ldots$$
$$\frac{1}{6} = \overline{.16} = .\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \ldots$$

---

3 3 3 3 3
8 8 8
1 5 1
.1 6 6 6

El mismo procedimiento anterior se puede aplicar para cualquier numerador no negativo y denominador positivo. Por ejemplo:

```
      2.94 - - - - - - - - - - - - - - - - . . .
  17 | 50
      160
       070
        020
        - -0
         - -0
          - -0
           - -0
            - -0
             - -0
              - -0
               - -0
                - -0
                 - -0
                  - -0
                   - -0
                    - -0
                     - -0
```

```
117647058823529

03
 13
  11
   08
    12
     01
      10
       15
        14
         04
          06
           09
            05
             16
```


El algoritmo de la "división sin residuo" aplicado a un racional que tenga expresión decimal finita conduce a la misma expresión decimal finita seguida de un número infinito de ceros.

Por ejemplo, aplicando el algoritmo a $\frac{372}{25}$ obtenemos

```
     14. _ _ _ _
 25 | 372
      122
       - -0
         - -0
          - -0
           - -0
            - -0
              .
               .
                .
```

```
14.8800...

 220
  200
   000
     00
```

118

Resumiendo lo anterior:

El algoritmo de la división sin residuo asocia a cada racional no negativo r una expresión decimal:

$$A.a_1\, a_2\, a_3 \ldots ,$$

en donde A es un entero no negativo (en su expresión decimal) y las a_i son cifras. Escribiremos entonces

$$r = A.a_1\, a_2\, a_3 \ldots$$

En todos los ejemplos anteriores puede observarse que esta expresión decimal es *periódica*. Este resultado es general:

Teorema. *La expresión decimal de un número racional es periódica.*

En efecto, si $r = \frac{m}{n}$ es un número racional (m, n enteros no negativos), el número de *distintos* residuos posibles que aparecen en la división sin residuo es menor o igual que n. Por consiguiente, después del n-simo paso necesariamente se debe repetir alguno de ellos y a partir de entonces el proceso se vuelve periódico.

119

El teorema anterior sugiere la siguiente pregunta:

Dada una decimal periódica

$$A.a_1\, a_2 \ldots a_n\, \overline{b_1\, b_2 \ldots b_m},$$

¿existe un número racional r tal que

$$r = A.a_1\, a_2 \ldots a_n\, \overline{b_1\, b_2 \ldots b_m}?$$

Los dos teoremas que siguen responden esta pregunta.

Teorema. Las decimales periódicas del tipo

$$A.a_1\, a_2 \ldots a_n\, \overline{9}$$

no aparecen al aplicar la división sin residuo a los números racionales.

Por ejemplo, de las expresiones decimales

$$3.24993\overline{9}, \qquad 3.2\overline{429}, \qquad 5.\overline{397}, \qquad .\overline{9},$$

las del tipo mencionado en el teorema son:

$$\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_, \qquad \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.$$

$$3.24993\overline{9}, \qquad .\overline{9}$$

120

Demostraremos únicamente que no existe ningún número racional $r = \frac{a}{b}$ tal que

$$\frac{a}{b} = .\overline{9}$$

(un argumento simple permite reducir el caso general a éste).

Observemos primero que si $a \geq b$, entonces la expresión decimal de $\frac{a}{b}$ es de la forma

$$A.a_1\, a_2 \ldots a_n \ldots$$

con $A > 0$.

Por lo tanto, ya que la expresión de $\frac{a}{b}$ es $0.\overline{9}$, se debe tener que

$$a < \_\_\_\_.$$

---

b

121

De la desigualdad anterior se sigue que

$$-9b < -9a$$

y sumando $10a$ obtenemos

$$10a - 9b < 10a - 9a = a.$$

Pero como $10a - 9b = r_1$, tenemos que

$$r_1 \_\_\_\_ a.$$

$<$

122

Ahora, por definición,

$$r_1 < b$$

y multiplicando por -9 ambos lados de la desigualdad obtenemos

$$-9b < -9r_1.$$

Sumando $10r_1$ a los dos miembros de la desigualdad se obtiene

$$10r_1 - 9b < 10r_1 - 9r_1 = r_1.$$

Pero como $10r_1 - 9b = r_2$ tenemos que

$$r_2 \_\_\_\_\_\_ r_1$$

↓

<

123

Con lo anterior hemos probado que el residuo r_2 que se obtiene al dividir $10r_1$ entre b es menor que r_1.

En forma análoga se prueba que el residuo r_3 que se obtiene al dividir $10r_2$ entre b es menor que r_3.

En esta forma obtenemos la sucesión de residuos $r_1, r_2, r_3, \ldots$ que cumplen las condiciones

$$a > r_1 > r_2 > r_3 > \ldots \geqslant 0.$$

Ya que en esta sucesión puede haber solamente un número finito de términos, se tiene que necesariamente algún residuo $r_n = 0$. De donde, la $n + 1$ cifra decimal de $\frac{a}{b}$ será cero, en contra la hipótesis de que todas sus cifras decimales son ______.

↓ □

9

124

Teorema. Toda decimal periódica con periodo distinto de 9 es la expresión decimal de un número racional

Para abreviar haremos la demostración únicamente en el caso en que la decimal sea de la forma

$$.\overline{b_1 b_2 \ldots b_m}.$$

(Un argumento simple reduce el caso general a éste.)

Demostración

Consideremos primero el entero

$$b_1 10^{m-1} + b_2 10^{m-2} + \ldots + b_m$$

que en notación decimal se escribe $b_1 b_2 \ldots b_m$ (recuérdese que b_i es una cifra para cada i), es decir,

$$b_1 b_2 \ldots b_m = b_1 10^{m-1} + \ldots + b_m$$

Por ejemplo, si la decimal es $.\overline{321}$, el entero que se considera es

$$3 \times 10^2 + 2 \times 10 + 1,$$

que en notación decimal es __________.

321

125

Demostraremos ahora que el número racional

$$r = \frac{b_1 \ldots b_m}{10^m - 1}$$

tiene como expresión decimal

$$.\overline{b_1 \ldots b_m}$$

Por ejemplo,

$$\frac{321}{10^3-1} = \frac{321}{999} = .\overline{321}$$

En efecto,

$$\begin{array}{r|l} & .\_\_\ \_\_\ \_\_ \\ 999 & 3210 \\ & \text{- - - }0 \\ & \text{ - - - }0 \\ & \text{ - - - }0 \\ & \text{   - - -} \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} & .321 \\ 999 & 3210 \\ & 2130 \\ & \ \ 1320 \\ & \ \ \ \ 321 \end{array}$$

126

Calcularemos ahora en general la expresión decimal del racional

$$r = \frac{b_1 \ldots b_m}{10^m - 1}$$

para lo cual consideraremos la igualdad

$$10\,(b_1\,10^{m-1} + \ldots + b_{m-1}\,10 + b_m) = (10^m - 1)\,b_1 + b_2\,10^{m-1}$$
$$b_3\,10^{m-2} + \ldots + b_m\,10 + b_1.$$

Ya que estamos suponiendo que no todas las cifras $b_1, \ldots, b_m$ son iguales a 9, entonces

$$b_2\,10^{m-1} + \ldots + b_m\,10 + b_1 < 9\,(10^{m-1} + 10^{m-2} + \ldots + 1)$$

Ahora bien, usando la fórmula que se vio anteriormente para la suma de una progresión geométrica, se tiene que

$$10^{m-1} + 10^{m-2} + \ldots + 1 = \_\_\_\_\_.$$

$$\frac{10^m - 1}{9}$$

127

Substituyendo en la desigualdad anterior se obtiene

$$b_2\,10^{m-1} + b_3\,10^{m-2} + \ldots + b_m\,10 + b_1 < 10^m - 1.$$

Los resultados anteriores indican que al dividir $10 \times b_1 \ldots b_m$ entre $10^m - 1$, el cociente es b_1 y el residuo es $b_2\,b_3 \ldots b_m\,b_1$.

Por consiguiente, la primera cifra decimal de la expresión es b_1

Para calcular la segunda cifra decimal hay que multiplicar 10 por el residuo anterior $b_2\,b_3 \ldots b_m\,b_1$ y dividir entre $10^m - 1$.

En forma semejante al caso anterior obtenemos que el cociente b_2 y el residuo es _________.

$b_3\,b_4 \ldots b_m\,b_1\,b_2$

128

Así sucesivamente, obtenemos como cocientes

$$b_3, b_4, \ldots, b_m, b_1, b_2, \ldots$$

Por consiguiente la expresión decimal de

$$\frac{b_1 \ldots b_m}{10^m - 1}$$

es __________________,
que es lo que se quería probar.

$$.\overline{b_1\,b_2 \ldots b_m}$$

129

Hasta aquí hemos hablado únicamente de la expresión decimal de un número racional no negativo. Para completar y tener una expresión decimal para todo número racional daremos la expresión decimal de los racionales negativos.

Si r es un número racional negativo, $-r$ es un número racional positivo y tiene una expresión decimal:

$$-r = A.a_1\,a_2\,a_3 \ldots$$

Entonces, por definición, la expresión decimal de r es

$$r = -A.a_1\,a_2\,a_3 \ldots$$

Por ejemplo, la expresión decimal de

$-\frac{1}{2}$ es ________

$-\frac{1}{3}$ es ________.

$-.5$

$-.\overline{3}$

En la Imprenta Universitaria, bajo la dirección de Jorge Gurría Lacroix, se terminó la impresión de *Álgebra II. El campo de los números racionales,* el día 31 de agosto de 1971. La composición se paró de tipo Times 10:11. Se tiraron 10 000 ejemplares,

Bajo el tema genérico de **Algebra** los profesores Humberto Cárdenas Trigos, Emilio Lluis Riera, Francisco Raggi Cárdenas y Francisco Tomás Pons, prepararon I. **El anillo de los números enteros**, II. **El campo de los números racionales**, III. **El campo de los números reales**, folletos que ahora, cada uno por separado, ofrece a los lectores la colección de Textos Programados de la UNAM.

Los autores, ampliamente destacados en el campo de los números como los podrán demostrar estos trabajos, son investigadores de tiempo completo, titulares de sus respectivas materias en la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional Autónoma de México. Con estos textos pretenden, además de que se conozcan —en la aparente aridez del álgebra— las riquezas que esta disciplina ejerce dentro de las ciencias, establecer un nivel intermedio a fin de que sirvan al mayor número de estudiosos.

Por tanto se puede afirmar, sin lugar a titubeos, que serán útiles a los estudiantes de nivel preparatorio, a los del primer año de las carreras profesionales —como complemento de sus cursos de matemáticas—, así como a cualquier persona interesada en temas de esta naturaleza.

TEXTOS PROGRAMADOS

Publicados

Química orgánica, José Luis Mateos Gómez (2ª edición)
Introducción a la estadística descriptiva I y II, Octavio A. Rascón Ch.
Introducción a la administración, José Antonio Fernández Arena (2ª edición)
Introducción a la lógica deductiva y teoría de los conjuntos I, Javier Salazar Resines
Introducción a la fisiología, Carlos Alcocer
Algebra I, II, III, Emilio Lluis, Humberto Cárdenas, Francisco Raggi y Francisco Tomás
Introducción a la lógica deductiva y teoría de los conjuntos II, Javier Salazar Resines

De próxima aparición

Geometría analítica, Guillermo Torres, Alejandro Odgers
Física general, Francisco Medina Nicolau
Introducción a la teoría de las probabilidades, Octavio A. Rascón Ch.

En preparación

Introducción a la psicología, Enrique García
Contabilidad de costos, Miguel Tanjián
El átomo y la molécula, Raúl Cetina
La célula, Antonio Villasana y Armando Gómez Poyou
Introducción al estudio del derecho, Fernando Flores García
Sistemas económicos, Guillermo Ramírez

Departamento de Distribución de Libros Universitarios
Insurgentes Sur 299
México 11, D. F.
Teléfonos 533-45-16 y 533-42-19

álgebra III

EL CAMPO DE LOS NUMEROS REALES

Humberto Cárdenas
Emilio Lluis
Francisco Raggi
Francisco Tomás

UNAM TEXTOS PROGRAMADOS

ÁLGEBRA

COMISIÓN DE NUEVOS MÉTODOS DE ENSEÑANZA

TEXTOS
PROGRAMADOS

III.

álgebra

EL CAMPO DE LOS NÚMEROS REALES

HUMBERTO CÁRDENAS
EMILIO LLUIS
FRANCISCO F. RAGGI
FRANCISCO TOMÁS

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
DIRECCIÓN GENERAL DE PUBLICACIONES
MÉXICO, 1971

Primera edición: 1971

DIRECCIÓN GENERAL DE PUBLICACIONES

Impreso y hecho en México

CONTENIDO

RECONOCIMIENTO

Este texto se elaboró en la Comisión de Nuevos Métodos de Enseñanza. En su realización participaron, además de los autores, las siguientes personas:

ENRIQUE GARCÍA G.
Instituto de Ingeniería — Coordinador Técnico

GUADALUPE LUCIO
Ayudante

JORGE DE LEÓN
Corrección de estilo

PRESENTACIÓN

Una de las técnicas modernas de la enseñanza es la instrucción programada. Dentro de esta técnica el contenido de los textos se ordena de modo sistemático y se adapta al ritmo de asimilación de cada estudiante; existe la participación activa a lo largo del curso y se controla constantemente el aprendizaje mediante el planteamiento de preguntas y la inmediata verificación o corrección de las respuestas.

El material de un texto programado se organiza empleando ideas simples, las cuales se presentan en un orden que facilite la comprensión del estudiante. Las ideas o segmentos de información se ofrecen en cuadros lógicamente coordinados, con lo cual se evita que, en alguna de sus fases, la enseñanza llegue a ser demasiado fácil o muy difícil, a la vez que se logra mantener abierto el camino para que todos puedan adelantar según su propio ritmo de trabajo y comprensión.

Conforme van apareciendo los nuevos segmentos de información, se plantean al estudiante cuestiones específicas que, por obligarlo a intervenir activamente, le reafirman los conocimientos aprendidos, le estimulan y le mantienen atento. Para ello, cada pregunta va seguida inmediatamente de la respuesta correcta. Así el estudiante se siente alentado por sus aciertos y corrige de inmediato sus errores.

Debido a tales características el texto programado se adapta a la velocidad particular de cada estudiante, lo que no puede hacer el maestro encargado de un grupo numeroso.

Con la enseñanza programada no se pretende sustituir al profesor. Se utiliza sólo como un instrumento auxiliar, útil para iniciar estudios, subsanar lagunas, desarrollar habilidades o complementar el aprendizaje y de llevar a un punto óptimo su eficiencia y aprovechamiento.

Este libro pertenece a la primera serie de textos programados que prepara la Universidad Nacional Autónoma de México para ofrecerlos, a sus estudiantes y

profesores, como parte de un programa general de modernización de los métodos docentes y de superación académica.

COMISIÓN DE NUEVOS MÉTODOS DE ENSEÑANZA

INTRODUCCIÓN

Este texto de álgebra consta de tres fascículos.

El primero está dedicado al estudio de los números enteros. En la parte preliminar de este capítulo se discuten, en primer lugar, las nociones intuitivas de conjunto y de función, y, en seguida, el concepto de operación y algunas propiedades de las operaciones.

Más adelante se trata el tema principal, que es el de precisar cuáles son las propiedades básicas de las operaciones con los enteros. Éstas se mencionan como los axiomas de los enteros. Después se demuestran, a partir de los axiomas, otras propiedades de los enteros que el estudiante conoce y, finalmente, se discute el orden en los enteros y se observa que las propiedades del orden, junto con las propiedades básicas de las operaciones, caracterizan a éstos.

Se subraya que no importa la naturaleza de los elementos del conjunto de los enteros, sino las propiedades de las operaciones y del orden.

El segundo está dedicado al estudio de los números racionales. Se presentan como una extensión natural de los números enteros, en donde los elementos distintos de cero tienen inverso multiplicativo.

Como propiedad característica adicional se pide que todo racional sea cociente de dos enteros. De esta manera se pueden interpretar los números racionales como cocientes de enteros y deducir las reglas usuales para las operaciones con fracciones.

Como en el caso de los enteros, se destaca una lista de proposiciones básicas de las cuales se derivan las restantes. Asimismo se le da una importancia especial al orden.

Finalmente, para preparar la introducción de los números reales, en este capítulo se analiza la expresión decimal de los números racionales. Se demuestra que éstas son periódicas y que cualquier decimal periódica corresponde a un número racional. Esto último permite identificar el conjunto de los racionales con el de las decimales periódicas.

En el tercero se estudian los números reales. Se muestra primero la existencia de números que no son racionales, y a continuación, basándose en

la interpretación de los racionales como decimales periódicas, se definen los reales como el conjunto de todas las decimales (periódicas o no). Se aceptan varias propiedades básicas acerca de la existencia de las operaciones y del orden.

Más adelante se identifican los números reales con los puntos de la recta numérica y se discuten las desigualdades y los intervalos.

Finalmente, se introducen los conceptos de cota y frontera, los cuales permiten enunciar una lista de proposiciones básicas de los números reales que los caracterizan completamente.

Daremos a continuación algunas instrucciones para el uso de este libro.

En este libro usted se encontrará con una serie de segmentos de información o cuadros, en cada uno de los cuales tendrá que elaborar una o más respuestas.

Ejemplo:

Con frecuencia usaremos letras mayúsculas para denotar conjuntos, Por ejemplo, si A es el conjunto de los números naturales menores que 6, entonces

$$A = \{1, \_\_, \_\_, \_\_, \_\_\}.$$

2, 3, 4, 5

Como puede usted observar, en este segmento de información se da primero una explicación y a continuación aparecen ciertos espacios en blanco que usted deberá llenar teniendo en cuenta la explicación anterior y la información general adquirida en los cuadros precedentes.

El segmento de información termina con una línea delgada, y en la parte inferior de ella aparecen las respuestas correctas.

Éste es un texto programado en forma lineal. Para su aprovechamiento es indispensable estudiar un cuadro tras otro, en el orden en que figuran, sin omitir ninguno y sin pasar al siguiente hasta no haber llenado correctamente los espacios en blanco del segmento de información. Si la respuesta que usted elabore no es la correcta, deberá leer nuevamente con toda atención el segmento de información, analizar sus errores y elaborar nuevamente la respuesta.

Desde luego, durante la lectura de cada segmento de información deberá usted cubrir con el cobertor anexo el espacio inferior correspondiente, con el objeto de no ver las respuestas antes de haber llenado los espacios en blanco.

Con el fin de que pueda conservar la ilación lógica de las demostraciones que abarquen más de un segmento de información, se utiliza, al margen, el símbolo $\downarrow$ el cual indica que la demostración continúa en el cuadro siguiente.

Para indicar el último cuadro de la demostración se anota al margen el símbolo $\downarrow$.

$\square$

III

El campo de los números reales

Hasta ahora hemos tratado únicamente con números racionales. Éstos, con sus operaciones de suma y producto, constituyen ya un campo. Sin embargo, este conjunto de números no es lo bastante amplio para las aplicaciones. Por ejemplo, ya desde la época de los griegos se hablaba de "segmentos inconmensurables", es decir, de segmentos cuya medida no es un número racional.

Un ejemplo simple de éstos es la diagonal de un cuadrado de lado uno. Como se recuerda, usando el teorema de Pitágoras, se encuentra que este segmento mide $\sqrt{2}$, el cual veremos que no es un número racional.

PROPOSICIÓN. *No hay ningún número racional cuyo cuadrado sea* 2.

Para la demostración veremos primero el siguiente

LEMA. *Si a es un número entero par entonces a^2 es par y si a es impar entonces a^2 es impar.*

Demostración. Supongamos primero que a es par; entonces podemos escribir

$$a = 2n$$

para alguna n en $\mathbf{Z}$. Elevando al cuadrado ambos miembros de la igualdad obtenemos

$$a^2 = \_\_\_\_,$$

lo cual indica que a^2 es par. $\downarrow$

$4n^2$

1

Para continuar la demostración supongamos que a es impar. Entonces podemos escribir

$$a = 2n + 1$$

para alguna n en **Z**. Elevando nuevamente al cuadrado obtenemos

$$a^2 = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_,$$

lo cual indica que a^2 es impar.

↓
□

$4n^2 + 4n + 1$

2

Una consecuencia inmediata de este lema es el

COROLARIO. *Si a es un entero, entonces a^2 es par si y sólo si a es par.*

Demostraremos ahora la proposición por reducción al absurdo. Supongamos que $\sqrt{2}$ es racional. Entonces podemos escribir

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

con p, q enteros y *sin factores comunes.* De aquí se obtiene.

(1) $$2q^2 = p^2,$$

por lo que p^2 es par. Del corolario anterior resulta que p es ________.

↓

---

par

3

Ya que p es par podemos escribir

$$p = 2p'$$

con $p' \in \mathbf{Z}$. Substituyendo esto en (1) obtenemos

$$2q' = (2p')^2 = \_\_\_\_\_\_\_\_$$

y dividiendo entre 2, se tiene que

$$q^2 = \_\_\_\_\_\_,$$

lo que indica que q^2 es par y por el corolario resulta que q es _____, lo que contradice la hipótesis de que p y q no tienen factores comunes.

↓

□

$4p'^2$

$2p'^2$

par

4

Resumiendo lo anterior, vemos que "no hay suficientes" números racionales. Para suplir esa deficiencia se construye un campo más amplio, el cual tiene, entre otras propiedades, la de que todo número positivo posee raíz cuadrada. Éste es el campo de los números reales, que a continuación trataremos.

Para definirlo, daremos primero los números reales positivos.

Por definición, el conjunto de los reales positivos es el conjunto de las decimales infinitas diferentes de cero (periódicas o no), omitiendo únicamente, como en el caso de los números racionales, las decimales periódicas de periodo 9.

A este conjunto lo denotaremos con $\mathbf{R}^+$. Es decir,

$$\mathbf{R}^+ = \{ A.a_1\, a_2\, a_3\, \ldots \}.$$

De la definición anterior se sigue inmediatamente que

$$\mathbf{R}^+ \supset \mathbf{Q}^+$$

en donde, $\mathbf{Q}^+$ denota el conjunto de los racionales positivos.

Es fácil ver que hay decimales no periódicas. Por ejemplo, en la lista siguiente

.010010001000001 . . .
.12537537537 . . .
.20220222022220 . . .
.16666 . . .

las decimales no periódicas son ____________________.

.010010001000001
.20220222022220 . . .

5

Para completar el conjunto de los números reales consideremos ahora el conjunto $\mathbf{R}^-$ de las decimales infinitas precedidas de un signo -:

$$\mathbf{R}^- = \{-A.a_1\, a_2\, a_3\, \ldots \}.$$

La unión de estos dos conjuntos y el conjunto que consta del racional 0 nos dará el conjunto de los números reales. Así que, un número real es

a) una decimal infinita, o bien
b) el número 0, o bien
c) una decimal infinita precedida de -.

(Como se mencionó anteriormente no consideramos decimales de periodo 9 y de aquí en adelante cuando se hable de decimales se sobreentenderá que excluimos éstas).

Definición. El conjunto de los números reales es

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}^- \cup \{0\} \cup \mathbf{R}^+.$$

Tomando en cuenta que el conjunto de los números racionales puede considerarse como la unión

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^- \cup \{0\} \cup \mathbf{Q}^+,$$

en donde $\mathbf{Q}^-$ es el conjunto de las decimales periódicas precedidas de un -, se sigue de la definición anterior que

$$\mathbf{R} \supset \mathbf{Q}.$$

¿Será $\mathbf{R} = \mathbf{Q}$? La respuesta es ____________________.
afirmativa, negativa

---

negativa

6

En lo anterior hemos hablado únicamente del conjunto de los números reales. ¿Podremos definir en este conjunto operaciones de suma y producto que extiendan la suma y el producto de los números racionales? La respuesta a esta pregunta es que sí es posible dicha extensión. Ya que la demostración de esta propiedad está fuera de los objetivos de este libro, se omitirá. A continuación enunciamos con más precisión la propiedad mencionada.

PROPIEDAD BÁSICA 1. *Se pueden definir dos operaciones* $+$ *y* $\cdot$ *en el conjunto* **R** *de los números reales de tal manera que:*

a) estas operaciones extienden la suma y el producto de números racionales.

b) **R** con estas operaciones resulta un campo.

A este campo se le llama *el campo de los números reales.*

A continuación analizaremos con más detalle el significado de las condiciones a) y b).

7

La condición a) significa lo siguiente:

Si tomamos dos números reales a y b que, en particular, sean racionales, su suma con la operación de **Q** resulta igual a su suma con la operación de **R**. Análogamente, su producto, con la operación de **Q** resulta igual a su producto con la operación de ____.

Esto se acostumbra expresar diciendo que **Q** es un *subcampo* de **R**.

R

8

La condición b) significa que la suma y el producto en **R** satisfacen los *axiomas de campo;* es decir;

AXIOMA 1. *La suma de números reales es conmutativa;* es decir,

$$a + b = \_\_\_\_\_\_.$$

AXIOMA 2. *La suma de números reales es asociativa;* es decir,

$$(a + b) + c = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.$$

AXIOMA 3. *Existe en* **R** *un elemento neutro aditivo que es el* 0; es decir,

$$a + 0 = \_\_\_\_.$$

AXIOMA 4. *Para cada real a existe en* **R** *su inverso aditivo* (denotado por $-a$) *con la propiedad*

$$a + (-a) = \_\_\_.$$

AXIOMA 5. *El producto de números reales es conmutativo;* es decir,

$$ab = \_\_\_\_\_\_.$$

AXIOMA 6. *El producto de números reales es asociativo;* es decir,

$$(ab)\, c = \_\_\_\_\_\_\_.$$

AXIOMA 7. *Existe en* **R** *un elemento neutro multiplicativo, el* 1; es decir,

$$a \cdot 1 = \_\_\_\_.$$

AXIOMA 8. *En* **R** *el producto distribuye a la suma*; es decir,

$$a\,(b + c) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_.$$

AXIOMA 9. *Para cada real* $a \neq 0$ *existe un inverso multiplicativo* (denotado por a^{-1}) *tal que*

$$aa^{-1} = \_\_\_\_.$$

$b + a$
$a + (b + c)$
a
0
ba
$a\,(bc)$
a
$ab + ac$
1

9

Recordemos que hemos definido los números reales como las decimales infinitas ($\mathbf{R}^+$) y las mismas, precedidas de un signo menos ($\mathbf{R}^-$), además del 0.

La razón por la cual se eligió esta notación para los elementos de $\mathbf{R}^-$ es que, según la operación de suma en $\mathbf{R}$, *el inverso aditivo de un elemento* $a = A.\, a_1\, a_2\, a_3 \ldots$ *de* $\mathbf{R}$ *es precisamente el elemento* $-A.\, a_1\, a_2\, a_3 \ldots$.
Omitiremos aquí también la demostración de este resultado.

10

Ahora estudiaremos el orden en el campo de los números reales.

Así como las operaciones de $\mathbf{Q}$ se pueden extender a $\mathbf{R}$, es también cierto que el orden en $\mathbf{Q}$ puede extenderse a un orden en $\mathbf{R}$ de tal manera que $\mathbf{R}$ resulte, con dicho orden, un *campo ordenado.*

Para ver esto consideramos primero el *orden lexicográfico* en el conjunto $\mathbf{R}^+$. Explicaremos a continuación en qué consiste este orden.

Sean $a, b \in \mathbf{R}^+$ y escribamos, con la notación usual,

$$a = A.\, a_1\, a_2\, a_3 \ldots$$
$$b = B.\, b_1\, b_2\, b_3 \ldots$$

Caso 1. Si los enteros A y B satisfacen la condición

$$A > B$$

entonces decimos que, en el orden lexicográfico,

$$a > b$$

Por ejemplo,

$$3.042 \ldots > 2.998 \ldots$$

pues

$$\_\_\_\_\_\_ > \_\_\_\_\_\_.$$

↓

3 2

11

Caso 2. Ahora bien, si

$$A = B \quad \text{y} \quad a_1 > b_1$$

entonces decimos que, con este orden,

$$a > b.$$

Por ejemplo,

$$2.8756 \ldots > 2.7993 \ldots$$

ya que

$$\_\_\_\_\_\_ > \_\_\_\_\_\_.$$

↓

8 7

12

En general, si
$A = B$, $a_1 = b_1, \ldots, a_{n-1} = b_{n-1}$ y $a_n > b_n$ entonces se dice que, con el orden lexicográfico, a es mayor que b y se escribe $a > b$.

En otras palabras, *dados dos reales positivos* a *y* b, *se dice que* a *es mayor que* b *si la primera cifra en que difieren es mayor en* a *que en* b (aquí la parte entera se considera escrita, como de costumbre, en notación decimal). ↓

Por ejemplo, $362.141 \ldots \_\_ 359.355 \ldots$ pues 675. □

$>$

13

De esta definición se sigue que si

$$a = A\,.\, a_1\, a_2 \ldots a_n\, a_{n+1} \ldots$$
$$b = A\,.\, a_1\, a_2 \ldots a_n\, b_{n+1} \ldots,$$

entonces

$$a_{n+1} > b_{n+1}$$

implica

$$a \_\_\_ b$$

$>$

Este orden lexicográfico es precisamente el que extiende el orden de los racionales, y con este orden el campo de los números reales es un campo ordenado. Enunciamos este resultado como la

PROPIEDAD BÁSICA 2. *En el campo de los números reales se cumplen las condiciones siguientes:*

a) $\mathbf{R}^+$ *se puede tomar como conjunto de positivos, es decir,*
$\mathbf{R}^+$ *satisface los postulados de positivos que son:*
1) *la suma y producto de positivos es positivo.*
2) *la ley de tricotomía.*

b) *El orden derivado de* $\mathbf{R}^+$ *(es decir,* $a > b$ *si* $a - b \in \mathbf{R}^+$*) es tal que*
1) *restringido a los racionales es el orden de los racionales.*
2) *restringido a* $\mathbf{R}^+$ *es el orden lexicográfico.*

15

De la propiedad anterior se obtiene inmediatamente el siguiente corolario:

COROLARIO

1) $A\,.\,a_1\,a_2\ldots > 0$
2) $-A\,.\,a_1\,a_2\ldots < 0$
3) $A\,.\,a_1\,a_2\ldots > -B\,.\,b_1\,b_2\ldots$
4) $-A\,.\,a_1\,a_2\ldots > -B\,.\,b_1\,b_2\ldots$ *si y sólo si* $B\,.\,b_1\,b_2\ldots > A\,.\,a_1\,a_2\ldots$

Por ejemplo,

$$3.15\ldots \;\_\_\_\; -15.73\ldots.$$
$$-27.356\ldots > -27.37\ldots,$$

ya que $27.37\ldots \;\_\_\_\; 27.356.$

$>$

$>$

A pesar de que la propiedad básica 1 asegura la existencia de las operaciones de suma y producto en $\mathbf{R}$, no hemos visto hasta aquí método alguno que permita calcular sumas y productos de números reales.

Con el fin de encontrar un método para efectuar operaciones con reales veremos cómo se pueden "aproximar" los números reales con decimales finitas, y cómo las sumas y los productos de estas últimas "aproximarán" a las sumas y los productos de los reales.

17

Veamos pues qué se entiende por una aproximación de un número real por una decimal finita.

Consideremos primero algunos casos especiales. Una decimal finita a' aproxima a un número real a (por defecto) con una aproximación de centésimas, o bien hasta la segunda cifra decimal, si

$$0 \leqslant a - a' \leqslant \frac{1}{10^2}$$

o, equivalentemente, si

$$a' \leqslant a \leqslant a' + \frac{1}{10^2}.$$

Por ejemplo, el real

$$a = 26.3517\ldots$$

es aproximado por la decimal finita

$$a' = 26.35$$

con una aproximación de ____________ ya que

$$26.34 \leqslant 26.357\ldots \leqslant 26.35 + .01 = 26.36;$$

también, en este caso, 26.35 aproxima a 26.3517 . . . hasta la ________ cifra decimal

centésimas

segunda

18

Definición. Se dice que la decimal finita a' aproxima (por defecto) el real a hasta la n-ésima cifra decimal si

$$0 \leqslant a - a' \leqslant \frac{1}{10^n}$$

o, equivalentemente,

$$a' \leqslant a \leqslant a' + \frac{1}{10^n}$$

Por ejemplo, el número real

$$\pi = 3.141592653\ldots$$

es aproximado (por defecto) por la decimal finita

$$\pi' = 3.141592$$

hasta la ______________ cifra decimal, pues,

$$3.141592 \leqslant \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \leqslant 3.141593$$

---

sexta   3.141592653 . . .

19

Los ejemplos anteriores son casos particulares del siguiente resultado:

Si

$$a = A\,.\,a_1\,a_2\ldots a_n\,a_{n+1}\ldots$$

es un número real positivo y

$$a' = A\,.\,a_1\,a_2\ldots a_n$$

entonces a' aproxima a a hasta la n-ésima cifra decimal; es decir,

$$0 \leqslant \_\_\_\_\_\_\_\_ \leqslant \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.$$

$a - a'$ $\frac{1}{10^n}$

20

Demostración. Como se recuerda, la desigualdad $0 \leqslant a - a' \leqslant \frac{1}{10^n}$ es equivalente a

$$a' \leqslant a \leqslant a' + \frac{1}{10^n}.$$

Observemos primero que

$$a' \leqslant a$$

pues como $a' = A\,.\,a_1\ldots a_n$ y $a = A\,.\,a_1\ldots a_n\,a_{n+1}\ldots$ todas las cifras decimales de a' son menores o iguales que las correspondientes de a.

Para demostrar que $a \leqslant a' + \frac{1}{10^n}$ supongamos primero que

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 9;$$

entonces

$$a' + \frac{1}{10^n} = A + 1$$

que es evidentemente mayor que a.

Supongamos ahora que alguna de las cifras decimales de a' es menor que 9 y sea i tal que

$$a_i < 9 \text{ y } a_{i+1} = a_{i+2} = \ldots = a_n = 9;$$

entonces

$$a' + \frac{1}{10^n} = A\,.\,a_1\ldots(a_i + 1)$$

y por la definición de orden

$$a \leqslant a' + \frac{1}{10^n}$$

Por ejemplo, si $a = 27.139995\ldots$ y $a' = 27.13999$ entonces

$$a' + \frac{1}{10^5} = \_\_\_\_\_\_\_\_ \geqslant a$$

27.14000

La siguiente proposición da un procedimiento que permite calcular decimales finitas que aproximen la suma y el producto de números reales positivos tanto como se desee.

PROPIEDAD BÁSICA 3. *Si a y b son números reales y a', b' son decimales finitas que aproximan a y b hasta la n-ésima cifra decimal;* es decir,

$$0 \leqslant a - a' \leqslant \_\_\_\_\_\_$$
$$0 \leqslant b - b' \leqslant \_\_\_\_\_\_$$

entonces la suma y el producto de a y b quedan aproximadas por $a' + b'$ y $a'b'$, respectivamente, del modo siguiente:

$$0 \leqslant (a + b) - (a' + b') \leqslant \frac{2}{10^n}$$
$$0 \leqslant ab - a'b' \leqslant \frac{a' + b'}{10^n} + \frac{1}{10^{2n}}$$

↓

$\frac{1}{10^n}$ $\frac{1}{10^n}$

La demostración para la suma es inmediata; en efecto, sumando miembro a miembro las desigualdades

$$0 \leqslant a - a' \leqslant \frac{1}{10^n}$$
$$0 \leqslant b - b' \leqslant \frac{1}{10^n}$$

se obtiene

$$0 \leqslant (a + b) - (a' + b') \leqslant \frac{2}{10^n}$$

La demostración de la fórmula para la aproximación del producto es un poco más elaborada, y la omitiremos (se usa, como antes, únicamente el hecho de que **R** es un campo ordenado). ↓ ■

Por ejemplo, si queremos calcular la suma de

$$a = 3.1415\ldots \quad \text{y} \quad b = 1.10110001\ldots$$

con aproximación hasta milésimos, basta tomar

$$a' = 3.1415 \quad \text{y} \quad b' = 1.1011$$

que aproximan a y b hasta la ________ cifra decimal, y por la fórmula de aproximación referente a la suma, se tiene que

$$0 \leqslant (3.1415\ldots + 1.1011001\ldots) - (3.1415 + 1.1011) \leqslant \frac{2}{10^4}$$

y como $\frac{2}{10^4} < \frac{1}{10^3}$, obtenemos

$$0 \leqslant (3.1415\ldots + 1.1011001\ldots) - 4.2426 \leqslant \frac{1}{10^3};$$

lo cual indica, según la definición de aproximación, que 4.2426 aproxima a la suma hasta las ____________________.

---

cuarta

milésimas

23

Si queremos ahora calcular el producto de los mismos números reales con aproximación de un centésimo, basta tomar

$$a' = 3.141 \qquad \text{y} \qquad b' = 1.101$$

que aproximan a y b hasta la _________ cifra decimal, y por la fórmula de aproximación del producto se tiene que

$$0 \leqslant (3.1415\ldots)(1.1011001\ldots) - (3.141)(1.101) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{3.141 + 1.010}{10^3} + \frac{1}{10^6};$$

y como

$$\frac{3.141 + 1.101}{10^3} + \frac{1}{10^6} = \frac{4243}{10^6} = \frac{.4243}{10^2} < \frac{1}{10^2}$$

y como además

$$(3.141)(1.101) = 3.458241,$$

al substituir, se tiene que

$$0 \leqslant a\,b - 3.458241 \leqslant \frac{1}{10^2};$$

lo cual indica, según la definición de aproximación, que 3.458241 aproxima al producto ab hasta la ____________ cifra decimal.

Observemos que también 3.45 aproxima al producto ab hasta las centésimas.

tercera segunda

24

Resumiendo, en esta sección hemos construido el campo ordenado de los números reales **R**. Éste contiene al campo ordenado **Q** de los números racionales como subcampo ordenado (es decir las operaciones y el orden de **R** extienden las operaciones y el orden de **Q**).

R consta de todas las decimales infinitas (exceptuando las de periodo 9).

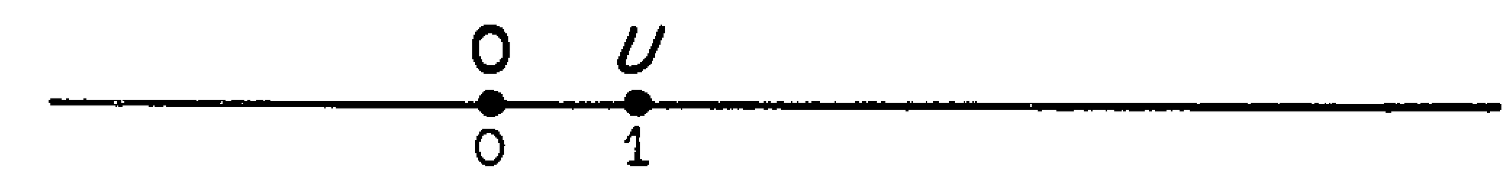
25

LA RECTA NUMÉRICA

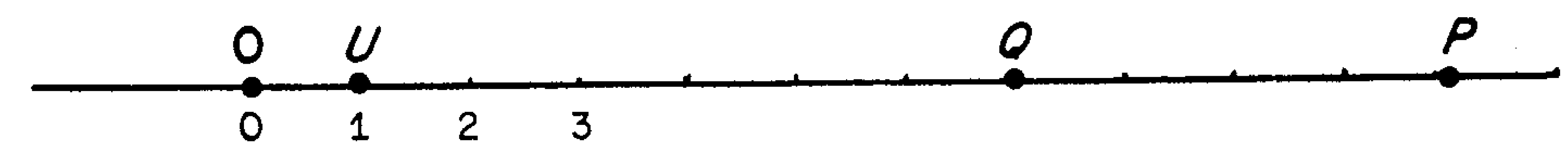
La representación geométrica de los números reales es de primordial importancia en la geometría analítica y el cálculo diferencial e integral.

El hecho de que podemos pensar en los números reales como puntos de una recta, permite interpretar geométricamente muchas de las propiedades de los números reales; e inversamente, muchas situaciones geométricas se pueden expresar algebraicamente.

Consideremos una recta y dos puntos O, U sobre ella. A uno de ellos le asociamos el número 0 y al otro el número 1.



¿Cómo podríamos representar todos los números naturales como puntos de esta recta? Lo usual es colocar segmentos congruentes con el segmento $\overline{OU}$ uno tras otro, y a sus extremos asociarles los números naturales con su orden natural.



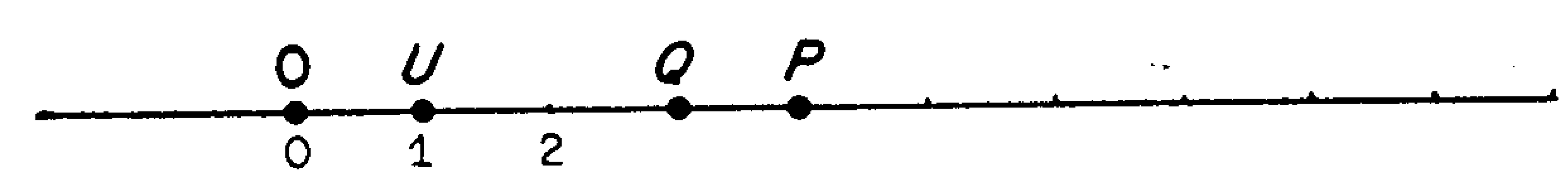
¿A qué número corresponde el punto P? ¿Y el punto **Q**?

11 7

26

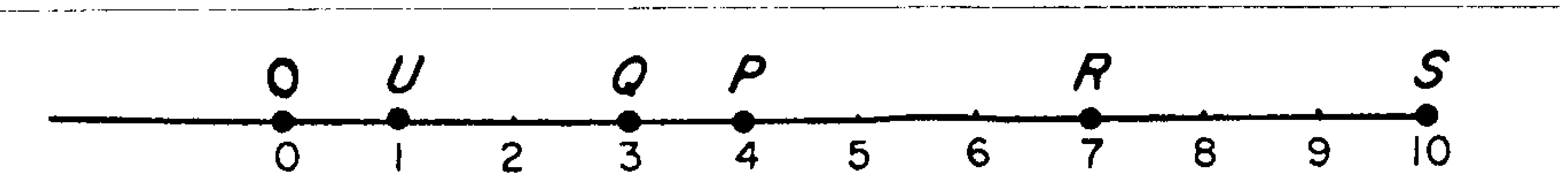
Si al punto P le corresponde en la forma anterior cierto número natural n, decimos que n es la coordenada del punto P.

En la recta



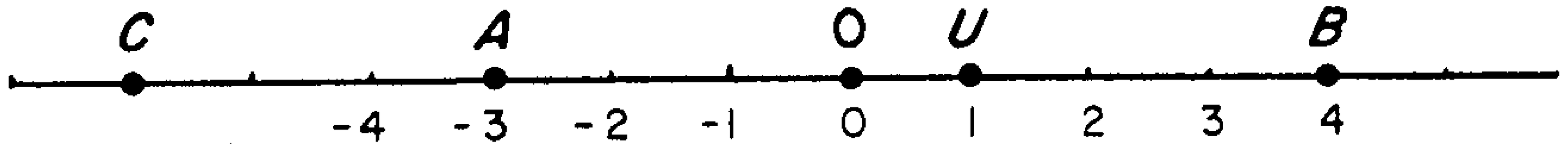
la coordenada de P es _____ y la de **Q** es ____.

En la misma recta indique los puntos **R** y S cuyas coordenadas son respectivamente 7 y 10.



27

En forma análoga podemos ahora representar sobre una recta el conjunto de todos los números enteros:



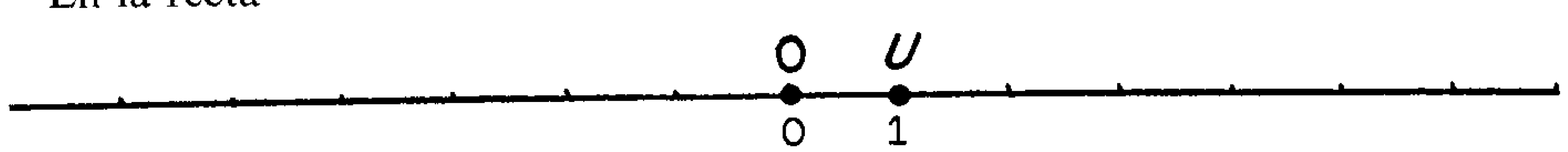
En la figura anterior,

la coordenada de A es __________,
la coordenada de B es __________,
la coordenada de C es __________.

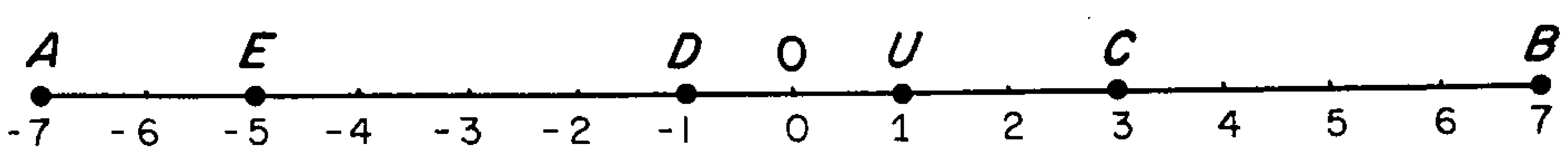
–3
4
–6

28

En la recta



indique los puntos A, B, C, D, E de coordenadas –7, 7, 3, –1 y –5 respectivamente.



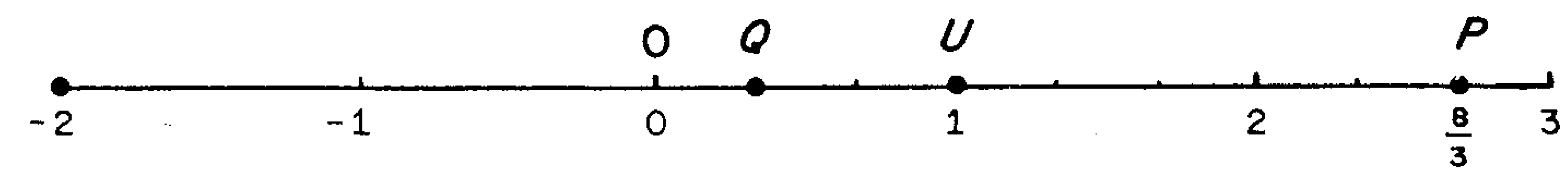
29

En lo anterior hemos representado sobre la recta únicamente los números enteros. Describiremos a continuación cómo representar sobre la misma los números racionales.

Será suficiente mostrar varios ejemplos.

Para representar el racional $\frac{8}{3}$ procedemos como sigue:

Dividimos el segmento OU en tres partes iguales y obtenemos un segmento $\overline{OQ}$.



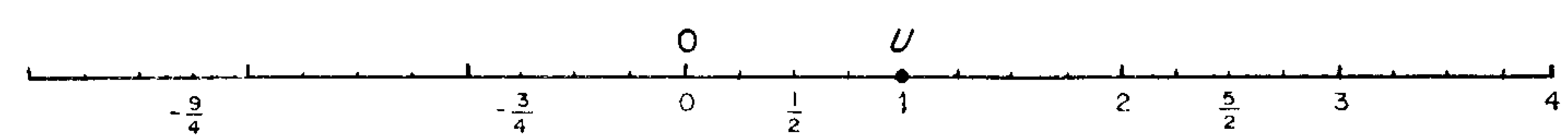
A continuación marcamos sobre la recta numérica, a la derecha de 0 ocho segmentos, uno tras otro a partir de 0 y todos congruentes con $\overline{OQ}$. El extremo derecho P del último segmento es el punto que, por definición, representa al racional $\frac{8}{3}$.

Si el número racional es negativo se procede en forma semejante, pero los segmentos se colocan a la izquierda del punto O.

Por ejemplo, los puntos que corresponden a los racionales

$$-\frac{3}{4},\quad \frac{1}{2},\quad \frac{5}{2},\quad -\frac{9}{4}$$

son los siguientes (márquelos):



30

Es claro cómo, de esta manera, se puede representar cualquier número racional en la recta numérica.

En lo que se refiere a los números reales aceptamos como axiomas geométricos de la recta numérica los dos siguientes:

AXIOMA 1. *Existe una correspondencia biyectiva entre el conjunto* **R** *de números reales y el conjunto de puntos de la recta. En esta correspondencia, los puntos correspondientes a los números racionales son los obtenidos con el método explicado anteriormente.*

AXIOMA 2. *Si A y B son puntos de la recta que corresponden a dos números racionales a y b y si c es un número real tal que*

$$a < c < b,$$

entonces el punto C correspondiente a c está en el segmento $\overline{AB}$; es decir,

$$c \in AB.$$

Si el punto A de la recta corresponde al número real a, diremos que a es la *coordenada* del punto A.

31

INTERVALOS

Estudiaremos ahora ciertos tipos de subconjuntos del conjunto **R** de los números reales que son de gran importancia en el cálculo diferencial e integral.

Puesto que hemos identificado los números reales con los puntos de una recta, estos subconjuntos los podremos pensar como subconjuntos de dicha recta.

Estos subconjuntos estarán determinados por desigualdades, y algunos de ellos recibirán el nombre de *intervalos*.

Supongamos que a y b son dos números reales tales que $a < b$. Si x es un número real y

$$a < x \quad \text{y} \quad x < b$$

escribiremos simplemente, como de costumbre,

$$a < x < b.$$

Así pues, por ejemplo,

$$2 < x < 5$$

significa que

$$2 < \_\_\_\_ \text{ y } \_\_\_\_\_\_$$

x $\qquad$ $x < 5$

32

Si $a, b \in$ **R** y $a < b$, al conjunto

$$\{x \in \mathbf{R} \mid a < x < b\}$$

se le llama el *intervalo abierto* de extremos a y b y lo denotaremos con (a, b).

Por ejemplo, el intervalo abierto con extremos -1 y 1, es

$$(-1, 1) = \{x \in \mathbf{R} \mid \_\_\_ < \_\_\_ < \_\_\_\}$$

$-1 \quad x \quad 1$

33

Ya que la relación $a < a$ es falsa, el intervalo abierto (a, b) no contiene a su extremo a. Análogamente $b \in (a, b)$ pues la relación ___ < ___ es falsa.

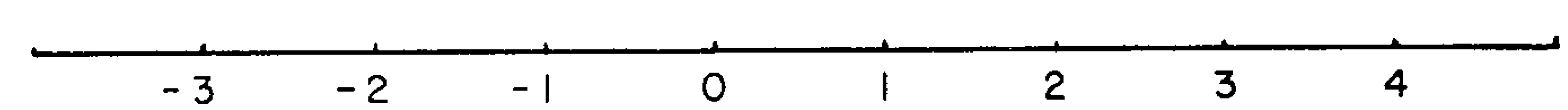
$b \qquad b$

34

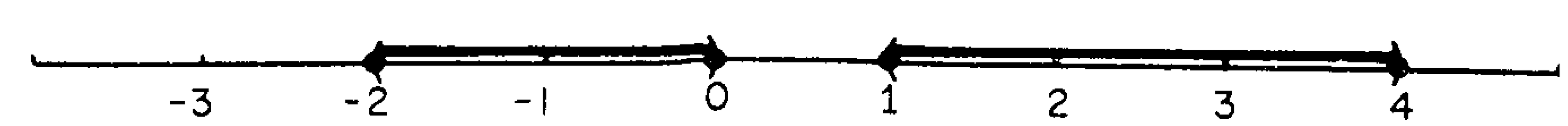
En la recta numérica, el intervalo abierto (a, b) con extremos a, b lo representaremos como sigue:

y éste consta de todos los puntos del segmento indicado, excepto los extremos a y b.

Marque en la recta



los intervalos abiertos $(-2, 0)$ y $(1, 4)$.



35

En forma análoga se definen los intervalos cerrados. Si a y b son números reales y $a < b$, el *intervalo cerrado* con extremos a y b es

$$\{x \in \mathbf{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}.$$

y se denotará con $[a, b]$.

Por ejemplo

$$[-3, 1] = \{x \in \mathbf{R} \mid \_\_\_ \leqslant \_\_\_ \leqslant \_\_\_\}.$$

$-3 \quad x \quad 1$

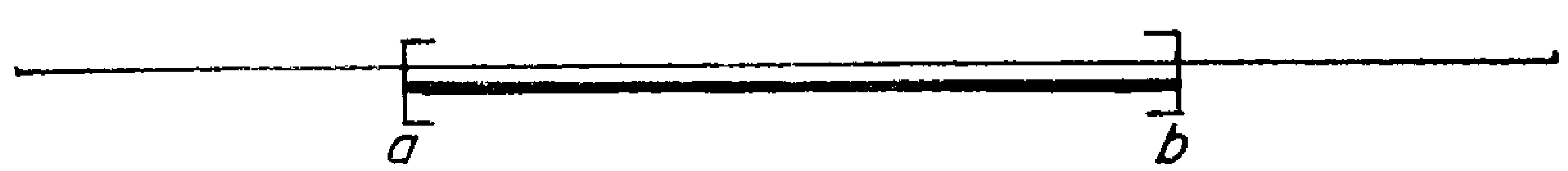
36

Si $(a, b]$ es un intervalo cerrado, los extremos a y b pertenecen al intervalo, pues a satisface la condición $a \leqslant a \leqslant b$ y b satisface la relación $a \leqslant \_ \leqslant b$.

b

37

Para indicar un intervalo cerrado $[a, b]$ en la recta numérica dibujaremos



Por ejemplo, en la figura siguiente

están indicados los intervalos cerrados

$$[\_, \_] \quad \text{y} \quad [\_, \_].$$

$-3, 2 \qquad 4, 5$

38

También se pueden definir *intervalos semiabiertos* como, por ejemplo,

$$\{x \in \mathbf{R} \mid a \leqslant x < b\}, \qquad (a < b)$$

el cual se denotará por $[a, b)$ y

$$\{x \in \mathbf{R} \mid a < x \leqslant b\}$$

el cual podemos denotar por ______ (usando una notación análoga).

$(a, b]$

39

También reciben el nombre de intervalos los conjuntos del tipo siguiente:

$$\{x \in \mathbf{R} \mid x \geqslant a\}$$
$$\{x \in \mathbf{R} \mid x > a\} \qquad (a \in \mathbf{R})$$

o bien, del tipo

$$\{x \in \mathbf{R} \mid x \leqslant a\}$$
$$\{x \in \mathbf{R} \mid x < a\}. \qquad (a \in \mathbf{R})$$

Éstos se llaman *intervalos infinitos*, y se usará la notación

$$\{x \in \mathbf{R} \mid x \geqslant a\} = [a, \infty)$$
$$\{x \in \mathbf{R} \mid x > a\} = (a, \infty)$$
$$\{x \in \mathbf{R} \mid x \leqslant a\} = (-\infty, a]$$
$$\{x \in \mathbf{R} \mid x < a\} = (-\infty, a)$$

Así, por ejemplo,

$$[1, \infty) = \{x \in \mathbf{R} \mid \_\_\_\_\_\_\}$$
$$(-\infty, 2) = \{x \in \mathbf{R} \mid \_\_\_\_\_\_\}.$$

$x \geqslant 1$
$x < 2$

40

Conviene recordar aquí que los símbolos ∞ y $-\infty$ no representan ningún número real. Son simplemente símbolos que nos permiten, en este caso, abreviar la notación.

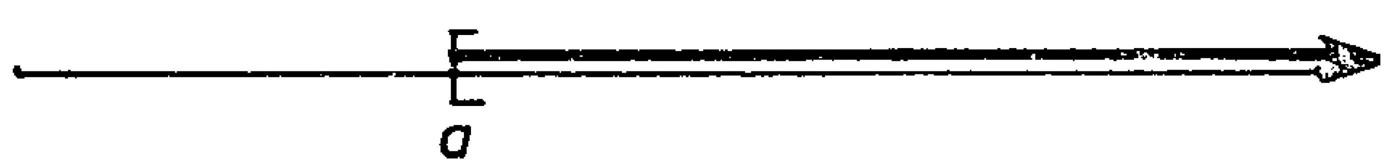
Por ejemplo,

$$\{x \mid x > -7\} = (\_\_, \_\_)$$
$$\{x \mid x \leq -1\} = (\_\_, \_\_].$$

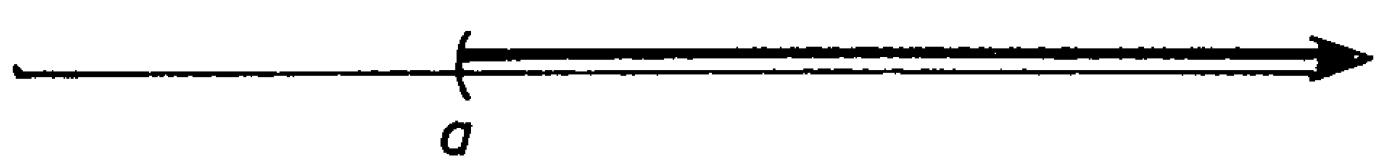
$(-7, \infty)$
$(-\infty, -1]$

41

Es costumbre dibujar los intervalos infinitos sobre la recta como sigue:



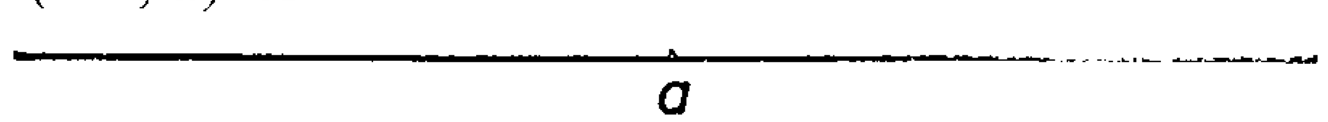
es el intervalo $[a, \infty)$;



es el intervalo (,).

El intervalo $(-\infty, a]$ es

y el intervalo $(-\infty, a)$ es

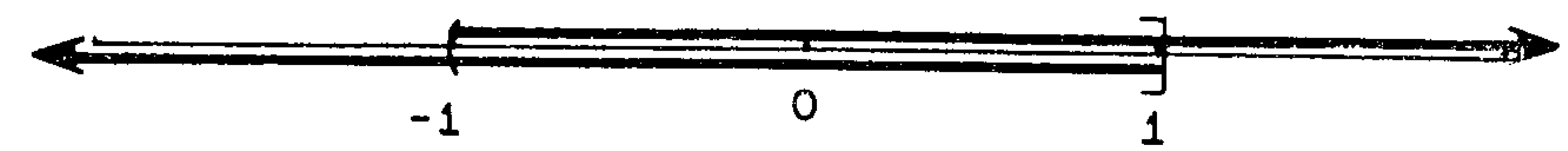


(a, ∞)

42

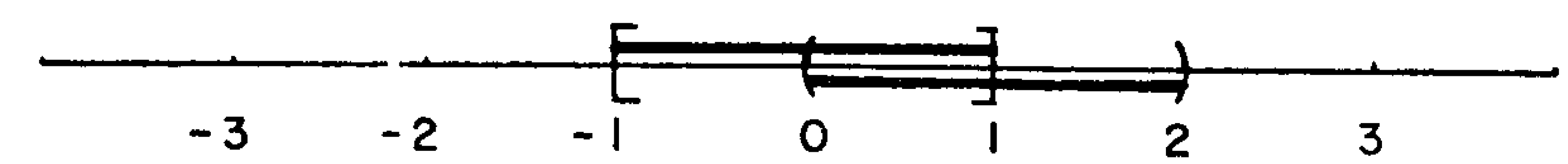
Es muy útil la representación gráfica de los intervalos para encontrar uniones e intersecciones de éstos.

Por ejemplo, la intersección de los intervalos $(-1, \infty)$ y $(-\infty, 1]$ es $(-1, 1]$ como puede verse en la figura



o sea, $(-1, \infty) \cap (-\infty, 1] = (-1, 1]$.

En la figura



puede verse que

$$[-1, 1] \cup (0, 2) = [\ \ ,\ \ )$$

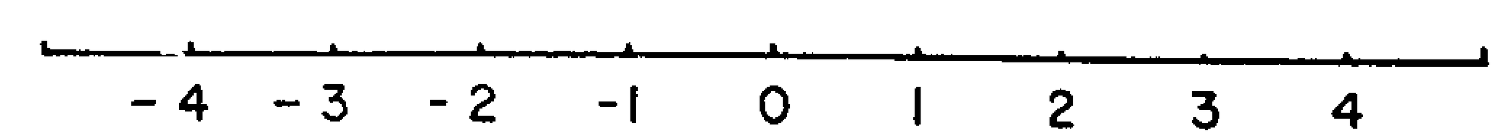
$[-1, 2)$

43

La intersección

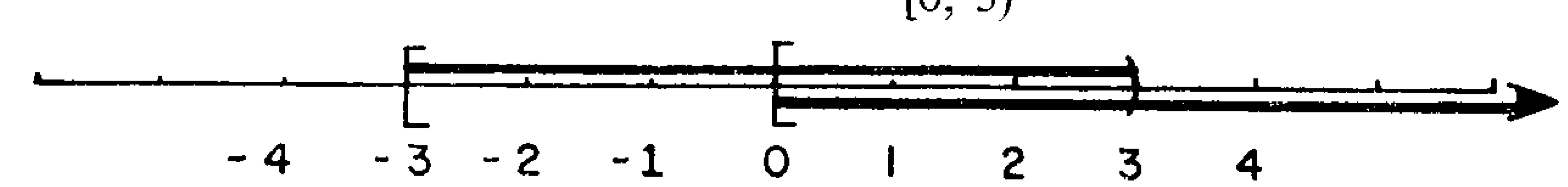
$$[-3, 3) \cap [0, \infty) = \_\_\_\_\_\_\_\_$$

como puede verse en la figura



(Ilústrela.)

$[0, 3)$



44

DESIGUALDADES

Veremos ahora cómo puede expresarse la solución de ciertas desigualdades en forma de intervalos.

Consideremos, por ejemplo, la desigualdad

$$3x - 2 > x - 6.$$

Sumando a ambos miembros $-x + 2$, obtenemos

$$\_\_\_\_\_\_\_\_ > \_\_\_\_\_\_\_\_$$

y, multiplicando por $\frac{1}{2}$, resulta que

$$x > -2.$$

Por lo tanto, la solución de la desigualdad es

$$\{x \in \mathbf{R} \mid x > -2\} = (\quad , \quad).$$

$2x > -4$

$(-2, \infty)$

45

¿Qué conjunto es $\{x \in \mathbf{R} \mid 2 - x > x - 2 \text{ y } 2x + 3 \geqslant -x - 9\}$?

En primer lugar observemos que este conjunto es igual a

$$\{x \in \mathbf{R} \mid 2 - x > x - 2\} \cap \{x \in \mathbf{R} \mid 2x + 3 \geqslant -x - 9\}.$$

Describamos primero $\{x \in \mathbf{R} \mid 2 - x > x - 2\}$. Se tiene que si

$$2 - x > x - 2,$$

entonces, sumando $-x - 2$ a cada miembro se obtiene

$$\_\_\_\_\_\_\_\_ > \_\_\_\_\_\_\_\_.$$

y multiplicando por $-\frac{1}{2}$, obtenemos

$$x < \_\_\_\_\_\_\_\_.$$

Es decir, $\{x \in \mathbf{R} \mid 2 - x > x - 2\} = \{x \mid x < 2\} = (\quad , \quad).$

$-2x > -4$

2

$(-\infty, 2)$

46

Encontremos ahora $\{x \in \mathbf{R} \mid 2x + 3 \geqslant -x - 9\}$. Si

$$2x + 3 \geqslant -x - 9,$$

sumando $x - 3$ a ambos miembros, obtenemos

$$\_\_\_\_\_\_\_\_ \geqslant \_\_\_\_\_\_\_\_;$$

y multiplicando por $\frac{1}{3}$, resulta que

$$x \geqslant \_\_\_\_\_\_.$$

Es decir, $\{x \in \mathbf{R} \mid 2x + 3 \geqslant -x - 9\} = \{x \mid x \geqslant -4\} = [\_\_\_, \_\_\_).$

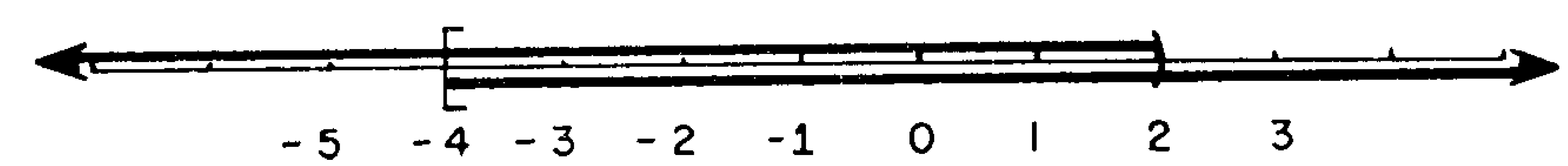
$3x \geqslant -12$

-4

$[-4, \infty)$

47

Finalmente, en la gráfica



vemos que

$$[-\infty, 2) \cap [-4, \infty) = [\quad , \quad);$$

y por lo tanto

$$\{x \in \mathbf{R} \mid 2 - x > x - 2 \text{ y } 2x + 3 \geqslant -x - 9\} = [-4, 2).$$

$[-4, 2).$

48

En el cálculo diferencial son muy importantes las desigualdades en las que figuran valores absolutos.

La definición del valor de un número real a, denotado por $|a|$, es la misma que la de valor absoluto de un número racional.

Es decir,

Definición. Si $a \in \mathbf{R}$ entonces

$$|a| = a \text{ si } a > 0$$
$$|a| = 0 \text{ si } a = \_\_\_$$
$$|a| = -a \text{ si } \_\_\_\_\_\_\_\_.$$

0

$a < 0$

49

Podemos juntar el caso $a = 0$ de la definición anterior con cualquiera de los otros dos casos. Así, por ejemplo, podemos escribir

$$|a| = \_\_\_ \text{ si } a \geqslant 0$$
$$|a| = \_\_\_ \text{ si } a < 0.$$

---

a

$-a$

50

Por ejemplo, como $3 > 0$, $|3| = \_\_$. Como $-5 < 0$, $|-5|, = -(-5) = \_\_\_$.

$|-a| = -a$ si $-a$ __ 0, es decir, si a __ 0

$|-a| = 0$ si $-a$ __ 0, es decir, si a __ 0

$|-a| = -(-a) =$ __ si $-a$ __ 0, es decir, si ____ 0.

---

3 5

$>$ $<$

$=$ $=$

a $<$ $a >$

51

Probaremos ahora un resultado simple pero muy importante por la frecuencia con que se usa.

Si $a \in \mathbf{R}$ y $a > 0$, entonces

$$A = \{x \in \mathbf{R} \mid |x| < a\} = (-a, a).$$

Puesto que para calcular el valor absoluto de un número real x debemos considerar dos casos: $x \geqslant 0$ y $x < 0$.

Consideremos primero

$$A' = \{x \in \mathbf{R} \mid x \geqslant 0, |x| < a\}.$$

Como $x \geqslant 0$, $|x| = \_\_$, de donde,

$A' = \{x \in \mathbf{R} \mid x \geqslant 0, x < a\} = \{x \in \mathbf{R} \mid 0 \leqslant \_\_\_ < a\} = [\_\_, \_\_).$ ↓

---

x

x

$[0, a)$

52

Consideremos ahora

$$A'' = \{x \in \mathbf{R} \mid x < 0, |x| < a\}.$$

Como $x < 0$, $|x| = \_\_$, de donde,

$$A'' = \{x \in \mathbf{R} \mid x < 0, -x < a\} =$$
$$= \{x \in \mathbf{R} \mid x < 0, x > \_\_\} =$$
$$= \{x \in \mathbf{R} \mid -a < \_\_ < 0\} = (\_\_, \_\_).$$ ↓

$-x$

$-a$

x

$(-a, 0)$

53

Como $A = A' \cup A''$,

$$A = [0, a) \cup (-a, 0) = (\_\_, \_\_),$$

o sea,

$$\{x \in \mathbf{R} \mid |x| < a\} = (-a, a).$$

$(-a, a)$

54

Un ejemplo más. Demostraremos que si $a \in \mathbf{R}$ y $a > 0$.

$$A = \{x \in \mathbf{R} \mid |x| \leqslant a\} = [-a, a].$$

Analizamos de nuevo los dos casos:

1. Si $x \geqslant 0$, $x = |x| \leqslant a$.
2. Si $x < 0$ $-x = |x| \leqslant a$, de donde, multiplicando la desigualdad por -1, obtenemos $x \geqslant \_\_$.

Por lo tanto, en ambos casos, tenemos que $x \in A$ si y sólo si

$$-a \_\_ x \_\_ a,$$

y por lo tanto el conjunto dado es el intervalo cerrado $[\_\_, \_\_]$.

$-a$

$\leqslant$ $\leqslant$

$[-a, a]$

55

¿Qué subconjunto de $\mathbf{R}$ es

$$A = \{x \in \mathbf{R} \mid |x| \geqslant a\}? \qquad (a > 0)$$

1er. caso. Si $x \geqslant 0$ $x = |x| \_\_ a$.

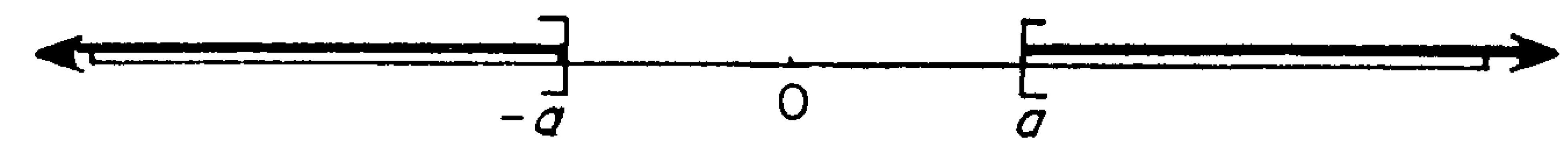
2o. caso. Si $x < 0$ $-x = |x| \geqslant a$. Multiplicando por -1, obtenemos

$$x \_\_ -a.$$

O sea, A consta de las $x \in \mathbf{R}$ que satisfacen la condición $x \geqslant a$, o bien la condición $x \leqslant -a$. Esto indica que A es la unión de los intervalos infinitos $[a, \infty)$ y $(\_\_, \_\_]$; es decir,

$$\{x \in \mathbf{R} \mid |x| \geqslant a\} = (-\infty, a] \cup [a, \infty).$$

Gráficamente, A es



$\geqslant$

$\leqslant$

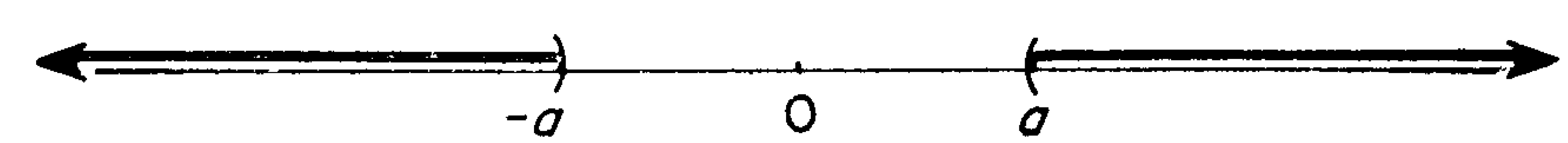
$-\infty$ a

56

Un análisis similar al del ejemplo anterior mostraría que

$$B = \{x \in \mathbf{R} \mid |x| > a\}$$

es la unión de dos intervalos infinitos:



Es decir,

$$B = (\_\_, \_\_) \cup (\_\_, \_\_).$$

$-\infty$ $-a$ a ∞

57

Consideremos ahora un tipo de desigualdades que aparece con mucha frecuencia. Empecemos con el siguiente ejemplo. ¿Qué conjunto es

$$A = \{x \in \mathbf{R} \mid \ |x - 2| \leqslant 3\}?$$

Como antes, dividimos el análisis en 2 partes:

1. Supongamos primero que $x - 2 \geqslant 0$; es decir, que $x \geqslant 2$. Entonces $|x - 2| =$ _____ y la condición $|x - 2| \leqslant 3$ equivale a $x - 2 \leqslant 3$, es decir, a $x \leqslant$ __. O sea, si $x \geqslant 2$, entonces $x \leqslant 5$.

2. Supongamos ahora que $x - 2 < 0$, es decir, que $x < 2$. Entonces $|x - 2| =$ _______ y la condición $|x - 2| \leqslant 3$ equivale $a - x + 2 \leqslant 3$, es decir a $x \geqslant$ __. O sea, si $x < 2$, entonces $x \geqslant -1$.

Juntando los dos casos vemos que $x \in A$ si y sólo si

$$-1 \leqslant x \leqslant 5,$$

por lo que

$$\{x \in \mathbf{R} \mid \ |x - 2| \leqslant 3\} = [\_, \_].$$

---

x — 2

5

$-x + 2$

-1

$-1 \quad 5$

58

Claro está que podemos resolver más fácilmente esta desigualdad recordando que

$$\{x \in \mathbf{R} \mid \ |x| \leqslant a\} = \{x \in \mathbf{R} \mid -a \leqslant x \leqslant a\}.$$

En efecto,

$$A = \{x \in \mathbf{R} \mid \ |x - 2| \leqslant 3\} = \{x \in \mathbf{R} \mid -3 \leqslant x - 2 \leqslant 3\}$$

y, sumando 2 a los 3 miembros de la desigualdad, obtenemos que

$$A = \{x \in \mathbf{R} \mid \_\_\_ \leqslant x \leqslant \_\_\_ = [\_, \_].$$

$-1 \quad 5$

$-1 \quad 5$

59

Es fácil ver que si $b \in \mathbf{R}$ y $b > 0$, entonces

$$\{x \in \mathbf{R} \mid \ |x - a| < b\} = (a - b, a + b).$$

En efecto,

$$\{x \in \mathbf{R} \mid \ |x - a| < b\} = \{x \in \mathbf{R} \mid -b \leqslant x - a \leqslant b$$

y, sumando a a los tres miembros de la desigualdad, resulta que este conjunto es igual a

$$\{x \in \mathbf{R} \mid \_\_\_ \leqslant x \leqslant \_\_\_\},$$

es decir, igual al intervalo abierto

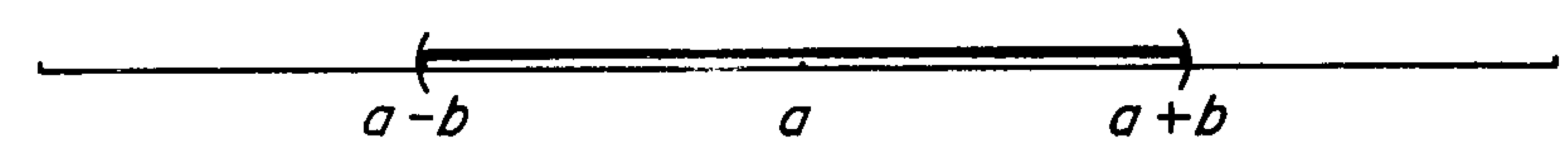
$$(\_\_\_, \_\_\_).$$

$a - b \qquad a + b$

$a - b \quad a + b$

60

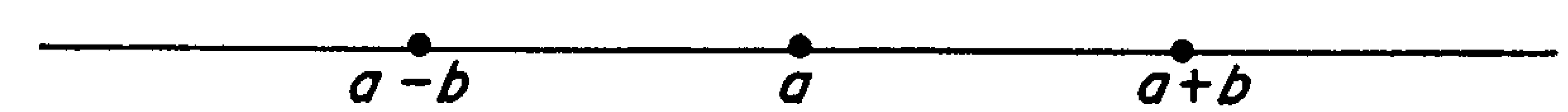
Gráficamente, éste es un intervalo abierto con centro en a y de longitud $2b$:



En forma análoga puede verse que el conjunto

$$\{x \in \mathbf{R} \mid \ |x - a| \leqslant b\}$$

es un intervalo _________ con centro en ____ y de longitud ____:

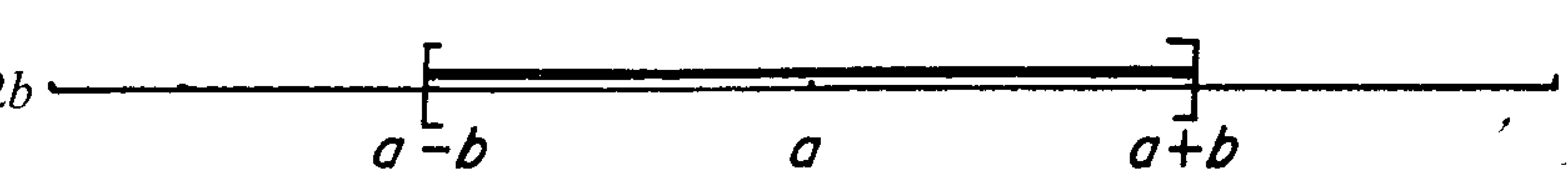


(Indíquese en la figura dicho intervalo).

---

cerrado $\quad a$

$2b$



80

Una propiedad del orden que no se consideró al hablar de los enteros es la siguiente:

Si a es un número racional y $a > 0$ entonces $\frac{1}{a} > 0$.

Ya que $a \neq 0, \frac{1}{a} \neq 0$, Si $\frac{1}{a} < 0$, $-\frac{1}{a} > 0$ y entonces

$\left(-\frac{1}{a}\right) a$ __ 0. Pero

$$\left(-\frac{1}{a}\right) a = -1,$$

lo cual es una contradicción. Luego, por la ley de tricotomía

$$\frac{1}{a} \;\_\_\; 0.$$

$>$

$>$

81

El lector atento habrá observado que para definir el orden en el campo $\mathbf{Q}$ de los números racionales se necesita únicamente tener el subconjunto $\mathbf{Q}^+$ de $\mathbf{Q}$ para el que se cumplen las tres propiedades básicas.

En general, si K es un campo y K contiene un subconjunto P tal que

i) Si $a, b \in P$, entonces $a + b \in P$

ii) Si $a, b \in P$, entonces $ab \in P$

iii) Vale la ley de tricotomía; es decir, si $a \in K$ se cumple una y solamente una de las condiciones siguientes:

a) $a \in P$

b) $a = 0$

c) $-a \in P$,

entonces se dice que K es un campo ordenado y que los elementos de P son los elementos positivos de K.

Igual que en el caso de $\mathbf{Q}$, si K es un campo ordenado se define la relación de orden:

$$a > b \text{ si y solamente si } a - b \in \_\_\_\_.$$

P

82

EL POSTULADO DE ARQUÍMEDES

A continuación demostraremos una propiedad muy importante del campo de los números racionales conocida con el nombre de postulado de Arquímedes:

Teorema. *Si a y b son dos números racionales positivos, existe un entero positivo n tal que*

$$na > b.$$

En este enunciado los números a y b se supone que son racionales ______ y el número n es un ______ ______.

---

positivos

entero positivo

83

Primero demostraremos este teorema para el caso particular de que a y b sean *enteros* positivos.

Se pueden presentar dos casos:

Primer caso: $a > b$. Entonces se puede tomar $n = 1$ y resulta que $1 \cdot a > b$.

Segundo caso: Supongamos ahora que $a \leqslant b$. Consideremos el conjunto

$$M = \{b - ka \mid k \in \mathbf{N} \text{ y } b - ka \geqslant 0\}$$

que consta de enteros no negativos.

El conjunto M no es vacío, pues el elemento

$$b - 1 \cdot a = b - a \in M$$

ya que, según la hipótesis $b - a$ ____ 0.

$>$

84

Observemos ahora que para toda $k \in \mathbf{N}$,

$$b - ka > b - (k + 1)\,a.$$

En efecto,

$$(b - ka) - (b - (k + 1)\,a) =$$
$$b - ka - b + ka + a = a > \_\_\_\_\_\_$$

según la hipótesis.

0

85

Por el axioma del buen orden en los enteros, el conjunto M tiene un elemento mínimo, digamos

$$b - ma$$

y como

$$b - (m + 1)\,a \_\_\_\_\_ b - ma$$

$b - (m + 1)\,a \notin M$ pues $b\text{-}ma$ es el elemento mínimo de M.

$<$

86

Por consiguiente

$$b - (m + 1)\,a < 0$$

y tomando $n = m + 1$ obtenemos $b - na < 0$, de donde na __ b, con lo que queda probado el teorema cuando a y b son enteros.

$>$

87

La demostración del teorema se sigue ahora fácilmente del caso particular probado.

Sean ahora a, b racionales positivos. Por la definición de racional positivo, existen $m, n \in \mathbf{N}$ tales que

$$ma \in \mathbf{N}$$
$$nb \in \mathbf{N}$$

y también, desde luego,

$$a' = mna \in \mathbf{N}$$
$$b' = mnb \in \mathbf{N}.$$

Aplicando a los enteros positivos a' y b' lo antes demostrado, existe $q \in \mathbf{N}$ tal que

$$qa' > b',$$

de donde,

$$qmna > mnb$$

y multiplicando por $\dfrac{1}{mn}$, que es positivo, se obtiene que

$$qa \_\_\_\_ b.$$

$>$

88

Al aplicar el postulado de Arquímedes al caso particular en que $b = 1$ obtenemos el siguiente corolario que será de gran utilidad en el estudio de la estructura de los números racionales y reales.

Corolario. Si a es un número racional positivo, existe un entero positivo n tal que

$$0 < \frac{1}{n} < a.$$

En efecto, tomando $b = 1$ el postulado de Arquímedes asegura la existencia de un número entero positivo n tal que

$$na > 1 > 0$$

Multiplicando la desigualdad anterior por $\dfrac{1}{n}$, que es positivo, obtenemos el resultado deseado:

____________________.

$$0 < \frac{1}{n} < a$$

89

Otra consecuencia del postulado de Arquímedes es el siguiente:

Corolario 2. Si a es un número racional positivo, existe un entero positivo **m** *tal que*

$$0 < \frac{1}{10^m} < a.$$

El resultado anterior es claro, pues por el corolario 1 existe un número natural n tal que

$$0 < \underline{\qquad} < a.$$

Basta entonces tomar m de tal manera que $n < 10^m$ lo cual implica

$$\frac{1}{10^m} \underline{\qquad\quad} \frac{1}{n},$$

de donde,

$$0 < \frac{1}{10^m} < \frac{1}{n} < a$$

con lo que queda probado el corolario 2.

$$\frac{1}{n} \qquad <$$

90

NOTACIÓN DECIMAL DE LOS NÚMEROS RACIONALES

En esta sección recordaremos cómo se extiende la notación decimal de los números enteros a los números racionales.

Si A es un número entero no negativo (en notación decimal) y a un entero entre 0 y 9, más precisamente, $0 \leqslant a \leqslant 9$, la notación

$A.a$ simboliza al número racional $A + \frac{a}{10}$. O sea,

Por ejemplo

$$A \cdot a = A + \frac{a}{10}$$

$$3.7 = \underline{\qquad} + \underline{\qquad}$$
$$101.1 = \underline{\qquad} + \underline{\qquad}$$
$$10.0 = \underline{\qquad} + \underline{\qquad}.$$

$$3 + \frac{7}{10}$$

$$101 + \frac{1}{10}$$

$$10 + \frac{0}{10} = 10$$

91

Cuando el entero A es 0, se acostumbra abreviar la notación escribiendo simplemente $.a$ en lugar de $0.a$. Por ejemplo

$$\frac{2}{10} = 0.2 = .2$$

$$\frac{9}{10} = \underline{\qquad} = \underline{\qquad}$$

$$.1 = 0 + \frac{1}{10} = \frac{1}{10}$$

$$.5 = \underline{\qquad} + \underline{\qquad} = \underline{\qquad}$$

$$0.9 \qquad .9$$

$$0 + \frac{5}{10} \quad \frac{5}{10}$$

92

Siguiendo la costumbre, para abreviar el lenguaje, a los enteros a tales que $0 \leqslant a \leqslant 9$ les llamaremos *cifras*.

Recordemos ahora que si A es un entero no negativo y $b_1, b_2, \ldots, b_t$ son cifras, el símbolo $A.b_1\, b_2 \ldots b_t$ denota al número racional

$$A + \frac{b_1}{10} + \frac{b_2}{10^2} + \ldots + \frac{b_t}{10^t}. \quad \text{O sea,}$$

$$A.\ b_1\ b_2 \ldots b_t = A + \frac{b_1}{10} + \frac{b_2}{10^2} + \ldots + \frac{b_t}{10^t};$$

por ejemplo

$$12.161 = 10 + \frac{1}{10} + \frac{6}{10^2} + \frac{1}{10^3},$$

$$7.2945 = \underline{\qquad} + \underline{\qquad} + \underline{\qquad} + \underline{\qquad} + \underline{\qquad}.$$

$$7 + \frac{2}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{4}{10^3} + \frac{5}{10^4}$$

93

Así, pues, agregando a la notación decimal de los enteros no negativos un punto, llamado punto decimal, podemos expresar además de los enteros no negativos, algunos racionales no enteros.

Al símbolo

$$A.\ a_1\ a_2 \ldots\ a_n$$

se les llama la *expresión decimal finita* del número racional

$$A + \frac{a}{10} + \ldots + \frac{a_n}{10^n}.$$

Por ejemplo, la expresión decimal de

$$12 + \frac{1}{10} + \frac{5}{100} + \frac{9}{1000}$$

es ________________.

12.159

94

Los algoritmos (procesos) para calcular la suma y el producto de decimales finitos son bien conocidos. Basta agregar a los algoritmos de suma y producto de enteros, en notación decimal, las reglas para el punto decimal.

Por ejemplo

$2.5 + 2.3 =$ __________;

$.3 \times = \ .2 =$ __________.

4.8
.06

95

Podemos verificar, en los ejemplos anteriores, la validez de los algoritmos. En efecto,

$$2.5 = 2 + \frac{5}{10} \text{ y } 2.3 = \_\_\_\_ + \_\_\_\_,$$

por lo que

$$2.5 + 2.3 = 2 + \frac{5}{10} + 2 + \_\_\_\_ = 4 + \_\_\_\_ = 4.\ \_\_\_\_.$$

$2 + \frac{3}{10}$

$\frac{3}{10}$ $\frac{8}{10}$ 4.8

96

Que $.3 \times .2 = .06$ es igualmente fácil de verificar:

$$.3 = \frac{3}{10} \quad \text{y} \quad .2 = \_\_\_\_$$

de donde

$$.3 \times .2 = \frac{3}{10} \times \_\_\_\_ = \_\_\_\_ = .\_\_\_\_$$

Estos ejemplos dan una idea clara de cómo pueden demostrarse las "reglas para el punto decimal" en la suma y producto de expresiones decimales.

$\frac{2}{10}$

$\frac{2}{10}$ $\frac{6}{100} = .06$

97

Es importante observar que dos decimales finitas distintas denotan números racionales distintos y recíprocamente.

Por ejemplo las decimales finitas distintas

2.137 y 2.127

denotan respectivamente a los racionales

$2 + \_\_\_\_ + \_\_\_\_ + \_\_\_\_$ y $2 + \_\_\_ + \_\_\_ + \_\_\_$

que son ________.

$\frac{1}{10}$ $\frac{3}{100}$ $\frac{7}{1000}$ $\frac{1}{10}$ $\frac{2}{100}$ $\frac{7}{1000}$

distintos

98

Otro hecho que conviene destacar es que *no todo número racional positivo tiene una expresión decimal finita,* como puede verse en el siguiente

TEOREMA. *Sea $r = \frac{p}{q}$ un número racional con p y q enteros positivos primos entre sí. Entonces si r tiene una expresión decimal finita, q es de la forma $2^r\,5^s$ (r, s enteros no negativos).*

Es decir los únicos posibles factores primos del denominador son 2 y 5.

Demostración. Sea $r = A.\,a_1\,a_2\,\ldots\,a_n$. Entonces

$$r = A + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \ldots + \frac{a_n}{10^n} = \frac{10^n A + 10^{n-1} a_1 + \ldots + a_n}{10^n}$$

Aquí, los únicos factores primos del denominador son 2 y 5, y al cancelar los factores primos del numerador y denominador para expresar r como cociente de dos enteros primos entre sí, es claro que los únicos factores primos posibles del denominador son ______ y ________.

2 5

99

Utilicemos el teorema anterior. De los siguientes números racionales

$$\frac{2}{5},\ \frac{3}{7},\ \frac{3}{10},\ \frac{1}{14},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{2}$$

no se pueden expresar como decimales finitos los siguientes:

____, ____, ____.

$\frac{3}{7},\ \frac{1}{14},\ \frac{1}{3}.$

100

El recíproco del teorema anterior es válido. Para ver esto, demostraremos primero un resultado auxiliar.

Lema. Todo número racional r de la forma $\frac{c}{10^t}$ donde c es un entero positivo tiene expresión decimal finita.

Demostración. Sea

$$c = c_n\,10^n + c_{n-1}\,10^{n-1} + \ldots + c_1\,10 + c_0$$

donde cada c_i es una cifra. Entonces

$$r = c_n\,10^{n-t} + c_{n-1}\,10^{n-t-1} + \ldots + c_1\,10^{1-t} + c_0\,10^{-t}$$

Ahora, si $n \leq t$, obtenemos

$$r = \underbrace{0.00\ldots0}_{n\text{-}t \text{ ceros}}\,c_n\,c_{n-1}\ldots c_1\,c_0$$

la cual es una expresión ____________ ____________ del número racional r. ↓

decimal finita

101

Finalmente si $n > t$, entonces

$$r = A.c_{r-1}\, c_{r-2} \ldots c_1\, c_0,$$

de donde, $A = c_n\, 10^{n-t} + \ldots + c_t$ es un entero no negativo.

En esta forma hemos probado que r puede expresarse como decimal finita y el lema queda demostrado.

Como ejemplos del lema tenemos:

$$\frac{2750}{10^3} = 2.75$$

$$\frac{45301}{10^5} = \_\_\_\_\_\_$$

$$\frac{37}{10^4} = \_\_\_\_\_\_.$$

.45301
.0037

102

Podemos ahora enunciar y demostrar el teorema recíproco del anterior:

Teorema. Si un número racional r es de la forma

$$r = \frac{c}{2^m\ 5^n} \qquad (c, m, n \text{ enteros no negativos})$$

entonces r tiene expresión decimal finita.

Demostración. Podemos escribir

$$r = \frac{c'}{10^p}$$

multiplicando convenientemente numerador y denominador por una potencia de 2 o de 5, y entonces el teorema es consecuencia del lema anterior.

Ejemplos.

$$\frac{2743}{2^2 \times 5} = \frac{2743 \times 5}{2^2 \times 5^2} = \frac{13715}{10^2} = 137.15$$

$$\frac{314521}{2^2 \times 5^3} = \_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_$$

$$\frac{12}{5^2} = \_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_.$$

$$\frac{314521 \times 2}{2^3 \times 5^3} = \frac{629042}{10^3} = 629.042$$

$$\frac{12 \times 2^2}{2^2 \times 5^2} = \frac{48}{10^2} = .48$$

103

Como hemos observado, existen racionales que no se pueden expresar como decimales finitas. A estos números les asociaremos una expresión que llamaremos *decimal infinita*.

Consideremos, por ejemplo, el racional $\frac{1}{3}$. Como sabemos, éste no tiene expresión decimal finita

Para asociar a este número una decimal infinita procederemos como sigue: Multiplicamos el numerador por 10 y el producto lo dividimos entre 3. El cociente es ______ y el residuo es ______.

3 1

104

Multiplicamos ahora este residuo por 10 y dividimos el producto entre 3. El cociente es ____ y el residuo es ______.

3 1

105

Continuando este proceso obtenemos la sucesión de cocientes

3, 3, 3, ____, ____, . . .

y entonces al número racional $\frac{1}{3}$ le asociamos la decimal infinita

.3333. . .

3 3

106

Apliquemos el mismo algoritmo al número racional $\frac{1}{6}$.

Multiplicamos el numerador por 10 y el producto lo dividimos entre 6. El cociente es ______ y el residuo es ______.

1 4

107

Multiplicamos ahora este residuo por 10 y dividimos el producto entre 6.
El cociente ahora es ________ y el residuo es _________.

6 4

108

Continuamos el proceso, como en el ejemplo anterior, y obtenemos un cociente ______ y un residuo _________.

6 4

109

Ahora se ve fácilmente que la sucesión de los cocientes es:

1, 6, 6, ________, ______, ______, ...

y la decimal infinita asociada a $\frac{1}{6}$ es: ______________________.

6 6 6

.1666...

110

El proceso anterior es el de la "división sin residuo". Consideremos el número racional $\frac{2}{7}$.

Escribamos como usualmente

$7\overline{)2}$

Como 2 es menor que siete multiplicamos 2 por 10, es decir, "agregamos un ceio al 2" y dividimos el resultado entre 7 obteniendo un cociente y un residuo, escribiendo el cociente precedido por un punto decimal.

cociente

$$\begin{array}{r|l} & .\_\_ \\ 7 & 20 \\ & \_ \end{array}$$

residuo

2
6

111

Al residuo obtenido le agregamos un cero y dividimos el número así obtenido entre 7, colocando el nuevo cociente a la derecha del anterior y el nuevo residuo debajo del cero que sigue al residuo anterior

$$\begin{array}{r|l} & .2\_ \\ 7 & 20 \\ & \ \ 60 \\ & \ \ \_ \end{array}$$

8
4

112

Repitiendo el proceso obtenemos lo siguiente:

$$\begin{array}{r|l} & .28\ \_\_ \\ \hline 7 & 20 \\ & \ \ 60 \\ & \ \ \ \ 40 \\ & \ \ \ \ \ \ \_\_ \end{array}$$

5

5

113

Repitiendo el proceso varias veces:

$$\begin{array}{r|l} & .2857\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_ \\ \hline 7 & 20 \\ & \ \ 60 \\ & \ \ \ \ 40 \\ & \ \ \ \ \ \ 50 \\ & \ \ \ \ \ \ \ \ 10 \\ & \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \_\_0 \\ & \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \_\_0 \\ & \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \_\_0 \\ & \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \_\_0 \\ & \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \_\_ \end{array}$$

1 4 2 8 5

3

2

6

4

5

114

De esta manera obtenemos la expresión decimal del racional $\frac{2}{7}$

$$\frac{2}{7} = .285714285\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \ldots$$

7, 1, 4

115

En el ejemplo anterior, los puntos suspensivos (. . .) indican que el "periodo" 285714 se repite una y otra vez. Para indicar esto se usa la notación

$$\overline{.285714} = .285714285714285714\ldots$$

Otros ejemplos de esta notación son los siguientes

$$.3 = .33\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \ldots$$

$$.8 = .\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \ldots$$

$$2.15 = 2.\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \ldots$$

$$\frac{1}{6} = .\overline{16} = .\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \ldots$$

3 3 3 3 3

8 8 8

1 5 1

.1 6 6 6

El mismo procedimiento anterior se puede aplicar para cualquier numerador no negativo y denominador positivo. Por ejemplo:

```
      2.94 - - - - - - - - - - - - - - - - ...
  17 | 50
       160
        070
         020
         - -0
          - -0
           - -0
            - -0
             - -0
              - -0
               - -0
                - -0
                 - -0
                  - -0
                   - -0
                    - -0
                     - -0
                      - -0
                       - -0
```

```
117647058823529

03
 13
  11
   08
    12
     01
      10
       15
        14
         04
          06
           09
            05
             16
```


El algoritmo de la "división sin residuo" aplicado a un racional que tenga expresión decimal finita conduce a la misma expresión decimal finita seguida de un número infinito de ceros.

Por ejemplo, aplicando el algoritmo a $\frac{372}{25}$ obtenemos

```
      14. _ _ _ _ _
  25 | 372
        122
         - -0
           - -0
            - -0
             - -0
              - -0
               .
                .
                 .
```

```
14.8800...

220
 200
  000
    00
```

118

Resumiendo lo anterior:

El algoritmo de la división sin residuo asocia a cada racional no negativo r una expresión decimal:

$$A . a_1\, a_2\, a_3 \ldots,$$

en donde A es un entero no negativo (en su expresión decimal) y las a_i son cifras. Escribiremos entonces

$$r = A . a_1\, a_2\, a_3 \ldots$$

En todos los ejemplos anteriores puede observarse que esta expresión decimal es *periódica*. Este resultado es general:

Teorema. *La expresión decimal de un número racional es periódica.*

En efecto, si $r = \dfrac{m}{n}$ es un número racional (m, n enteros no negativos), el número de *distintos* residuos posibles que aparecen en la división sin residuo es menor o igual que n. Por consiguiente, después del n-simo paso necesariamente se debe repetir alguno de ellos y a partir de entonces el proceso se vuelve periódico.

119

El teorema anterior sugiere la siguiente pregunta:

Dada una decimal periódica

$$A . a_1\, a_2 \ldots a_n\, \overline{b_1\, b_2 \ldots b_m},$$

¿existe un número racional r tal que

$$r = A . a_1\, a_2 \ldots a_n\, \overline{b_1\, b_2 \ldots b_m}?$$

Los dos teoremas que siguen responden esta pregunta.

Teorema. Las decimales periódicas del tipo

$$A . a_1\, a_2 \ldots a_n\, \overline{9}$$

no aparecen al aplicar la división sin residuo a los números racionales.

Por ejemplo, de las expresiones decimales

$$3.24993\overline{9}, \qquad 3.24\overline{29}, \qquad 5.\overline{397}, \qquad .\overline{9},$$

las del tipo mencionado en el teorema son:

______________, ______________.

$3.24993\overline{9}$, $.\overline{9}$

120

Demostraremos únicamente que no existe ningún número racional $r = \dfrac{a}{b}$ tal que

$$\frac{a}{b} = .\dot{9}$$

(un argumento simple permite reducir el caso general a éste).

Observemos primero que si $a \geq b$, entonces la expresión decimal de $\dfrac{a}{b}$ es de la forma

$$A . a_1\, a_2 \ldots a_n \ldots$$

con $A > 0$.

Por lo tanto, ya que la expresión de $\dfrac{a}{b}$ es 0.9, se debe tener que

$$a < \_\_\_\_ .$$

b

121

De la desigualdad anterior se sigue que

$$-9b < -9a$$

y sumando $10a$ obtenemos

$$10a - 9b < 10a - 9a = a.$$

Pero como $10a - 9b = r_1$, tenemos que

$$r_1 \_\_\_\_ a.$$

$<$

122

Ahora, por definición,

$$r_1 < b$$

y multiplicando por -9 ambos lados de la desigualdad obtenemos

$$-9b < -9r_1.$$

Sumando $10r_1$ a los dos miembros de la desigualdad se obtiene

$$10r_1 - 9b < 10r_1 - 9r_1 = r_1.$$

Pero como $10r_1 - 9b = r_2$ tenemos que

$$r_2 \text{ \_\_\_\_\_ } r_1$$

↓

$<$

123

Con lo anterior hemos probado que el residuo r_2 que se obtiene al dividir $10r_1$ entre b es menor que r_1.

En forma análoga se prueba que el residuo r_3 que se obtiene al dividir $10r_2$ entre b es menor que r_3.

En esta forma obtenemos la sucesión de residuos $r_1, r_2, r_3, \ldots$ que cumplen las condiciones

$$a > r_1 > r_2 > r_3 > \ldots \geqslant 0.$$

Ya que en esta sucesión puede haber solamente un número finito de términos, se tiene que necesariamente algún residuo $r_n = 0$. De donde, la $n + 1$ cifra decimal de $\frac{a}{b}$ será cero, en contra la hipótesis de que todas sus cifras decimales son _____.

↓ □

9

124

Teorema. Toda decimal periódica con periodo distinto de 9 es la expresión decimal de un número racional

Para abreviar haremos la demostración únicamente en el caso en que la decimal sea de la forma

$$.\overline{b_1 b_2 \ldots b_m}.$$

(Un argumento simple reduce el caso general a éste.)

Demostración

Consideremos primero el entero

$$b_1 10^{m-1} + b_2 10^{m-2} + \ldots + b_m$$

que en notación decimal se escribe $b_1 b_2 \ldots b_m$ (recuérdese que b_i es una cifra para cada i), es decir,

$$b_1 b_2 \ldots b_m = b_1 10^{m-1} + \ldots + b_m$$

Por ejemplo, si la decimal es $.\overline{321}$, el entero que se considera es

$$3 \times 10^2 + 2 \times 10 + 1,$$

que en notación decimal es _________.

321

125

Demostraremos ahora que el número racional

$$r = \frac{b_1 \ldots b_m}{10^m - 1}$$

tiene como expresión decimal

$$.\overline{b_1 \ldots b_m}$$

Por ejemplo,

$$\frac{321}{10^3-1} = \frac{321}{999} = .\overline{321}$$

En efecto,

$$\begin{array}{r|l} & .\_\,\_\,\_ \\ \hline 999 & 3210 \\ & \text{- - - }0 \\ & \text{- - - }0 \\ & \text{- - - }0 \\ & \text{- - -} \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} & .321 \\ \hline 999 & 3210 \\ & 2130 \\ & 1320 \\ & 321 \end{array}$$

126

Calcularemos ahora en general la expresión decimal del racional

$$r = \frac{b_1 \ldots b_m}{10^m - 1}$$

para lo cual consideraremos la igualdad

$$10\,(b_1\,10^{m-1} + \ldots + b_{m-1}\,10 + b_m) = (10^m - 1)\,b_1 + b_2\,10^{m-1}$$
$$b_3\,10^{m-2} + \ldots + b_m\,10 + b_1.$$

Ya que estamos suponiendo que no todas las cifras $b_1, \ldots, b_m$ son iguales a 9, entonces

$$b_2\,10^{m-1} + \ldots + b_m\,10 + b_1 < 9\,(10^{m-1} + 10^{m-2} + \ldots + 1)$$

Ahora bien, usando la fórmula que se vio anteriormente para la suma de una progresión geométrica, se tiene que

$$10^{m-1} + 10^{m-2} + \ldots + 1 = \_\_\_\_\_.$$

$$\frac{10^m - 1}{9}$$

127

Substituyendo en la desigualdad anterior se obtiene

$$b_2\,10^{m-1} + b_3\,10^{m-2} + \ldots + b_m\,10 + b_1 < 10^m - 1.$$

Los resultados anteriores indican que al dividir $10 \times b_1 \ldots b_m$ entre $10^m - 1$, el cociente es b_1 y el residuo es $b_2\, b_3 \ldots b_m\, b_1$.

Por consiguiente, la primera cifra decimal de la expresión es b_1

Para calcular la segunda cifra decimal hay que multiplicar 10 por el residuo anterior $b_2\, b_3 \ldots b_m\, b_1$ y dividir entre $10^m - 1$.

En forma semejante al caso anterior obtenemos que el cociente b_2 y el residuo es _________.

$b_3\, b_4 \ldots b_m\, b_1\, b_2$

128

Así sucesivamente, obtenemos como cocientes

$$b_3, b_4, \ldots, b_m, b_1, b_2, \ldots$$

Por consiguiente la expresión decimal de

$$\frac{b_1 \ldots b_m}{10^m - 1}$$

es _________________,
que es lo que se quería probar.

$$.\overline{b_1\, b_2 \ldots b_m}$$

129

Hasta aquí hemos hablado únicamente de la expresión decimal de un número racional no negativo. Para completar y tener una expresión decimal para todo número racional daremos la expresión decimal de los racionales negativos.

Si r es un número racional negativo, $-r$ es un número racional positivo y tiene una expresión decimal:

$$-r = A.a_1\, a_2\, a_3 \ldots$$

Entonces, por definición, la expresión decimal de r es

$$r = -A.a_1\, a_2\, a_3 \ldots$$

Por ejemplo, la expresión decimal de

$-\frac{1}{2}$ es _______

$-\frac{1}{3}$ es _______.

$-\ .5$
$-\ .\overline{3}$

En la Imprenta Universitaria, bajo la dirección de Jorge Gurría Lacroix, se terminó la impresión de *Álgebra II. El campo de los números racionales,* el día 31 de agosto de 1971. La composición se paró de tipo Times 10:11. Se tiraron 10 000 ejemplares,

Bajo el tema genérico de **Algebra** los profesores Humberto Cárdenas Trigos, Emilio Lluis Riera, Francisco Raggi Cárdenas y Francisco Tomás Pons, prepararon I. **El anillo de los números enteros**, II. **El campo de los números racionales**, III. **El campo de los números reales**, folletos que ahora, cada uno por separado, ofrece a los lectores la colección de Textos Programados de la UNAM.

Los autores, ampliamente destacados en el campo de los números como los podrán demostrar estos trabajos, son investigadores de tiempo completo, titulares de sus respectivas materias en la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional Autónoma de México.

Con estos textos pretenden, además de que se conozcan —en la aparente aridez del álgebra— las riquezas que esta disciplina ejerce dentro de las ciencias, establecer un nivel intermedio a fin de que sirvan al mayor número de estudiosos.

Por tanto se puede afirmar, sin lugar a titubeos, que serán útiles a los estudiantes de nivel preparatorio, a los del primer año de las carreras profesionales —como complemento de sus cursos de matemáticas—, así como a cualquier persona interesada en temas de esta naturaleza.

TEXTOS PROGRAMADOS

Publicados

Química orgánica, José Luis Mateos Gómez (2ª edición)
Introducción a la estadística descriptiva I y II, Octavio A. Rascón Ch.
Introducción a la administración, José Antonio Fernández Arena (2ª edición)
Introducción a la lógica deductiva y teoría de los conjuntos I, Javier Salazar Resines
Introducción a la fisiología, Carlos Alcocer
Algebra I, II, III, Emilio Lluis, Humberto Cárdenas, Francisco Raggi y Francisco Tomás
Introducción a la lógica deductiva y teoría de los conjuntos II, Javier Salazar Resines

De próxima aparición

Geometría analítica, Guillermo Torres, Alejandro Odgers
Física general, Francisco Medina Nicolau
Introducción a la teoría de las probabilidades, Octavio A. Rascón Ch.

En preparación

Introducción a la psicología, Enrique García
Contabilidad de costos, Miguel Tanjián
El átomo y la molécula, Raúl Cetina
La célula, Antonio Villasana y Armando Gómez Poyou
Introducción al estudio del derecho, Fernando Flores García
Sistemas económicos, Guillermo Ramírez

Departamento de Distribución de Libros Universitarios
Insurgentes Sur 299
México 11, D. F.
Teléfonos 533-45-16 y 533-42-19