Publicaciones Electrónicas
Instituto Mexicano de
Ciencias y Humanidades

Estructuras Algebraicas en la Matemática y en la Teoría Matemática de la Música.

Emilio Lluis-Puebla

www.imch.org.mx

INSTITUTO MEXICANO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES
CIENCIA Y CULTURA PARA MÉXICO

Academia de Ciencias. Vol. 3 (2023)

Estructuras Algebraicas en la Matemática y en la Teoría Matemática de la Música[1]

Emilio Lluis-Puebla

Resumen

En este artículo de difusión y divulgación se escribe acerca de las estructuras algebraicas en la Matemática y en la Teoría Matemática de la Música y está dirigida tanto para una audiencia matemática general como para músicos en particular. Se mencionan ejemplos concretos donde aparecen estructuras algebraicas. Se verá que, hasta cierto punto, estas estructuras clasifican a la Matemática. Además, se mencionan arquitecturas de conceptos generales como denotadores y formas. Finalmente, expondré la visión matemática de los objetos, estructuras y conceptos discutida con Guerino Mazzola.

Este artículo está redactado a propósito en primera persona tratando de acercarme al lector de una manera más personal.

Me voy a referir a las estructuras algebraicas en la Matemática y en la Teoría Matemática de la Música o Musicología Matemática. Haré un enfoque con distintos niveles de complejidad tanto matemática como musical de manera que les deje algo interesante a todos.

Mencionaré las lecturas y referencias que recomiendo y de donde he tomado parte de este artículo de divulgación y difusión. Tienen la dualidad de motivar al lector, así como ofrecer lecturas posteriores para quienes deseen continuar con este apasionante tema. Muchas personas me lo solicitan y lo hago con mucho gusto.

Para comenzar, el interesado puede consultar mi libro [L-P] sobre Álgebra Moderna para obtener un detallado desarrollo de las estructuras algebraicas que mencionaré. El estudio de las estructuras o sistemas algebraicos son los objetos de estudio de lo que se denomina Álgebra Abstracta o Álgebra Moderna.

Recuerden que una *operación binaria* o *ley de composición* en un conjunto C es una función $f:C\times C\to C$ donde $(x,y)\mapsto f(x,y)$. En palabras, una operación binaria sobre un conjunto es una función cuyo dominio es el producto cartesiano binario de ésta consigo misma, con codominio el mismo conjunto. Una operación ternaria sería una función cuyo dominio es un producto ternario del conjunto con el conjunto como codominio.

Podemos definir funciones $f:G\to G$, $g:G^2=G\times G\to G$, $h:G\times G\times G\to G$ o bien $j:G^n=G\times\ldots\times G \to G$ dando así lugar a operaciones unarias, binarias, ternarias o n-arias. La operación nula es una función $i:\{e\}\to G$.

[1] Texto correspondiente a la conferencia invitada por la SoBolMat (10/11/2022).

Una *estructura algebraica* o *sistema algebraico* es un conjunto C junto con una o más operaciones n-arias definidas en C las cuales podrían satisfacer ciertas axiomas o propiedades.
A continuación, exploremos varias estructuras algebraicas.

Un *grupo* es una pareja (G,+) donde G es un conjunto no vacío y $+: G\times G \to G$ es una operación binaria dada por $(u,v)\mapsto +(u,v)$ donde, por conveniencia o abuso de notación se escribe $+(u,v)=u+v$ tal que

(i) $+(+(u,v),w)=+(u,+(v,w))$, es decir, $(u+v)+w=u+(v+w)$

(ii) existe un elemento $O\in G$, llamado *elemento de identidad*, tal que $+(v,O)=v+O=v$

(iii) para cada $v\in G$ existe un elemento, llamado *inverso*, denotado con $-v$, tal que $+(v,-v)=v+(-v)=O$.

Diremos que el grupo es *conmutativo* si además satisface

(iv) $+(u,v)=+(v,u)$ es decir, $u+v=v+u$.

En pocas palabras, un *grupo* es un conjunto no vacío junto con una operación binaria que es asociativa, tiene un elemento de identidad y tiene un inverso para cada elemento del conjunto.

El lector podrá comprobar que los siguientes son grupos con las operaciones usuales en cada caso: (Z,+), (nZ,+), $n\in Z$, (Q,+), ($Q^*=Q-\{0\},\cdot$), (R,+), ($R^*=R-\{0\},\cdot$), (C,+), ($C^*=C-\{0\},\cdot$), (Z_n,+), ($\Delta_3,\circ$), ($S_3,\circ$), ($S_n,\circ$), (M_nK,+), donde M_nK denota las matrices cuadradas de $n\times n$ con coeficientes en un campo K, (GL_nK,+) y ($GL_nK,\cdot$), donde GL_nK denota las matrices cuadradas invertibles de $n\times n$ ($n\in N$) con coeficientes en un campo K.

Un *magma* o *grupoide* es simplemente un conjunto no vacío con una operación binaria.

Si un magma o grupoide tiene la propiedad asociativa se le llama *semigrupo*.

Si un semigrupo satisface la propiedad del elemento de identidad, se le llama *monoide*.

Esto significa que un grupo es un monoide que satisface la propiedad inversa. Un grupo se llama *abeliano* si todos los elementos conmutan entre sí.

Un *anillo* es un conjunto no vacío junto con dos operaciones binarias, tal que es un grupo abeliano bajo una de esas operaciones binarias, un semigrupo bajo la otra operación binaria y satisface una ley de distribución adecuada.

Un *campo* es un anillo conmutativo con división. Por favor vea mi libro sobre Álgebra Moderna para más detalles.

Recuerde de un curso de Álgebra Lineal que un *espacio vectorial* es un conjunto no vacío con una operación binaria bajo la cual es un grupo abeliano, junto con una *multiplicación escalar*, que es una acción de un campo en el conjunto que satisface acciones distributivas adecuadas y la acción del elemento identidad del campo deja invariante el elemento sobre el que actúa.

Si en lugar de un campo, se generaliza la definición anterior a tener la acción de un anillo sobre el conjunto, se obtiene el importante concepto de *módulo sobre un anillo*.

La estructura algebraica llamada *álgebra sobre un anillo* es un conjunto no vacío que a la vez es un anillo y un módulo sobre un anillo.

Un lugar en la Matemática donde se utilizan las estructuras algebraicas es en la Clasificación de la Matemática. Esta sigue en parte la estructura asociada a un conjunto. El "Mathematics Subject Classification System, MSC 2020", cumple con esto. La Matemática está clasificada en más de 60 áreas de estudio con más de 6000 subclasificaciones.

Por ejemplo, tenemos las siguientes áreas de la Matemática:

08 designa Sistemas Algebraicos Generales

13 es Álgebra Conmutativa. Es el estudio de los anillos conmutativos.

14 es Geometría Algebraica. Es decir, el estudio de curvas, superficies y variedades algebraicas como soluciones de ecuaciones polinómicas, vagamente hablando.

15 es Álgebra Lineal, Álgebra Multilineal y Teoría de Matrices. Esta área es el estudio de las propiedades de ecuaciones lineales, espacios vectoriales y matrices, en general.

16 es Anillos Asociativos y Álgebras

17 es Anillos no asociativos y Álgebras

18 es Teoría de Categorías y Álgebra Homológica. Es decir, el estudio de categorías y funtores, y uno de los conceptos fundamentales de toda la matemática en el siglo XX, el concepto de "homología".

19 es la K-Teoría. Es decir, el estudio de los K-grupos asociados a un anillo o categoría.

20 es Teoría de Grupos y generalizaciones.

22 es Grupos Topológicos, Grupos de Lie.

55 es Topología Algebraica. Este es el estudio de espacios topológicos usando Álgebra Abstracta vagamente hablando. El interesado puede ver mi artículo [Ll1] sobre la Topología Algebraica y sus aplicaciones donde se escribe acerca del origen de los conceptos de homología y homotopía y de cómo se aplican en la Teoría Matemática de la Música y en otras áreas.

Para comunicar con precisión, los matemáticos, los científicos y los estudiosos de diversas ramas del conocimiento definen conceptos de manera precisa con el fin de tener la misma comprensión de la materia de estudio, de lo contrario, no se pueden obtener resultados precisos. Siendo la matemática el lenguaje por excelencia para cualquier estudio que se precie de ser científico, la Musicología toma a la Matemática para interpretar de manera precisa sus objetos de estudio.

Guerino Mazzola ha desarrollado enormemente la Teoría Matemática de la Música. Una de las principales metas de la Teoría Matemática de la Música es la de desarrollar un marco científico para la Musicología.

La Teoría Matemática de la Música está basada en las Teorías de Módulos y Categorías, en la Topología Algebraica y Combinatoria, en la Geometría Algebraica y Teoría de Representaciones, entre otras. Uno de sus propósitos es el de describir las estructuras musicales.

Algunos ejemplos en donde aparecen o se utilizan estructuras algebraicas en la Teoría Matemática de la Música (ver [APML], [MMP]) son los siguientes:

La estructura algebraica llamada grupo se utiliza en la composición y análisis de series dodecafónicas. Consulte la bella tesis de licenciatura de mi alumna Alison Barbosa que pronto estará disponible en el banco de tesis de la UNAM. [A].

Consideremos el producto cartesiano $OP = R \times R$ donde O denota (onsets) inicios y P denota (pitches) frecuencias o tonos para los cuales le asignamos números reales. Para visualizar esto de manera geométrica, dentro del grupo Sim(OP) de las biyecciones de OP, hay algunas que son clásicas en la música: el retrógrado R, la inversión I, y la inversión retrógrada RI.

R se define como $R(x, y)=(-x, y)$, la inversión es $I(x, y)=(x, -y)$, y al inversión retrógrada como $RI(x, y)=(-x, -y)$.

El retrógrado R y la inversión I son reflexiones en el eje vertical y en el eje horizontal, respectivamente. Pero RI no es una reflexión, es una rotación de 180 grados alrededor del origen (0, 0) del plano PO. En la Teoría Musical, RI no se entiende como una rotación, sino como la composición $R \circ I = I \circ R$ de retrógrado e inversión. En términos de Teoría de Grupos, tenemos un pequeño grupo $\{1_{OP}, R, I, RI\}$ que es generado por R e I, con cuatro elementos. Se llama grupo 4 de Klein, K_4. Este grupo se genera por R e I, y el producto RI no se entiende geométricamente como una rotación, sino como una composición de dos operaciones musicalmente comprensibles. Tiene dos subgrupos no triviales, el generado por $R = \{I_{OP}, R\}$ y el generado por $I = \{I_{OP}, I\}$.

Este hecho puede generalizarse y da lugar a un principio general de concatenación en la Teoría Musical, a saber, que todos los grupos que son importantes para la música lo son de hecho porque admiten conjuntos de generadores que son musicalmente comprensibles.

Recordemos que un grupo G actúa por la izquierda en un conjunto X si existe una función $a: G \times X \to X$ dada por $(g,x) \mapsto a(g,x)$ donde $a(g,x)$ se denotará gx, tal que se cumple $(e,x) \mapsto a(e,x)=ex=x$ y $(gg',x) \mapsto a(gg',x)=(gg')x=g(g'x)$. Si se tiene que G actúa en un conjunto X, se dice que X es un *G-conjunto*.

Las acciones de un grupo en un conjunto son muy importantes en la Teoría Matemática de la Música. Pueden ser libres, transitivas, simplemente transitivas, regulares, etc. Las acciones simplemente transitivas en grupos se corresponden con el Sistema Generalizado de Intervalos de David Lewin. Véase [MMP]

Las acciones de grupo son muy frecuentes en la Teoría Matemática de la Música. Nos permiten definir de forma precisa los acordes, clases de transposición de acordes, triadas disminuidas, triadas mayores, etc.

Además, los grupos cíclicos de orden superior se utilizan para composiciones micro tonales. A veces, la escala diatónica 0, 2, 4, 5, 7, 9, 11 se modela en Z_7 como si las distancias tonales fueran iguales. Z_{12} es un grupo cíclico muy importante en Teoría Musical.

Otro ejemplo de un grupo importante en Teoría Matemática de la Música es el Toro de Terceras, que es el grupo abeliano finito $Z_3 \times Z_4$. Consideremos las sucesiones exactas

$$(3_{12}) \rightarrowtail Z_{12} \twoheadrightarrow Z_{12}/(3) \qquad Z_3 \text{ donde } p_3: Z_{12} \to Z_3$$

$$(4_{12}) \rightarrowtail Z_{12} \twoheadrightarrow Z_{12}/(4) \qquad Z_4 \text{ donde } p_4: Z_{12} \to Z_4$$

y el diagrama $\ker(p_3, p_4) \rightarrowtail Z_{12} \twoheadrightarrow \mathrm{im}(p_3, p_4) \quad Z_{12}/\ker(p_3, p_4) \quad Z_3 \times Z_4$

En la Teoría Musical es útil componer este isomorfismo con el automorfismo

$$\mathrm{Id} \times (-1) : Z_3 \times Z_4 \quad Z_3 \times Z_4 \text{ dado por } (x, y) \mapsto (x, -y)$$

y así obtener

$$t = \mathrm{Id} \times (-1) \circ (p_3, p_4) : Z_{12} \qquad Z_3 \times Z_4$$

$$\text{dado por } x_{12} \mapsto (x_3, -x_4)$$

El inverso t^{-1} está dada por $t^{-1}(x_3,y_4)=4x_3 +3y_4$ lo que significa que las dos componentes en $T_{3\times4}$ representan los múltiplos de 4 y 3, respectivamente, en Z_{12}. Como estas cantidades representan terceras mayores y menores en el conjunto de clases de tono Z_{12}, se explica el nombre *toro de terceras*.

En el toro de terceras $T_{3\times4}$ podemos definir una función de distancia métrica siendo d(z, w) el número mínimo de terceras menores o mayores para llegar a w desde z. Las terceras son la suma o resta de $(1_3, 0_4)$ o $(0_3, 1_4)$. Esta geometría métrica en $T_{3\times4}$ es importante porque es invariante bajo todas las simetrías de $T_{3\times4}$. En [MMP] encontrarán una explicación acerca de qué son las simetrías de $T_{3\times4}$. El hecho es que las simetrías del toro conservan todas las distancias de terceras.

También en [MMP] podrán ver aplicaciones a la clasificación de acordes, a las tonalidades y al contrapunto.

Los anillos que como estructuras algebraicas aparecen en Teoría Músical son Z_3, Z_4, Z_{12} y el anillo producto $Z_3 \times Z_4$.

Los módulos sobre los números racionales o reales, es decir, los espacios vectoriales sobre esos campos son de uso muy importante. Nos dan la representación geométrica de los objetos musicales y son las estructuras generales que realizan lo que hacen las partituras. La representación geométrica de objetos musicales como subconjuntos de módulos no solo es precisa y completa, sino que también abre la acción de grupos de transformaciones para simplificar la creatividad. No solo es una ventaja teórica, sino que también se usa en varios softwares de música. Por ejemplo:

La herramienta UPIC de Iannis Xenakis transformó automáticamente dibujos bidimensionales en sonidos. Era una máquina de composición que permite al compositor dibujar objetos musicales en una interfaz gráfica interactiva.

PRESTO de Guerino Mazzola, fue una interfaz geométrica donde se puede realizar cualquier transformación afín además del dibujo directo.

Además, el software RUBATO de Mazzola se desarrolló como un lugar donde se ha implementado la Teoría Matemática de la Música en un marco matemático bastante general de arquitecturas de conceptos generales como Denotadores y Formas. Aquí, la visualización y la sonificación se pueden realizar en espacios muy generales. Mi exalumna, Mariana Montiel, trabajó desarrollando estos conceptos en 1997-1999. Los presentó en su tesis de maestría bajo mi dirección en la UNAM [M].

Todas las estructuras algebraicas mencionadas hasta ahora comparten el hecho de que son conjuntos con cierta estructura y una forma de relacionarlos a través de lo que llamamos homomorfismos y una forma adecuada de componerlos. El resultado final de todas estas estructuras algebraicas es lo que llamamos una *categoría*.

Un ejemplo de una de las categorías más importantes en la Teoría Matemática de la Música es la categoría de composiciones locales en Λ-módulos.

Sucede en toda ciencia y arte, que si se cuenta con herramientas matemáticas poderosas y sofisticadas hay mejores posibilidades de analizar, crear, modelar y ejecutar fenómenos musicales.

Los invito a ver los trabajos de mi alumno de doctorado, Octavio Alberto Agustín-Aquino donde utilizó los conceptos antes mencionados en Contrapunto, [AA]. También pueden consultar [AA-AV-LP].

El lector puede consultar los trabajos del talentoso matemático Juan Sebastián Arias-Valero [A-V] publicados recientemente en MusMat, donde la Topología Algebraica está presente además de los conceptos mencionados anteriormente.

Antes de concluir este artículo deseo compartir con el lector un extracto de mi conversación por correo electrónico con Guerino Mazzola que vale la pena mencionar. Estuvo de acuerdo en que los mencione públicamente. Aquí están:

El sábado 7 de diciembre de 2019 escribió:

Estimado Emilio,

Tengo una teoría sobre la evolución de la matemática en la forma amplia:
Ha habido, a mi entender, tres fases:

1. Matemática de objetos.
Aquí los objetos especiales, como los espacios de funciones distinguidas, están en el centro de interés. En mi opinión, la finalización de esta fase fue la teoría de conjuntos de Cantor, en la que cualquiera de los objetos clásicos podía construirse como conjuntos especiales.

2. Matemática de estructura.
Aquí los objetos concretos ya no son de interés central, son más las estructuras las que importan, grupos, anillos, módulos, etc. En mi opinión, la culminación de esta fase fue la Teoría de Categorías de Eilenberg-Mac Lane. Las categorías se centran en los tipos de estructuras, ya no en los objetos concretos.

3. Matemática de los conceptos.
Aquí, el enfoque ya no está en tipos de estructuras particulares, es decir, categorías, sino en la construcción de conceptos matemáticamente poderosos para resolver problemas importantes. En mi opinión, fue sobre todo Grothendieck y sus seguidores, como Lawvere de forma destacada, quienes se centraron en la invención conceptual y la creatividad. La solución de las conjeturas de Weil por parte de Deligne fue precisamente este tipo de encontrar el concepto correcto de cohomología para abordar las conjeturas de Weil. El concepto de un topos es precisamente la solución conceptual de cómo sería la teoría de conjuntos sin conjuntos concretos, es la resolución dialéctica de incorporar la Teoría de Conjuntos en la matemática estructural.

En mi opinión, ahora estamos en esta tercera fase, pero aún no tenemos una metodología general, ni siquiera la conciencia de la urgencia de comprender el cambio de la Teoría de Categorías a la matemática de conceptos.

Me sentiría honrado si pudieras darme algunas ideas sobre estas ideas.

Todo lo mejor, Guerino.

El mismo sábado 7 de diciembre de 2019 le escribí.

Estimado Guerino:

Estoy de acuerdo con tu visión sobre la evolución de la matemática. Permíteme comentar que desde el siglo pasado la Clasificación de la Matemática fue y sigue siendo principalmente sobre estructuras definidas en conjuntos.

Recuerdo haber hablado con Christopher Soule (el siglo pasado) que la K-Teoría Algebraica era como una pirámide mexicana. ¡Un gran edificio sin techo! Esto se debe a que fue creado para resolver la Conjetura de Serre y que su solución la obtuvieron Quillen y Suslin de forma independiente y sin utilizar la K-Teoría. Pero este hecho no reduce el poder del campo.

Leí hace mucho tiempo todos los artículos de Atiyah donde expresa su punto de vista matemático panorámico. ¡Él expresa que la matemática futura sería la que explicaría el cerebro humano! En algún momento dijo que la innovación en la matemática ocurre cuando los conceptos pasan por el cerebro de muchos matemáticos y se compactan y explican de una manera más clara. Pregunta si el gran edificio matemático se derrumbará y nos aplastará. La respuesta es no. Grandes piezas de matemática serán subsumidas o incorporadas como casos especiales de nuevos conceptos.

Además, recuerdo las palabras de Jacob Palis cuando le hablé en 2001 sobre la Teoría Matemática de la Música. Te comento la anécdota. Él era el presidente de la Unión Matemática Internacional (IMU) en ese momento, y yo era el presidente de la Sociedad Matemática Mexicana. Lo invité al Copacabana Palace para escuchar un concierto. Él no sabía que yo era concertista de piano y, para su sorpresa, en lugar de sentarme con él entre el público, me vio salir al escenario y sentarme al piano. Toqué el Segundo Concierto para piano de Rachmaninoff como solista de la Orquesta Filarmónica de Río de Janeiro. Estaba muy entusiasmado y feliz. Me invitó a cenar, y me dijo la misma idea que te dijo Grothendieck: "¡Esa es la matemática del futuro!". Entonces, podemos ver aquí que nueva matemática se crea por medio de la Música. Del mismo modo que sucedió con la Física que motivó nueva matemática hace mucho tiempo y lo sigue haciendo ahora.

Creo que nuestro muy buen amigo (admirado por nosotros) Fernando Zalamea tendría un punto de vista muy interesante sobre la evolución de la matemática ya que ha pensado y estudiado profundamente tanta matemática.

Recibe mis mejores deseos. Emilio.

El domingo 8 de diciembre de 2019.

Estimado Emilio, muchas gracias por tu respuesta tan inspiradora.
En cuanto a la afirmación de Atiyah: “¡Él expresa que la futura matemática sería la que explicaría el cerebro humano!”. De alguna manera estoy de acuerdo. Eso es lo que yo llamaría la matemática conceptual porque el cerebro está trabajando con conceptos, cada vez más en la matemática también.

En una conferencia reciente sobre creatividad e informática propuse que la creatividad es siempre una extensión de un sistema de signos, una semiótica. Por lo tanto, si las computadoras debiesen volverse creativas, deberíamos tener una representación computarizada/software de los sistemas semióticos.

Por eso, ahora he desarrollado una teoría matemática de la semiótica, que sería el primer paso hacia un software para la creatividad.

Ahora he publicado esta teoría en el Journal of Mathematics and Music bajo el título "Functorial Semiotics for Creativity". Agrego este artículo para ti aquí.

También debo incluir a Fernando en este correo electrónico, así que incluyo mi texto anterior para él, ¿de acuerdo?

Todo lo mejor, Guerino.

También les comparto el siguiente enlace [Za] a una serie de conferencias espectaculares sobre Grothendieck de mi admirado amigo Fernando Zalamea las cuales ofreció en la Facultad de Ciencias de la UNAM en el año 2018. Cómo me hubiera gustado a mí que las hubiese ofrecido cuando yo era estudiante en los años setenta del siglo pasado. Pero eso no hubiera sido posible. Cuando las vean sabrán por qué. También está la publicación de Fernando Zalamea [Z] titulada "Grothendieck: una guía a la obra matemática" que hicimos en las Publicaciones Electrónicas de la Sociedad Matemática Mexicana en el 2018.

Lo que podemos sacar de estas ideas es que se está produciendo una revolución en la matemática que usamos o con la que trabajamos. Se necesita nueva matemática para problemas específicos no resueltos. Guerino Mazzola me comentó hace unos días que ahora está trabajando en una Teoría General de los Conceptos, incluyendo conjuntos, categorías, etc. Puedo considerar esto como uno de los estados del arte en nuestra disciplina. Todo un proyecto desafiante.

Para finalizar este pequeño artículo, les expreso que, para mí, la Matemática es una Bella Arte, la más pura de ellas, que tiene el don de ser la más precisa y la precisión de la Ciencia.

Bibliografía y Referencias

[A] Barbosa, A. Aplicación de Teoría de Grupos en Series Dodecafónicas. Tesis de Licenciatura. Facultad de Ciencias. UNAM. 2022 (Por aparecer).

[AA] Agustín-Aquino, O. A., Junod, J. y Mazzola, G. Computational Counterpoint Worlds, Springer, 2015.

[AA-AV-LP] Agustín-Aquino, O. Arias-Valero, J.S. Lluis-Puebla, E. On First-Species Counterpoint Theory. Journal MusMat. Vol. V. No. 2. pp. 1-40. (2021).
https://musmat.org/wp-content/uploads/2021/12/01-Valero-et-al-V5N2_2021.pdf

[APML] Agustín-Aquino O. A.; du Plessis J; Lluis-Puebla, E; Montiel M. Una introducción a la Teoría de Grupos con aplicaciones en la Teoría Matemática de la Música. Publicaciones Electrónicas. Sociedad Matemática Mexicana. México. 2009.
http://pesmm.org.mx/Serie%20Textos_archivos/T10.pdf

[A-V] Arias-Valero, J, S; Lluis-Puebla, E. A Conceptual Note on Gesture Theory. Journal MusMat Vol V-No.1-June2021. pp. 89-115. (2021)
https://musmat.org/wp-content/uploads/2021/06/08-V5n1-Valero-Puebla.pdf

[L-P] Lluis-Puebla, E. Álgebra Moderna. Publicaciones Electrónicas. Sociedad Matemática Mexicana. 2021 http://pesmm.org.mx/Serie%20Textos_archivos/T22.pdf

[Ll1] Lluis-Puebla, E. Topología Algebraica y sus aplicaciones. Publicaciones Electrónicas. Instituto Mexicano de Ciencias y Humanidades. (2016).
http://imch.org.mx/03_archivos/TopAlgyAplic2016IMCH.pdf

[M] Montiel, M. 4.- El Denotador: Su Estructura, Construcción y Papel en la Teoría Matemática de la Música por Mariana Montiel Hernández. Tesis de Maestría. Dirección General de Estudios de Posgrado. (1999).
https://tesiunam.dgb.unam.mx/F/YKIIR2A3M8NCJUSJVKLHYIL4T14EU2F13Q8QCLTQREIVCFUS9P-19993?func=full-set-set&set_number=755935&set_entry=000014&format=999

[MMP] Mazzola, G; Manone M; Pang Y. Cool Math for Hot Music. Springer. 2016.

[Z] Zalamea, F. Grothendieck: Una Guía a la Obra Matemática. Publicaciones Electrónicas de la SMM. Serie Cursos. Vol. 5 (2018).
https://www.pesmm.org.mx/Serie%20Cursos_archivos/smm2018Cursos5Zal.pdf

[Za] Zalamea, F. https://www.youtube.com/watch?v=kOONDWtdBDg&list=PLiD-IJzweXR9ndmvpYnoqBJwAQFE778zv

Emilio Lluis-Puebla
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias
Universidad Nacional Autónoma de México
www.EmilioLluis.org