Topología Algebraica y sus aplicaciones.

Dr. Emilio Lluis-Puebla

- Problemas matemáticos
- Método para resolverlos
- Teoría Matemática

Henri Poincaré
(1854-1912)

Homología

Λ un anillo y $\{M_i\}$ una familia de Λ-módulos

$\ldots \rightarrow M_{i+1} \rightarrow M_i \rightarrow M_{i-1} \rightarrow \ldots$

$f_{n+1}: M_{n+1} \rightarrow M_n \qquad f_n: M_n \rightarrow M_{n-1}$

semiexacta $\qquad f_i \circ f_{i+1} = 0$

Exacta si $\quad \operatorname{im} f_i = \ker f_{i-1}$

$$0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow N \rightarrow M \rightarrow M/N \rightarrow 0$$

$$\{C_n\}, \quad \{\partial_n : C_n \to C_{n-1}\}, \quad \partial_n \partial_{n+1} = 0.$$

Un *complejo de cadenas* o *cadena* sobre Λ es una pareja $C=\{C_n, \partial_n\}$ y la escribimos como sigue:

$$C: \ \ldots \to C_{n+1} \to C_n \to C_{n-1} \to \ldots$$

Definición:

Sean $C=\{C_n, \partial_n\}$, $D=\{D_n, \partial_n\}$. Morfismo de cadenas

$$\varphi: C \to D \qquad \{\varphi_n: C_n \to D_n\}$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
C: & \ldots\to & C_{n+1} & \to & C_n & \to & C_{n-1} & \to & \ldots \\
\varphi\downarrow & & \varphi_{n+1}\downarrow & & \varphi_n\downarrow & & \varphi_{n-1}\downarrow & & \\
D: & \ldots\to & D_{n+1} & \to & D_n & \to & D_{n-1} & \to & \ldots
\end{array}$$

Complejo de cadena, 1900, Poincaré

$$\partial_n: C_n \to C_{n-1}$$

$$\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$$

50 años

$$C: \; \ldots \to C_{n+1} \to C_n \to C_{n-1} \to \ldots$$

$$\partial_{n+1}: C_{n+1} \to C_n \qquad \partial_n: C_n \to C_{n-1}$$

El módulo de homología de grado **n de C, denotado con $H_n(C)$ es el cociente**

$$H_n(C) = \ker \partial_n / \operatorname{im} \partial_{n+1}$$

Asociar a una cadena C un módulo graduado $H_*(C)=\{H_n(C)\}$ que llamaremos *homología de la cadena* C.

Un morfismo de cadenas $\varphi : C \rightarrow D$ induce un morfismo (bien definido, de grado 0)

φ_*: $H_*(C) \rightarrow H_*(D)$ de módulos graduados.

Luego, H_*(_) es un funtor covariante de la categoría de complejos de cadenas a la categoría de Λ-módulos graduados.

$\{C^n\}$, obtendremos conceptos duales; hablaremos de *cocadenas*, de *cohomología de una cocadena* etc.

C,D,E cadenas en CC. La categoría de complejos de cadenas es abeliana; luego, podemos formar sucesiones exactas cortas de objetos de CC,

$$0 \to C \to D \to E \to 0$$

TEOREMA. Sea $0 \to C \to D \to E \to 0$ una sucesión exacta corta de cadenas. Entonces existe un homomorfismo $\kappa_n : H_n(E) \to H_{n-1}(C)$ para cada $n \in Z$ tal que la siguiente sucesión es exacta:

$$\ldots \to H_n(C) \to H_n(D) \to H_n(E) \to H_{n-1}(C) \to H_{n-1}(D) \to H_{n-1}(E) \to \ldots .$$

En 1941, Hurewicz, por vez primera combinó homomorfismos conocidos en cohomología en una sucesión de la forma

$$\ldots \to H^{n-1}(X) \to H^{n-1}(Y) \to H^{n-1}(X\text{-}Y) \to H^{n}(X) \to H^{n}(Y) \to H^{n}(X\text{-}Y) \to \ldots$$

Eckmann, Ehresmann y Feldbau.

Hasta 1947 en que Kelley y Pitcher definieron el término *sucesión exacta.*

***Álgebra Homológica.* Cartan y Eilenberg 1956.**

Whitney 1938 producto tensorial de grupos conmutativos.

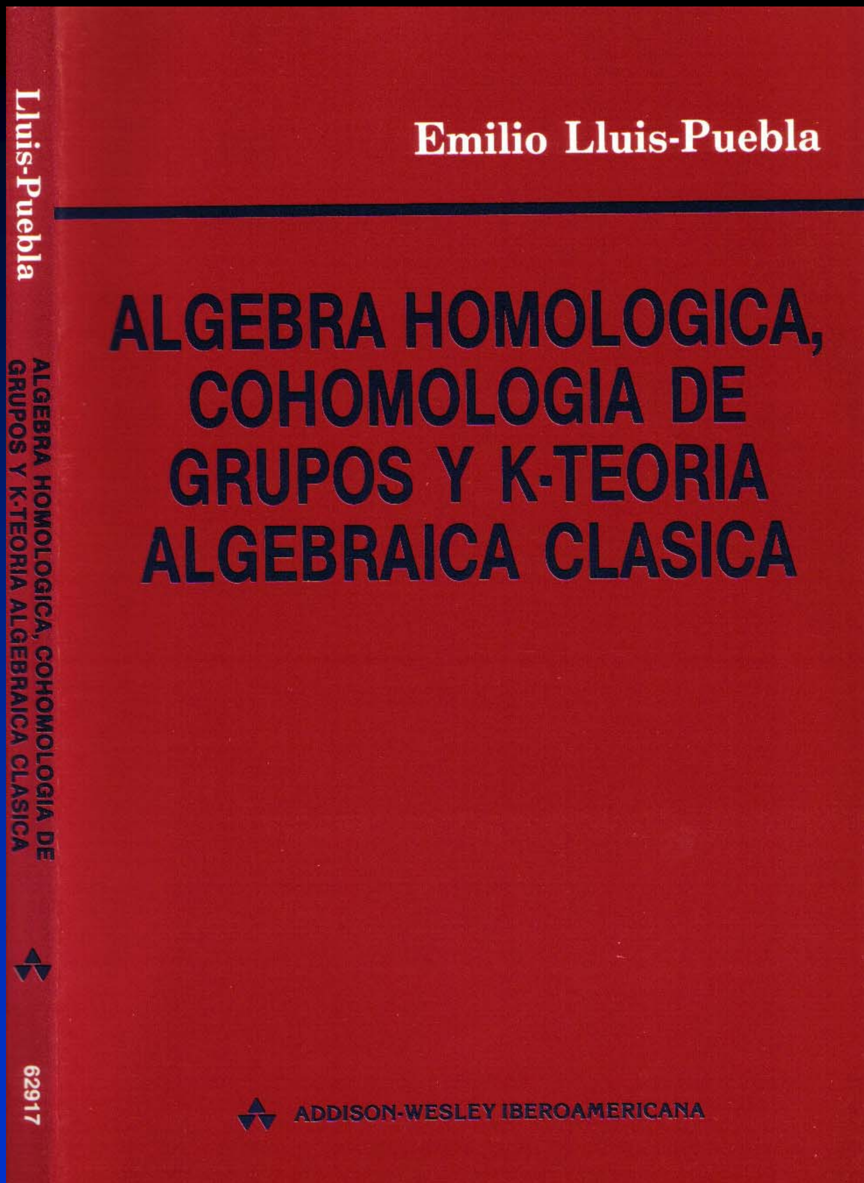
Ext(G,N); Hom(G,N), Ext(G,N) o G O N donde O era la notación para el producto tensorial actual.

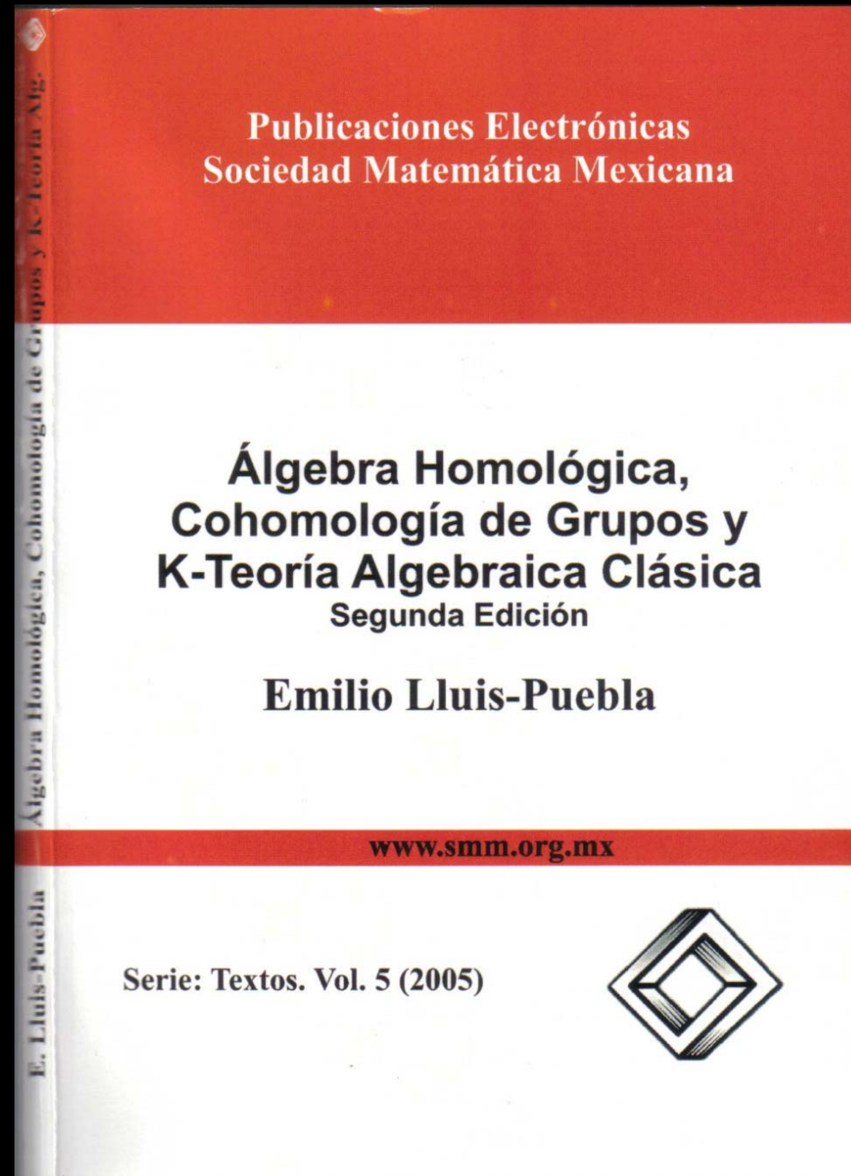
Funtor, Categoría 1945. Morfismo.

Módulos proyectivos e inyectivos.

Funtores derivados. Ext^n_L **y** $\mathrm{Tor}_n^L(M,N)$.

Resolución libre proyectiva de Hopf en 1945.





www.pesmm.org.mx

Homotopía

homeomorfismo

Teoría de Homotopía 1930

$I^n=\{(x_1,\ldots,x_n)\in R^n \mid 0\leq x_i \leq 1\}$ el *cubo de dimensión n*.

$\Delta^{n-1}=\{(x_1,\ldots,x_n)\in R^n \mid 0\leq x_i \leq 1$ y $\sum x_i =1\}$ el *simplejo de dimensión n.*

$B^n =\{x\in R^n \mid \|x\| \leq 1\}$ la *bola de dimensión n.*

Interior de I^n es int $I^n=\{(x_1,\ldots,x_n) \mid 0<x_i<1\}$.

Frontera de I^n es $\partial I^n=I^n-\text{int } I^n$.

Denotemos con $\tilde{I}^n=\{(x_1,\ldots,x_n)\in R^n \mid -1\leq x_i\leq 1\}$.

$D=B^2$ el *disco en el plano* R^2.

$S^{n-1}=\{x\in R^n \mid \|x\|=1\}$ la *esfera de dimensión n-1.*

Sean U y V subespacios de un espacio topológico X , decimos que U *se puede deformar* en V si existe una función continua

$F:U\times I\to X$ tal que $F(u,0)=u$, $\forall u\in U$, $\forall t\in I$, $u\mapsto F(u,t)$

es un homeomorfismo de U con un subespacio de X y cuando t=1,este subespacio es V.

F se llama *isotopía* de U en V.

Sean X,Y espacios topológicos. Una *homotopía* entre X y Y es una función continua $F:X\times I\rightarrow Y$. Para cada $t\in I$ se tiene una función $F_t: X\rightarrow Y$ dada por $F_t(x)=F(x,t)\ \forall x\in X$.

En 1911 Brouwer define en forma general el concepto de homotopía entre dos funciones continuas.

Hasta 1930 se utilizó principalmente como una herramienta en las demostraciones de los teoremas en homología.

Dos funciones continuas $f,g:X\to Y$ son *homotópicas* si existe una homotopía $F:X\times I\to Y$ tal que $F_0=f$ y $F_1=g$.

En otras palabras, f puede deformarse continuamente en g a través de F_t.

Si f es homotópica a g escribiremos $f\sim g$ o bien $F:f\sim g$.

$\sim$ es una relación de equivalencia.

Definición. Sea $A \subset X$ un subespacio de un espacio topológico X. (X,A) denotará una pareja de espacios si $A \subset X$. Una *función continua* entre parejas $f:(X,A) \to (Y,B)$ es una función continua $f:X \to Y$ tal que $f(A) \subset B$.

Denotaremos con $\mathrm{Top}^{(2)}$ la categoría de parejas y funciones continuas de parejas. Si identificamos X con $(X,\emptyset)$ y $f:X \to Y$ con el correspondiente $(X,\emptyset) \to (Y,\emptyset)$ obtenemos un funtor $\mathrm{Top} \to \mathrm{Top}^{(2)}$.

Así, identificaremos a Top con una subcategoría plena de $\mathrm{Top}^{(2)}$.

Hemos partido el conjunto $C(X,Y)$ de funciones continuas $f:X\to Y$ en clases de equivalencia bajo la relación $\sim$. Llamaremos *clases de homotopía* a dichas clases de equivalencia y el conjunto de clases de homotopía de X en Y lo denotaremos con $[X,Y]$.

El concepto de *homotopía* nos da lugar a una clasificación de los espacios topológicos más gruesa que la del concepto de homeomorfismo pero que es menos difícil de manejar. También denotaremos con $[f]$ a la clase de homotopía de f y con $\mathrm{Top}_{\mathbf{h}}$ la categoría Top con morfismos $\mathrm{Mor}(X,Y)=[X,Y]$.

Espacios punteados (X,x_0) o $(X,*)$ donde x_0 o $*$

Forman una categoría Top$*$ cuyos objetos son los espacios punteados (X,x_0) y cuyos morfismos son funciones continuas $f:(X,x_0)\to(Y,y_0)$ tales que $f:X\to Y$ es continua y $f(x_0)=y_0$.

Una *homotopía* entre dos de tales morfismos f,g es, por definición, una función continua

$$F:(X,x_0)\times I\to(Y,y_0) \text{ tal que}$$

$F(x,0)=f(x), F(x,1)=g(x)$ y $F(x_0,t)=y_0\ \forall t\in I$.

F define una relación de equivalencia, [f] denotará la clase de equivalencia de f y $[(X,x_0);(Y,y_0)]$, o simplemente $[X;Y]$, denotarán el conjunto de clases de equivalencia.

Así tenemos una categoría Top_h* cuyos objetos son los de $\mathrm{Top}*$ y cuyos morfismos son

$$\mathrm{Mor}((X,x_0),(Y,y_0))=[(X,x_0);(Y,y_0)].$$

Denotemos con $\pi_n(X,x_0)$ para $n\geq 0$, el conjunto de clases de homotopía $[(I^n,\partial I^n);(X,x_0)]$ donde para $n=0$, $(I^0,\partial I^0)=(x_0,\emptyset)$.

Existe una correspondencia biunívoca entre

$$\pi_n(X,x_0) \text{ y } [(S^n,s_0);(X,x_0)]$$

donde s_0 denota el polo norte de S^n .

Consideremos $\pi_1(X,x_0)=[(S^1,s_0);(X,x_0)]$.

Un representante de una clase de este conjunto se llama *lazo* y puede considerarse como una función continua $\ell:[a,b]\rightarrow X$ tal que $\ell(a)=\ell(b)=x_0$.

Definamos una operación binaria en $\pi_1(X,x_0)$ mediante la yuxtaposición $\ell=\ell_1\circ \ell_2$ de dos lazos

$[\ell_1 \circ \ell_2]$ depende solamente de las clases $[\ell_1]$ y $[\ell_2]$ y si $[\ell_1 \circ \ell_2] = [\ell_1] \circ [\ell_2]$ se tiene definida una estructura de grupo no conmutativo en general.

El grupo $(\pi_1(X,x_0),\circ)$ se llama *grupo fundamental* de X en x_0.

Poincaré 1895, $[(S^1,s_0);(X,x_0)]$, grupo no conmutativo.

$[(S^n,s_0);(X,x_0)]$, Cech en 1932, quien mencionó que Dehn ya había pensado en ella, pero que no la publicó.

$\pi_n(X,x_0)$ para $n \geq 2$ es conmutativo. Hopf entre 1926 y 1935 sobre las funciones continuas en esferas comenzó la Teoría de Homotopía.

$\pi_1(X,x_0)$ depende del punto base x_0, así que, dada una función continua $f:(X,x_0)\to(Y,y_0)$ definamos una función

$$\pi_1(f)=f_*:\pi_1(X,x_0)\to\pi_1(Y,y_0) \text{ mediante}$$

$f_*([\ell])=[f\circ\ell]$.

$f\circ\ell$ es un lazo y depende solamente de $[\ell]$ y por lo tanto f_* está bien definido.

Es inmediato verificar que π_1 es un funtor covariante $\pi_1:\mathrm{Top}*\to\mathrm{Gr}$.

Teorema. Si $f:(X,x_0)\rightarrow(Y,y_0)$ una equivalencia homotópica entonces

$$\pi_1(f)=f_*:\pi_1(X,x_0)\rightarrow\pi_1(Y,y_0)$$

es un isomorfismo.

Un espacio punteado (X,x_0) es *contráctil* si la inclusión $i:(\{x_0\},x_0)\rightarrow(X,x_0)$ es una equivalencia homotópica.

Las homotopías en $\pi_1(X,x_0)$ son homotopías de I relativas a 0 y 1.

Se define una homotopía entre dos funciones continuas de parejas $f,g:(X,A)\to(Y,B)$, denotada $f\sim g$ si existe una función continua

$$F:(X\times I,A\times I)\to(Y,B) \text{ tal que } F(x,0)=f(x),$$
$$F(x,1)=g(x).$$

F define una relación de equivalencia y $[(X,A);(Y,B)]$ denotará el conjunto de clases de homotopía.

Así tenemos una categoría Top_h^2 cuyos objetos son los de Top^2 y cuyos morfismos están dados por

$$Mor((X,A),(Y,B))=[(X,A);(Y,B)].$$

Diremos que las parejas de espacios (X,A) y (Y,B) son del mismo tipo de homotopía si existen funciones continuas $f:(X,A)\to(Y,B)$ y $g:(Y,B)\to(X,A)$ tales que $g\circ f\sim 1_{(X,A)}$ y $f\circ g\sim 1_{(Y,B)}$.

En tal caso decimos que f es una equivalencia homotópica y la denotamos con $(X,A)\sim(Y,B)$. Casi todos los invariantes de la Topología Algebraica son invariantes del tipo de homotopía y no solamente del concepto de homeomorfismo. Este concepto fue definido por Hurewicz en 1935.

Proposición. Si (X,x_0) es contráctil entonces $\pi_1(X,x_0)=0$.

Por ejemplo, la bola (B^n,s) es contráctil $\forall n\geq 0, s\in B^n$ y por lo tanto $\pi_1(B^n,s)=0$. También $\pi_1(R^n,x)=0$ $\forall n\geq 0$, $x\in R^n$.

Sea $A\subset X$ un subespacio, veremos cómo relacionar $\pi_n(A,*)$ con $\pi_n(X,*)$. Esto se hace definiendo nuevos grupos $\pi_n(X,A,*)$ que miden la discrepancia.

Existe una sucesión exacta

$$\pi_n(A,*)\to\pi_n(X,*)\to\pi_n(X,A,*)\to$$

$$\to\pi_n(A,*)\to\pi_{n-1}(X,*)\to\pi_{n-1}(X,A,*)$$

$$\to\ldots\ldots\to\pi_0(A,*)\to\pi_0(X,*)$$

llamada *sucesión exacta larga de homotopía*.

J.H.C. Whitehead fue el primero en considerar esta sucesión en 1945 y probó que era exacta.

K-Teoría Algebraica.

- Monoide conmutativo sin divisores de cero podía considerarse dentro del grupo conmutativo que genera.
- 1957 Grothendieck
- Asociarle a un monoide conmutativo **M**, un grupo conmutativo **K**(**M**), único salvo isomorfismo, y un homomorfismo canónico definido de monoides $\varphi: \mathbf{M} \to \mathbf{K}(\mathbf{M})$ tal que para cualquier grupo conmutativo **G**, cualquier homomorfismo de monoides $\mathbf{f}: \mathbf{M} \to \mathbf{G}$ se factoriza en forma única como

$$\mathbf{f}: \mathbf{M} \to \mathbf{K}(\mathbf{M}) \to \mathbf{G}.$$

- El grupo de Grothendieck 1958.

- 1959 Atiyah y Hirzebruch.

  Aplicaron la construcción al monoide aditivo de las clases de isomorfismo de haces vectoriales complejos con espacio base un CW-complejo **X**.

- Grupo de Grothendieck $\mathbf{K^0(X)}$. $\mathbf{K^{-n}(X)}$.

- La periodicidad de Bott $\mathbf{K^n(X) \approx K^{n+2}(X)}$ y es utilizada para definir $\mathbf{K^n(X)}$ para $\mathbf{n \in Z}$. K-Teoría Topológica.

- Teorema de Atiyah-Singer

- Resultado de Serre, Swan, 1962. Traducir conceptos topológicos en algebraicos.

- La categoría de los haces vectoriales sobre **X** es equivalente a la categoría de los Λ-módulos proyectivos finitamente generados donde Λ**=C(X)**.

- Definición de **K(**Λ**)** ó $\mathbf{K_0}(\Lambda)$ que tiene sentido para cualquier anillo Λ, como el grupo de Grothendieck de la categoría de los Λ-módulos proyectivos finitamente generados.

- $\mathbf{K_0}(\Lambda)$ Λ-módulos proyectivos.

- Problema de Serre, 1955.
- ¿son libres todos los módulos proyectivos finitamente generados sobre $\mathbf{k[t_1,t_2, ... \, t_n]}$?

- Quillen y Suslin.
- Conjetura de Serre. K-Teoría Algebraica.

Emilio Lluis-Puebla y Hymann Bass

- En 1964, Hymann Bass definió el funtor K_1
- Whitehead en 1939 y 1950. $K_1(Z[G])$
- $K_1(\Lambda) = GL(\Lambda)/[GL(\Lambda),GL(\Lambda)] = H_1(GL(\Lambda),Z)$
- Problema del subgrupo congruente en 1967 Bass-Milnor-Serre para el grupo especial lineal de un anillo de enteros en un campo numérico.

- Emilio Lluis-Puebla y John Milnor

- En 1969, Milnor definió el funtor K_2 como el núcleo del epimorfismo del grupo de Steinberg $St(\Lambda)$ en el de las matrices elementales $E(\Lambda)$; i.e. $\ker\{St(\Lambda) \to E(\Lambda)\}$

- Kervaire en 1970 prueba que $St(\Lambda)$ resulta ser la extensión central universal de $E(\Lambda)$, y por lo tanto $K_2(\Lambda)$ puede describirse como el multiplicador de Schur del grupo perfecto $E(\Lambda)$.

- $K_2(\Lambda)=H_2(E(\Lambda),Z)$

- Matsumoto calculó K_2 de un campo
- Bass y Tate para describir K_2 de campos numéricos.
- La K-Teoría Algebraica es un fenómeno multidisciplinario dentro de la Matemática.

Para definir los grupos de K-teoría superior necesitamos de la siguiente construcción debida a Quillen:

TEOREMA. Sea X un CW complejo conexo con punto base p. Sea N un subgrupo normal perfecto de $\pi_1(X,p)$. Entonces existe un espacio X^+ y una transformación $f\colon X \to X^+$ tal que

(i) $\pi_1(f)$ induce un isomorfismo $\pi_1(X^+,p) \cong \pi_1(X,p)/N$;

(ii) para cualquier $\pi_1(X^+,p)$-módulo A, f induce un isomorfismo $H_*(X; f^{-1}A) \cong H_*(X^+,A)$;

(iii) (X^+,f) está determinado, excepto por equivalencia homotópica por (i) y (ii).

Este teorema se conoce como construcción + de Quillen, y fue inspirada por la necesidad de encontrar una interpretación topológica del funtor K_2 de Milnor.

- Quillen definió, para $i \geq 1$, $K_i\Lambda = \pi_i(BGL\Lambda^+)$.

- Como en los casos i=1,2, K_i es un funtor covariante de la categoría de anillos a la categoría de grupos.

Tomemos **X=BGL**Λ (el espacio clasificante de **GL**Λ) y **N=E**Λ el grupo generado por las matrices elementales el cual es un subgrupo normal perfecto de **GL**$\Lambda \cong$ $\boldsymbol{\pi_1(BGL\Lambda)}$.

Entonces, por la construcción **+** de Quillen, existe un espacio **BGL**$\boldsymbol{\Lambda^+}$ que satisface $\boldsymbol{\pi_1(BGL\Lambda^+) \cong \pi_1(BGL\Lambda)/E\Lambda \cong GL\Lambda/E\Lambda}$, el cual se definió como $\boldsymbol{K_1\Lambda}$.

También podemos formar $\mathbf{BE\Lambda^+}$ con respecto a $\mathbf{E\Lambda}$. Por el teorema del isomorfismo de Hurewicz, $H_2(\mathbf{BE\Lambda^+;Z})\cong\pi_2(\mathbf{BE\Lambda^+})$.

Además, puesto que $\mathbf{BE\Lambda^+}$ es cubriente universal de $\mathbf{BGL\Lambda^+}$ se tiene que $\pi_2(\mathbf{BE\Lambda^+}) \cong \pi_2(\mathbf{BGL\Lambda^+})$.

Así podemos concluir que $\pi_2(\mathbf{BGL\Lambda^+})\cong\pi_2(\mathbf{BE\Lambda^+})\cong \mathbf{H_2(BE\Lambda^+;Z)} \cong \mathbf{H_2(BE\Lambda;Z)} \cong \mathbf{H_2(E\Lambda;Z)}$, el cual se definió como $\mathbf{K_2}\Lambda$.

Si consideramos la sucesión exacta (i.e. la extensión central universal)

$$\mathbf{1 \to K_2\Lambda \to St\Lambda \to E\Lambda \to 1},$$

donde $\mathbf{St\Lambda}$ es el grupo de Steinberg, sabemos que $\mathbf{BK_2\Lambda^+ \to BSt\Lambda^+ \to BE\Lambda^+}$ es una fibración.

Su sucesión larga de homotopía asociada es

$$\mathbf{\ldots \to \pi_4(BK_2\Lambda^+) \to \pi_4(BSt\Lambda^+) \to \pi_4(BE\Lambda^+) \to \ldots}$$

$$\mathbf{\ldots \to \pi_1(BK_2\Lambda^+) \to \pi_1(BSt\Lambda^+) \to \pi_1(BE\Lambda^+)}.$$

Como $\mathbf{BK_2\Lambda^+ \cong BK_2\Lambda}$ es un espacio de Eilenberg-Mac Lane $\mathbf{K(K_2\Lambda,1)}$, $\mathbf{\pi_i(BK_2\Lambda) = 0}$ para $\mathbf{i > 1}$. Por lo tanto, $\mathbf{\pi_j(BSt\Lambda^+) \cong \pi_j(BE\Lambda^+)}$ para $\mathbf{j \geq 3}$, y podemos concluir que $\mathbf{\pi_3(BGL\Lambda^+) \cong \pi_3(BE\Lambda^+) \cong \pi_3(BSt\Lambda^+) \cong H_3(BSt\Lambda^+) \cong H_3(BSt\Lambda) \cong H_3(St\Lambda)}$, donde $\mathbf{\pi_3(BSt\Lambda^+) \cong H_3(BSt\Lambda^+)}$ es el isomorfismo de Hurewicz y $\mathbf{St\Lambda}$ es el grupo de Steinberg de Λ.

Por un lado, la K-Teoría Algebraica introduce métodos topológicos para definir invariantes algebraicos, tales como los K-grupos de anillos de orden superior.

Por otro lado, proporciona una forma de traducir conceptos algebraicos en conceptos topológicos.

La K-Teoría Algebraica estudia las propiedades de los grupos $K_i(\Lambda)$, construidos a partir de un anillo Λ.

- Cálculo de los grupos K_i para diversos anillos.
- Bass, Milnor, Karoubi, Quillen, Weibel, Loday, Soulé, Snaith,
- Bass demostró en 1968 que $K_1Z \cong Z/2$ y que $K_1(Z/p^2)=Z\oplus Z/p-1$, p primo diferente de 2.
- Milnor demostró en 1971 que $K_2Z \cong Z/2$ y que $K_2(Z/p^2)=0$ para un primo p diferente de 2.
- En 1972 Quillen calculó la K-teoría algebraica de un campo finito.

- Lee y Sczarba encontraron en 1976 que $K_3Z \cong Z/48$.
- Sea R el anillo de enteros de un campo numérico e I un ideal no trivial. El calcular $K_i(R/I)$ para anillos finitos es un problema abierto para $i \geq 3$.
- Evens-Friedlander
- Aisbett, Lluis-Puebla, Snaith y Soulé

MEMOIRS OF THE AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY Number 329 · September 1985

Number 329

Janet E. Aisbett, Emilio Lluis-Puebla and Victor Snaith

(with an appendix by Christophe Soulé)

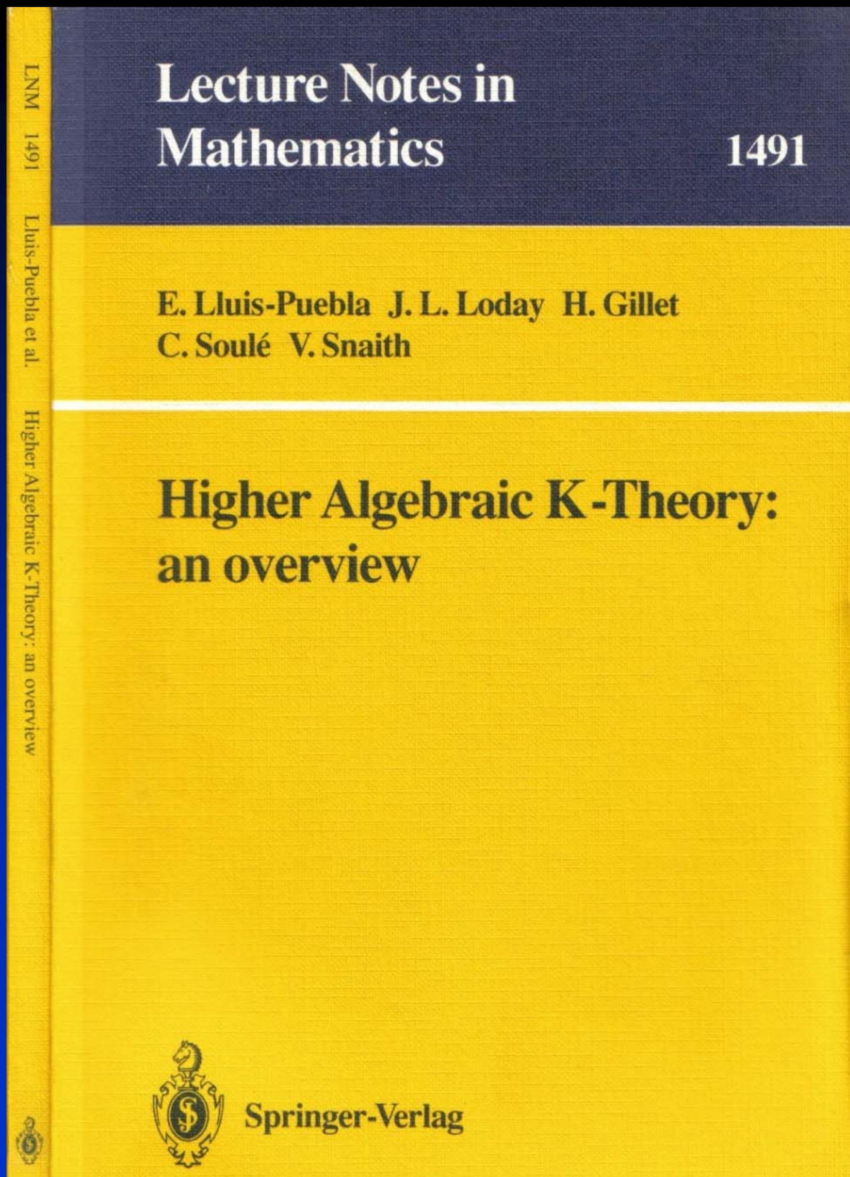
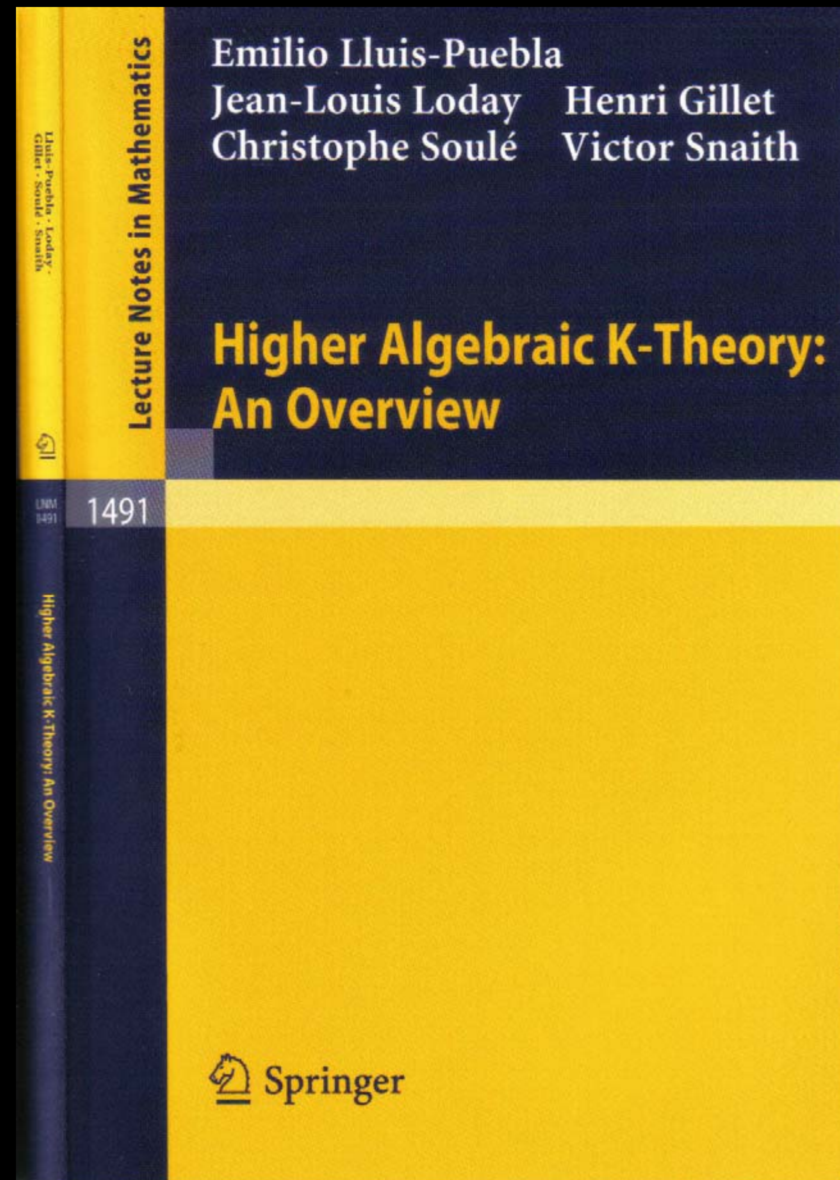
On $K_*(Z/n)$ and $K_*(\mathbb{F}_q[t]/(t^2))$

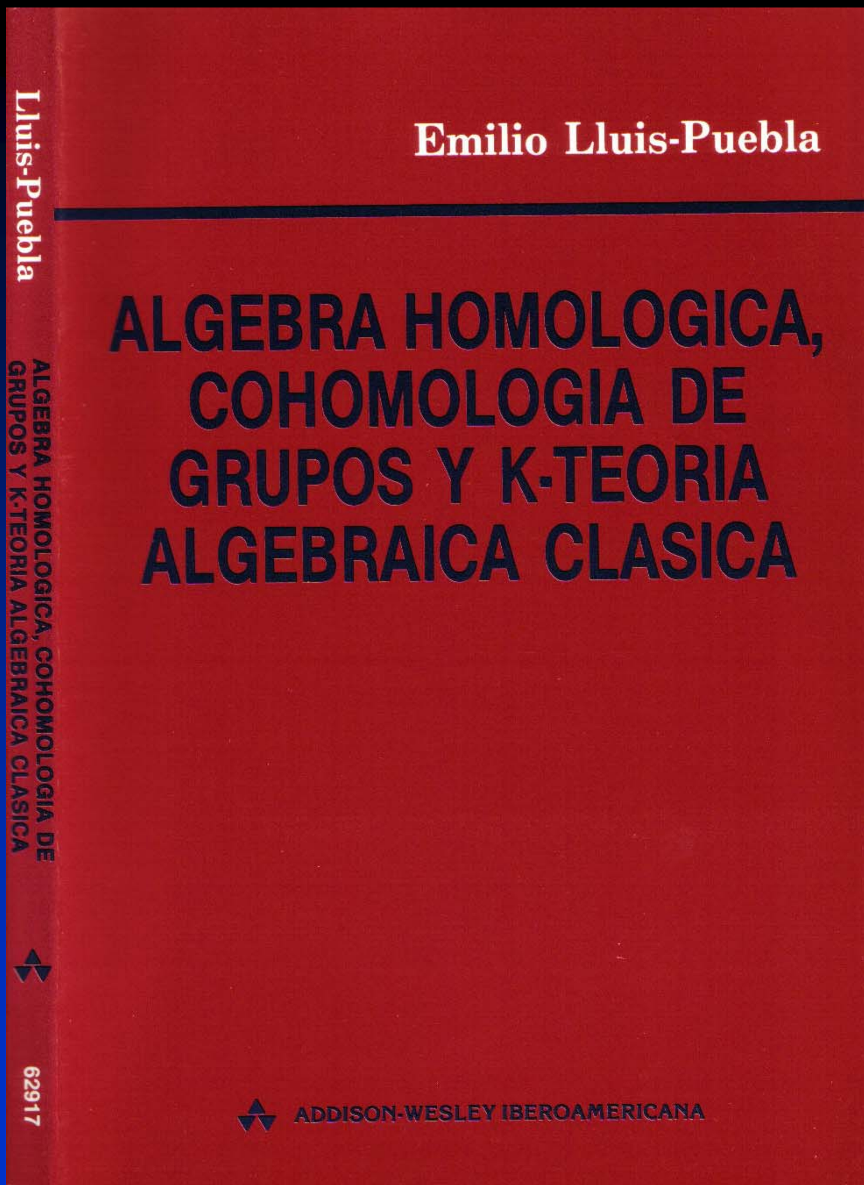
Memoirs

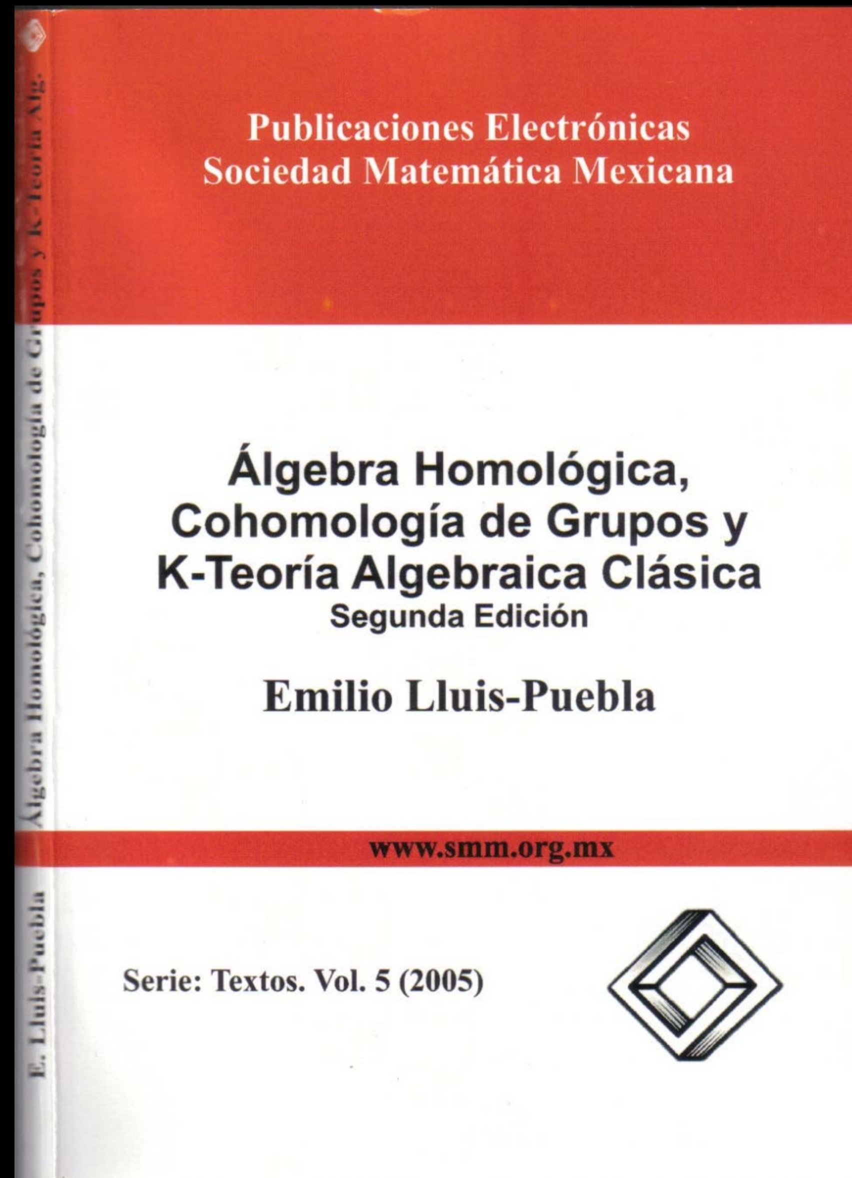
of the American Mathematical Society

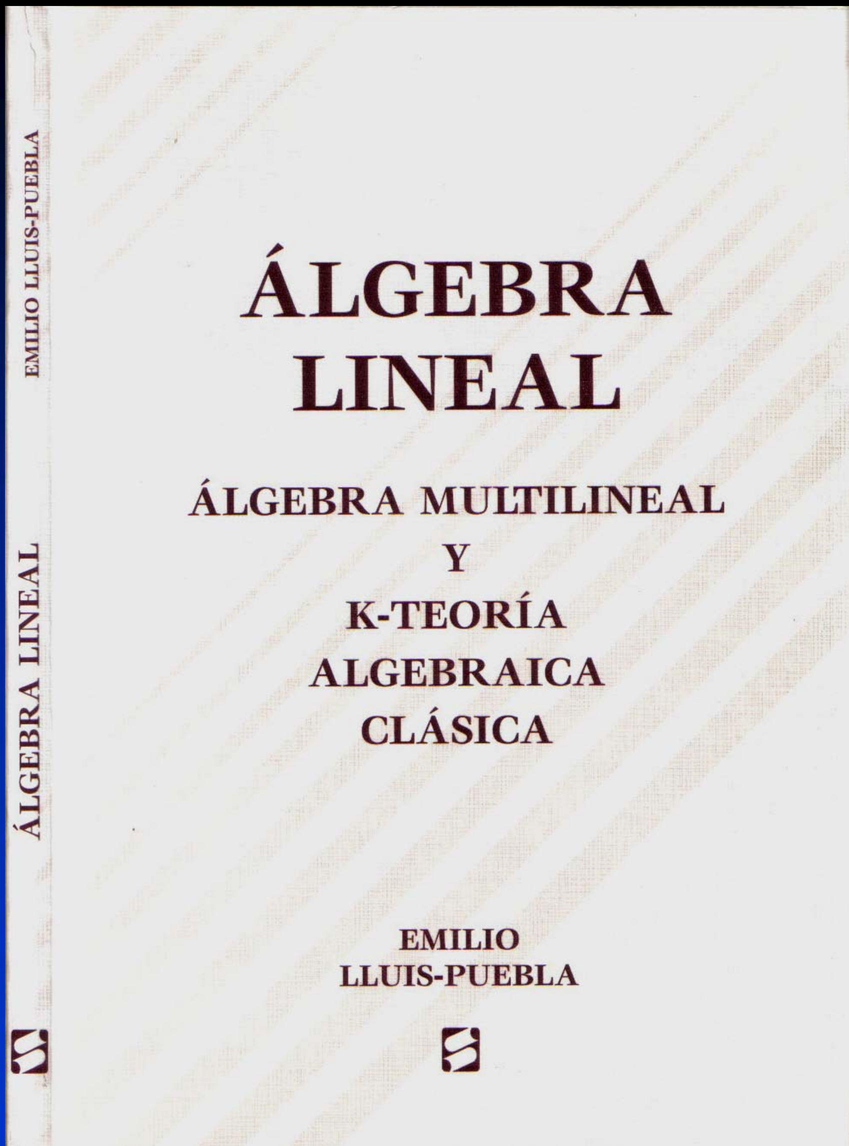
Providence · Rhode Island · USA

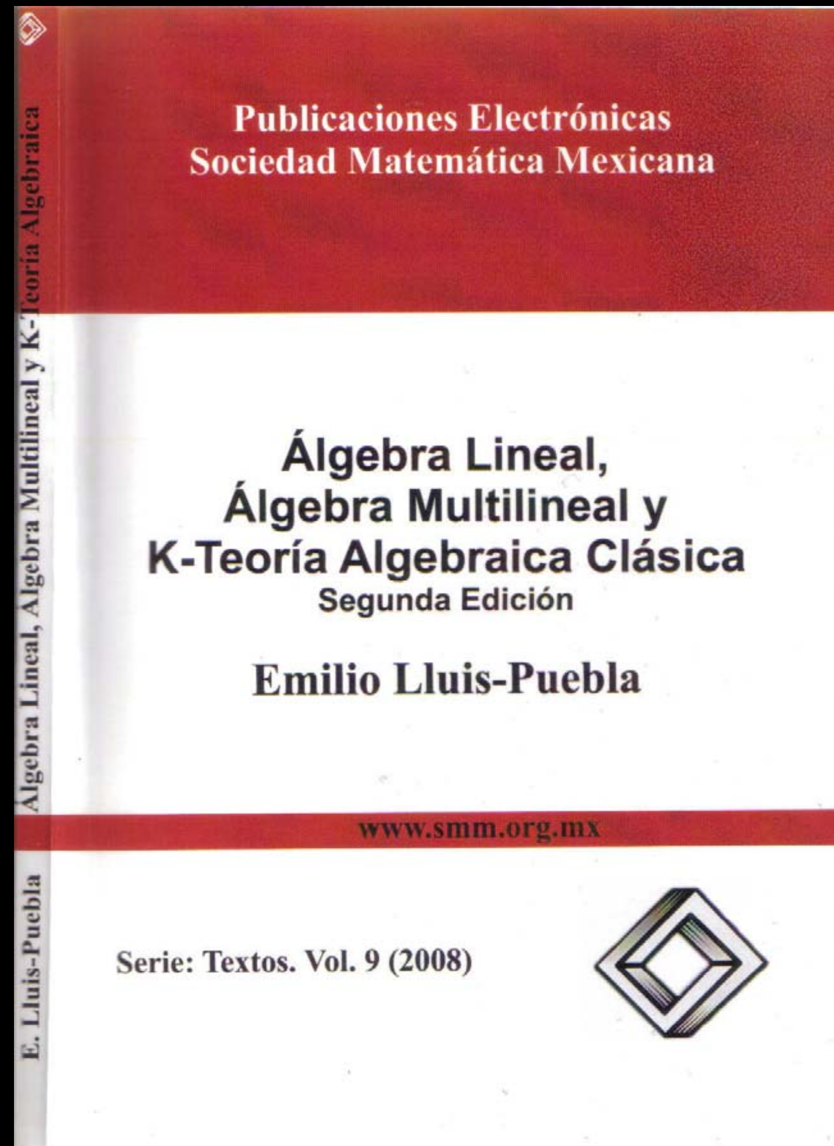
September 1985 · Volume 57 · Number 329 (first of 6 numbers) · ISSN 0065-9266


Lecture Notes in
Mathematics
1491
E. Lluis-Puebla J. L. Loday H. Gillet
C. Soulé V. Snaith
Higher Algebraic K-Theory:
an overview
Springer-Verlag
LNM 1491 Lluis-Puebla et al. Higher Algebraic K-Theory: an overview

Emilio Lluis-Puebla
Jean-Louis Loday
Henri Gillet
Christophe Soulé
Victor Snaith
Lecture Notes in Mathematics
Higher Algebraic K-Theory:
An Overview
1491
Springer
Lluis-Puebla · Loday · Gillet · Soulé · Snaith
LNM 1491
Higher Algebraic K-Theory: An Overview


Lluis-Puebla
ALGEBRA HOMOLOGICA, COHOMOLOGIA DE GRUPOS Y K-TEORIA ALGEBRAICA CLASICA
62917
Emilio Lluis-Puebla
ALGEBRA HOMOLOGICA, COHOMOLOGIA DE GRUPOS Y K-TEORIA ALGEBRAICA CLASICA
ADDISON-WESLEY IBEROAMERICANA


E. Lluis-Puebla
Álgebra Homológica, Cohomología de Grupos y K-Teoría Alg.
Publicaciones Electrónicas
Sociedad Matemática Mexicana
Álgebra Homológica, Cohomología de Grupos y K-Teoría Algebraica Clásica
Segunda Edición
Emilio Lluis-Puebla
www.smm.org.mx
Serie: Textos. Vol. 5 (2005)


EMILIO LLUIS-PUEBLA
ÁLGEBRA LINEAL
ÁLGEBRA
LINEAL
ÁLGEBRA MULTILINEAL
Y
K-TEORÍA
ALGEBRAICA
CLÁSICA
EMILIO
LLUIS-PUEBLA


Álgebra Lineal, Álgebra Multilineal y K-Teoría Algebraica
E. Lluis-Puebla
Publicaciones Electrónicas
Sociedad Matemática Mexicana
Álgebra Lineal,
Álgebra Multilineal y
K-Teoría Algebraica Clásica
Segunda Edición
Emilio Lluis-Puebla
www.smm.org.mx
Serie: Textos. Vol. 9 (2008)

- Conjetura de Milnor

  Vladimir Voevodsky

- p distinto de dos

  Conjetura de Bloch-Kato

  Voevodsky y Rost.

- n=2 mod 4 los grupos finitos $K_n(Z)$ son cíclicos para n<20,000.

- Medalla Fields

  Serre (1954),

  Milnor (1962),

  Grothendieck (1966),

  Atiyah (1966),

  Quillen (1978),

  Connes (1982) y

  Voevodsky (2002).

Teoría Matemática de la Música

- "musicologie“
- "musikwissenschaft" que significa "ciencia de la Música"
- Uno de los propósitos de la Teoría Matemática de la Música es la de establecer un marco conceptual estable, definiendo los conceptos en una forma precisa.
- Musicología Matemática

- Teoría Matemática de la Música de Guerino Mazzola
- Una de las principales metas de la Teoría Matemática de la Música es la de desarrollar un marco científico para la Musicología.

- Guerino Mazzola y Emilio Lluis-Puebla

- La Teoría Matemática de la Música está basada en las Teorías de Módulos y Categorías, en la Topología Algebraica y Combinatoria, en la Geometría Algebraica y Teoría de Representaciones, entre otras.
- Su propósito es el de describir las estructuras musicales.

- Mazzola "Status Quo 2000“, modelo teórico geométrico de ese tiempo evolucionó a un marco que es apropiado para muchos problemas musicales.

- Este nuevo marco está basado en Matemática más sofisticada como la Teoría de Topos.

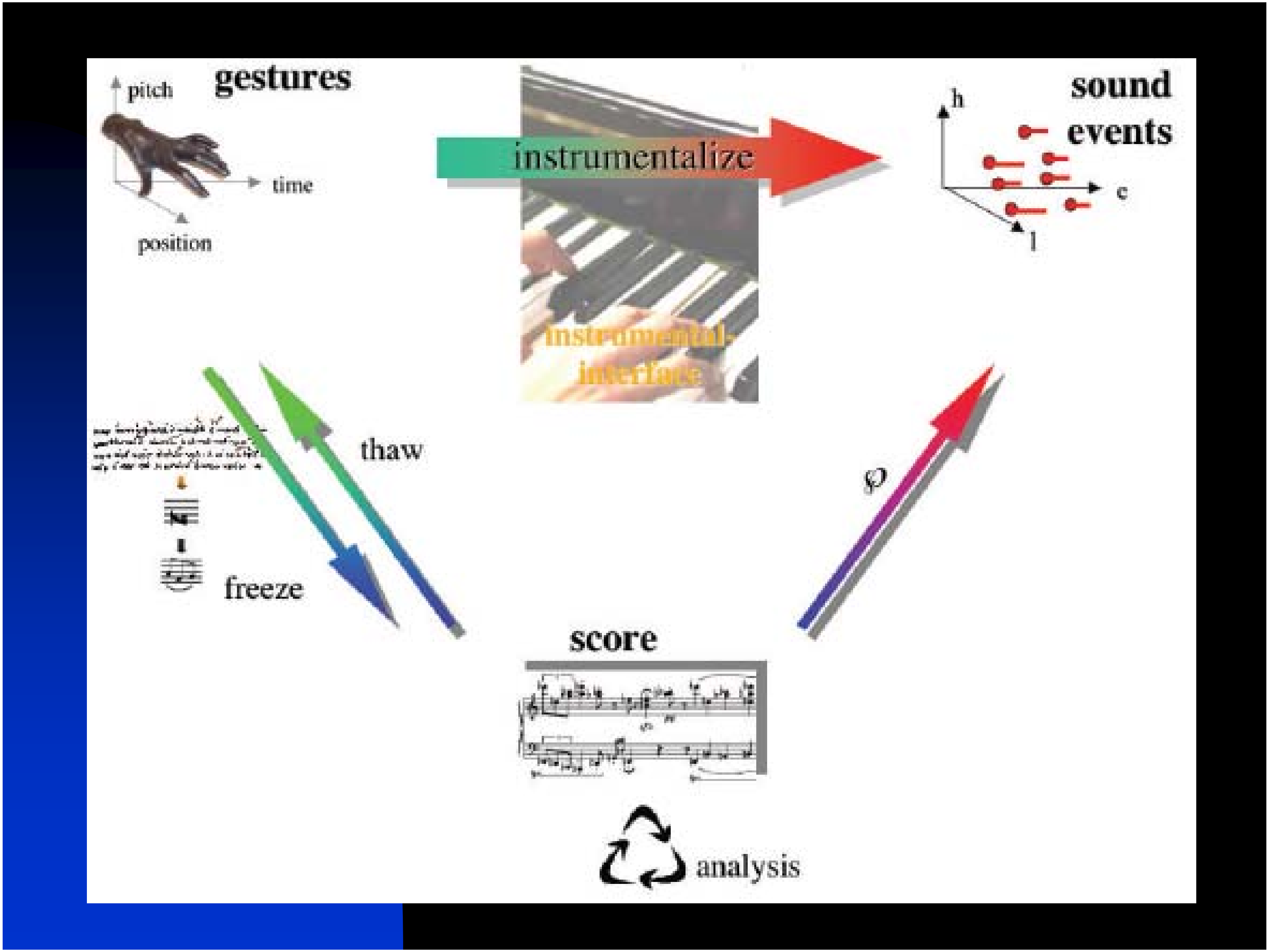
- Dentro de este tema se realiza matemática de alto nivel, no solamente aplicaciones, es decir, se hace matemática nueva, se prueban resultados matemáticos con los objetos definidos.

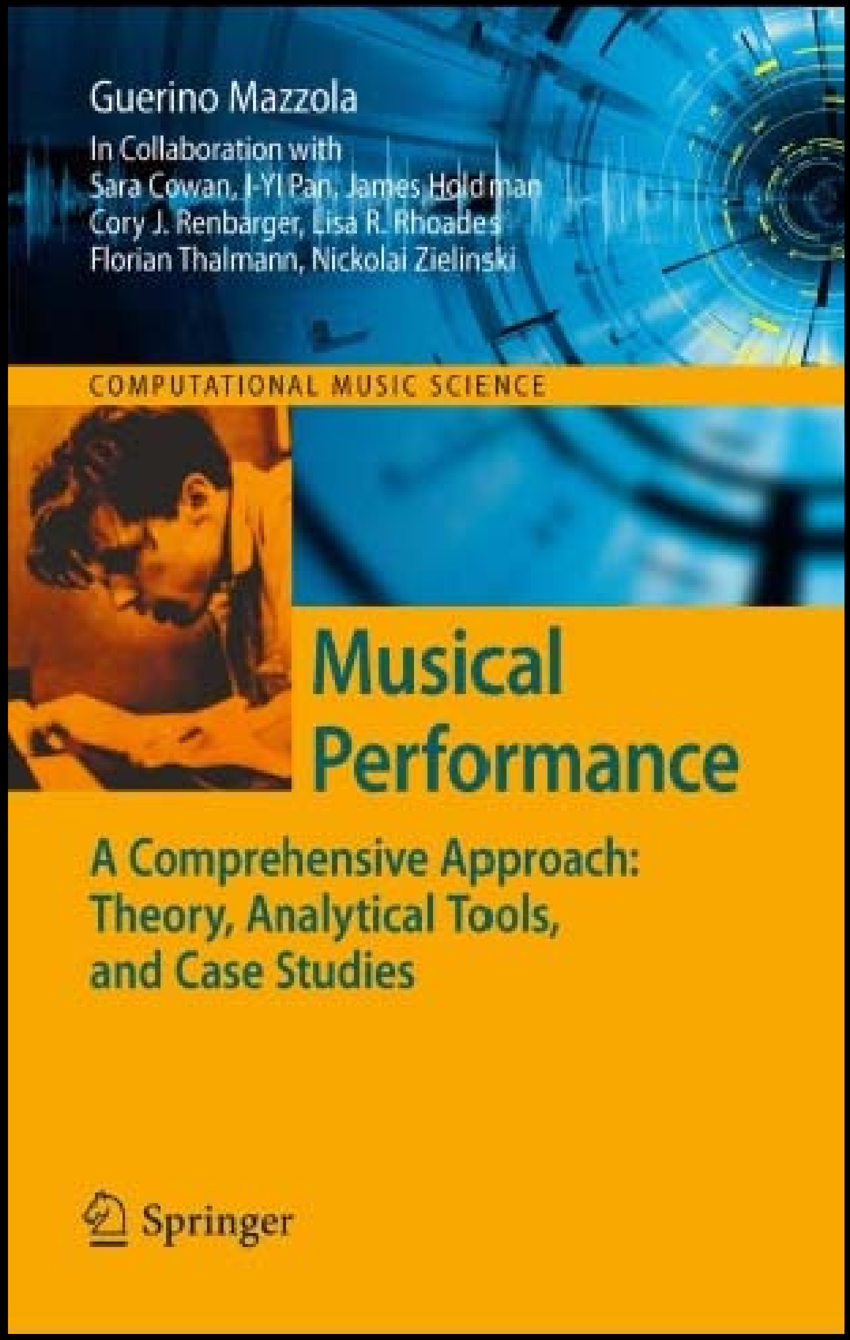
RAE
gesto. (Del lat. gestus).

1. m. Movimiento del rostro, de las manos o de otras partes del cuerpo con que se expresan diversos afectos del ánimo.

2. m. Movimiento exagerado del rostro por hábito o enfermedad.

3. m. Contorsión burlesca del rostro.
4. m. Semblante, cara, rostro.
5. m. Acto o hecho.
6. m. Rasgo notable de carácter o de conducta.
7. m. ant. Aspecto o apariencia que tienen algunas cosas inanimadas.


gestures
pitch
time
position
instrumentalize
instrumental-
interface
sound
events
h
c
l
thaw
freeze
℘
score
analysis

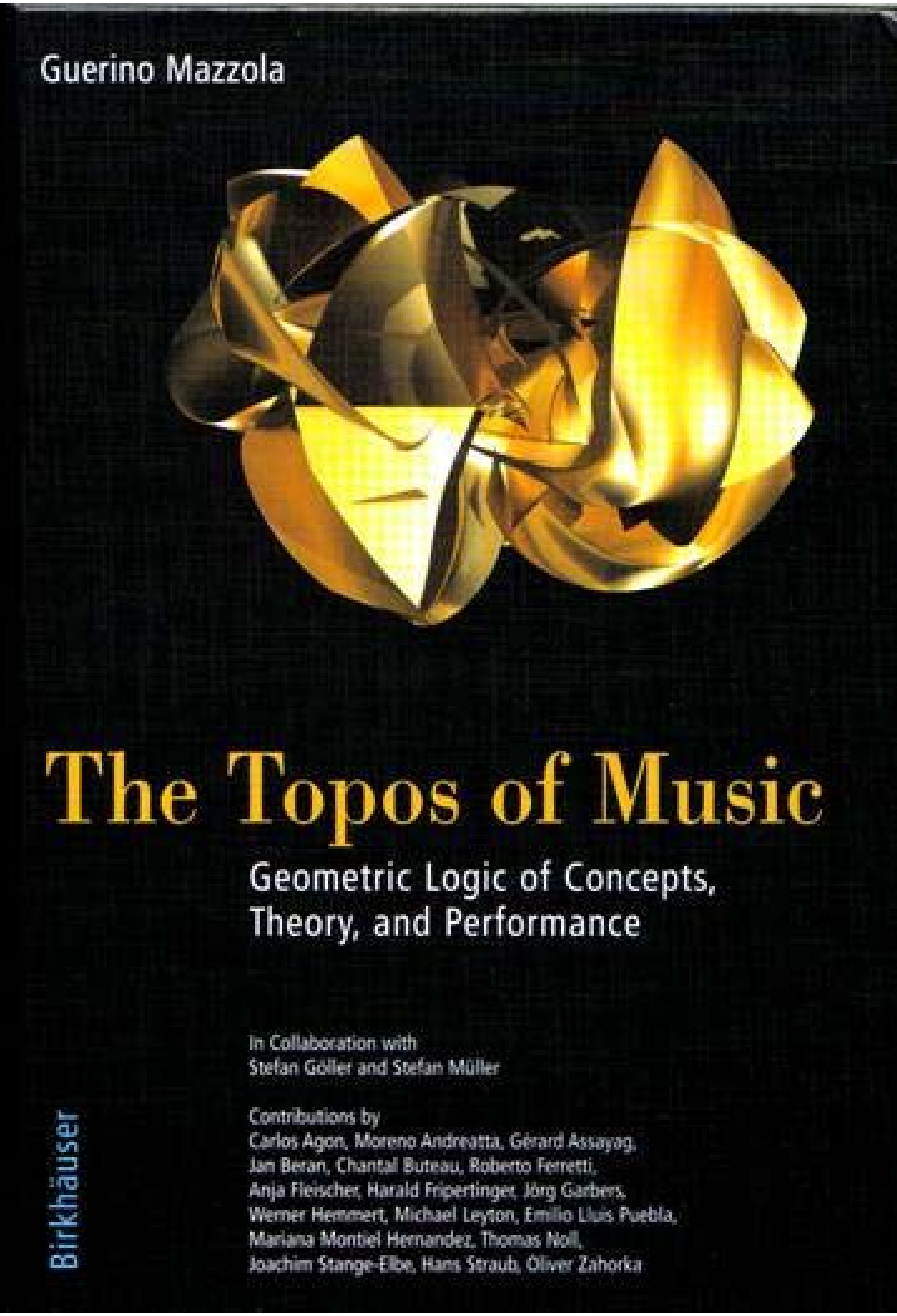

Guerino Mazzola
In Collaboration with
Sara Cowan, I-YI Pan, James Holdman
Cory J. Renbarger, Lisa R. Rhoades
Florian Thalmann, Nickolai Zielinski
COMPUTATIONAL MUSIC SCIENCE
Musical Performance
A Comprehensive Approach: Theory, Analytical Tools, and Case Studies
Springer

En 2007 Guerino Mazzola

*Nuevo marco categórico

*Descripción de las relaciones entre las actividades musicales y matemáticas.

*Esta relación puede ser descrita en términos de funtores adjuntos.


Guerino Mazzola
The Topos of Music
Geometric Logic of Concepts, Theory, and Performance
In Collaboration with
Stefan Göller and Stefan Müller
Contributions by
Carlos Agon, Moreno Andreatta, Gérard Assayag, Jan Beran, Chantal Buteau, Roberto Ferretti, Anja Fleischer, Harald Fripertinger, Jörg Garbers, Werner Hemmert, Michael Leyton, Emilio Lluis Puebla, Mariana Montiel Hernandez, Thomas Noll, Joachim Stange-Elbe, Hans Straub, Oliver Zahorka
Birkhäuser

Teoría de Homotopía

Ecuaciones o fórmulas (categoría de espectroides)

Esquemas de diagramas (categoría de digráficas)

Gestos (categoría de diagramas de curvas en espacios topológicos)

Música

Fórmulas $\rightleftarrows$ **Gestos**

Matemática

Alexander Grothendieck: „Esta es probablemente la matemática de la nueva era“

Journal of Mathematics and Music
Vol. 1, No. 1, March 2007, 23–46

Taylor & Francis
Taylor & Francis Group

Diagrams, gestures and formulae in music

GUERINO MAZZOLA*† and MORENO ANDREATTA**‡

†Institut für Informatik, Universität Zürich, Binzmühlestrasse 14,
CHC-8050 Zürich, Switzerland
‡Equipe Représentations Musicales, IRCAM/CNRS, UMR 9912,
1 Place I. Stavinsky, F-75004, Paris, France

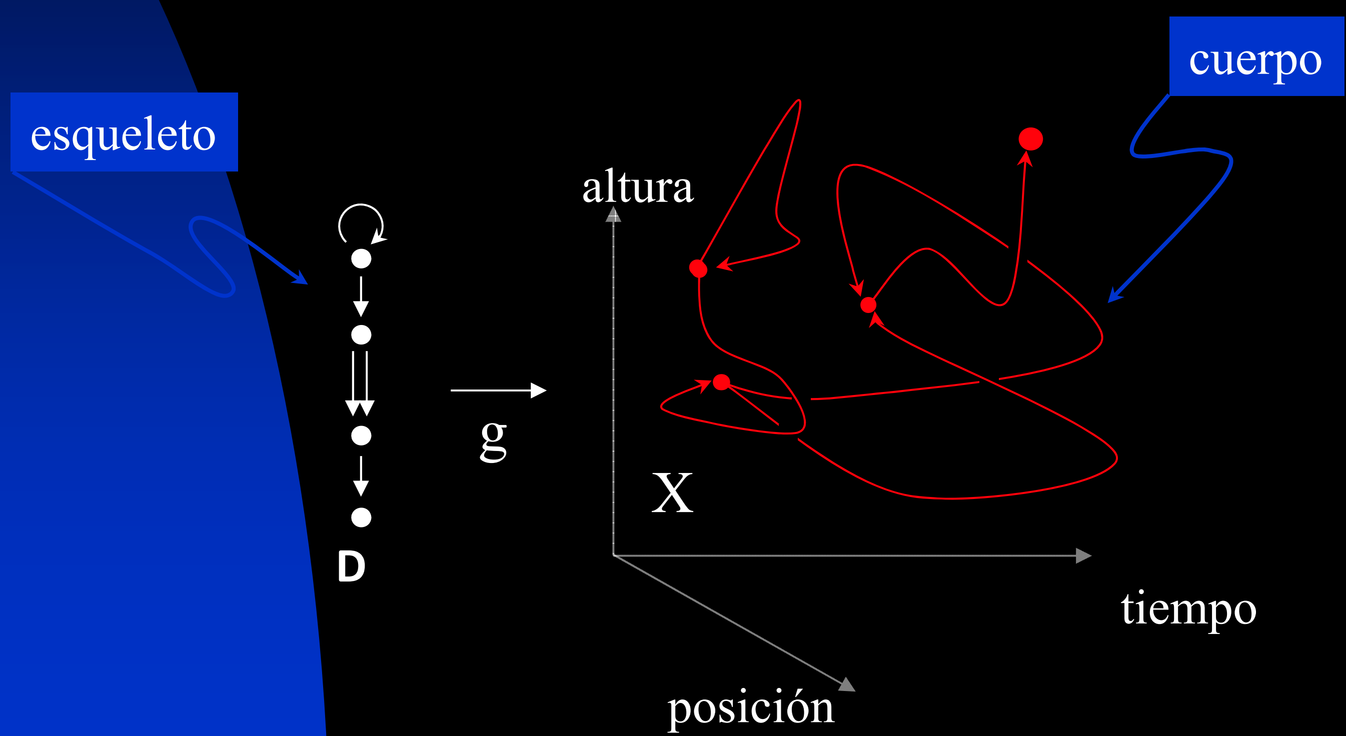
(*Received 21 May 2006; in final form 10 October 2006*)

Matemáticamente, se define un gesto como un grafo o gráfica dirigida D, llamado el *esqueleto* del gesto

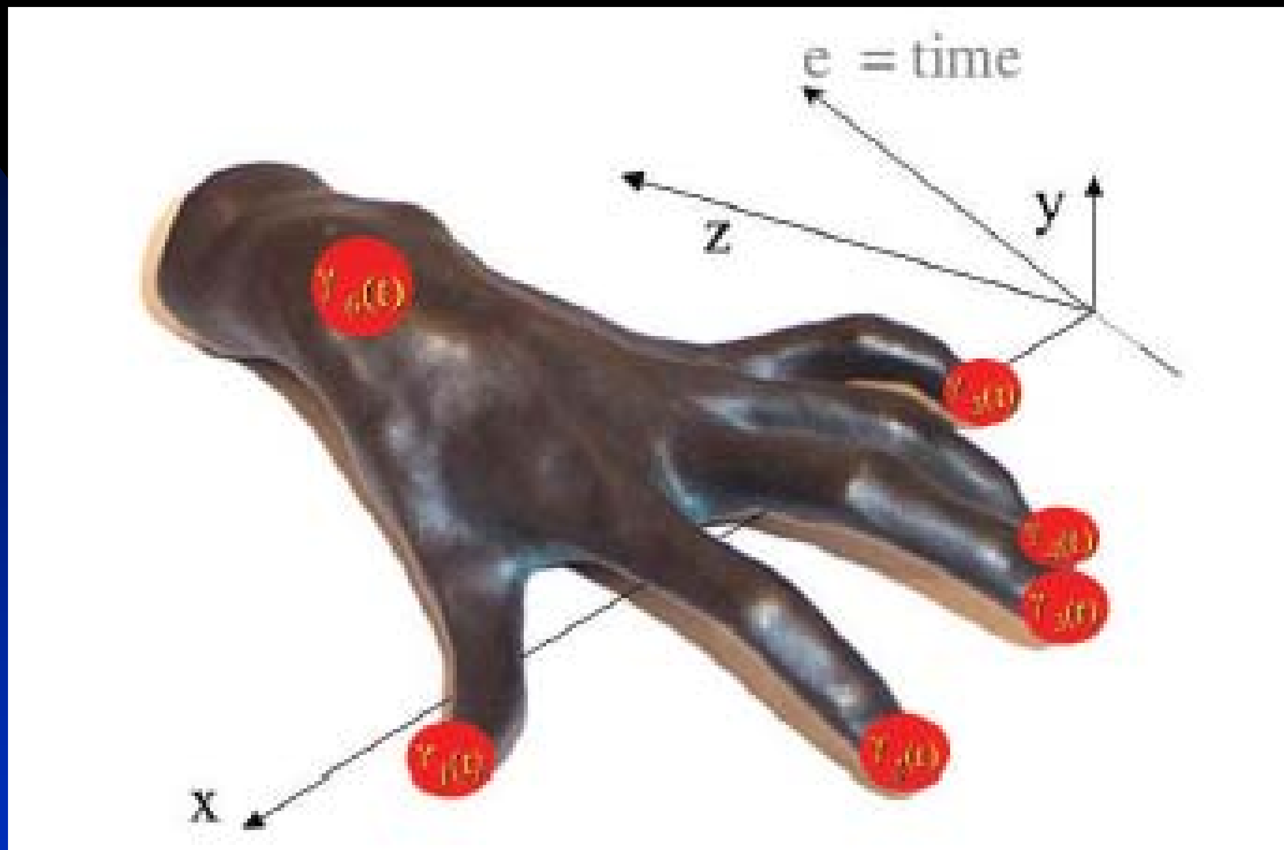
Junto con una transformación g que asocia a cada flecha *a* de D una curva continua g(a): I $\rightarrow$ X

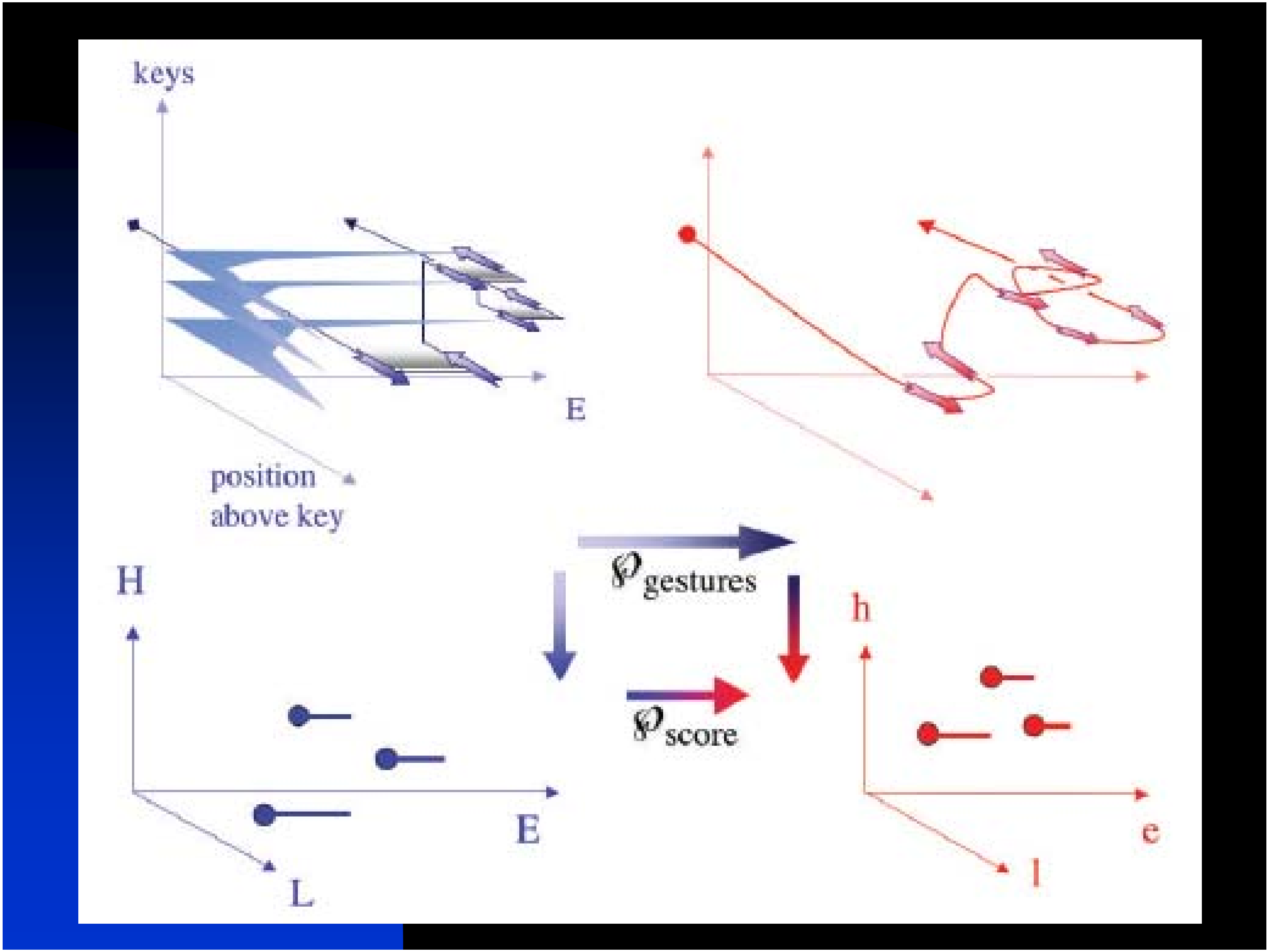
Cuerpo del gesto

Gesto = morfismo g: **D** $\rightarrow \vec{X}$
de digráficas con valores en una
gráfica espacial dirigida $\vec{X}$ de un espacio topológico X
(= gráfica dirigida de curvas continuas en X)



G. Mazzola y S. Müller 2001-2003




keys
E
position
above key
H
E
L
$\wp_{gestures}$
$\wp_{score}$
h
e
l

Renate Wieland

“gesto dentro de un gesto”

El conjunto de gestos de un esqueleto fijo D a un espacio topológico X es en sí mismo un espacio topológico, denotado con $D\underline{@}X$.

Por lo tanto, podemos considerar gestos h: F $\rightarrow$ $D\underline{@}X$. Estos gestos se llaman *hipergestos*.

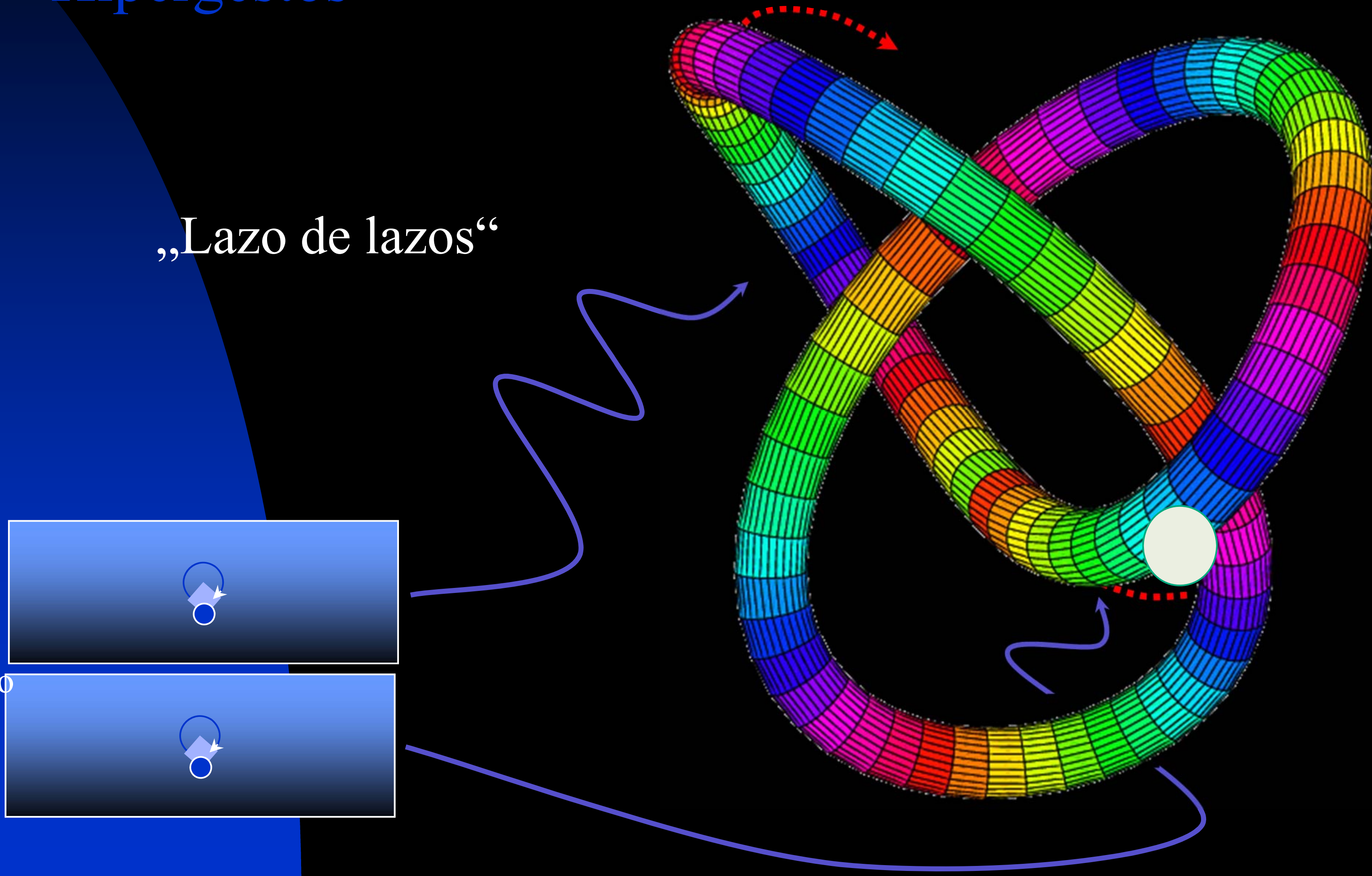
Digraf(Δ, X)→ = espacio topológico de gestos

con esqueleto **Δ y cuerpo en** X

notación: Δ **@**X→

Hipergestos

„Lazo de lazos“



nudo

círculo

Journal of Mathematics and Music
Vol. 3, No. 1, March 2009, 31–58

Taylor & Francis
Taylor & Francis Group

Categorical gestures, the diamond conjecture, Lewin's question, and the Hammerklavier Sonata

Guerino Mazzola*

School of Music, University of Minnesota, 2106 Fourth Street South, Minneapolis, MN 55455, USA, and Institut für Informatik, Universität Zürich, Binzmühlestrasse 14, CH-8050 Zürich

(*Received 1 November 2008; final version received 15 March 2009*)

Journal of Mathematics and Music
Vol. 6, No. 1, March 2012, 49–60

Taylor & Francis
Taylor & Francis Group

Singular homology on hypergestures

Guerino Mazzola[a,b]*

[a] *School of Music, University of Minnesota, 2106 Fourth Street South, Minneapolis, MN 55455, USA;*
[b] *Institut für Informatik, Universität Zürich, Binzmühlestrasse 14, CH-8050 Zürich, Switzerland*

(*Received 16 November 2011; final version received 22 March 2012*)

Teorema (de Escher)

Dado un espacio topológico X, una sucesión de digráficas

$$\Phi_1 , \Phi_2, \ldots \Phi_n$$

y una permutación π de 1, 2,... n,

existe un homeomorfismo

$$\Phi_1 @ \ldots \Phi_n @ X \approx \Phi_{\pi(1)} @ \ldots \Phi_{\pi(n)} @ X$$

Demostración: ver tesis de Yemile Chávez (2015)

Usando el Teorema de Escher, tenemos homomorfismos frontera

$$\partial_n: C_n(X.\Phi_*) \longrightarrow C_{n-1}(X.\Phi_*)$$

para cualquier sucesión Φ_* de digráficas, generalizando ↑↑... ↑, y $\partial^2 = 0$, así que tenemos módulos de homología

$$H_n = \mathrm{Ker}(\partial_n)/\mathrm{Im}(\partial_{n+1}).$$

Diagrams, gestures and formulae in music

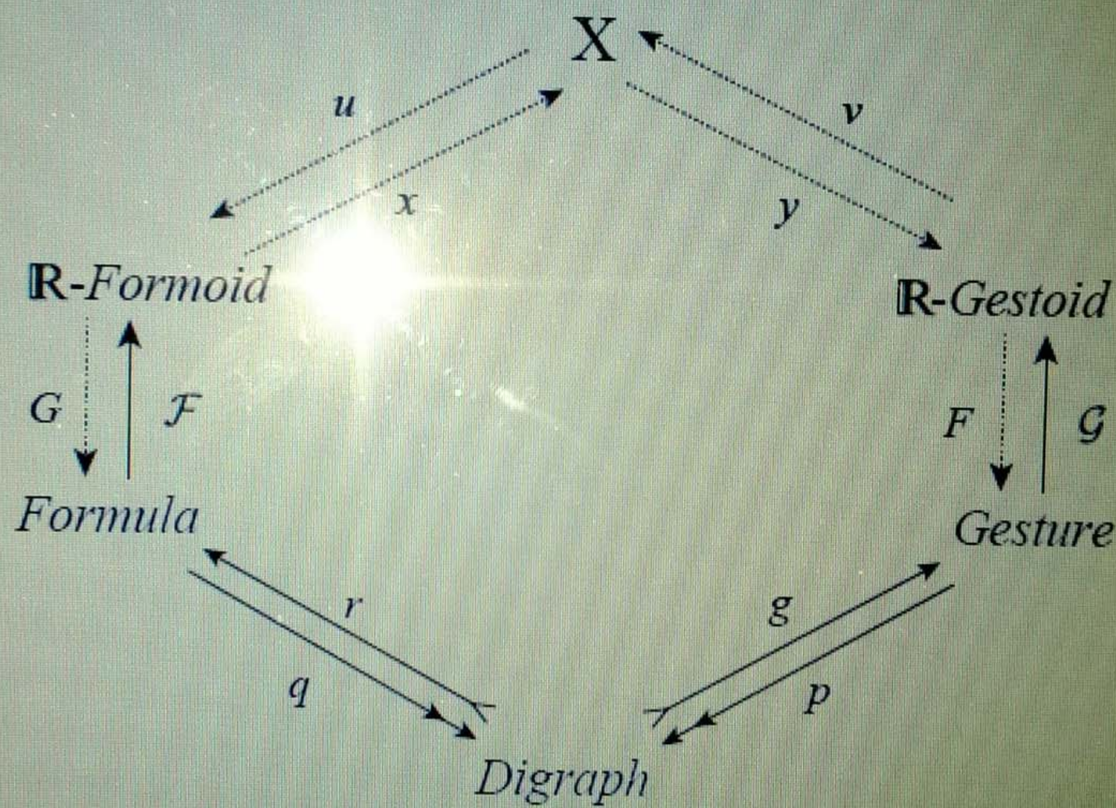


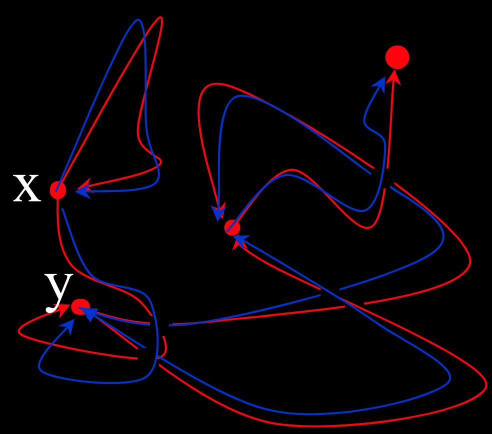
Figure 8. Diamond diagram.

The diamond conjecture

- Gestoids: de gestos a símbolos
- Las clases de homotopía de curvas de un gesto g definen la categoría R-lineal *Gestoid* RG_g del gesto g, R = anillo conmutativo.
- Está generado por las combinaciones R-lineales

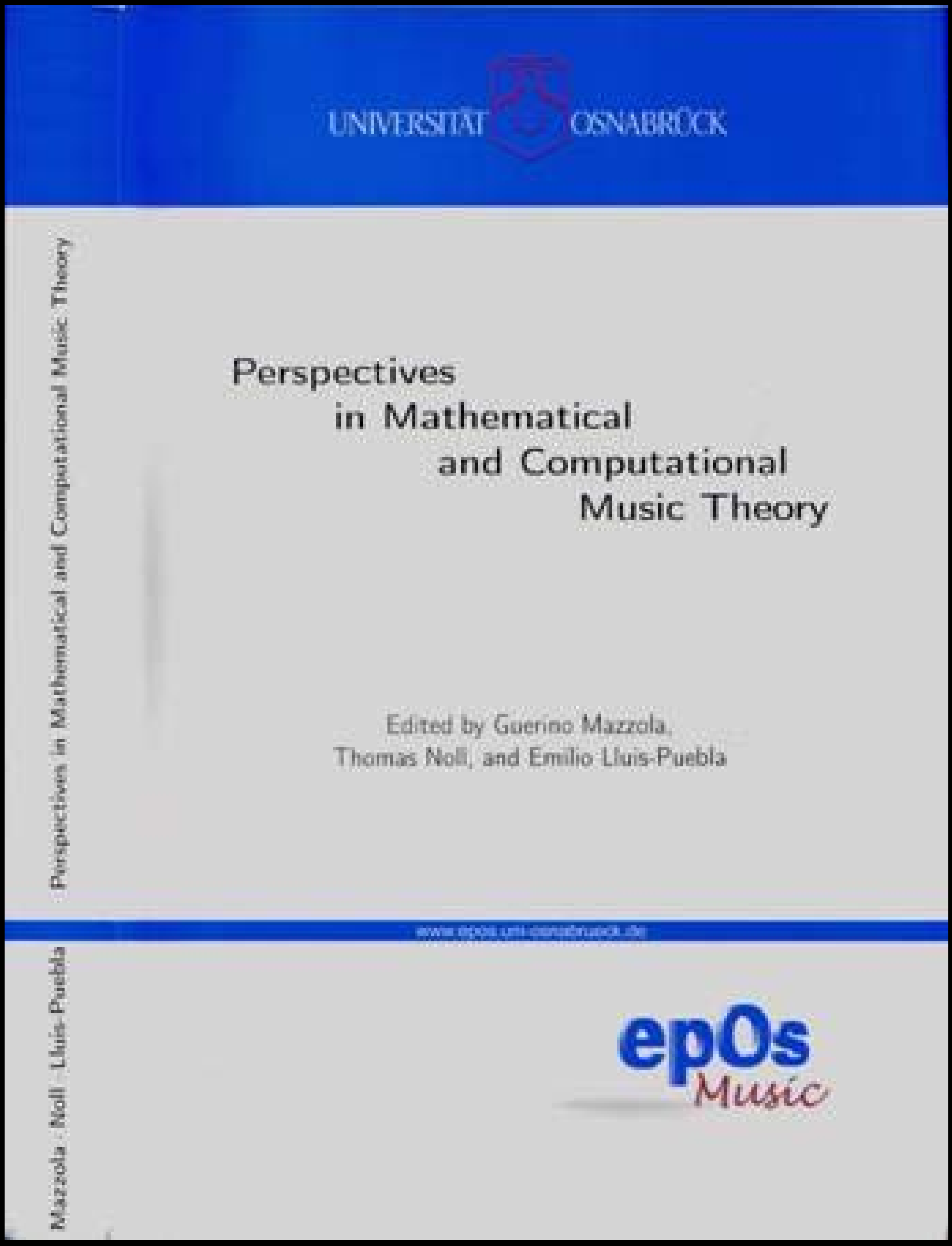
$$\Sigma_n\, a_n c_n$$

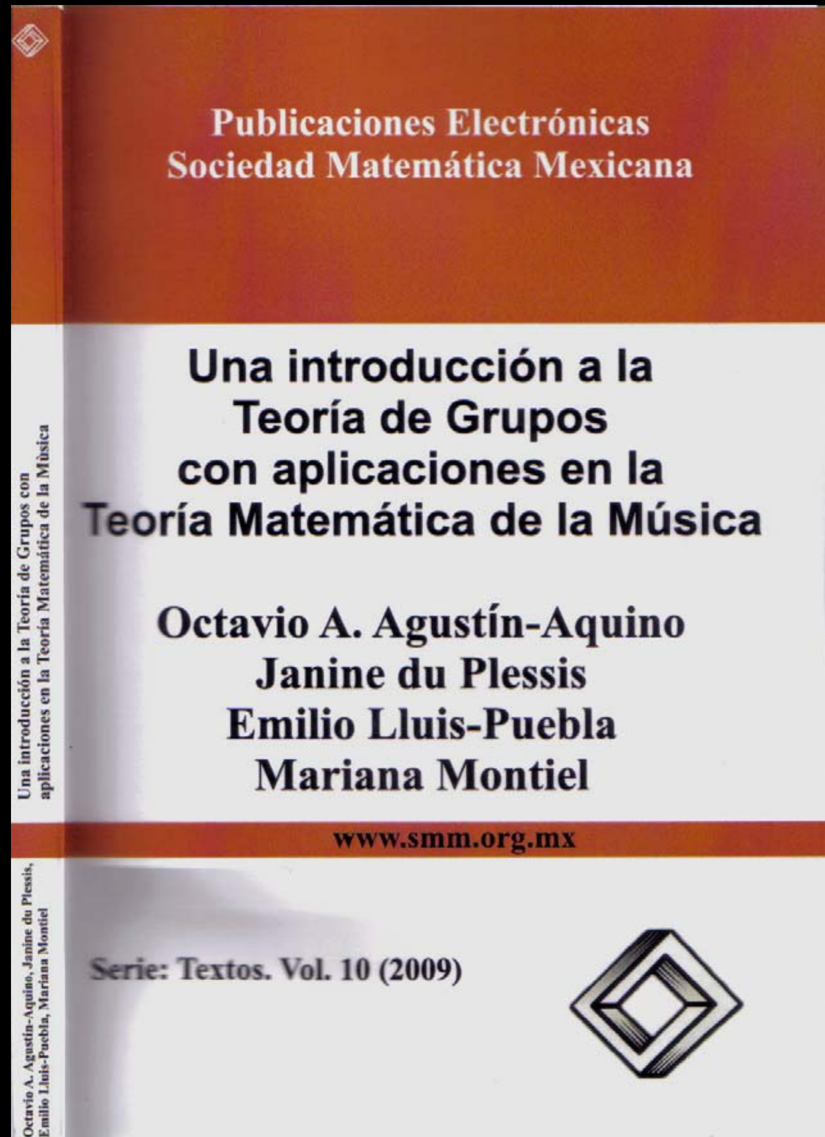
de clases de homotopía c_n de curvas del gesto que une los puntos x,y.

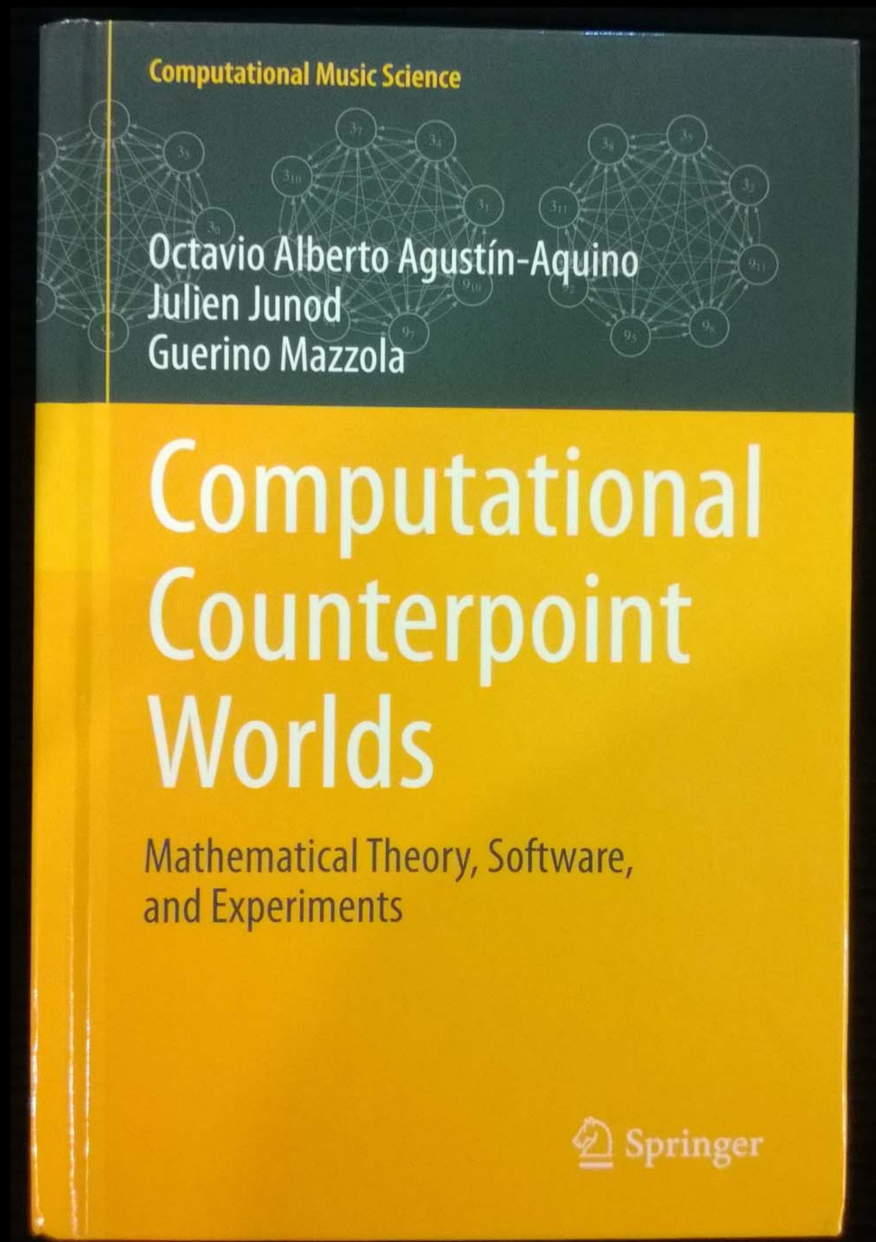


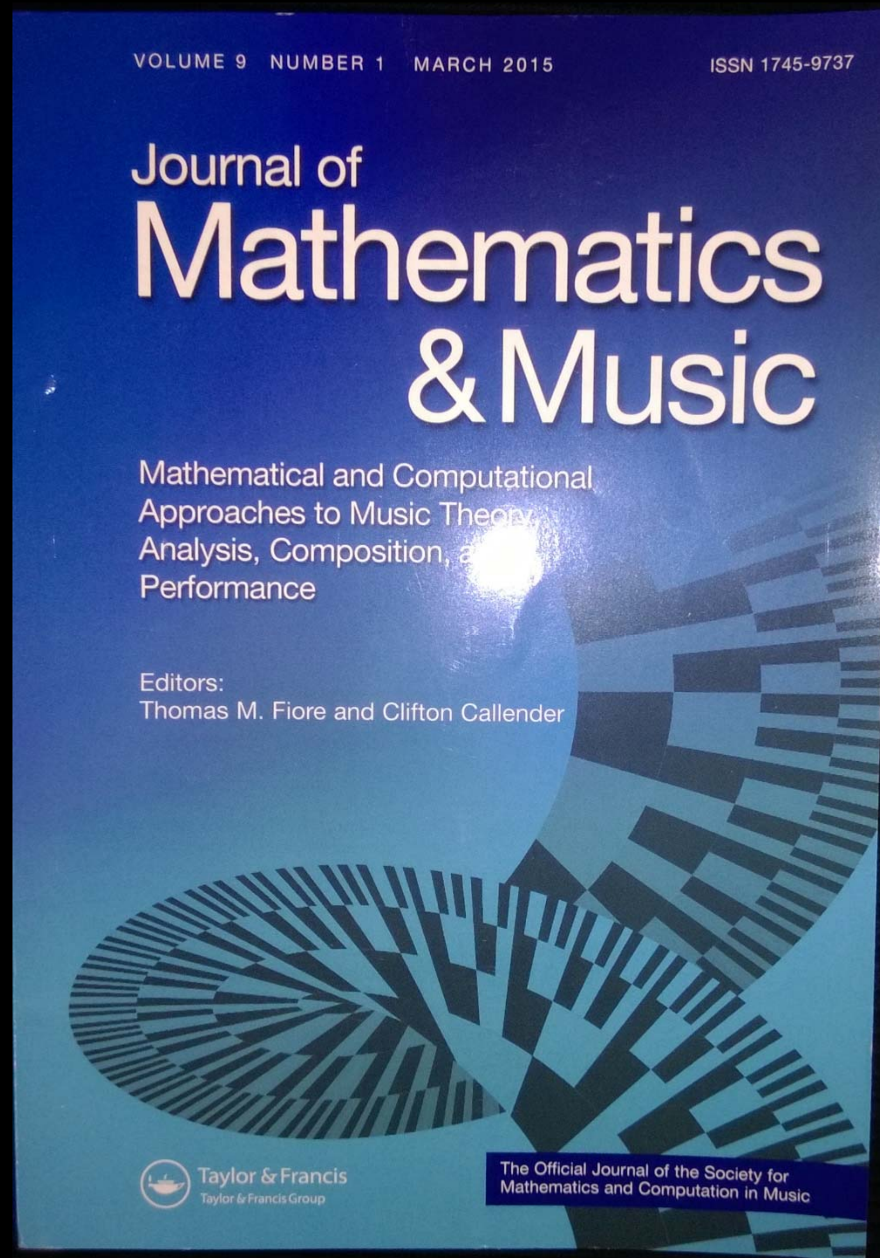
Perspectivas en la Teoría Matemática de la Música.

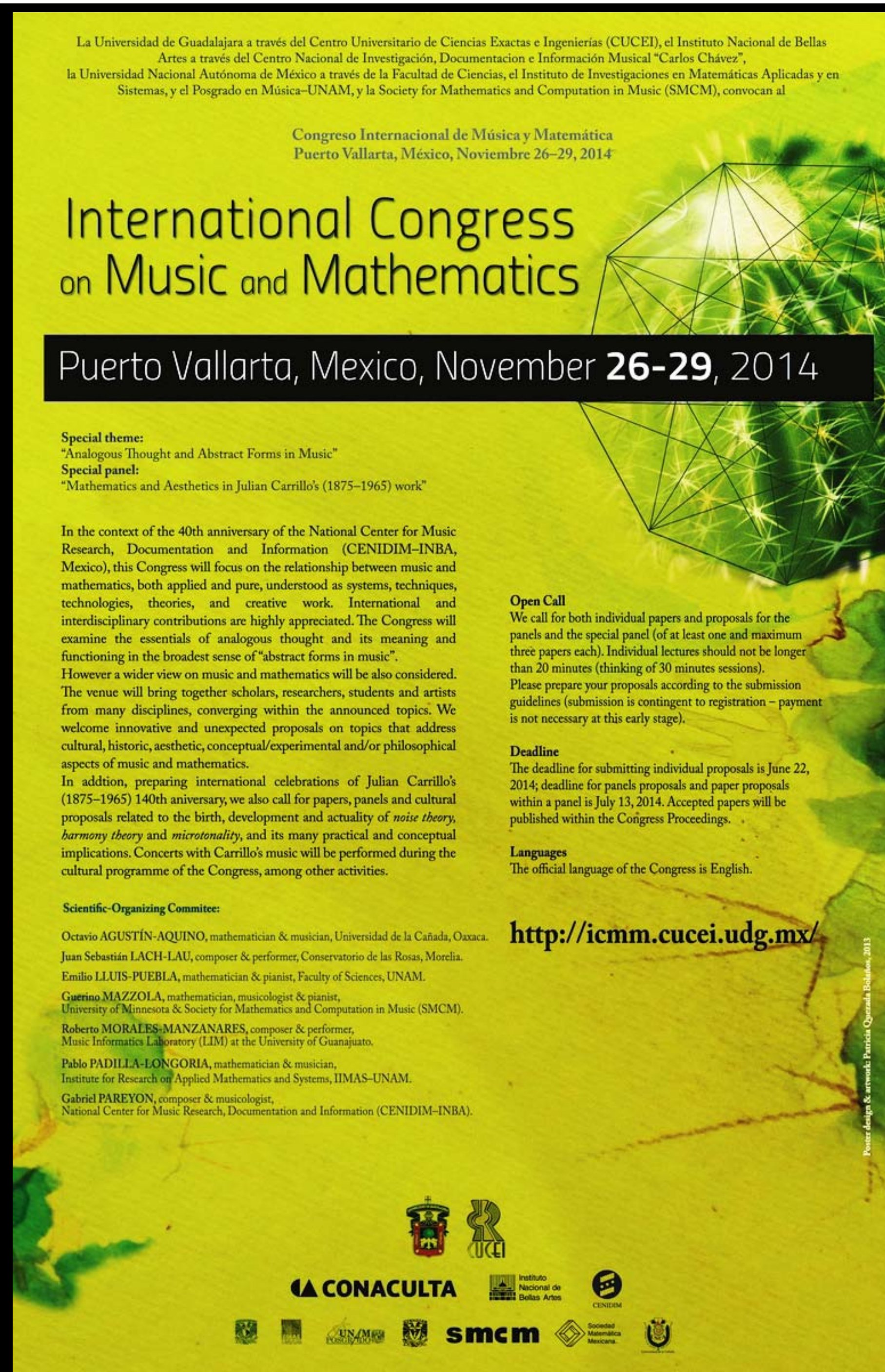
www.epos.uni-osnabrueck.de/books/m/ma_nl004/pages/




Publicaciones Electrónicas
Sociedad Matemática Mexicana
Una introducción a la
Teoría de Grupos
con aplicaciones en la
Teoría Matemática de la Música
Octavio A. Agustín-Aquino
Janine du Plessis
Emilio Lluis-Puebla
Mariana Montiel
www.smm.org.mx
Serie: Textos. Vol. 10 (2009)
Una introducción a la Teoría de Grupos con
aplicaciones en la Teoría Matemática de la Música
Octavio A. Agustín-Aquino, Janine du Plessis,
Emilio Lluis-Puebla, Mariana Montiel


Computational Music Science
Octavio Alberto Agustín-Aquino
Julien Junod
Guerino Mazzola
Computational Counterpoint Worlds
Mathematical Theory, Software, and Experiments
Springer


VOLUME 9 NUMBER 1 MARCH 2015
ISSN 1745-9737
Journal of
Mathematics
& Music
Mathematical and Computational
Approaches to Music Theo
Analysis, Composition, a
Performance
Editors:
Thomas M. Fiore and Clifton Callender
Taylor & Francis
Taylor & Francis Group
The Official Journal of the Society for
Mathematics and Computation in Music


La Universidad de Guadalajara a través del Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingenierías (CUCEI), el Instituto Nacional de Bellas Artes a través del Centro Nacional de Investigación, Documentacion e Información Musical "Carlos Chávez", la Universidad Nacional Autónoma de México a través de la Facultad de Ciencias, el Instituto de Investigaciones en Matemáticas Aplicadas y en Sistemas, y el Posgrado en Música–UNAM, y la Society for Mathematics and Computation in Music (SMCM), convocan al
Congreso Internacional de Música y Matemática
Puerto Vallarta, México, Noviembre 26–29, 2014
International Congress on Music and Mathematics
Puerto Vallarta, Mexico, November 26-29, 2014
Special theme:
"Analogous Thought and Abstract Forms in Music"
Special panel:
"Mathematics and Aesthetics in Julian Carrillo's (1875–1965) work"
In the context of the 40th anniversary of the National Center for Music Research, Documentation and Information (CENIDIM–INBA, Mexico), this Congress will focus on the relationship between music and mathematics, both applied and pure, understood as systems, techniques, technologies, theories, and creative work. International and interdisciplinary contributions are highly appreciated. The Congress will examine the essentials of analogous thought and its meaning and functioning in the broadest sense of "abstract forms in music".
However a wider view on music and mathematics will be also considered. The venue will bring together scholars, researchers, students and artists from many disciplines, converging within the announced topics. We welcome innovative and unexpected proposals on topics that address cultural, historic, aesthetic, conceptual/experimental and/or philosophical aspects of music and mathematics.
In addtion, preparing international celebrations of Julian Carrillo's (1875–1965) 140th aniversary, we also call for papers, panels and cultural proposals related to the birth, development and actuality of noise theory, harmony theory and microtonality, and its many practical and conceptual implications. Concerts with Carrillo's music will be performed during the cultural programme of the Congress, among other activities.
Open Call
We call for both individual papers and proposals for the panels and the special panel (of at least one and maximum three papers each). Individual lectures should not be longer than 20 minutes (thinking of 30 minutes sessions).
Please prepare your proposals according to the submission guidelines (submission is contingent to registration – payment is not necessary at this early stage).
Deadline
The deadline for submitting individual proposals is June 22, 2014; deadline for panels proposals and paper proposals within a panel is July 13, 2014. Accepted papers will be published within the Congress Proceedings.
Languages
The official language of the Congress is English.
http://icmm.cucei.udg.mx/
Scientific-Organizing Commitee:
Octavio AGUSTÍN-AQUINO, mathematician & musician, Universidad de la Cañada, Oaxaca.
Juan Sebastián LACH-LAU, composer & performer, Conservatorio de las Rosas, Morelia.
Emilio LLUIS-PUEBLA, mathematician & pianist, Faculty of Sciences, UNAM.
Guerino MAZZOLA, mathematician, musicologist & pianist, University of Minnesota & Society for Mathematics and Computation in Music (SMCM).
Roberto MORALES-MANZANARES, composer & performer, Music Informatics Laboratory (LIM) at the University of Guanajuato.
Pablo PADILLA-LONGORIA, mathematician & musician, Institute for Research on Applied Mathematics and Systems, IIMAS–UNAM.
Gabriel PAREYON, composer & musicologist, National Center for Music Research, Documentation and Information (CENIDIM–INBA).
CONACULTA
Instituto Nacional de Bellas Artes
CENIDIM
smcm
Sociedad Matemática Mexicana

Emilio Lluis-Puebla & Guerino Mazzola (2014)

MCM 2017 UNAM, June 26-29, Mexico City.

La Matemática

es una de las Bellas Artes,

la más pura de ellas,

que tiene el don de ser

la más precisa

y la precisión de las Ciencias.

E. Lluis-Puebla

www.EmilioLluis.org

lluisp@unam.mx