

**Publicaciones Electrónicas
Instituto Mexicano de
Ciencias y Humanidades**

**Beethoven: matemático
intuitivo, a los 250 años
de su natalicio.**

Emilio Lluís-Puebla

www.imch.org.mx

Academia Ciencias. Vol.1 (2020)



Beethoven: matemático intuitivo, a los 250 años de su natalicio.¹

Emilio Lluís-Puebla

Resumen

En este artículo, correspondiente a una conferencia presentada el 16 de diciembre de 2020 se escribe acerca de las 32 sonatas para piano de Beethoven, cómo componía el compositor, se analiza con lenguaje matemático las modulaciones y las variaciones en las sonatas Op. 106 y la Op. 109 respectivamente, se explora la creatividad en su composición, se comenta acerca de cómo era su ejecución pianística y se expone la filosofía de Yoneda en la música de Beethoven.

Este artículo lo escribiré en primera persona con el propósito de establecer un contacto más cercano con el lector. Iré escribiendo pensamientos míos, así como de otros autores que considero muy descriptivos y apropiados para ofrecerles un brevísimo panorama de mi pensamiento acerca de Beethoven y dar una explicación del por qué Beethoven trasciende “más allá del tiempo”, título de la serie de conferencias para la cual fue escrito este artículo. Iré anotando referencias a los libros que haya consultado como una bibliografía para quienes estén interesados en profundizar lo que aquí escribiré de manera panorámica y muy breve por el tiempo otorgado para la presentación en vivo. Cada tema que trate es motivo de una conferencia o un curso sobre el mismo como podrán leer. Trataré de platicarles las delicadas formalizaciones del lenguaje matemático, con palabras comunes y de usar los menos símbolos matemáticos posibles.

Para comenzar, les diré que las 32 Sonatas para piano de Beethoven [1] constituyen el legado a la Humanidad más grandioso que músico alguno haya hecho. En ellas se aprecia su genial creatividad y su evolución en una sola línea continua desde sus primeras sonatas opus 2 hasta las de lenguaje metafísico de otro mundo como el del opus 111. Sus sonatas son esencialmente dramas musicales. Dicen algo en cada compás y deben de interpretarse como si uno mismo experimentara el drama.

Beethoven puede considerarse como el primer gran pianista y compositor que rompió todas las reglas en aras de la expresión. En su música, la idea es más importante que la ejecución. Sus sonatas no se conciben necesariamente para el piano, sino más bien como ideas expresadas en forma. Sus composiciones a menudo son anti pianísticas y extremadamente difíciles. Fue en gran parte un autodidacta. Beethoven fue músico antes que pianista. [3], [4].

Las sonatas para piano de Beethoven pueden caracterizarse en tres etapas descritas por Franz Liszt como la del adolescente, la del hombre y la del Dios. Los trabajos del primer periodo fueron escritos entre los años 1795 y 1800. Comprenden las sonatas de la 1 a la 11. Las sonatas del segundo periodo fueron escritas entre los años 1801 y 1814 y

¹Conferencia invitada por la Escuela Superior de Música del INBAL dentro del ciclo “Beethoven, más allá del tiempo”. Presentada el 16/XII/2020.

comprenden las sonatas de la 12 a la 27. Y las del tercer periodo fueron escritas entre los años 1816 a 1822 y comprenden las sonatas de la 28 a la 32. Esta es una clasificación meramente técnica que sirve a algunos para estudiarlas, sin embargo, yo prefiero ver las 32 sonatas como un todo continuo. Y así las toqué, en el ciclo completo que presenté al final de los años 80 del siglo pasado.

¿Cómo era el proceso de componer en Beethoven?

Henri Poincaré escribe a principios del siglo XX, que una demostración matemática no es una simple yuxtaposición de silogismos, sino silogismos colocados con cierto orden y que el orden en que son colocados es mucho más importante que los silogismos por sí solos [4]. Comenta que no tiene miedo de que alguno de éstos se le olvide pues cada uno de ellos tomará su lugar en el arreglo sin el menor esfuerzo. También describe el proceso de creación: primero se realiza un trabajo consciente acerca del problema, después deja madurar esas ideas en el subconsciente, luego aparece la solución, quizás cuando menos se espera, y finalmente ésta se escribe. Este mismo proceso creativo es el que seguía Beethoven.

¿Qué es lo que hacía Beethoven al componer?

Para que me comprendan les comento primero que la palabra gesto, en español, significa movimiento de la mano u otras partes del cuerpo o rostro con que se expresan diversos afectos del ánimo según el diccionario de la RAE.

Pero hay una manera precisa de definir este concepto matemáticamente como veremos un poco más adelante.

La ejecución musical puede definirse como una transformación del nivel mental de la partitura en un conjunto de sucesos sonoros y/o físicos.

La ejecución musical consiste en la partitura, posiblemente su análisis, el descongelamiento de los símbolos de la partitura a gestos o movimientos que luego son transformados en sonidos a través del instrumento.

Este concepto excluye otros tipos de ejecución musical no porque no sean relevantes, sino debido a que el tipo elegido es la perspectiva que ha sido objeto de las más intensas y elaboradas investigaciones científicas.

La descongelación de la partitura a gestos o movimientos que actúan sobre el instrumento interfaz y así generar sonidos, juega un papel importante, pero esto todavía no es un tema relevante (desafortunadamente) de la Teoría de la Ejecución. Sólo la transformación P de la partitura a los sonidos lo es.

Observen que también existe el proceso inverso de congelación gestual, que termina con la notación musical abstracta moderna.

La Teoría de Ejecución Musical y la práctica, no se centra en P. Sin embargo, el tema central es la investigación y la comprensión de las estructuras que están detrás. En investigación de Teoría de la Ejecución Musical, lo que hay detrás se denomina “ejecución expresiva”. Este concepto, un tanto ambiguo, se refiere al proceso comunicativo dando lugar a P. Como tal, se inicia desde el lado creativo del compositor e intérprete, y se dirige a la audiencia y al analista. Esto está mediado por la ejecución acústica y gestual de la música.

Los gestos son complejos en su comprensión común. El concepto de un gesto nunca ha sido completamente definido a esta fecha, aunque los gestos son muy importantes en el diseño de interfaz de humano-computadora, expresividad humana en y más allá del lenguaje común, y sobre todo en las artes.

La pintura, la danza, la música, el teatro y el cine no se entenderían sin conceptos y procesos gestuales. Por tanto, les daré una brevísima mención de la primera Teoría Matemática Gestual.

Los gestos están estrictamente relacionados con la música. Utilizando una metáfora propuesta por Guerino Mazzola, las notas musicales son los puntos discretos en el suelo que toca un bailarín mientras se mueve continuamente. Estos movimientos continuos son gestos o movimientos. Entonces, para tener una comprensión completa de una interpretación musical, necesitamos extender el análisis previo (transformación de parámetros simbólicos de una partitura a cantidades físicas) a los gestos.

¿Por qué los gestos son importantes en la música? Todo músico puede leer una partitura; sin embargo, no todos los músicos pueden tocar todos los instrumentos. Una gran parte de la formación de los músicos tiene que ver con el aprendizaje de gestos específicos para tocar un instrumento seleccionado. En general, la ejecución de una partitura combina una colección de pequeños gestos (articulaciones, escalas, staccato, legato, portato, etc.) que se pueden pegar. Un gesto de gestos se llama hipergesto.

También hay gestos que no están directamente relacionados con la producción de sonido, pero que ayudan a los músicos orquestales a seleccionar los mejores gestos específicos para generar una idea musical general. Por ejemplo, este sería el papel de un director de orquesta.

Llamamos *gestos simbólicos* a los movimientos sugeridos por una partitura que idealmente permiten una perfecta realización del contenido de la partitura. Llamamos *gestos físicos* a los movimientos reales de los artistas.

El formalismo desarrollado para este simple caso puede extenderse y aplicarse a cualquier interpretación musical. Está claro que hay una variedad infinita de gestos físicos asociados

con un mismo gesto simbólico. Para un mismo gesto simbólico, de hecho, puede haber algunas realizaciones físicas que son más difíciles que otras, algunos gestos físicos que corresponden más o menos a la idea musical, etc.

La *composición musical* requiere el proceso inverso, de la *realidad física* a la *realidad simbólica*. El compositor puede comenzar con un movimiento físico real, como la improvisación de piano, o gestos físicos "virtuales" que se imagina que son el resultado final cuando se interpreta la música. Partiendo de los gestos físicos, el compositor tiene que encontrar la aproximación simbólica óptima de sus ideas. Significa que él responderá a la pregunta, ¿cuáles son las indicaciones simbólicas cuya realización física está más cerca de mi idea?

Un análisis detallado de los gestos está más allá del alcance de esta conferencia. Sin embargo, debido a su importancia dramática en la música y el desarrollo futuro de la música, daré algunas definiciones matemáticas y algunas referencias bibliográficas.

Los *gestos* son curvas en el espacio y el tiempo. Para conectar formalmente lo simbólico con lo físico, usamos métodos que involucran superficies. Estas superficies se inspiraron en la Teoría de Cuerdas en la Física Teórica.

Matemáticamente, se define un *gesto* como un grafo o gráfica dirigida D , llamado el *esqueleto* del gesto. También se requiere de una transformación g que asocia a cada flecha a de D una curva continua $g(a): I \rightarrow X$ definida sobre el intervalo unitario $I = [0, 1]$ de los números reales de manera que las flechas que se correspondan vayan a dar a curvas continuas que se correspondan. El sistema de estas curvas continuas se llama *cuerpo del gesto*. Es en esta última parte del gesto que el movimiento de la configuración gestual tiene lugar.

Intuitivamente, un gesto es un sistema de curvas en X que se conectan según las flechas del esqueleto.

En este ejemplo, X es el espacio de coordenadas utilizados para las posiciones de las puntas de los dedos de la mano de un pianista en una tecla dada (altura), un nivel por encima de la tecla (posición), y el tiempo de este evento.

El simple gesto de un dedo es el ejemplo más importante de un gesto elemental de la mano de un pianista. Se utiliza en investigaciones fundamentales sobre la transformación de gestos simbólicos en gestos físicos.

El dispositivo más poderoso en esta Teoría Matemática de Gestos es el concepto de un hipergesto. Renate Wieland mencionó la idea misteriosa de un "gesto dentro de un gesto". Esta construcción es la siguiente: Se puede demostrar que el conjunto de gestos de un esqueleto fijo D a un espacio topológico X es en sí mismo un espacio topológico, denotado con $D@X$. Por lo tanto, podemos considerar gestos $h: F \rightarrow D@X$. Estos gestos se llaman

hipergestos: es decir, gestos cuyo cuerpo es un sistema de curvas de gestos. Aunque esto suene complicado, es bastante intuitivo. Por ejemplo, si tenemos un gesto con un lazo como un esqueleto, y luego un hipergesto con otra vez el lazo como esqueleto, entonces el hipergesto es un lazo de lazos, de hecho, un tubo cerrado.

Un tubo cerrado es un hipergesto, a saber, un lazo de lazos.

Tales hipergestos son muy útiles en la generación de interpretaciones gestuales de las composiciones de música de arte. Por ejemplo, la modulación tonal que usa Beethoven de si bemol mayor → sol mayor en el comienzo del Allegro de la Op.106, puede ser descrito por tales hipergestos.

Por medio de diagramas, la Matemática convierte gestos en fórmulas. De hecho, un diagrama es un sistema de flechas de transformación. En tal sistema uno puede seguir diferentes trayectorias o caminos partiendo y terminando en los mismos dos puntos. Estas trayectorias pueden ser vistas como movimientos gestuales. Si dos tales caminos conmutan, es decir, que producen la misma transformación compuesta, entonces tienen exactamente lo que se llama una *fórmula* o *ecuación*: dos expresiones dan el mismo resultado. Muy generalmente hablando, las fórmulas son las relaciones de conmutatividad de trayectorias o caminos gestuales. Inversamente, la actividad musical "descongela" las fórmulas y las convierte en gestos que se pueden describir como el desarrollo de fórmulas en el espacio-tiempo.

Mazzola utiliza la categoría de digráficas de curvas en espacios topológicos como el marco teórico de la Teoría Gestual. Desde un aspecto puramente teórico, "gestos de gestos" (o hipergestos), así como "gestos naturales" son canónicamente definidos, como se ve al ejemplificar el caso del gesto de un dedo de la mano de un pianista y sus generalizaciones hipergestuales. Al igual que en el caso del desarrollo de la Teoría de Categorías y la de Topos, como la realizó Mac Lane, la noción de gesto como se sugiere en el trabajo de Mazzola ofrece un buen ejemplo de la "colisión" entre los métodos algebraicos y topológicos. [8]

Por supuesto que no se trata de hacer interpretaciones generadas por análisis de computadoras de las partituras a través de un MIDI o cualquier otro formato, sino que se trata del análisis, entendimiento, experimentación simulada de la ejecución como una tarea intelectual, la cual puede inspirar al artista a nuevos acercamientos creativos y no como una actividad artística genuina.

¿Para quién componía Beethoven?

Beethoven le comentó a su alumno Czerny: "lo que está en mi corazón debe salir a la superficie, y por lo tanto tengo que escribirlo." Sabía que creaba para la eternidad. En una ocasión se interpretó su ópera Fidelio ante un público compuesto en su mayor parte por oficiales del ejército napoleónico. Poco preparado para apreciar semejante música, el público de los militares se aburrió mortalmente decretando el fracaso de la obra. Se

presentó únicamente durante tres veladas consecutivas y luego desapareció de la cartelera, lo que en aquella época constituía un fiasco total. La crítica se hizo eco del entusiasmo del público con diversos ataques, incluso algunos de sus amigos osaron convencer al maestro para que efectuase algunas modificaciones a la partitura, consistentes primordialmente en cortes drásticos. Reducida a dos actos, la ópera se representó una vez más con su antiguo título de "Leonora". Para entonces Napoleón ya se había retirado a Francia y sin embargo el resultado de la interpretación fue el mismo. Beethoven, exasperado, retiró su partitura y partió furioso del teatro gritándole al director Von Braun ¡Yo no escribo para la masa, escribo para las personas cultas!"

Beethoven trabajaba muy lentamente. Si bien Mozart necesitaba días o semanas para realizar una obra, Beethoven le dedicaba meses o años. Mientras que Mozart compuso tres de sus más grandes sinfonías en un periodo de seis semanas, Beethoven tardó tres años antes de considerar que su primera obra, (tres tríos para piano), mereciera ser publicada. Meditaba mucho los temas antes de volcarlos sobre el papel y contra lo que mucha gente piensa, a medida que se ampliaba su visión musical se intensificaba su trabajo en la composición. Su música expresa los estados interiores del ser y el deseo de autoexpresión. El desnuda su alma de manera que todos la vean. Lo que expuso fue el sentido del drama, el conflicto y la resolución, pero de un conflicto expresado puramente en términos musicales. Pensaba exclusivamente con referencia al tono y a la arquitectura musical, menospreciaba la música de programa, y así, el factor unificador es simplemente la lógica musical, las ideas acerca del desarrollo, el contraste y la continuidad temática.

La Sonata Op. 106 denominada "Hammerklavier" de Beethoven es un desafío para la Teoría de la Modulación. Encontramos algunas modulaciones que se ejecutan muy rápido, con un mínimo de notas, aunque conectan tonalidades que se alejan entre sí en términos de cuarta distancia. Por ejemplo, en el movimiento Allegro, hay una modulación Si bemol → Sol bemol entre tonalidades distantes en los compases 238-239. Pero hay otras modulaciones que tienen una anatomía enorme que es difícil de entender sin una comprensión más profunda del proceso modulador.

Las partes de la forma de la sonata también pueden incluir procesos armónicos complejos, como modulaciones tonales. Por ejemplo, el Allegro, el primer movimiento es una forma sonata y muestra ocho modulaciones, comenzando y terminando en la tonalidad principal Si bemol mayor de la sonata. [7]

Veamos un ejemplo de una modulación compleja. Considere la modulación G → E bemol en los compases 124-129 del movimiento Allegro, [10, Figura 23.6]. Todas las modulaciones en el movimiento Allegro se han analizado y entendido completamente usando la Teoría de Modulación de Mazzola. [5]

Por ejemplo, la modulación Sol → Mi bemol en los compases 124-129 del movimiento Allegro. Esta modulación es bipartita (primera parte: compases 124-127, segunda parte: compases 128-129). Antes de encontrar los grados fundamentales VII - V - VII en Mi bemol

en la segunda parte, de acuerdo con una tabla de modulación que no muestro, escuchamos la nota sol como un intervalo de octava: pedal y voz estacionaria en la primera parte. Los tonos de la primera parte, cuando se transponen a la octava abarcada por las dos notas sol, muestran una estructura melódica regular [10, ver Figura 23.6, parte inferior].

Esta estructura tiene dos partes: la primera en los compases 124-125 y la segunda en los compases 126-127. Están relacionados entre sí por la inversión en re bemol, que es lo mismo que la inversión en sol en las clases de tono. Esta primera parte de la modulación hace evidente la inversión $I_{re\ bemol}$ antes de ver los grados fundamentales en la segunda parte de la modulación. Pero ¿por qué esta inversión preliminar? Es el modulador para la modulación en nuestro modelo, $I_{re\ bemol}(Sol^{(3)}) = Mi\ bemol^{(3)}$. Esta estrategia es una hermosa realización compositiva de lo que especifica el modelo de Mazzola. El modelo predice grados fundamentales y lo hace sobre la base de las fuerzas de modulación que proporcionan las simetrías del modulador. Beethoven no solo escribe los grados fundamentales, sino que también hace evidente el modulador en la primera parte de la modulación. [8]

En la Figura 28.10 de [5], el gráfico muestra el plan de modulación en el movimiento Allegro de la Op.106 de Beethoven en el sistema de tonalidades dispuesto en el círculo de cuartas. El inicio cambia de Si bemol a Sol. La modulación inversa ocurre al final, y ambos siguen el mismo procedimiento. Excepto estos movimientos iniciales y terminales, el plan de modulación es perfectamente simétrico alrededor del eje de simetría entre Si bemol⁽³⁾/ Mi bemol⁽³⁾ y La⁽³⁾/ Mi⁽³⁾.

Este análisis no presupone que Beethoven haya realizado su construcción utilizando las ideas de este modelo. Pero podría haberlo hecho intuitivamente; no se pueden conocer esas capas ocultas de creatividad. Esta situación es paralela a lo que ocurre en la Física. Descubrimos leyes físicas, pero no podemos saber si un creador divino (si esta es la hipótesis cosmológica subyacente) ha construido el universo de acuerdo con estas leyes, que son nuestra forma de entender la naturaleza. Sin embargo, las leyes se mantienen, al igual que el módulo de modulación para el sistema crítico de modulaciones en la composición de Beethoven.

En resumen: el aspecto armónico se aplica a la Teoría de la Modulación tonal como se describe en [8] para una breve presentación de la teoría.

La discusión detallada de las modulaciones de Beethoven en la Op. 106, movimiento Allegro, se expone en [5]. La Teoría de la Modulación se basa en simetrías, inversiones o transposiciones, que conectan tonalidades dadas. En el caso de Beethoven, resulta que las modulaciones están relacionadas con las simetrías internas del acorde Do#⁷. Estas simetrías dividen el conjunto de tonalidades en dos órbitas, el "mundo" de las ocho escalas diatónicas de Sib, Reb, Mi, Sol, La, Do, Mib, Solb y un "antimundo" de cuatro escalas diatónicas de Re, Fa, Lab, Si. Estas dos órbitas muestran precisamente lo que los teóricos de la música Jürgen Uhde y Erwin Ratz habían llamado el "mundo" alrededor de Si mayor y el "anti-mundo"

alrededor de Si menor. Estas simetrías también explican todas las modulaciones en detalle.
[10]

Ahora veamos el tercer movimiento de la Sonata Op. 109 el cual ilustra la variante matemática del concepto de creatividad. El ejemplo musical consiste en una sucesión de seis variaciones sobre el tema principal de la sonata, y que se titula "Lírica, con el sentimiento más profundo".

Según el brillante análisis de Jürgen Uhde, el tema se presenta mezza voce en los primeros ocho compases antes de la primera variación. Aparece en cuatro variantes de dos compases cada una, siendo la primera el motivo X de cinco notas en la voz de soprano sol#, mi, fa#, re#, si de este cuarteto de cuerdas imaginario (Uhde). Incluimos el fa# porque llena la tríada dominante fa#, re#, si, que sigue a la tríada tónica sol#, mi, si (cuyo si, aparece en la voz alta).

Metáfora de la perspectiva de Uhde:

Las seis variaciones V_1, V_2, \dots, V_6 son variaciones de este tema, pero no son independientes del tema (como es el caso de las variaciones Diabelli de Beethoven), ni siquiera adornos y rellenos. Así que V_1, V_2, \dots, V_6 están todas dirigidas hacia el tema X, un hecho que escribiríamos como si esta configuración estuviera incrustada en una categoría, es decir, por seis morfismos (perspectivas sobre X, tomadas de las direcciones V_1, V_2, \dots, V_6)

$$f_1: V_1 \rightarrow X, \quad f_2: V_2 \rightarrow X, \quad \dots, \quad f_6: V_6 \rightarrow X.$$

Cada una de estas perspectivas enfatiza un aspecto particular de X, y Uhde dibuja una hermosa imagen de esta configuración de perspectivas variables. Cuando terminan las cinco primeras variaciones, pregunta si todavía hay una posición eficiente para la sexta y agrega:

¿No se iluminó el tema desde todos los lados, desde cerca y desde lejos, siguiendo el sonido y la estructura? Las variaciones anteriores "bailaban" en torno al tema, y cada una estaba dedicada a otra propiedad temática.

De modo que Uhde realmente interpreta estas variaciones como perspectivas variables del tema X. Cada perspectiva se centra en un aspecto específico. No tenemos que entrar en los detalles de estas variaciones y solo resumir su carácter general:

- 1.- Una variación melódica $f_1: V_1 \rightarrow X$ construida sobre un entorno homofónico con acompañamiento de vals.
- 2.- Una variación rítmica $f_2: V_2 \rightarrow X$ con cambios sofisticados de los tonos del tema en una secuencia de arpeggios interválicos.

3.- Una variación contrapuntística $f_3: V_3 \rightarrow X$ construida sobre correspondencias por inversiones del tema y su redistribución en voces diferentes.

4.- Una variación permutacional $f_4: V_4 \rightarrow X$ intercambiando algunas notas del tema para captar todo el poder cantabile del tema en una interpretación parecida a una fughetta.

5.- Esta variación $f_5: V_5 \rightarrow X$ también funciona como permutacional, pero es dedicado a revelar el poder del tercero, que era también el intervalo inicial (sol , mi) del tema original.

En la versión matemática del proceso creativo, esta lista de perspectivas f_i constituye la apertura de los muros del concepto crítico. Se inspecciona el tema X como si fuera un funtor $@X$ y miramos cómo se comporta desde una serie de perspectivas características f_i . Y como en nuestra versión matemática de la creatividad, Uhde enfatiza que estas cinco perspectivas son "todo lo que se puede decir", son direcciones características.

¿Por qué una sexta variación?

Siguiendo nuestro modelo matemático, ahora tenemos que considerar el colímite $\text{colim}(D)$ del sistema D de estas cinco perspectivas, junto con sus relaciones mutuas, es decir, intuitivamente el colímite es la unión y conexión de estas 5 perspectivas. Esta perspectiva colímite $\text{colim}(D) \rightarrow X$ presentaría una perspectiva concisa (uniendo las cinco perspectivas individuales) que contiene todas las ideas anteriores en un solo elemento.

Es natural interpretar la sexta variación como precisamente este colímite que requerimos en el enfoque matemático. Por supuesto, aquí no estamos en el contexto de una categoría matemática formalmente definida, pero podemos intentar interpretar la sexta variación en términos de la propiedad esencial de un colímite. Un colímite, de hecho, permite la síntesis de varias perspectivas sobre X en una sola; todo lo que se había dicho en las cinco variaciones puede verse ahora en forma concentrada en la sexta variación. Es fascinante leer la interpretación de Uhde de la sexta variación. Él lo ve como si fuera en sí mismo un cuerpo de seis microvariaciones, y describe este cuerpo como un "arroyo con puentes", los puentes que conectan las seis microvariaciones. Esto es muy similar a la construcción de un colímite, que también es esencialmente un paisaje que conecta sus componentes mediante funciones de puente.

Mirando la sexta variación, de hecho, contiene una serie de reformulaciones del tema, pero luego converge dramáticamente a un final que es una especie de síntesis de todos estos aspectos, y Uhde describe esta explosión final de energía que es incitada por el eje vibratorio de la dominante con ese trino largo si – do#. Sin embargo, es fundamental que la dominante dure mucho tiempo (compases 165-187, ¡casi la mitad de la sexta variación!) sin resolverse a la tónica. Esperando la función cadencial de la dominante, el oyente se molestaría al escuchar un anuncio tan interminable de la tónica. La función de este trino debe ser diferente. Podemos hacer esta explosión más precisa. La vibración de la dominante se muestra más concretamente como una interpretación alternativa del tono dominante

por el vecino do#. Esta rotación alrededor de estos dos tonos se establece primero como un conjunto de notas explícitas, pero luego, con el aumento de la energía, converge en una explosión final fulminante de un trino si – do#.

William Kinderman, en su descripción del final de la Op. 109, escribe: "A través de una especie de ruptura radiactiva, el tema explota virtualmente desde adentro, produciendo una variedad de sonidos vibrantes y brillantes. Uno podría considerar el trino sostenido en Si con su vecino superior Do#, que migra hacia los agudos en el pasaje antes de la repetición temática, como la máxima elaboración del pico melódico de la sarabanda en estas dos notas".

Este emparejamiento de trinos no solo es un efecto emocional agradable de la energía de rotación, ¡sino que tiene una interpretación muy sustancial en términos de una cadencia de la tonalidad subyacente! De hecho, el movimiento inverso $I_{si/do\#}$ alrededor de si – do# es idéntico a la inversión I_{do} en do o su tritono fa# ([7] véase Figura 26.4). Como do no está en la escala de Mi, la inversión de sus vecinos si – do# hace el trabajo. En otras palabras, el trino caracteriza o cadencia la tonalidad básica Mi mayor a través de su inversión de simetría interna única en fa#.

También se trata de una función cadencial que normalmente no se utiliza en armonía, pero se ha demostrado en otros análisis de la obra de Beethoven que esta visión es una realidad en sus estructuras compositivas. Con frecuencia, el trino en una función cadencial se usa con el segundo y tercer grados de la escala, preparando la tónica, como se muestra en [7] Figura 26.3 para la sonata de Mozart KV 545. Y la Figura 26.5 de [7] muestra que Beethoven sí organizó la secuencia de arpeggios de intervalo en los compases 173-174 en una fuerte correspondencia con la simetría de mi mayor.

No nos asombremos si este hecho fuera también un componente consciente del enfoque de Beethoven sobre la tonalidad, pero no lo sabemos. Sin embargo, las estructuras confirman esta hipótesis. Resumiendo, la variación colímite seis muestra una explosión del tema que se disuelve en una rotación ardiente de ese trino, que expresa la tonalidad básica por su simetría interior inversa única.

En términos de creatividad, hemos interpretado la sexta variación como un objetivo creativo surgido de las características de las primeras cinco variaciones del tema crítico X. Pero también aprendimos que la variación puede significar cosas muy diferentes en la música. Mientras que el enfoque de Mozart en "Ah, vous dirai-je Maman" es una visión desde fuera, extensiva sólo en el sentido de que el tema a ser variado se da por sentado y luego sirve como un modelo de esqueleto que se viste con una selección de "ropa", el enfoque intensivo de Beethoven: examina la "anatomía" del tema y busca su sustancia. [8] y [7].

Muchos estudiosos han explorado la creatividad. Buscamos definir el proceso de creatividad como algo que se puede lograr universalmente. Cuando creamos hay un proceso general

que se propone que sea seguido universalmente por todos los artistas. Cabe destacar que este proceso se invierte para los consumidores y los críticos de arte.

Los artistas comienzan con gestos. El trazo de un bolígrafo o un pincel, una pirueta, el movimiento de los dedos ... Todos estos son gestos. No son primitivos ni sin sentido.

Los gestos se ajustan a algún tipo de proceso. El intérprete solo experimentará los hechos [9]. Su misión es tratar de comprender los procesos, los gestos y cómo constituyen el producto y mensaje final.

Esto significa que es importante mirar algo a través de todas sus evoluciones. Aquí está la declaración de Kinderman:

“Un escrutinio microscópico de los bocetos de acuerdo con una técnica analítica particular suele ser demasiado limitado para proporcionar mucha información sobre el proceso creativo; un enfoque más prometedor prestaría atención a las relaciones entre versiones sucesivas, ya que la comparación a veces revela una red de cambios compositivos.”

En términos de creatividad, la sexta variación es un objetivo creativo surgido de las características extensiones de la pared o muro de las primeras cinco variaciones del tema crítico del movimiento. El enfoque de Beethoven es intensivo. Busca en la "anatomía" del tema y busca su sustancia [9, Figura 20.2].

Las seis variaciones no son independientes del tema. Están dirigidos hacia el tema. Cada variación enfatiza un aspecto particular del tema. De esta forma, podemos ver que Beethoven no solo estaba interesado en establecer una pregunta abierta y dar contexto (el tema) sino que exhibía, suavizaba y ampliaba las fronteras con cada variación. [9].

Surgen preguntas como ésta: “¿Beethoven usó el tipo de reflexiones como las descritas en el modelo de modulación para interpretar las modulaciones en la partitura de la Op.106)?” Aun considerando los legados históricos secretos desconocidos y altamente improbables, la respuesta es claramente “¡No!”. Pero este definitivamente no es el discurso de nuestra labor. No estamos hablando de estrategias compositivas conscientes. Más bien nos enfrentamos al resultado de los esfuerzos compositivos: la partitura (el denotador) con los modelos de modulación actuales. Estamos, por así decirlo, en la posición del físico para investigar las leyes de la naturaleza sin saber nunca si, qué y cómo un ser divino o no pudo haber construido la naturaleza.

La realidad no es solo un conjunto de fenómenos, sino la totalidad de agentes que configuran la dinámica histórica del sistema. Son precisamente los estratos invisibles y contraintuitivos de un sistema los que suelen ser los responsables de su desarrollo. La ausencia de rastros conscientes de las construcciones modulatorias de Beethoven no explica estas modulaciones y, a fortiori, no explica la arquitectura global de estas modulaciones en el desarrollo de una gran pieza, como la Op. 106. Además, la increíble

organización y el proceso de tales obras maestras no pueden explicarse por factores biográficos, estas cosas son de una naturaleza mucho más fina que los hechos burdos de la vida de un compositor. E incluso si el compositor hubiera hecho declaraciones sobre su actividad creativa, esta sería solo una perspectiva sobre los datos neutrales (objetivos) de la obra. No hay garantía de que esta perspectiva deba ser la mejor posible. Es muy probable que las fuerzas intuitivas e ingeniosas cubran una gran mayoría de los casos característicos y destacados de la obra.

Recuerdo con emoción la conferencia de Guerino Mazzola en Atlanta, Georgia el año 2012 cuando ejemplifiqué interpretando en vivo estas maravillosas variaciones y él iba comentando al respecto. Por la noche ofrecí un concierto interpretando las dos sonatas con variaciones, la Op. 26 y la Op. 109.

La palabra “performance” significa, en español, actuación, ejecución, interpretación, realización, representación, ejecución musical o desempeño. Voy a convenir que “Musical performance” sea traducido como “Ejecución Musical” donde una de las acepciones de la palabra “ejecutar” es la de “tocar una pieza musical”.

Así que les diré que la Ejecución Musical es probablemente la más compleja rama de la Música. Se requiere del entrelazamiento de variados aspectos de la música. Esto para que el intérprete preparado no solamente ejecute la música con rectitud técnica y de estilo, sino que también sepa de las razones de su ejecución y qué es lo que realmente está haciendo, así como el por qué y para qué lo hace. De lo que se trata es de hacer del campo de la Ejecución Musical un campo científico, no del arte de la ejecución sino el del conocimiento de esta.

Recordemos que no se trata de hacer interpretaciones generadas por análisis de computadoras de las partituras a través de un MIDI o cualquier otro formato, sino que se trata del análisis, entendimiento, experimentación simulada de la ejecución, como una tarea intelectual, la cual puede inspirar al artista a nuevos acercamientos creativos y no como una actividad artística genuina.

La ejecución musical trata en general de la transformación de una partitura en una entidad física compuesta de sucesos acústicos junto con la concepción de los símbolos por parte del músico.

Sabemos algo del marco ontológico de la ejecución musical.

Hay que saber acerca de la Teoría de la Estructura de la Ejecución Musical la cual explica qué es el micro tiempo o agógica. Es el primer pilar de la Ejecución Musical. Nos describe qué clase de estructura es la Ejecución. Nos describe qué es la agógica, es decir, el transporte o movimiento o el conjunto de las ligeras modificaciones de tiempo, no escritas en la partitura, requeridas en la ejecución de una obra.

El segundo pilar de la Ejecución Musical es la Teoría de la Expresión Musical la cual investiga las razones analíticas, gestuales y emocionales para darle forma a una específica agógica de cierto pasaje de una partitura.

Hay muchísimos temas en la Ejecución Musical, en particular el de la Ejecución Inversa, el cual trata con la difícil cuestión de la variedad de razones que dan lugar a una ejecución. La Crítica Musical es de hecho una instancia de la ejecución inversa puesto que busca entender y validar una ejecución de un recital o de una grabación como una expresión de muchos antecedentes analíticos, gestuales y emocionales.

Hay muchos temas muy interesantes con respecto a la Ejecución Musical. Invito a ustedes a deleitarse con el libro Musical Performance [6] de Guerino Mazzola.

¿Cómo tocaba Beethoven?

Algunos consideran a Beethoven como el que rompió todas las reglas en aras de la "expresión" (palabra que vino a sustituir a la palabra "gusto" en el siglo XIX) y el que pensaba orquestalmente y logró efectos orquestales en el piano. La idea importaba más que su ejecución. Sus sonatas no están concebidas en términos pianísticos, pero más bien en términos de ideas expresadas en forma. Algunos de sus escritos pianísticos pueden ser alarmantemente difíciles, pero no son pianísticos. Beethoven fue un autodidacta. Primero era músico y después pianista.

Beethoven rompió más pianos que nadie en Viena. Czerny, quien comentaba de su ejecución titánica, excusa su actitud diciendo que demandaba demasiado de los pianos que entonces se hacían, lo cual es cierto y que también es una forma cortés de decir que sacaba a los demonios del piano a golpes.

Anton Schindler (biógrafo de Beethoven) admitió que sus interpretaciones dejaban mucho que desear vistas como interpretaciones puras. Sin embargo, agrega, que toda la música que él tocaba parecía una nueva creación. Estos efectos maravillosos, en gran parte, eran producidos por su legato uniforme, la cual era una de sus más notables peculiaridades al tocar. A nadie le importaba su pureza técnica excepto a Moscheles (1794-1870) el cual se quejaba de su carencia de precisión y claridad, aunque lo escuchó cuando ya estaba sordo en 1814. Sin embargo, hay mucha evidencia de cómo tocaba hasta 1805 cuando la sordera lo obligó a cortar el número de apariciones concertísticas. Al principio tenía una excelente técnica. Czerny dice que nadie lo igualaba en la velocidad de sus escalas, trinos dobles, etc., ni aún Hummel (1778-1837). Czerny, en 1803, decía que Beethoven mantenía el pedal derecho sostenido a lo largo de todo el movimiento lento del Concierto en do menor. Téngase en cuenta que entonces Beethoven utilizaba un piano vienés ligero, en el cual los sonidos emitidos rápidamente se disipaban. Sabemos que él utilizaba mucho el pedal a propósito como lo escribe en la Sonata Claro de Luna y la Tempestad. Asimismo, Czerny lo atestigua.

Su maestro Neefe lo inició con el Clave Temperado de Bach en lugar de con estudios técnicos, es decir, lo inició con la obra más importante hasta ese tiempo. Beethoven fue un gran improvisador y lector a primera vista. En 1782 ya era, a los 12 años, cembalista y violinista de orquesta. Demandaba más de lo que podían dar los instrumentos de su época. Seguramente hubiera sido muy feliz con un piano de nuestro tiempo. Los instrumentos de su época poseían teclas más angostas que las actuales con un mecanismo más ligero y con menos octavas. Czerny, su alumno, describe las manos de su maestro como estrechas, densamente cubiertas de vello, cuyos dedos, y en especial su tercera falange eran muy anchos, y que, con dificultad alcanzaba una décima de aquellos pianos. Su manera de tocar era bastante descuidada aún antes de su sordera. Tocaba como compositor.

Ferdinand Ries, otro de sus alumnos, describe la manera de tocar el piano de su maestro. Dice que, en general, tocaba sus propias composiciones en una forma muy caprichosa, pero que, sin embargo, mantenía un estricto tempo y que muy rara vez lo aceleraba. Cuando había un pasaje en crescendo introducía un pequeño ritardando produciendo un efecto hermoso e impactante. Rara vez introducía notas u ornamentos no escritos en una composición.

Sin embargo, Beethoven les pedía a sus alumnos que hicieran lo que él decía, no lo que él hacía. "Coloquen sus manos sobre el teclado en tal posición que los dedos no se levanten más de lo necesario, este es el único método para producir un buen sonido". Insistía en un toque legato, finalizando con ello el viejo estilo mozartiano. Todo el tiempo tenía particular atención acerca de la posición correcta de las manos. Continúa diciendo que "cuando un verdadero virtuoso toca, lo que se escucha es algo íntegro, algo completo. Uno puede considerarlo como un trabajo escrito con buena continuidad, eso es realmente tocar el piano, el resto no es nada". Así hablaba Beethoven. [11], [2], [4].

Les comento que la Filosofía de Yoneda, en palabras dice que, para comprender un objeto, de vueltas alrededor de él. Esto quiere decir, entendimiento mediante el cambio de perspectivas. En Matemática, el Lema de Yoneda tiene importantes aplicaciones en el Álgebra Homológica, en la Topología Algebraica, en la Geometría Algebraica y recientemente en la Teoría Matemática de la Música, solamente para mencionar algunas. Dice que un objeto matemático puede clasificarse salvo isomorfismo por su funtor. En Música, la partitura es solamente su primera vista y junto con todas sus interpretaciones constituyen su identidad. ¡Qué maravilloso punto de vista para ambos intérprete y audiencia! Deja de lado la estéril competencia fuera del arte y la ciencia, como si éstas fueran juegos olímpicos. Esto nos dice que la Sonata Op. 109 es el conjunto de notas impresas en el papel junto con todas las interpretaciones de los pianistas de esta obra. Les dejo meditar sobre esto.

Les comento que trabajé desde los años setenta del siglo pasado en la Teoría de la Homotopía, la Teoría de la Cohomología, la Topología Algebraica, el Álgebra Homológica, entre otros campos de la matemática. En la década de los setenta, estas fueron consideradas como Matemática Pura. Sin embargo, treinta y nueve años después, estas

maravillosas piezas de matemática se convierten en Matemática Aplicada y Tecnología y miren en dónde: en mi otro campo de pasión, la Música. Pero “ojo”, no sólo es aplicar la Matemática, es también, el crear nueva matemática dentro de la Teoría Matemática de la Música o Musicología Matemática.

Espero haber dado un brevísimo panorama sobre este tema, y dejado el dónde profundizar acerca de él para quien esté interesado. Les comento también que uno festeja su cumpleaños a partir de cuando ya se cumple el año (el hacerlo antes no implica que vaya uno a cumplir el año), de manera que espero que el 2021 podamos festejarlo como el “Año Beethoven”, si la pandemia, el virus y la responsabilidad e higiene de las personas nos dejan.

Deseo finalizar esta presentación estableciendo una vez más, que la Matemática es una de las "Bellas Artes", la más pura de ellas, que tiene el don de ser la más precisa y la precisión de las Ciencias.

Referencias

- [1] Beethoven, L. Sonatas Vol. 1 & Vol. 2. Urtext Henle Verlag.
- [2] Czerny, C. On the proper performance of all Beethoven's works for the piano. Op. 500. Wiener Urtext Ausgabe.
- [3] Horowitz, J. Conversations with Arrau. Limelight Editions. 1992.
- [4] Lluís-Puebla, E. Música, Matemática y Concertismo. 2011.
- [5] Mazzola G et al.: The Topos of Music—Geometric Logic of Concepts, Theory, and Performance. Birkhäuser, Basel et al. 2002.
- [6] Mazzola G: Musical Performance—A Comprehensive Approach: Theory, Analytical Tools, and Case Studies. Springer Series Computational Music Science, Heidelberg, 2010.
- [7] Mazzola G, J Park, F Thalmann: Musical Creativity. Springer, Heidelberg. 2011.
- [8] Mazzola G, M Mannone, Y Pang: Cool Math for Hot Music. Springer, Heidelberg. 2016.
- [9] Mazzola G, M Mannone, M O'Brien, Y Pang, N Torunsky: All About Music. Springer, Heidelberg. 2016.
- [10] Mazzola, G., Noer, J., Pang, Y., Yao, S., Afrisando Pujakusuma, G., Rochester, C., Neace, W.: The Future of Music. Springer. 2020.
- [11] Schonberg, H. The Great Pianists. Simon & Schuster. 1987.

Emilio Lluís-Puebla
Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias
Universidad Nacional Autónoma de México
www.EmilioLluis.org
emiliolluis@ciencias.unam.mx