

**Publicaciones Electrónicas
Instituto Mexicano de
Ciencias y Humanidades**

**Producto vectorial como herramienta
de desarrollo en la composición
microserial.**

**Raúl Novoa Castilla
Emilio Lluís-Puebla**

www.imch.org.mx

Academia de Ciencias. Vol. 7 (2026)



Producto vectorial como herramienta de desarrollo en la composición microserial.

Vectorial product as a tool for variation on microserial composition.

Raúl Novoa Castilla^a y Emilio Lluís-Puebla^b

^aMatemático independiente, México.

^bDepartamento de Matemáticas, Universidad Nacional Autónoma de México, Ciudad de México, México.

Resumen

En la técnica de composición musical conocida como *Serialismo* se utilizan series de doce sonidos, resultando así en un *Dodecafonismo serial*, sin embargo, esto se puede extender a series con menor número de sonidos, dependiendo de las estructuras musicales con las que se trabaje, lo cual se conoce como *Microserialismo*. Existen diversas técnicas de desarrollo en la composición serial –como el uso de las variantes contenidas en las matrices de series, o la derivación de series–, algunas de las cuales se pueden aplicar en la composición microserial. La propuesta de una nueva herramienta para el desarrollo de series de siete sonidos, en particular, consiste en una transformación de los elementos de la serie original S_0 por medio del uso del producto vectorial en siete dimensiones.

Palabras Clave: Producto vectorial · Microserialismo · Desarrollo musical

Abstract

In the composition technique known as Serialism, series of twelve sounds are used, resulting in serial Dodecaphonism, however, this can be extended to series with fewer sounds, depending on the musical structures being worked with, which is known as Microserialism. In serial composition there are various variation techniques –such as the use of variants contained in series matrices, or the derivation of series– some of which can be applied in microserial composition. The proposal for a new variation tool for seven-sound series, in particular, consists of a transformation of the elements of the original series S_0 by means of the use of the seven-dimensional vector product.

Keywords: *Vector product · Microserialism · Musical variation*

Antecedentes

Considerando un esquema de ‘desarrollo-clímax-decaimiento’ para la evolución de eventos físicos, biológicos o sociales, la *tonalidad* también siguió ese patrón desde el siglo XVII, cuando se dio el cambio de la modalidad a la tonalidad durante el período Barroco, pasando por su consolidación durante el Clasicismo, y su desarrollo hacia el uso de nuevas posibilidades durante el Romanticismo, hasta llegar a principios del siglo XX, cuando los compositores buscaron ampliar sus posibilidades creativas más allá del sistema heredado por la tradición musical europea. Así comenzaron a recurrir a nuevos elementos rítmicos, melódicos o armónicos, locales o exóticos, en un intento por ‘superar la tonalidad’ hasta llegar, finalmente, al concepto de la atonalidad.

Dodecafonismo y Serialismo

La segunda década del siglo XX vio el nacimiento y desarrollo de la atonalidad mediante el uso de series de doce sonidos. En los primeros años de esa década se publicaron escritos que ofrecían alguna visión sistemática del uso de la escala cromática para componer música atonal, en particular destacan los trabajos de Josef Matthias Hauer y Herbert Eimert (Covach 2002).

Hauer escribió *Zwölftongesetz* –Ley de los doce tonos– en 1920, así como algunas publicaciones acerca de su postura estética al respecto, en esos primeros años. En sus artículos *Sphärenmusik* –Música esférica– (1922) y *Tropenteufel* –Diablo tropical– (1924) menciona sus ‘44 tropes’, que eran pares de hexacordes, como una manera de clasificar algunas de las permutaciones de la escala cromática (Friepertinger y Lackner 2015) que son, aproximadamente, 480 millones.

En 1924, Herbert Eimert publicó *Atonale Musiklehre* –Teoría de la música atonal–, que es un breve pero importante tratado temprano de Teoría Dodecafónica, por el cual tuvo que abandonar el Conservatorio de Colonia, bajo acusaciones de ser un “frívolo ignorante” (Oesch 1975). Años más tarde, Eimert sería el coeditor de la revista *Die Reihe* –The Row, El Renglón– de 1955 a 1962, junto con Karlheinz Stockhausen.

Mientras los escritos de Hauer tenían un enfoque ‘espiritual’, el de Eimert era más pragmático; quizá eso haya influido en Hauer, quien después publicó sus libros *Vom Metos zur Pauke* –De Metos a Timpani– y *Zwölftontechnik* –Técnica dodecafónica–. Sin embargo, el crédito se lo llevó la llamada Segunda Escuela de Viena.

En esos años, Arnold Schönberg estaba trabajando en la misma idea. Hacia 1923 empezó a compartir los resultados con sus alumnos, y para 1924 se mencionan en el artículo *Neue Formprinzipien* –Nuevos principios de diseño– de Erwin Stein. El mismo Schönberg escribió, en 1934, *Composition with Twelve Tones* para una conferencia en Princeton, aunque se publicó hasta 1950. Un dato interesante es que Schönberg y Hauer llegaron a platicar sobre una colaboración para la enseñanza y la difusión del dodecafonismo, pero Schönberg se fue a Berlín en 1926, y no se concretó nada (Covach 2002).

El método de ‘composición con doce sonidos’ de Schönberg estaba sustentado en cuatro axiomas (Domínguez Romero 2004):

1. Una *serie* está constituida por los doce sonidos de la escala cromática.
2. Ningún sonido puede aparecer más de una vez en la *serie*.
3. La *serie* se puede exponer en cualquiera de sus direcciones melódicas: directa, retrógrada, invertida y retrógrada-invertida.
4. La *serie*, en sus cuatro direcciones, puede ser utilizada a partir de cualquiera de los sonidos.

Hay muchas aportaciones para el desarrollo del Serialismo, y a pesar de las insalvables omisiones, algunos nombres importantes son: Anton Webern, Alban Berg, Pierre Boulez, Karlheinz Stockhausen, Ernst Krenek, George Perle, Milton Babbitt, David Lewin, por mencionar sólo algunos.

Aportes matemáticos a la Teoría Musical

Robert Morris menciona que algunos tratamientos matemáticos de temas seriales fueron ignorados hasta que la teoría musical, en conjunto, se actualizó con respecto al uso de lenguaje y conceptos matemáticos (Morris 2007). Por ejemplo, Walter O’Connell escribió un artículo en Die Reihe 8, 1968, el cual ha sido ignorado por teóricos y compositores, en el que, entre otros temas, da cuenta de las operaciones multiplicativas de clases de tono –*pitch-classes*–. Es probable que muchas propuestas en este sentido no hayan sido publicadas, o bien, que hayan sido criticadas como irrelevantes para el estudio musical.

Morris también comenta que quizá el desarrollo más importante en la teoría dodecafónica sean las matrices de invarianza, llamadas T e I, propuestas por Bo Alphonse en 1974, que permiten observar propiedades de pares de conjuntos ordenados y no ordenados, además de tener otros usos, que permiten verificar otras propuestas o evidenciar patrones en el análisis.

Posteriormente, y con inevitables omisiones, se pueden encontrar aportaciones relevantes en la comunión entre Música y Matemática que hicieron teóricos como David Lewin, con su Teoría Transformacional, que implica la aplicación de Teoría de Grupos a la Música (Lewin 1980); Allen Forte (Forte 1973), Wallace Berry (Berry 1987) y Joseph N. Strauss (Straus 1989), con el análisis para música post-tonal; Julio Estrada y Jorge Gil, con un intento por reformular la Teoría Musical desde sus simetrías asociadas a un álgebra de Boole y sintaxis musical (Estrada y Gil 1984); y Guerino Mazzola con sus libros, entre ellos, “The Topos of Music” (Mazzola 2002), quienes, junto con algunos otros teóricos, asentaron las bases para la Teoría Matemática de la Música.

La Escala Cromática y el conjunto \mathbb{Z}_{12}

El estudio de las relaciones entre los sonidos musicales se facilita cuando se activan ciertas equivalencias, para no trabajar en distintos *índices acústicos* y con distintas *enarmonías*. Cuando está activa la *equivalencia de octava*, nos referimos a un sonido en general, sin importar su *altura* o índice. Cuando se utiliza la *equivalencia enarmónica*, no importa el nombre que se le asigne a un sonido, sino su ubicación en la *escala cromática* que proviene del temperamento igual de doce sonidos –TET, en inglés–.

Como se muestra a continuación, la *escala cromática* puede tener una relación de uno a uno con los elementos del conjunto \mathbb{Z}_{12} , que es el conjunto de los primeros 12 números enteros positivos, es decir $\mathbb{Z}_{12} = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\}$.

Figura 1. Relación entre los elementos de \mathbb{Z}_{12} y los elementos de la escala cromática.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
C	$\frac{C^\#}{D^b}$	D	$\frac{D^\#}{E^b}$	E	F	$\frac{F^\#}{G^b}$	G	$\frac{G^\#}{A^b}$	A	$\frac{A^\#}{B^b}$	B

Cada número representa un sonido de la escala, y cada uno de ellos es una *clase de equivalencia* para los mismos sonidos en las diferentes octavas –*pitch classes*–. Por eso, es importante recordar que las operaciones matemáticas se trabajarán bajo congruencia módulo 12.

Para comenzar a incorporar el lenguaje y notación matemática al servicio del análisis musical, será necesaria la introducción de algunos conceptos que provienen del Álgebra Abstracta. Las operaciones musicales pueden ser modeladas por medio de la Teoría de Grupos, aunque más adelante se requiera hacer uso de Teoría de Anillos o, por lo menos, de un Grupo con operadores.

Definiciones

\mathbb{Z}_{12} con la operación binaria suma o adición (+) es un grupo abeliano $(\mathbb{Z}_{12}, +)$, por lo que se requerirá la introducción de algunos conceptos.

Definición 1. Un *grupo* es una dupla $(G,+)$ donde G es un conjunto no vacío y $+: G \times G \rightarrow G$ es una *operación binaria* tal que $(u, v) \rightarrow +(u, v)$; que se acostumbra escribir $+(u, v) = u + v$, la cual debe cumplir con ciertas propiedades:

- i) *Asociatividad* de la operación: $+(+(u, v), w) = +(u, +(v, w))$ es decir,
 $(u + v) + w = u + (v + w)$
- ii) Existencia del *elemento neutro* o identidad: $+(u, e) = u + e = e + u = u$

iii) Existencia del *elemento inverso*: para todo $u \in G$, existe $(-u) \in G$ tal que $+(u, -u) = u + (-u) = e$

Se dice que el grupo es *conmutativo* o *abeliano* si además satisface...

iv) $+(u, v) = +(v, u)$, es decir, $u + v = v + u$

Para relacionar dos grupos es necesario definir una función que preserve sus estructuras.

Definición 2. Sean (G, \diamond) y (G', \star) dos grupos. Un *homomorfismo de grupos* es una función $f : G \rightarrow G'$ tal que $f(u \diamond v) = f(u) \star f(v)$.

Se requerirán, además, las definiciones de *acción* y de *grupo con operadores*.

Definición 3. Sean Ω y G dos conjuntos. Una *acción* de Ω en G es una función $f : \Omega \times G \rightarrow G$.

Definición 4. Sea Ω un conjunto. Un grupo (G, \circ) junto con una acción de Ω en (G, \circ) se llama *grupo con operadores en Ω*

$$\begin{aligned} \circ : \Omega \times G &\rightarrow G \\ (\alpha, x) &\mapsto \alpha \circ x = x^\alpha \end{aligned}$$

y además cumple con la propiedad distributiva con respecto a la *operación binaria* de (G, \circ) .

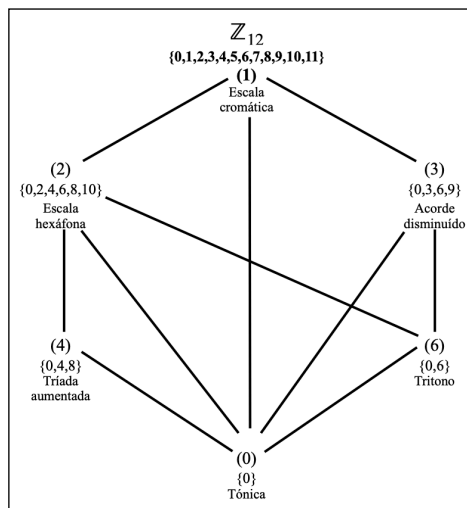
En un grupo G con operadores en Ω , cada elemento de Ω –llamado *operador*– define un *endomorfismo* del grupo G –es decir, un homomorfismo de $G \rightarrow G$ –. Considérese $\Omega = \mathbb{Z}$ y para $x \in G, n \in \mathbb{Z}$, se define

$$\begin{aligned} \circ : \mathbb{Z} \times G &\rightarrow G \\ (n, x) &\mapsto n \circ x = x^n \end{aligned}$$

Si G es abeliano se tiene que $n(xy) = (xy)^n = x^n y^n = (nx)(ny)$. Luego, todo grupo abeliano G puede verse como un grupo con operadores en \mathbb{Z} (Agustín-Aquino et al. 2009).

El siguiente es el diagrama de contención o *red de subgrupos* de \mathbb{Z}_{12} con sus equivalencias en la Teoría Musical.

Figura 2. Red de subgrupos de \mathbb{Z}_{12} con sus equivalencias musicales



Más adelante serán necesarias también las siguientes definiciones.

Definición 5. Un *álgebra con división* sobre un campo K es un álgebra A sobre K tal que

- i) A es un espacio vectorial sobre K ;
- ii) Hay una multiplicación definida en A –no necesariamente multiplicativa–;
- iii) Para todo elemento $a \in A$ distinto de cero, existen inversos $a^{-1} \in A$ tales que $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$.

Definición 6. El producto vectorial en siete dimensiones, se define como una operación binaria: $\times : \mathbb{R}^7 \times \mathbb{R}^7 \rightarrow \mathbb{R}^7$ tal que para vectores $u, v \in \mathbb{R}^7$, se cumple:

- i) $u \times v$ es ortogonal a u y a v
 - ii) $|u \times v| = |u| \cdot |v| \cdot \sin \theta$
- y la operación no es asociativa.

Operadores musicales

La palabra *operador* es polisémica y puede ser utilizada en diversas disciplinas, lo que puede llevar a posibles confusiones, sin embargo, la idea en común es que “algo actúa sobre otra cosa para producir un resultado”.

De esta manera, se puede decir que un *operador musical* es una entidad –función, regla, acción o transformación– que actúa sobre un conjunto de elementos dentro de alguna estructura musical – intervalos, acordes, escalas, motivos–, produciendo como resultado una modificación, combinación o reinterpretación de dichos elementos. De manera simple se podría ver como una entidad que transforma estructuras musicales.

Como ejemplos estarían el operador de *transposición*, los operadores de *cambios en la dirección melódica* –inversión y retrogradación–, incluso la *modulación* podría considerarse como el efecto de un operador que actúa sobre un centro tonal.

En lo sucesivo, cuando se utilice el término *operador*, se deberá entender el contexto para saber si se refiere a un operador matemático o a uno musical.

El operador de transposición (T_n)

Una operación común en la música consiste en ‘transportar’ una idea musical, de manera que se le pueda reconocer, pero en un registro más grave o más agudo. Eso que los músicos llaman *transportación*, en matemática corresponde a una *transposición*.

Considere $X \subseteq \mathbb{Z}_{12}$ donde $X = \{x_1, x_2, \dots, x_i\} | x_1, x_2, \dots, x_i \in \mathbb{Z}_{12}, i \in \mathbb{N}$, ya que X puede ser cualquier estructura musical. Una *transposición* es una función $T_n : \mathbb{Z}_{12} \rightarrow \mathbb{Z}_{12}$ dada por: $T_n(x) = x + n$, de manera que $T_n(X) = \{x_1 + n, x_2 + n, \dots, x_i + n\}$ donde $n \in \mathbb{Z}_{12}$. Dado que se

trabaja con la equivalencia de octava, porque las operaciones son *módulo 12*, en general, $T_{-n} = T_{12-n}$ (Agustín-Aquino et al. 2009).

El operador de inversión (I_n)

Musicalmente, se invierte la dirección de los intervalos de alguna estructura musical –escala, acorde, motivo, etc.–, como si fuera su imagen en un espejo. Para ello, se elige algún sonido que funcionará como *eje de la inversión*.

Es importante aclarar que, al hacer una *inversión*, se tienen dos posibilidades (Novoa 2022):

- que únicamente se tome en cuenta el *tipo* de los intervalos, por lo que se respetarán los sonidos de la escala de trabajo –musicalmente se habla de ‘respetar la armadura’–, y entonces se trata de una *inversión diatónica*;

Figura 3. Ejemplo de inversión diatónica.



- que se respete también la cualidad de los intervalos, lo cual comúnmente llevará a la introducción de sonidos ajenos a la escala –o a la armadura–, los cuales se conocen como *cromatismos*, porque provienen de la escala cromática, y entonces se trata de una *inversión interválica*.

Figura 4. Ejemplo de inversión interválica.



Aunque es posible modelar las inversiones diatónicas, las que se están modelando matemáticamente en este trabajo son *interválicas*, y su operador se define de la siguiente manera (Agustín-Aquino et al. 2009):

Sea $X \subseteq \mathbb{Z}_{12}$ donde $X = \{x_1, x_2, \dots, x_i\} \mid x_1, x_2, \dots, x_i \in \mathbb{Z}_{12}, i \in \mathbb{N}\}$. Una *inversión interválica* es una función $I_n : \mathbb{Z}_{12} \rightarrow \mathbb{Z}_{12}$ dada por $I_n(X) = \{-x_1 + n, -x_2 + n, \dots, -x_i + n\}$ en

donde $n \in \mathbb{Z}_{12}$, de manera que $I_n(X) = \{I_0(X), I_1(X), I_2(X), \dots, I_{12}(X)\}$. En todo momento, se expresa el resultado de la inversión en módulo 12.


Ejes de inversión

$I_0(X)$ es la inversión con respecto a 0 como eje de la misma, y las demás inversiones resultan ser transposiciones de $I_0(X)$, de manera que $T_n \circ I_0 = I_n \pmod{12}$; sin embargo, cada una de ellas resultará ser la inversión con respecto a algún eje en particular, y esos sonidos, si están presentes, permanecerán invariables (Novoa 2022).

Tomando como ejemplo el motivo $M = \{E, F, G, C\} = \{4, 5, 7, 0\}$, se tiene lo siguiente:

- $I_0(M) = \{8,7,5,0\}$, el eje de inversión es 0, en este caso, el último sonido.
- $I_1(M) = \{9,8,6,1\}$.
- $I_2(M) = \{10,9,7,2\}$, el eje de inversión es 7, en este caso, el tercer sonido.
- $I_3(M) = \{11,10,8,3\}$.
- $I_4(M) = \{0,11,9,4\}$.
- $I_5(M) = \{1,0,10,5\}$.
- $I_6(M) = \{2,1,11,6\}$.
- $I_7(M) = \{3,2,0,7\}$.
- $I_8(M) = \{4,3,1,8\}$, el eje de inversión es 4, en este caso, el primer sonido.
- $I_9(M) = \{5,4,2,9\}$.
- $I_{10}(M) = \{6,5,3,10\}$, el eje de inversión es 5, en este caso, el segundo sonido.
- $I_{11}(M) = \{7,6,4,11\}$.

Figura 5. Resultado de distintos operadores I_n en un mismo motivo.



$M = \{4, 5, 7, 0\}$ $I_8(M) = \{4, 3, 1, 8\}$ $I_{10}(M) = \{6, 5, 3, 10\}$ $I_2(M) = \{10, 9, 7, 2\}$ $I_0(M) = \{8, 7, 5, 0\}$

Si se desea encontrar el operador de inversión (I_n) adecuado para que un sonido en particular (x) funcione como eje de inversión (e_{I_n}), hay que calcular el valor de n , de acuerdo con la siguiente fórmula: para $e_{I_n} = x$, $n = 2x \pmod{12}$. Es claro que el valor de $(-x + n)$ debe ser igual a $x \pmod{12}$, por lo que $(-x + n) = x \rightarrow n = 2x$.

Para los ejemplos anteriores,

- si $e_{I_n} = 4 \rightarrow n = 2(4) = 8 \rightarrow I_8$

- si $e_{I_n} = 5 \rightarrow n = 2(5) = 10 \rightarrow I_{10}$
- si $e_{I_n} = 7 \rightarrow n = 2(7) = 14 \equiv 2 \pmod{12} \rightarrow I_2$
- si $e_{I_n} = 0 \rightarrow n = 2(0) = 0 \rightarrow I_0$

Series dodecafónicas

Como la escala cromática es $EC = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\}$, considérese a \mathcal{P}_{12} como el conjunto de todas las permutaciones de la escala cromática –que también son las permutaciones de \mathbb{Z}_{12} –. Una *serie dodecafónica* S es una permutación en \mathcal{P}_{12} , o sea, $S_i \in \mathcal{P}_{12}$, y su cardinalidad, es decir, el número de todas las posibles series dodecafónicas, es $|\mathcal{P}_{12}| = 12! = 479'001,600$. Por ejemplo, se tiene la serie

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 2 & 0 & 11 & 3 & 10 & 9 & 4 & 5 & 6 & 8 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

La permutación manda números del renglón de arriba –que en este caso es la escala cromática– a números del renglón de abajo –el resultado de la permutación–.

Adicionalmente, cuando el renglón de arriba corresponde con la escala cromática en orden ascendente –como en este ejemplo–, también se le conoce como el *orden de presentación* de la serie, y hace referencia al orden de aparición de los elementos del renglón de abajo, que es el conjunto de sonidos que conforman una serie dodecafónica, en algún pasaje de una obra musical.

En una obra serial, el ‘tema’ está conformado por la llamada serie original, cifrada como S_0 , aunque también se puede encontrar como P_0 , pero aquí la “P” se usará para otra designación.

El conjunto TI

El conjunto de todas las funciones de transposición e inversión se denota con TI y se define como $TI = \{T_n, I_n | n = 0,1,\dots,11\}$ y se tienen las siguientes relaciones:

$$i) T_m \circ T_n = T_{m+n} \pmod{12}$$

$$ii) T_m \circ I_n = I_{m+n} \pmod{12}$$

$$iii) I_m \circ T_n = I_{m-n} \pmod{12}$$

$$iv) I_m \circ I_n = T_{m-n} \pmod{12}$$

en donde se puede verificar que se cumple cada una de ellas...

$$\begin{aligned} i) T_m \circ T_n(\{a, b, c\}) &= T_m(\{a+n, b+n, c+n\}) \\ &= \{a+n+m, b+n+m, c+n+m\} \\ &= \{a+(n+m), b+(n+m), c+(n+m)\} \\ &= \{a+(m+n), b+(m+n), c+(m+n)\} \\ &= T_{m+n}(\{a, b, c\}) \pmod{12} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{ii) } T_m \circ I_n(\{a, b, c\}) &= T_m(\{-a + n, -b + n, -c + n\}) \\
&= \{-a + n + m, -b + n + m, -c + n + m\} \\
&= \{-a + (n + m), -b + (n + m), -c + (n + m)\} \\
&= \{-a + (m + n), -b + (m + n), -c + (m + n)\} \\
&= I_{m+n}(\{a, b, c\}) \pmod{12}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{iii) } I_m \circ T_n(\{a, b, c\}) &= I_m(\{a + n, b + n, c + n\}) \\
&= \{-(a + n) + m, -(b + n) + m, -(c + n) + m\} \\
&= \{-a - n + m, -b - n + m, -c - n + m\} \\
&= \{-a + (m - n), -b + (m - n), -c + (m - n)\} \\
&= I_{m-n}(\{a, b, c\}) \pmod{12}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{iv) } I_m \circ I_n(\{a, b, c\}) &= I_m(\{-a + n, -b + n, -c + n\}) \\
&= \{-(-a + n) + m, -(-b + n) + m, -(-c + n) + m\} \\
&= \{a - n + m, b - n + m, c - n + m\} \\
&= \{a + (m - n), b + (m - n), c + (m - n)\} \\
&= T_{m-n}(\{a, b, c\}) \pmod{12}.
\end{aligned}$$

El conjunto TI satisface las propiedades requeridas para formar un grupo bajo la composición de funciones (Agustín-Aquino et al. 2009).

Dirección de una línea melódica

Entre las técnicas utilizadas en el *desarrollo musical*, están aquellas que modifican la dirección de la línea melódica, que por sí misma lleva *movimiento directo*, sin embargo, es posible presentar la melodía en orden inverso, lo cual se conoce como *movimiento retrógrado*. También se pueden invertir los intervalos del *tema* con respecto a un eje de inversión, a esto se le llama *movimiento invertido* –en el modelado matemático, el eje por omisión es $0 = C = Do$, y la inversión es *interválica*–. Finalmente, se puede hacer una combinación de estas direcciones para obtener un *movimiento retrógrado-invertido*. Stravinsky prefería usar IR, es decir, la inversión del retrógrado (Covach 2002), que en la Tabla 1 corresponde con $RI_0(S_0)$.

Es posible definir las cuatro direcciones melódicas de una *serie* –o una línea melódica, en general– como las funciones *inversión* (I_s), *retrogradación* (R) y *retrogradación con inversión* (RI), siendo el movimiento directo la *identidad* ($\text{id}_{\mathcal{F}(n)}$), de la siguiente manera (Agustín-Aquino et al. 2009):

$$\begin{aligned}
I_s : \mathcal{F}(n) &\mapsto \mathcal{F}(n) \\
\{x_i\}_{i=1}^n &\mapsto \{y_i = 2s - x_i\}_{i=1}^n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R : \mathcal{T}(n) &\mapsto \mathcal{T}(n) \\
\{x_i\}_{i=1}^n &\mapsto \{y_i = x_{n-i+1}\}_{i=1}^n \\
RI_s : \mathcal{T}(n) &\mapsto \mathcal{T}(n) \\
\{x_i\}_{i=1}^n &\mapsto \{y_i = 2s - x_{n-i+1}\}_{i=1}^n
\end{aligned}$$

Se puede observar que

$$\begin{aligned}
I_s \circ R(\{x_i\}_{i=1}^n) &= I_s(\{y_i = x_{n-i+1}\}_{i=1}^n) \\
&= \{w_i = 2s - y_i\}_{i=1}^n \\
&= \{w_i = 2s - x_{n-i+1}\}_{i=1}^n = IR_s \\
&= \{w_i = y_{n-i+1}\}_{i=1}^n \\
&= R(\{y_i = 2s - x_i\}_{i=1}^n) = R \circ I_s(\{x_i\}_{i=1}^n)
\end{aligned}$$

de donde se concluye que $I_s \circ R = IR_s = R \circ I_s$.

Se puede verificar que $I_s \circ I_s = R \circ R = IR_s \circ IR_s = \text{id}_{\mathcal{T}(n)}$, y que se cumple con las propiedades de grupo, por lo que la composición de funciones restringida al conjunto $\mathcal{ST}_s = \{I_s, R, IR_s, \text{id}_{\mathcal{T}(n)}\}$, es un grupo (\mathcal{ST}_s, \circ) bajo la operación binaria \circ (Agustín-Aquino et al. 2009), como se muestra a continuación.

i) Propiedad asociativa

$$\begin{aligned}
(I_s \circ R) \circ RI_s &= I_s \circ (R \circ RI_s) \\
(I_s \circ \{y_i = x_{n-i+1}\}_{i=1}^n) \circ RI_s &= I_s \circ (R \circ \{y_i = 2s - x_{n-i+1}\}_{i=1}^n) \\
(\{w_i = 2s - y_i\}_{i=1}^n) \circ RI_s &= I_s \circ (\{w_i = y_{n-i+1}\}_{i=1}^n) \\
(\{w_i = 2s - (x_{n-i+1})\}_{i=1}^n) \circ RI_s &= I_s \circ (\{2s - x_{n-(n-i+1)+1}\}_{i=1}^n) \\
(\{2s - x_{n-i+1}\}_{i=1}^n) \circ RI_s &= I_s \circ (\{2s - x_i\}_{i=1}^n) \\
(\{2s - x_{n-i+1}\}_{i=1}^n) \circ (\{2s - x_{n-i+1}\}_{i=1}^n) &= I_s \circ (\{2s - x_i\}_{i=1}^n) \\
(\{2s - (2s - x_{n-(n-i+1)+1})\}_{i=1}^n) &= (\{2s - (2s - x_i)\}_{i=1}^n) \\
\{x_i\}_{i=1}^n &= \{x_i\}_{i=1}^n \\
id_{\tau(n)} &= id_{\tau(n)}
\end{aligned}$$

ii) Elemento neutro

$$\begin{aligned}
\{x_i\}_{i=1}^n \circ I_s &= \{x_i\}_{i=1}^n \circ \{y_i = 2s - x_i\}_{i=1}^n \\
&= \{w_i = y_i\}_{i=1}^n \\
&= \{2s - x_i\}_{i=1}^n \\
&= I_s
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\{x_i\}_{i=1}^n \circ R &= \{x_i\}_{i=1}^n \circ \{y_i = x_{n-i+1}\}_{i=1}^n \\
&= \{w_i = y_i\}_{i=1}^n \\
&= \{x_{n-i+1}\}_{i=1}^n \\
&= R
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\{x_i\}_{i=1}^n \circ RI_s &= \{x_i\}_{i=1}^n \circ \{y_i = 2s - x_{n-i+1}\}_{i=1}^n \\
&= \{w_i = y_i\}_{i=1}^n \\
&= \{2s - x_{n-i+1}\}_{i=1}^n \\
&= RI_s
\end{aligned}$$

Por lo que $\{x_i\}_{i=1}^n = id_{\tau(n)}$.

iii) Inversos de los elementos bajo operación

$$\begin{aligned}
I_s \circ I_s &= I_s \circ (\{y_i = 2s - x_i\}_{i=1}^n) \\
&= \{w_i = 2s - (2s - x_i)\}_{i=1}^n \\
&= \{w_i = x_i\}_{i=1}^n \\
&= \{x_i\}_{i=1}^n = id_{\tau(n)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R \circ R &= R \circ (\{y_i = x_{n-i+1}\}_{i=1}^n) \\
&= \{w_i = y_{n-i+1}\}_{i=1}^n \\
&= \{w_i = x_{n-(n-i+1)+1}\}_{i=1}^n \\
&= \{x_i\}_{i=1}^n = id_{\tau(n)}
\end{aligned}$$

Aprovechando las propiedades anteriores

$$\begin{aligned}
IR_s \circ IR_s &= (R \circ I_s) \circ (R \circ I_s) \\
&= R \circ (I_s \circ (I_s \circ R)) \\
&= R \circ ((I_s \circ I_s) \circ R) \\
&= R \circ (id_{\tau(n)} \circ R) \\
&= R \circ R \\
&= id_{\tau(n)}
\end{aligned}$$

De manera que los inversos de I_s, R, IR_s son ellos mismos.

Con esto queda demostrado que el conjunto $\mathcal{S}\mathcal{T}_s = \{I_s, R, IR_s, id_{\mathcal{T}(n)}\}$ es un grupo bajo la operación binaria \circ ■

Es importante observar que el subíndice de la función de inversión (I_s) no es igual que el del operador (I_n), pues en aquel caso se refería al número de semitonos que se transponía la inversión I_0 , mientras que, en este caso, se refiere directamente al sonido que funciona como el eje de la inversión interválica.

Grupo con operadores

Considérese el grupo $(\mathbb{Z}_{12}, +)$. Los generadores de \mathbb{Z}_{12} son los elementos j tales que $(12, j) = 1$, o sea, $j = 1, 5, 7, 11$ –los elementos de \mathbb{Z}_{12} con inverso multiplicativo–, por lo que $\mathbb{Z}_{12} = (1) = (5) = (7) = (11)$. Sea $GL(\mathbb{Z}_{12}) = \{1, 5, 7, 11\} \subseteq \mathbb{Z}_{12}$. Si $G = (\mathbb{Z}_{12}, +)$, entonces se define la acción

$$\circ : GL(\mathbb{Z}_{12}) \times \mathbb{Z}_{12} \rightarrow \mathbb{Z}_{12}$$

$$(u, x) \mapsto ux$$

se tiene, entonces, que \mathbb{Z}_{12} es un grupo con operadores en $GL(\mathbb{Z}_{12})$. De hecho

$$\circ(u, x + y) = \circ(u, x) + \circ(u, y) = ux + uy = u(x + y)$$

El conjunto de operadores $GL(\mathbb{Z}_{12})$ es un grupo bajo la multiplicación en \mathbb{Z}_{12} –que es la escala cromática–. (Agustín-Aquino et al. 2009)

El operador de transformación por multiplicación P_n

Cuando se utiliza la matriz aditiva de series, que se ejemplifica en la Tabla 1, se trabaja con el grupo abeliano $(\mathbb{Z}_{12}, +)$. Sin embargo, es posible ir más lejos, bien usando el *grupo con operadores* $GL(\mathbb{Z}_{12})$, o bien, considerando al conjunto \mathbb{Z}_{12} con dos composiciones internas, que corresponde con la estructura algebraica conocida como *anillo*. En cualquier caso, nos interesa la operación " \cdot " y los operadores de *transformación por multiplicación* que se obtienen con los elementos de $GL(\mathbb{Z}_{12})$.

Se define el operador $P_n = \{n \cdot x \pmod{12} \mid n, x \in \mathbb{Z}_{12}\}$, entonces se puede verificar lo siguiente, que está relacionado con la Figura 2:

Figura 6. Resultados de los operadores P_n sobre \mathbb{Z}_{12} .

$P_0(x) = \langle \bar{0} \rangle = \{0\}$	
$P_1(x) = Id = \mathbb{Z}_{12}$ = {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11}	$P_{11} = I_0(P_1(x))$ = {0,11,10,9,8,7,6,5,4,3,2,1}
$P_2(x) = \langle \bar{2} \rangle = \{0,2,4,6,8,10\}$ = escala hexáfona	$P_{10} = I_0(P_2(x))$
$P_3(x) = \langle \bar{3} \rangle = \{0,3,6,9\}$ = acorde disminuído	$P_9(x) = I_0(P_3(x))$
$P_4(x) = \langle \bar{4} \rangle = \{0,4,8\}$ = tríada aumentada	$P_8(x) = I_0(P_4(x))$
$P_5(x) = \{0,5,10,3,8,1,6,11,4,9,2,7\}$	$P_7(x) = \{0,7,2,9,4,11,6,1,8,3,10,5\}$ = $I_0(P_5(x))$
$P_6(x) = \langle \bar{6} \rangle = \{0,6\} = \text{trítono}$	

Se comentó que 1, 5, 7 y 11 eran los generadores de \mathbb{Z}_{12} , y como se puede apreciar en la Figura 6, esto es congruente con los resultados para los operadores P_1, P_5, P_7 y P_{11} –se usó P por “producto”, aunque se pueden encontrar como M por “multiplicación”–. Como estos son los operadores que resultan de interés práctico, se define $M = \{P_1, P_5, P_7, P_{11}\} \subset P_n$. A continuación se presentan los resultados de estos operadores sobre la serie $S_0 = \{2,0,11,3,10,9,4,5,6,8,7,1\}$.

Figura 7. Resultados de los operadores P_1 , P_5 , P_7 y P_{11} sobre S_0 .

$P_1(S_0) = \{2,0,11,3,10,9,4,5,6,8,7,1\}$
$P_5(S_0) = \{10,0,7,3,2,9,8,1,6,4,11,5\}$
$P_7(S_0) = \{2,0,5,9,10,3,4,11,6,8,1,7\}$
$P_{11}(S_0) = \{10,0,1,9,2,3,8,7,6,4,5,11\}$

El conjunto de operadores M es muy importante ya que, como se puede apreciar en la Tabla 2, proporciona cuatro operadores P_n de mucha utilidad, pues P_1 es la *identidad* –conserva a S_0 sin alteraciones–, P_{11} es el *operador de inversión* con respecto al elemento 0, es decir, $P_{11} = I_0$, por lo que la multiplicación por $-1 = 11$ es equivalente a invertir los intervalos con respecto al sonido $Do = C = 0$. Por otra parte, P_5 y P_7 son necesarios para la matriz multiplicativa de series.

Técnicas de desarrollo o variación serial

De manera simplificada se mencionarán las principales técnicas utilizadas para el manejo de series en el desarrollo de la música serial, lo cual incluye tanto las *matrices de series*, como la técnica de *derivación de series* y sus consecuencias.

Variantes de las matrices seriales

En primer lugar se deben considerar las matrices de series derivadas de la serie original S_0 , y esto incluye a la tradicional matriz de series, que hace uso de la operación adición, por lo que aquí se le llama *matriz aditiva de series*, así como la menos conocida y utilizada, que emplea la operación producto, y aquí se le llama *matriz multiplicativa de series*.

La primera de ellas, ampliamente utilizada, consiste en considerar las cuatro direcciones melódicas de una serie –directo, retrógrado, invertido y retrógrado-invertido– y realizar todas sus transposiciones T_n , con lo que se obtiene un total de $12 \times 4 = 48$ series. Los movimientos directos van de izquierda a derecha, en tanto que los retrógrados van en sentido contrario; las inversiones van de arriba hacia abajo, mientras que en sentido opuesto se tienen las retrogradaciones invertidas, como se muestra en la Tabla 1.

Tabla 1. Matriz aditiva de series para $S_0 = \{2,0,11,3,10,9,4,5,6,8,7,1\}$.

	$I_4(S_0)$	$I_2(S_0)$	$I_1(S_0)$	$I_5(S_0)$	$I_0(S_0)$	$I_{11}(S_0)$	$I_6(S_0)$	$I_7(S_0)$	$I_8(S_0)$	$I_{10}(S_0)$	$I_9(S_0)$	$I_3(S_0)$	
S_0	2	0	11	3	10	9	4	5	6	8	7	1	RS_0
$T_2(S_0)$	4	2	1	5	0	11	6	7	8	10	9	3	$RT_2(S_0)$
$T_3(S_0)$	5	3	2	6	1	0	7	8	9	11	10	4	$RT_3(S_0)$
$T_{11}(S_0)$	1	11	10	2	9	8	3	4	5	7	6	0	$RT_{11}(S_0)$
$T_4(S_0)$	6	4	3	7	2	1	8	9	10	0	11	5	$RT_4(S_0)$
$T_5(S_0)$	7	5	4	8	3	2	9	10	11	1	0	6	$RT_5(S_0)$
$T_{10}(S_0)$	0	10	9	1	8	7	2	3	4	6	5	11	$RT_{10}(S_0)$
$T_9(S_0)$	11	9	8	0	7	6	1	2	3	5	4	10	$RT_9(S_0)$
$T_8(S_0)$	10	8	7	11	6	5	0	1	2	4	3	9	$RT_8(S_0)$
$T_6(S_0)$	8	6	5	9	4	3	10	11	0	2	1	7	$RT_6(S_0)$
$T_7(S_0)$	9	7	6	10	5	4	11	0	1	3	2	8	$RT_7(S_0)$
$T_1(S_0)$	3	1	0	4	11	10	5	6	7	9	8	2	$RT_1(S_0)$
	$RI_4(S_0)$	$RI_2(S_0)$	$RI_1(S_0)$	$RI_5(S_0)$	$RI_0(S_0)$	$RI_{11}(S_0)$	$RI_6(S_0)$	$RI_7(S_0)$	$RI_8(S_0)$	$RI_{10}(S_0)$	$RI_9(S_0)$	$RI_3(S_0)$	

En 1952, Eimert publicó su libro *Lehrbuch der Zwölftontechnik –Texto de técnica dodecafónica–*, considerando series ordenadas, lo cual no había hecho anteriormente. Ahí habla de transformaciones por cuarta y por quinta –Quarterwandlung y Quintverwandlung, respectivamente–, que implicaba el uso de operadores multiplicativos, así como de sus ‘8 modos de las series dodecafónicas’ (Eimert 1950), que ya suponía un sistema de series diferente a la matriz de la Tabla 1. En este caso se trataba del tema S_0 en sus cuatro direcciones melódicas, junto con las transformaciones por cuarta y quinta con sus respectivas retrogradaciones.

Ya que $P_5(S_0)$ es una variación obtenida a partir de S_0 , que no está contenida en la matriz aditiva de series, y que $P_7(S_0) = I_0(P_5(S_0))$, es posible obtener una segunda matriz de series para trabajar en la composición de Dodecafonismo Serial, lo cual duplica el potencial melódico de esta técnica de composición, pues $48 \times 2 = 96$ series totales (Novoa 2022).

$P_5(S_0) = \{10,0,7,3,2,9,8,1,6,4,11,5\}$ es la serie a partir de la cual se va a generar la *matriz multiplicativa* de series, y será su primer renglón. A continuación se debe invertir $P_5(S_0)$, pero su primer elemento es $\{10\}$ por lo que ese debe ser el eje de la inversión, de manera que a $P_7(S_0)$, que tiene como eje de inversión a 0, y su primer elemento es $\{2\}$, hay que sumarle 8:

$$T_8(I_0(P_5(S_0))) = I_8(P_5(S_0)) = T_8(P_7(S_0)) = \{10,8,1,5,6,11,0,7,2,4,9,3\}$$

Y esta sería la primera columna de la *matriz multiplicativa*, de la misma manera que en la Tabla 1 se puede apreciar que para la *matriz aditiva*, la primera columna no es $P_{11}(S_0) = I_0(S_0)$, porque el eje de la inversión debe ser $\{2\}$, de manera que se trata de

$$T_4(I_0(S_0)) = I_4(S_0) = \{2,4,5,1,6,7,0,11,10,8,9,3\}$$

Sin embargo, es deseable que en la matriz multiplicativa el elemento en la diagonal principal también sea $\{2\}$, como ocurre con la *matriz aditiva*, ya que así se podrían apreciar mejor las variaciones entre ambas matrices. En ese caso, el primer renglón debería ser $T_4(P_5(S_0))$, y la primera columna sería $I_0(P_5(S_0)) = P_7(S_0)$. El resultado para la *matriz multiplicativa* de series se muestra a continuación, en la Tabla 2.

Tabla 2. Matriz multiplicativa de series para $T_4(P_5(S_0)) = \{2,4,11,7,6,1,0,5,10,8,3,9\}$.

	$I_0(P_5(S_0))$	$I_2(P_5(S_0))$	$I_9(P_5(S_0))$	$I_5(P_5(S_0))$	$I_4(P_5(S_0))$	$I_{11}(P_5(S_0))$	$I_{10}(P_5(S_0))$	$I_3(P_5(S_0))$	$I_8(P_5(S_0))$	$I_6(P_5(S_0))$	$I_1(P_5(S_0))$	$I_7(P_5(S_0))$	
$T_4(P_5(S_0))$	2	4	11	7	6	1	0	5	10	8	3	9	$RT_4(P_5(S_0))$
$T_2(P_5(S_0))$	0	2	9	5	4	11	10	3	8	6	1	7	$RT_2(P_5(S_0))$
$T_7(P_5(S_0))$	5	7	2	10	9	4	3	8	1	11	6	0	$RT_7(P_5(S_0))$
$T_{11}(P_5(S_0))$	9	11	6	2	1	8	7	0	5	3	10	4	$RT_{11}(P_5(S_0))$
$T_0(P_5(S_0))$	10	0	7	3	2	9	8	1	6	4	11	5	$RT_0(P_5(S_0))$
$T_5(P_5(S_0))$	3	5	0	8	7	2	1	6	11	9	4	10	$RT_5(P_5(S_0))$
$T_6(P_5(S_0))$	4	6	1	9	8	3	2	7	0	10	5	11	$RT_6(P_5(S_0))$
$T_1(P_5(S_0))$	11	1	8	4	3	10	9	2	7	5	0	6	$RT_1(P_5(S_0))$
$T_8(P_5(S_0))$	6	8	3	11	10	5	4	9	2	0	7	1	$RT_8(P_5(S_0))$
$T_{10}(P_5(S_0))$	8	10	5	1	0	7	6	11	4	2	9	3	$RT_{10}(P_5(S_0))$
$T_3(P_5(S_0))$	1	3	10	6	5	0	11	4	9	7	2	0	$RT_3(P_5(S_0))$
$T_9(P_5(S_0))$	7	9	4	0	11	6	5	10	3	1	8	2	$RT_9(P_5(S_0))$
	$RI_0(P_5(S_0))$	$RI_2(P_5(S_0))$	$RI_9(P_5(S_0))$	$RI_5(P_5(S_0))$	$RI_4(P_5(S_0))$	$RI_{11}(P_5(S_0))$	$RI_{10}(P_5(S_0))$	$RI_3(P_5(S_0))$	$RI_8(P_5(S_0))$	$RI_6(P_5(S_0))$	$RI_1(P_5(S_0))$	$RI_7(P_5(S_0))$	

Derivación de series

Es posible generar una serie dodecafónica a partir de tres, cuatro o seis sonidos que son recuperados de la serie original, aplicando después las operaciones de transposición, inversión y retrogradación para completar la nueva serie, a la cual se le conoce como *serie derivada*. (Babbitt 1961) (Straus 1973) (Perle 1991)

A continuación se muestran los tricordes, tetracordes y hexacordes discretos de la serie original que se utilizó en la Tabla 1.

$$S_0 = \{2,0,11,3,10,9,4,5,6,8,7,1\} = \{2,0,11\} \cup \{3,10,9\} \cup \{4,5,6\} \cup \{8,7,1\} = \{2,0,11,3\} \cup \{10,9,4,5\} \cup \{6,8,7,1\} = \{2,0,11,3,10,9\} \cup \{4,5,6,8,7,1\}$$

Si se toma el primer tricorde, por ejemplo, y se aplican las operaciones mencionadas, se puede obtener una serie derivada, como se muestra a continuación.



En donde: $\{2,0,11\}$ es el tricorde recuperado de S_0 ;

$$\{1,3,4\} = T_3(I_0(2,0,11)) = I_3(2,0,11);$$

$$\{10,9,7\} = T_9(R(I_0(2,0,11)))$$

$$\{5,6,8\} = T_6(R(2,0,11));$$

Existen otras posibilidades que son consecuencia de, o están relacionadas con, la derivación de series, como la *combinatorialidad*, que construye variantes de series a partir de tricordes, tetracordes o hexacordes recuperados de otras series; la *complementación*, que combina subconjuntos de sonidos localizados a ambos lados de algún eje de simetría; la *invarianza*, que se da cuando, al aplicar alguna transformación, la serie derivada comparte algún subconjunto de sonidos con la original, el cual funciona como ‘pivote’ entre las series; y algunas técnicas más, buscando en todos los casos nuevas opciones para el desarrollo musical. (Babbitt 1961) (Straus 1973) (Perle 1991)

Microserialismo

Se conoce como *microserialismo* al trabajo con series ordenadas de menos de 12 sonidos (Seagall 2020). Las técnicas desarrolladas para el serialismo dodecafónico pueden ser utilizadas en estructuras musicales con distinto número de elementos, como escalas de 8, 7, 6, o 5 sonidos, mientras que series de 3 o 4 sonidos –junto con las de 6–, se utilizan más bien en las estrategias de desarrollo para obtener nuevas variantes, como ya se ha mencionado. En el caso de la técnica de derivación, será necesario recurrir al uso de *elisiones*, que se dan cuando dos series, aunque también pueden ser tricordes, tetracordes, o hexacordes, comparten su último y primer elemento respectivamente, de manera que se unen sin la reiteración de ese sonido, con lo que es posible obtener series entre 5 y 11 elementos.

Se analiza el caso para las escalas heptáfonas.

La *escala mayor* es un subconjunto de la *escala cromática*. Por ejemplo, la escala de *Do mayor* es $C_M = \{0,2,4,5,7,9,11\}$, y se pueden obtener las otras once escalas mayores utilizando los operadores de transposición. En general, cualquiera de las escalas heptáfonas utilizadas en la música occidental, dentro del temperamento igual de doce sonidos, será un subconjunto de la escala cromática.

Sea \mathcal{P}_7 el conjunto de todas las permutaciones de una escala heptáfona contenidas en la escala cromática:

$$\mathcal{P}_7 = \{ \{a, b, c, d, e, f, g\} \in \wp(\mathbb{Z}_{12}) \mid a, b, c, d, e, f, g \in \mathbb{Z}_{12} \}.$$

Dada una microserie heptáfona $S_0 \in \mathcal{P}_7$, se define $\mathcal{S}_7 \subset \mathcal{P}_7$ como el conjunto de series obtenidas por medio de las operaciones musicales de cambios en la *dirección melódica* sobre S_0 – que es el movimiento directo–, utilizando las funciones *inversión* (I_s), *retrogradación* (R) y

retrogradación con inversión (RI_s), mencionadas anteriormente, además de todas las transposiciones para cada una de ellas. Los elementos de \mathcal{S}_7 están contenidos en la *matriz aditiva* de series para S_0 .

A continuación se presenta la *matriz aditiva* de series para $S_0 = \{7,2,5,9,4,0,11\}$

Tabla 3. Matriz aditiva de series para $S_0 = \{7,2,5,9,4,0,11\}$.

	$I_2(S_0)$	$I_9(S_0)$	$I_0(S_0)$	$I_4(S_0)$	$I_{11}(S_0)$	$I_7(S_0)$	$I_6(S_0)$	
S_0	7	2	5	9	4	0	11	RS_0
$T_5(S_0)$	0	7	10	2	9	5	4	$RT_5(S_0)$
$T_2(S_0)$	9	4	7	11	6	2	1	$RT_2(S_0)$
$T_{10}(S_0)$	5	0	3	7	2	10	9	$RT_{10}(S_0)$
$T_3(S_0)$	10	5	8	0	7	3	2	$RT_3(S_0)$
$T_7(S_0)$	2	9	0	4	11	7	6	$RT_7(S_0)$
$T_8(S_0)$	3	10	1	5	0	8	7	$RT_8(S_0)$
	$RI_2(S_0)$	$RI_9(S_0)$	$RI_0(S_0)$	$RI_4(S_0)$	$RI_{11}(S_0)$	$RI_7(S_0)$	$RI_6(S_0)$	

También es posible obtener la *matriz multiplicativa*, haciendo uso de P_5 , P_7 y los operadores T_n , aunque al igual que en la matriz de la Tabla 2, se buscará tener el mismo elemento en la diagonal principal que para la matriz de la Tabla 3, o sea $\{7\}$, por lo que se tendría $T_8(P_5(S_0))$ como primer renglón y entonces $I_6(P_5(S_0))$ sería la primera columna, como se puede verificar en la Tabla 4.

Tabla 4. Matriz multiplicativa de series para $T_8(P_5(S_0)) = \{7,6,9,5,4,8,3\}$.

	$I_6(P_5(S_0))$	$I_5(P_5(S_0))$	$I_8(P_5(S_0))$	$I_4(P_5(S_0))$	$I_3(P_5(S_0))$	$I_7(P_5(S_0))$	$I_2(P_5(S_0))$	
$T_8(P_5(S_0))$	7	6	9	5	4	8	3	$RT_8(P_5(S_0))$
$T_9(P_5(S_0))$	8	7	10	6	5	9	4	$RT_9(P_5(S_0))$
$T_6(P_5(S_0))$	5	4	7	3	2	6	1	$RT_6(P_5(S_0))$
$T_{10}(P_5(S_0))$	9	8	11	7	6	10	5	$RT_{10}(P_5(S_0))$
$T_{11}(P_5(S_0))$	10	9	0	8	7	11	6	$RT_{11}(P_5(S_0))$
$T_7(P_5(S_0))$	6	5	8	4	3	7	2	$RT_7(P_5(S_0))$
$P_5(S_0)$	11	10	1	9	8	0	7	$R(P_5(S_0))$
	$RI_6(P_5(S_0))$	$RI_5(P_5(S_0))$	$RI_8(P_5(S_0))$	$RI_4(P_5(S_0))$	$RI_3(P_5(S_0))$	$RI_7(P_5(S_0))$	$RI_2(P_5(S_0))$	

Nótese que en ambas matrices sólo aparecen las series que permiten tener al primer elemento en la diagonal principal, y no se aprecian todas las inversiones y transposiciones disponibles para S_0 , como ocurre en las matrices de 12×12 . En la matriz de la Tabla 3, no aparecen las transposiciones

T_1, T_4, T_6, T_9 y T_{11} sobre S_0 , y en la Tabla 4, no aparecen las transposiciones T_1, T_2, T_3, T_4 y T_5 sobre $P_5(S_0)$.

También funciona la técnica para escalas pentáfonas. Por ejemplo, para la escala Pentatónica de Do menor $\{0,3,5,7,10\}$, se pueden obtener ambas matrices, como se muestra en las Tablas 5 y 6.

Tabla 5. Matriz aditiva de series para $S_0 = \{0,3,5,7,10\}$.

	$I_0(S_0)$	$I_3(S_0)$	$I_5(S_0)$	$I_7(S_0)$	$I_{10}(S_0)$	
S_0	0	3	5	7	10	RS_0
$T_9(S_0)$	9	0	2	4	7	$RT_9(S_0)$
$T_7(S_0)$	7	10	0	2	5	$RT_7(S_0)$
$T_5(S_0)$	5	8	10	0	3	$RT_5(S_0)$
$T_2(S_0)$	2	5	7	9	0	$RT_2(S_0)$
	$RI_0(S_0)$	$RI_3(S_0)$	$RI_5(S_0)$	$RI_7(S_0)$	$RI_{10}(S_0)$	

Tabla 6. Matriz multiplicativa de series para $P_5(S_0) = \{0,3,1,11,2\}$.

	$I_0(P_5(S_0))$	$I_3(P_5(S_0))$	$I_1(P_5(S_0))$	$I_{11}(P_5(S_0))$	$I_2(P_5(S_0))$	
$P_5(S_0)$	0	3	1	11	2	$R(P_5(S_0))$
$T_9(P_5(S_0))$	9	0	10	8	11	$RT_9(P_5(S_0))$
$T_7(P_5(S_0))$	11	2	0	10	1	$RT_7(P_5(S_0))$
$T_5(P_5(S_0))$	1	4	2	0	3	$RT_5(P_5(S_0))$
$T_2(P_5(S_0))$	10	1	11	9	0	$RT_2(P_5(S_0))$
	$RI_0(P_5(S_0))$	$RI_3(P_5(S_0))$	$RI_1(P_5(S_0))$	$RI_{11}(P_5(S_0))$	$RI_2(P_5(S_0))$	

Se podría trabajar con la escala de tonos enteros, con seis sonidos, de manera que, como se ha podido apreciar en las matrices anteriores, el modelo funciona para cualquier escala que sea un subconjunto de la *escala cromática*.

Aplicación del producto vectorial

A continuación se presentará una herramienta matemática que permite obtener variantes para una serie S_0 de siete sonidos, y que puede tener aplicación en el Microserialismo, o en general cuando se trabaje atonalmente con escalas heptáfonas.

En la síntesis FM de timbres electrónicos, un oscilador produce la onda principal mientras que un segundo oscilador produce otra onda, la cual puede ser diferente tanto en frecuencia como en

forma –sinoidal, triangular, diente de sierra o cuadrada–, y el resultado es una tercera forma de onda, por lo que se dice que se usó la segunda para modular a la primera. (Chowning 1973)

De manera análoga al ejemplo anterior, es posible utilizar alguna escala heptáfona para transformar a otra, pero la manera de hacerlo tiene un sustento matemático. En el producto vectorial, a partir de dos vectores se obtiene un tercero, y son muy conocidas las aplicaciones cuando se consideran tres dimensiones, sin embargo, nos interesa realizarlo en siete dimensiones.

Métrica del producto vectorial en siete dimensiones

Como se definió anteriormente, *álgebra con división* es una estructura algebraica en la que se puede dividir entre cualquier elemento distinto de cero, es una generalización de los *campos*, aunque no se exige que la multiplicación sea conmutativa. De acuerdo con el teorema de Hurwitz, existen cuatro álgebras con división, que son: los números reales \mathbb{R} , los números complejos \mathbb{C} , los cuaterniones \mathbb{H} y los octoniones \mathbb{O} (Bhupendra 2018).

Los octoniones forman una álgebra normada no asociativa sobre \mathbb{R} , denotada \mathbb{O} , con una base $\{1, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$ –una base real con 1 escalar y 7 "imaginarios"–, y los elementos e_1, \dots, e_7 forman un espacio vectorial real de dimensión 7. Recordando que el producto vectorial en \mathbb{R}^7 es $u \times v = \text{Im}(uv)$, donde u, v son vectores puramente imaginarios, es decir, sin componente escalar, y el producto utilizado es el producto de octoniones; la parte imaginaria de ese producto da un nuevo vector en \mathbb{R}^7 , que cumple con las propiedades del producto vectorial en 7D.

En \mathbb{R}^7 , se utiliza la métrica euclidiana estándar, definida como $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \sum_{i=1}^7 u_i v_i$, o en notación

de norma y ángulo: $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \theta$. Esta métrica permite definir propiedades como ortogonalidad, longitud y ángulo entre vectores.

Para llegar a la *métrica* con la que se obtiene el producto vectorial en siete dimensiones, se requiere empezar por la tabla de multiplicación de los octoniones; después se restringe a la parte imaginaria ($\mathbb{R}^7 \subset \mathbb{O}$); se define el producto $u \times v = \text{Im}(uv)$; y se obtiene una 3-forma ϕ que fija una métrica g única tal que $g(u \times v, w) = \phi(u, v, w)$.

En esta *métrica*, hay una *matriz* de 7x7 para la primera escala, en tanto que la segunda se muestra como un *vector columna* 7x1, y se realiza el producto vectorial para obtener la transformación 7x1 que se está buscando, la cual representará algún subconjunto de la escala cromática. Finalmente, también se está haciendo una ‘modulación’ en sentido musical.

Se muestra a continuación la métrica para el producto vectorial en siete dimensiones. (McLoughlin 2012).

Tabla 7. Métrica para la obtención del producto vectorial en siete dimensiones.

\times	a₁	a₂	a₃	a₄	a₅	a₆	a₇		
a₁	0	a ₃	- a ₂	a ₅	- a ₄	- a ₇	a ₆	b ₁	c₁
a₂	- a ₃	0	a ₁	a ₆	a ₇	- a ₄	- a ₅	b ₂	c₂
a₃	a ₂	- a ₁	0	a ₇	- a ₆	a ₅	- a ₄	b ₃	c₃
a₄	- a ₅	- a ₆	- a ₇	0	a ₁	a ₂	a ₃	b ₄	c₄
a₅	a ₄	- a ₇	a ₆	- a ₁	0	- a ₃	a ₂	b ₅	c₅
a₆	a ₇	a ₄	- a ₅	- a ₂	a ₃	0	- a ₁	b ₆	c₆
a₇	- a ₆	a ₅	a ₄	- a ₃	- a ₂	a ₁	0	b ₇	c₇

Mapeo por medio del producto vectorial

Un mapeo se refiere a la relación que hay entre dos conjuntos, en donde los elementos del primero de ellos, mediante alguna regla de correspondencia, se transforman en elementos del segundo. En este caso, los conjuntos son las escalas, y el producto vectorial es el responsable de llevar a cabo la transformación.

Si se consideran de inicio únicamente escalas mayores y menores naturales, el producto vectorial entre dos escalas del mismo tipo va a generar una tercera únicamente cuando la tónica de la segunda de ellas se encuentre a 1, 5, 7 u 11 semitonos de la tónica de la primera –curiosamente, los generadores de \mathbb{Z}_{12} están presentes–, y algunas veces podrá funcionar que la segunda escala sea de otro tipo, incluso algún modo relativo, pero por el momento se trabajará con las escalas mencionadas, ya que hay muchas escalas heptáfonas fuera de nuestro sistema musical, además de sus modos relativos. (Novoa 2017)

Como ejemplo, sea $S_0 = \{3,2,5,10,0,7,8\}$ una serie –o *microserie*– derivada de la escala de Do menor, es decir, $S_0 \in C_m$. Se utilizará la escala de A^b para ‘modular’ la escala de C_m .

$$C_m = \{0,2,3,5,7,8,10\} , A^b = \{8,10,0,1,3,5,7\} , C_m \times A^b = \{4,0,2,3,11,5,9\}.$$

Se puede presentar el resultado como una permutación, para apreciar mejor a dónde va a dar cada elemento de la escala original.

Figura 8. Mapeo para los sonidos de C_m a $C_m \times A^b$.

C_m	0	2	3	5	7	8	10
$C_m \times A^b$	4	0	2	3	11	5	9

De manera que la variante obtenida sería $S_{0 \times 8M} = \{2,0,3,9,4,11,5\}$, en donde \times_{8M} representa el uso de una escala mayor a una distancia de ocho semitonos arriba de la tónica de la escala a la que pertenece S_0 , para llevar a cabo el mapeo por medio del uso del producto vectorial.

Retomando la serie de la Tabla 3, $S_0 = \{7,2,5,9,4,0,1\}$, que no provienen de una escala heptáfona tradicional, pues sería como una escala menor melódica con sexta aumentada a partir del sonido D , o sea $\{2,4,5,7,9,0,1\}$, si se buscan las opciones disponibles para ‘modular’ considerando únicamente escalas mayores y menores naturales, se obtendrían cuatro mapeos diferentes. Dos de ellos usando escalas mayores a 5 y 11 semitonos de la tónica D , es decir, G y D^b , y los mapeos serían los siguientes.

Figura 9. Mapeo para los sonidos de $D_{m\ mel}(\#13)$ a $D_{m\ mel}(\#13) \times G$.

$D_{m\ mel}(\#13)$	2	4	5	7	9	0	1
$D_{m\ mel}(\#13) \times G$	7	3	4	0	8	5	2

Figura 10. Mapeo para los sonidos de $D_{m\ mel}(\#13)$ a $D_{m\ mel}(\#13) \times D^b$.

$D_{m\ mel}(\#13)$	2	4	5	7	9	0	1
$D_{m\ mel}(\#13) \times D^b$	7	3	10	6	2	5	8

Las otras dos opciones se obtienen utilizando escalas menores naturales a 10 y 11 semitonos de la tónica D , es decir, C_m y $C_m^\#$, y los mapeos serían los siguientes.

Figura 11. Mapeo para los sonidos de $D_{m\ mel}(\#13)$ a $D_{m\ mel}(\#13) \times C_m$.

$D_{m\ mel}(\#13)$	2	4	5	7	9	0	1
$D_{m\ mel}(\#13) \times C_m$	10	11	3	9	0	6	2

Figura 12. Mapeo para los sonidos de $D_{m\ mel}(\#13)$ a $D_{m\ mel}(\#13) \times C_m^\#$.

$D_{m\ mel}(\#13)$	2	4	5	7	9	0	1
$D_{m\ mel}(\#13) \times C_m^\#$	0	5	8	10	3	4	11

De manera que las variantes para $S_0 = \{7,2,5,9,4,0,1\}$ serían:

$$S_{0 \times 5M} = \{0,7,4,8,3,5,2\}, S_{0 \times 11M} = \{6,7,10,2,3,5,8\},$$

$$S_{0 \times 10m} = \{9,10,3,0,11,6,2\} \text{ y } S_{0 \times 11m} = \{10,0,8,3,5,4,11\}$$

Discusión

Se puede observar cómo las matrices de series aportan variantes al trabajar con la técnica de *serialismo*, y pueden ser aplicadas también en el *microserialismo*. Así mismo, las técnicas de derivación de series ayudan a tener mayor variedad. Es de particular interés para este trabajo el uso exclusivo de series de siete sonidos, ya que en ese caso se podrían considerar las escalas heptáfonas de uso común, así como algunas otras fuera del sistema de la música occidental. Es aquí en donde el producto vectorial en siete dimensiones puede ayudar al desarrollo musical, aportando opciones que no están presentes en las matrices de series.

En el ejemplo para $S_0 = \{7,2,5,9,4,0,1\}$, se puede apreciar que las variantes obtenidas no corresponden con ninguna serie presente en las tablas 3 y 4. De hecho, no corresponden tampoco con alguna de las series que no aparecen en esas tablas, y en cambio, ofrecen variaciones que pueden resultar interesantes para algunas de ellas al momento de componer. Por ejemplo, las series $T_5(S_0)$ y $S_{0 \times 5M}$ comparten los elementos primero, segundo y sexto; $RI_9(S_0)$ y $S_{0 \times 10M}$ permutan los primeros dos elementos y comparten el cuarto y el séptimo; $I_8(P_5(S_0))$ y $S_{0 \times 10m}$ comparten los primeros dos elementos y permutan el cuarto y quinto.

Por supuesto, es posible encontrar opciones con más escalas, como menores melódicas o armónicas, y algunas otras, incluso modos relativos a cualquiera de ellas. Para ese mismo ejemplo, también funcionan las escalas menores melódicas de D , E , $F^\#$ o $G^\#$, cuyas tónicas están a 0, 2, 4 o 6 semitonos respectivamente de la tónica de la escala original, que este caso es D . También se podrían utilizar las escalas menores armónicas de G y $C^\#$, cuyas tónicas están a 5 y 11 semitonos, respectivamente, de la tónica D .

Es importante observar que se mencionan las distancias entre las tónicas para ubicar aquellas escalas que sí van a funcionar para llevar a cabo el producto vectorial, ya que en muchos casos existirá repetición de elementos, por lo que esa combinación de escalas no tendría interés práctico, mientras que en otros, el resultado estará más allá del sistema de escalas definidas en la música, tanto occidental como oriental. Aunque es posible caracterizar todas las escalas heptáfonas dentro de la escala cromática y establecer sistemas de modos relativos (Novoa 2017), la escala que se obtiene no es relevante, no sólo porque se está trabajando atonalmente, sino porque lo importante es el mapeo que se da para cada uno de sus elementos, pues lo que se desea obtener es una variante para la serie original S_0 .

Considerando únicamente las escalas mayor y menor natural, en la tabla 8 se aprecia qué escalas se pueden utilizar para cada una de las tónicas, mayores y menores, dentro de la escala cromática. Los números, como ya se había mencionado, representan los semitonos de distancia que hay entre la tónica de la escala original y las de las escalas que se pueden utilizar para llevar a cabo el producto vectorial.

Tabla 8. Escalas mayores y menores naturales disponibles para realizar el producto vectorial.

Escala original	Escalas Mayores disponibles	Escalas Menores naturales disponibles
C	1,5,7,11	4,10
C _m	8	1,5,7,11
D ^b	1,5,7,11	7
C [#] _m	—	1,5,7,11
D	1,5,7,11	—
D _m	5	1,5,7,11
E ^b	1,5,7,11	1,4
E ^b _m	—	1,5,7,11
E	1,5,7,11	—
E _m	1,7,8,11	1,5,7,11
F	1,5,7,11	5,11
F _m	—	1,5,7,11
F [#] /G ^b	1,5,7,11	—
F [#] _m	2	1,5,7,11
G	1,5,7,11	7,9
G _m	2,8	1,5,7,11
A ^b	1,5,7,11	4,10
G [#] _m	1,3	1,5,7,11
A	1,5,7,11	1,10
A _m	—	1,5,7,11
B ^b	1,5,7,11	—
B ^b _m	1,2,7,11	1,5,7,11
B	1,5,7,11	5,11
B _m	—	1,5,7,11

Finalmente, se planteó el uso de esta herramienta para hacer un mapeo de los elementos de una escala a otra, y a partir de ahí encontrar la serie resultante, sin embargo, podría pensarse en aplicarla directamente sobre la serie original, pero podría ocurrir que al usar el producto vectorial con los elementos en el orden de la serie, no se obtuvieran resultados útiles. Por ejemplo, para la escala a la que pertenece S_0 , $\{2,4,5,7,9,0,1\}$, se habían encontrado cuatro escalas disponibles, dos mayores y dos menores naturales, pero en caso de aplicar el producto directamente a $S_0 = \{7,2,5,9,4,0,1\}$, ninguna de esas escalas funcionaría, y se tendrían que buscar resultados favorables con otro tipo de escalas.

Conclusiones

En la composición de música académica, el desarrollo de variantes de una idea generadora es importante para asegurar coherencia en el discurso musical, incluso en la composición *serial*. Theodor Adorno comentó que la técnica de ‘variación continua’ o ‘variación desarrollante’, – *Entwickelnde Variation*– fue el principio más importante que le enseñó Alban Berg, quien a su vez lo obtuvo de su maestro, Arnold Schönberg. (Adorno 2003)

Trabajar únicamente con las series contenidas en la *matriz aditiva* puede ser limitante, ya que finalmente se obtienen 48 series que resultan ser transposiciones de cuatro direcciones melódicas, y utilizar las series de la *matriz multiplicativa*, lo cual ocurre poco debido a su desconocimiento, aportaría otras 48 opciones diferentes, pero con la misma lógica de construcción, y eso finalmente se detecta, consciente o inconscientemente.

Para obtener más variedad, se utilizan otras técnicas de derivación de series, y es aquí en donde, inspirada en un concepto de la síntesis modular, se ofrece la propuesta de una herramienta matemática con aplicación particular en el *microserialismo*, para la variación de series heptáfonas, las cuales producen una sensación auditiva menos ‘áspera’ para el oído que no está acostumbrado a la estética musical de la *escala cromática*.

El producto vectorial en siete dimensiones va a ofrecer algunas opciones de variación, aunque no todas las escalas heptáfonas van a funcionar siempre para una misma serie original S_0 .

Referencias bibliográficas:

- Adorno, Theodor W. (2003). *Filosofía de la nueva música (Philosophie der neuen Musik)*. Madrid: Akal. (Original: 1949).
- Agustín-Aquino, Octavio A. & du Plessis, Janine & Lluís-Puebla, Emilio & Montiel, Mariana. 2009. *Una introducción a la Teoría de Grupos con aplicaciones en la Teoría Matemática de la Música*, Serie: Textos, Vol. 10. Sociedad Matemática Mexicana.
- Babbitt, Milton. 1961. *Set Structure as a Compositional Determinant*. *Journal of Music Theory*, vol. 5, no. 1, pp. 72–94.
- Berry, Wallace T. 1987. *Structural functions in music*. New York: Dover Publications, Inc.
- Bhupendra C. S. Chauhan, P. S. Bisht and O. P. S. Negi. 2010. *Octonionic Reformulation of Vector Analysis*. arXiv: 1011.3951v1 [physics.gen-ph].
- Chowning, J. M. 1973. *The Synthesis of Complex Audio Spectra by Means of Frequency Modulation*. *Journal of the Audio Engineering Society*, 21(7), 526–534, (1973).
- Covach, John. 2002. *Twelve-Tone Theory*, in *The Cambridge History of Western Music Theory*, ed. Thomas Christensen, (Cambridge University Press), pp. 603-627.
- Domínguez Romero, Manuel. 2004. *Las matemáticas en el serialismo musical*. *Sigma: Revista de Matemáticas (Matematika Aldizkaria)*. **24**, pp. 93-98.
- Eimert, Herbert. 1950. *Lehrbuch der Zwölftontechnik*. Wiesbaden: Breitkopf & Härtel.

- Estrada, Julio y Gil, Jorge. 1984. *Música y Teoría de Grupos Finitos (3 variables booleanas)*. México: Universidad Nacional Autónoma de México.
- Fripertinger, Harald & Lackner, Peter. 2015. *Tone rows and tropes*. Journal of Mathematics and Music, 9(2), pp. 111-172.
- Forte, Allen. 1973. *The structure of atonal music*. Yale University Press.
- Lewin, David. 1980. *On generalized intervals and transformations*. Journal of Music Theory, Vol. 24, No. 2, pp. 243-251.
- Mazzola, Guerino. 2002. *The Topos of Music: Geometric Logic of Concepts, Theory, and Performance*. Birkhäuser.
- McLoughlin, Peter F. 2012. *When Does a Cross Product on R^n Exist?* arXiv: 1212.3515v7 [math.HO].
- Morris, Robert. 2007. *Mathematics and the Twelve-Tone System: Past, Present and Future*. Perspectives of New Music, Vol. 45, No. 2 (Summer, 2007), pp. 76–107.
- Novoa, Raúl. 2017. *Neomodality*. KDP: Publicación independiente.
- Novoa, Raúl. 2022. *Formalización matemática de conceptos musicales*. [Tesis de licenciatura no publicada]. Universidad a Distancia de México.
- Oesch, Hans. 1975. *Pioniere der Zwölftontechnik*. Forum Musicologicum: Basler Studien zur Interpretation der alten Musik 1 (1975), pp. 273-304
- Perle, George. 1991. *Serial Composition and Atonality: An Introduction to the Music of Schoenberg, Berg, and Webern*. 5^a Ed. University of California Press.
- Seagall, Christopher. 2020. *Yuri Kholopov and Twelve-Toneness*. Music and Politics. Volume 14, Issue 2, Summer 2020.
- Straus, Joseph N. 1989. *Introduction to post-tonal theory*. Prentice Hall.